جورج توماس ، راس فینی

حساب دیفرانسیل و انتگرال

وهندسهٔ تحلیلی

جلد اول ۱

ترجمهٔ مهدی بهزاد ، سیامک کاظمی، علی کافی

حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی

جلد اول

۱

جورج توماس ، راس فینی

ترجمهٔ مهدی بهزاد، سیامک کاظمی، علی کافی

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

ریاضی، آمار، و کامپیوتر
۶۷

مرکز نشر دانشگاهی
۵۳۶

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Ross L. Finney
Seventh Edition
Addison-Wesley, 1988

حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسهٔ تحلیلی، ویراست هفتم
جلد اول (۱)
تألیف جورج توماس، راس فینی
ترجمهٔ دکتر مهدی بهزاد، سیامک کاظمی، مهندس علی کافی
نسخه‌پرداز: محمدعلی رزاقی، فرید مصلحی مصلح آبادی
صفحه‌آرا: علی‌اکبر شعبانی

مرکز نشر دانشگاهی
چاپ اول ۱۳۷۰
چاپ نوزدهم ۱۳۸۶
تعداد ۱۵۰۰۰
حروفچینی: عبدی
لیتوگرافی: مردمک
چاپ و صحافی: وزارت فرهنگ و ارشاد اسلامی، سازمان چاپ و انتشارات

فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

توماس، جورج برینتن، ۱۹۱۴ـ Thomas, George Brinton
حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسهٔ تحلیلی / جورج توماس، راس فینی؛ ترجمهٔ مهدی بهزاد، سیامک کاظمی، علی کافی. ـــ تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۳ ـ ۱۳۷۴.
۲ ج. : مصور (بخشی رنگی)، نمودار (بخشی رنگی). ـ (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۵۳۶، ۵۹۱. ریاضی، آمار، و کامپیوتر؛ ۶۷، ۷۸)

ISBN 978-964-01-8040-2 (دوره)
ISBN 978-964-01-0536-8 (ج۱. ق۱)
ISBN 978-964-01-8039-6 (ج۱. ق۲)
ISBN 978-964-01-0591-7 (ج۲)

فهرست‌نویسی براساس اطلاعات فیپا.
عنوان اصلی: Calculus and analytic geometry, 7th ed.
این کتاب توسط مترجمان و ناشران مختلف در سالهای متفاوت نیز منتشر شده است.
کتابنامه.
نمایه.
ج. ۱. ق. ۱ (چاپ نوزدهم: ۱۳۸۶).
۱. حسابان. ۲. هندسه تحلیلی. الف. فینی، راس، .Finney, Ross L ب. بهزاد، مهدی، ۱۳۱۵ ـ ، مترجم. ج. کاظمی، سیامک، ۱۳۳۳ـ ، مترجم. د. کافی، علی، ۱۳۳۳ ـ ، مترجم. ه. مرکز نشر دانشگاهی. و. عنوان.
۵ح۹ت/QA۳۰۳ ۵۱۵/۱۵
۱۳۷۳
کتابخانهٔ ملی ایران ۶۷ـ ۷۳م*

فهرست

پیشگفتار*

در این ویرایش جدید از کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسهٔ تحلیلی کوشیده‌ایم مفیدترین کیفیات و ویژگیهایی که ویرایشهای قبلی از نظر خوانندگان داشته‌اند، محفوظ بماند. با این‌حال، در این ویرایش یکی از جامعترین تجدیدنظرها در تاریخ سی سالهٔ این کتاب هم درصورت و هم در محتوا به عمل آمده‌است. این تجدیدنظرمبتنی است بردهها نقد، گفتگوهای متعدد با خوانندگان ویرایشهای قبلی، نامه‌های حاوی توصیه از دوستان، دانشجویان و مدرسان ازسراسر جهان. هدف کلی ما دراین تجدیدنظر این بوده است که کتاب را خواندنیتر، و مطالبش را برای مبتدیان قابل فهم‌تر سازیم بدون آنکه استانداردها و مطالبی را که خوانندگان مایل‌اند این کتاب داشته باشد، قربانی کنیم.

مخاطبان و پیشنیازها این‌کتاب تمام مطالب لازم را برای یك درس متعارف حساب دیفرانسیل و انتگرال که درسه ترم نیمساله یا چهار ترم سه ماهه به‌دانشجویان سالهای اول و دوم عرضه شود، دربر دارد. پیشنیاز آن، آشنایی با جبر و مثلثات درحد معمولی‌است ولی برای یادآوری، فصل ۱ را با مرور مختصری برمختصات، خطها، تابعها، و نمودارها آغازکرده‌ایم. درفصل ۲ نیز مروری برمثلثات شده است.

ویژگیهای برگرفته از ویرایشهای قبلی

مانند قبل، هدف ما آموزاندن حساب دیفرانسیل و انتگرال و ارائهٔ آن نوع تعلیمی است که خوانندگان برای کاربرد مؤثر این حساب درکارهای دانشگاهی و حرفه‌ای آیندهٔ خود به‌آن نیاز خواهندداشت. برای‌انجام این‌کار، سطح ریاضی‌مطالب، جهتگیری کاربردی آن، تأکیدکتاب برمثالهای حل شده، وکثرت و تنوع تمرینها را محفوظ نگهداشته‌ایم و مانند قبل، ارتباطات بین حساب دیفرانسیل و انتگرال و برخی از روشهای عددی مورد استفاده در درسهای دیگر را نشان داده‌ایم.

سطح ریاضی گرچه شیوهٔ عرضهٔ مطالب در این ویرایش در بسیاری از موارد بسیار ساده‌تر از ویرایشهای قبلی است، ولی میزان دقت تقریباً یکسان است. در این ویرایش می‌کوشیم مطالب را بدون توضیح‌دادن واضحات و درعین‌حال، بدون پاسخ‌دادن به‌پرسشهایی که خوانندگان آمادگی پرسیدن آنها را ندارند، شرح دهیم. مثلا، قضیهٔ ماکسمین را درمورد تابعهای پیوسته روی بازه‌های بسته بیان می‌کنیم و ازآن برای ارائهٔ قضیهٔ مقدار میانگین بهره می‌گیریم ولی قضیهٔ ماکسمین را ثابت نمی‌کنیم و به بررسی ویژگیهایی از دستگاه اعداد حقیقی که قضیه به‌آنها بستگی دارد نمی‌پردازیم. چند اثبات سادهٔ ε-δیی در مورد حدها درفصل ۱ می‌آوریم ولی اثبات قضایای حدی پیچیده‌تر را در پیوستها ذکر می‌کنیم.

کاربردها حساب دیفرانسیل و انتگرال برای حل‌مسائلی درفیزیك و نجوم ابداع شد، وگرچه در سیر پیشرفت خود به‌شاخهٔ ریاضی گسترده و مستقلی تبدیل شده است، اما اکثرکاربردهایش درخارج از ریاضیات هنوز با علوم [تجربی] و مهندسی در ارتباط‌اند. همانند ویرایشهای قبلی، درکتاب حاضرهم‌کاربردها بیشتر درهمین زمینه‌ها هستند. نمونه‌هایی از این‌کاربردها عبارت‌اند از محاسبهٔ مقادیر اکسترمم، مراکزجرم، کار ونیروی هیدرواستاتیکی، محاسبهٔ مدارهای ماهواره‌ها، و توصیف جریان سیال (بخشهای ۵.۳، ۸.۵، ۹.۵، ۱۰.۵، ۴.۱۴، و ۲.۱۹ را ببینید). ولی درسالهای اخیرحساب دیفرانسیل و انتگرال دربسیاری از رشته‌های دیگرهم اهمیت پیدا کرده است. ازجمله در اقتصاد، تجارت، علوم زیستی و حتی مسائل فیزیکی مربوط به‌ورزشها. بنابراین، مثالهای متنوعی هم از این رشته‌ها آورده‌ایم که مثلا چند مورد آن عبارت است از متوسط موجودی روزانه، آهنگ تولد و رشد جمعیت وکارلازم برای نواختن ضربه به یك توپ‌گلف یا یك توپ تنیس. (صفحات ۳۰۵، ۳۱۴، ۳۷۵ را ببینید). هروقت حس کرده‌ایم که می‌توان

بدون تحمیل مطلبی به‌متن ارتباطاتی بین حساب دیفرانسیل وانتگرال و زندگی واقعی برقرار کرد، چنین کاری کرده‌ایم. در این ویرایش، صفحات بیشتری را به‌مراحل مسأله حل کردن در کاربردهایی که با مدلسازی ریاضی مربوط‌اند، اختصاص داده‌ایم، مثلا در اوایل بخش آهنگهای وابسته (صفحات ۱۸۰–۱۸۱)، و در حل مسألهٔ کابل آویزان (صفحات ۵۱۴–۵۱۵).

مثالهای حل‌شده تمرینها درجاهایی می‌آیند که خواننده باید دست به‌کار شود ولی مثالها درجاهایی می‌آیند که کار برعهدهٔ ماست. ما مثالهای مورد علاقهٔ خوانندگان را در این ویرایش حفظ کرده‌ایم و تعدادی مثال تازه هم آورده‌ایم که غالباً مراحل حل را با تفصیل بیشتری از قبل نشان می‌دهند. همچنین به جای برخی از مثالهای مشکل، مثالهای ساده‌تری آورده‌ایم که همان نکات را در بردارند. مثالها مربوط به‌مباحث متنوعی‌هستند ازعایق‌کاری‌خط لولهٔ سراسری آلاسکا تا زهکشی و پرکردن باتلاقها، از برق شهر تا روشی برای ترسیم سهمیها؛ از تحلیل‌شکل طاق‌دروازهٔ غرب درسنت لوئیس تا معماهای‌محاسبات‌کامپیوتری و تغییردما در زیرسطح‌زمین (صفحات ۱۲۱، ۲۶۰، ۲۹۹، ۴۶۴، ۵۱۶، ۶۴۹ و انتهای بخش ۱.۱۶ را ببینید).

مجموعه‌های مسأله‌ها هرمجموعه از مسائل، آمیزه‌ای است از مسأله‌های عادی ریاضی و مسأله‌های مبارزطلب‌تر. در بسیاری از این مجموعه‌ها جهش از مسائل آسان به مسائل پیچیده تدریجیتر از قبل صورت می‌گیرد. تقریباً در هر مجموعه، مسائل کاربردی آمده است و بسیاری از مجموعه‌ها شامل تمرینهایی هستند که با ماشین محاسبه انجام می‌شود (صفحات ۱۱۰–۱۱۲، ۱۷۵–۱۸۰، ۲۶۱–۲۶۳) هر فصل با بخشی‌که شامل مسائل گوناگون است‌پایان می‌پذیرد. این مسأله‌ها به مباحثی که در فصل آمده‌اند، مربوط‌اند و ترتیب ارائه‌آنها همان‌ترتیب ارائهٔ مباحث است. دربسیاری از این بخشهای پایانی، مطالبی [و مسائلی در ارتباط با آنها] آمده است‌که جالب‌اند ولی معمولا کمتر تدریس می‌شوند و ریاضیات مورد بحث در آنها، در راستای مطالب فصل است (صفحات ۳۲۴–۳۲۵ و۵۴۶–۵۵۵).

روشهای عددی بحثهای مربوط به‌ریشه‌یابی، تقریبهای خطی و درجهٔ دوم توابع، و تقریبهای عددی انتگرالها را درکتاب حاضر هم آورده‌ایم. این مباحث در ریاضیات و رشته‌های دیگر اهمیت روزافزونی می‌یابند. همانند ویرایشهای‌قبلی، گاه تمرینهایی آمده که به‌کمک ماشین محاسبه حل‌می‌شوند و گاه نیزدرآخر مجموعه‌های مسائل ارجاعاتی نیز به برنامه‌های میکروکامپیوتری در *The Calculus Toolkit* شده است[1]. ولی مطالعهٔ متن مستلزم داشتن‌تجربهٔ کار باکامپیوتر یاماشین‌حساب‌یا دسترسی‌به‌آنها‌نیست.

ویژگیهای جدید

علاوه برآنکه‌کوشیده‌ایم‌آنچه را که به‌نظر خوانندگان، بهترین ویژگیهای ویرایشهای قبلی‌بوده حفظ‌کنیم،‌کتاب را از ویژگیهای جدیدی برخوردار ساخته‌ایم تا نیازهای فعلی‌کلاسهای درس را برآورد.

مباحث ترسیم ترسیم‌اشکال سه‌بعدی غالباً دشوار است. بنابراین، برای ترسیم صفحه‌ها، استوانه‌ها، و رویه‌های دوبعدی و برای اینکه اشیاء سه‌بعدی چنان رسم شوندکه سه بعدی به‌نظر برسند، رهنمودهای گام به گامی آورده‌ایم. رویه‌های‌مورد نظر در مباحث ترسیم و در تمرینها، رویه‌هایی هستندکه خوانندگان بعداً در این کتاب هنگام مطالعهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال چندمتغیره باآنها سروکارخواهند داشت (انتهای بخشهای ۳.۱۳ و ۱.۱۵ را ببینید).

کیفیت تصویری و هنری بسیاری از تصویرهای قدیمی را دوباره رسم‌کرده‌ایم و تصاویر جدیدی‌هم به‌متن افزوده‌ایم تا فهم استدلالهای ریاضی و تصور خمها، رویه‌ها و اجسامی‌که در مثالها و تمرینها مطرح می‌شوند، آسانترشود. تصاویر این ویرایش از ویرایشهای قبلی بیشتراست و مجموعه‌های مسائل هم ازکیفیت تصویری بهتری برخوردارند.

چشم‌اندازهای فصلها هرفصل با مطلبی تحت عنوان چشم‌انداز آغاز می‌شود که مباحث فصل را با مباحث دیگرکتاب مربوط می‌سازد واهمیت آنهارا‌ازلحاظ نظری وکاربردی‌شرح‌می‌دهد(مثلا ابتدای‌فصلهای ۴ و ۱۶را ببینید.) بیشتربخشهای‌کتاب نیز خود با مقدمهٔ‌کوتاهی‌شروع می‌شوندکه‌زمینه‌را برای‌مباحثی‌که می‌خواهند مطرح‌کنند، فراهم‌می‌سازد. (مثلا صفحات ۳۴۴ و ۵۸۳ را ببینید.)

یادداشتهای تاریخی حساب دیفرانسیل و انتگرال، حاصل‌قرنها تلاش‌آدمی‌است، و ما برای آگاهاندن خواننده از این موضوع، یادداشتهایی در بارهٔ افرادی که در پیشرفت آن سهیم بوده‌اند و دربارهٔ کارهایی‌که آنها انجام داده‌اند، آورده‌ایم (مثلا یادداشت راجع به‌کار ماریاآنیزی درصفحهٔ ۴۹۰ و یادداشت‌راجع به‌سری تیلر درصفحهٔ ۶۲۱ را ببینید).

نمودارها و دستورالعملهایی برای مراجعهٔ سریع در این‌ویرایش نمودارها و دستورالعملهایی آورده‌ایم که درآنها دسته‌ای از

---

۱. نرم افزار *The Calculus Toolkit* شامل بیست و هفت برنامه در زمینهٔ مباحث مختلفی از تابعها گرفته تا میدانهای برداری است. این نرم‌افزار به استاد و دانشجو امکان می‌دهدکه از میکروکامپیوتر به‌عنوان «گچ و تختهٔ الکترونیکی» استفاده‌کنند.

فرمولهای مربوط به‌هم فهرست‌بندی می‌شود، شیوه‌های عمل روشن می‌گردد، و خط‌مشی حل مسأله توصیف می‌شود. (صفحات ۲۸۷، ۳۹۷، ۴۱۱، و ۶۰۸ را ببینید).

تغییرات دیگر

علاوه بر کیفیاتی که در بالا برشمردیم، این ویرایش تفاوتهای مهم دیگری با ویرایشهای قبلی دارد.

تمایز بین مباحث اصلی و اختیاری کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال باید در یك زمان پاسخگوی نیاز درسهای متفاوت زیادی باشد و درنتیجه، مطالب چنین کتابی معمولاً بیش از آن است که هرمدرس خاصی بدان نیاز دارد. برای کمك به‌خواننده که بین مباحث اصلی و حاشیه‌ای تمایز قائل شود، تعدادی از بخشها و زیربخشها را با مربع توخالی (□) مشخص کرده‌ایم. این مربعها نشان‌دهندهٔ بخشهای اختیاری‌اند که مطالعهٔ آنها برای پیگیری بخشهای بعدی ضروری نیست.

تجدیدسازمان مباحث دراین ویرایش، دیفرانسیل در فصل ۲ معرفی می‌شود و تابعهای معکوس ازفصل ۲ به‌جایی که اولین‌بار درفصل ۶ به‌آنها نیاز داریم انتقال یافته‌اند. معرفی قاعدهٔ زنجیری از مقدمهٔ معادلات پارامتری تفکیك شده است. بخشهای طولانی کوتاه شده یا به دوبخش تقسیم گشته‌اند. (مثلاً، مبحث تابعها و نمودارها درفصل ۱ وگرادیانها درفصل ۱۶) و برخی از بخشهای کوتاه درهم ادغام شده‌اند تا طول مبحث مناسب شود (قضیهٔ رول و قضیهٔ مقدار میانگین اکنون در یك مبحث آمده‌اند). برخی از مباحثی که کمتر مطرح‌اند ـ از قبیل قضایای پاپوس، جانشانی $z = \tan(x/2)$، کسینوسهای هادی، و تقسیم سریهای توانی ـ کوتاه شده، جزو مباحث اختیاری آمده، یا به‌مجموعه‌های مسائل انتقال یافته‌اند.

حساب‌دیفرانسیل‌و انتگرال چندمتغیره ترتیب ارائهٔ مطالب حساب دیفرانسیل و انتگرال چندمتغیره تغییر کرده‌و بیشتر آن ازنو نوشته شده‌است. رویه‌های درجهٔ دوم از فصل مربوط به‌بردارها خارج‌شده‌و به‌یك‌فصل جدید(۱۵) منتقل‌شده که‌استوانه‌ها، مختصات استوانه‌ای، مختصات کروی، و مباحث ترسیم‌را دربردارد. ترتیب مطالب فصل ۱۴ که دربارهٔ توابع برداری و حرکت است، تغییر کرده و این‌فصل فشرده‌ترشده تا معرفی خمیدگی، پیچش و دستگاه TNB آسانتر شود. فصل قدیم در زمینهٔ مشتقات جزئی به‌دوفصل جداگانه تقسیم شده‌که یکی دربارهٔ نظریه و دیگری دربارهٔ کاربردهاست. شیوهٔ پرداختن به قضایای انتگرال برداری در فصل ۱۹ کاملاً جدید است. این مبحث با انتگرالهای خمیده خطی، میدانهای برداری، و قضیهٔ گرین درصفحه شروع می‌شود، سپس به‌سراغ انتگرالهای رویه‌ای، قضیهٔ دیورژانس، و قضیهٔ استوکس می‌رود و با میدانهای پایستار وتوابع پتانسیل به‌پایان می‌رسد. ما همچنین ارتباط دنیای واقعی را بااین موضوع، که انگیزهٔ اولیهٔ پیدایش و رشدآن بوده است، بیشتر مورد بحث قرارمی‌دهیم.

کاربردهای جدید دهها کاربرد جدید را درکتاب آورده‌ایم*؛ از جمله، تحلیل حرکت یك کامیون از روی نمودار زمان‌ـمسافت آن، محاسبهٔ آهنگ تغییر شعاع حباب صابون، بحث مقیاس دسیبل برای اندازه‌گیری صدا، وتعیین مشخصات مسیر توپ بیسبال در عبور از دیوار پارك فن‌وی در بوستون (مثلاً صفحات ۱۲۳، ۱۸۰، ۳۷۱ را ببینید).

تجدیدنظر درشیوهٔ بررسی مباحث استاندارد ازمیان بسیاری از مباحثی‌که درشیوهٔ پرداختن به‌آنها تجدیدنظرشده، اینها را نام می‌بریم:

دیفرانسیل (بخش ۴.۲)
قاعدهٔ زنجیری (بخش ۵.۲)
قضیه‌های اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال (بخش ۷.۴)
حجم اجسام دورانی (بخشهای ۳.۵ و ۴.۵)
گشتاور و مرکزجرم (بخشهای ۸.۵ و ۵.۱۸)
معادله‌های پارامتری (بخشهای ۸.۲ و ۹.۸)
دنباله‌ها، ازجمله بخشی دربارهٔ بازگشت و زبان کامپیوتری (بخش ۱.۱۱)
آزمونهای همگرایی (بخشهای ۵.۱۱ و ۹.۱۱)
ژاکوبیها، در دوبخش اختیاری (بخشهای ۳.۱۸ و ۶.۱۸)
انتگرالهای خمیده‌خطی درمیدانهای برداری (بخش۲.۱۹)
مساحت رویه و انتگرالهای رویه‌ای (بخش ۴.۱۹)
میدانهای مستقل ازمسیر و پایستار (بخش ۷.۱۹)

جورج توماس مؤسسهٔ تکنولوژی ماساچوست (M.I.T)

راس فینی مؤسسهٔ تکنولوژی ماساچوست (M.I.T)

* درترجمهٔ این پیشگفتار، برخی از قسمتهای پایانی‌آن‌که برای خوانندگان فارسی‌زبان مفید به‌نظر نرسیده، حذف شده است. درضمن چندجمله راجع به‌کیفیت رنگهای تصاویرکتاب اصلی و نحوهٔ تقسیم‌بندی‌کتاب در دوجلد، ترجمه نشده است.

درامد: حساب دیفرانسیل و انتگرال چیست؟

حساب دیفرانسیل و انتگرال، ریاضیات مربوط به‌حرکت و تغییر است. هرجا حرکت یا رشدی‌هست، هرجا نیروهای متغیری درکار تولیدشتاب‌اند، حساب‌دیفرانسیل و انتگرال‌درست‌همان ریاضیاتی است‌که به‌کار می‌آید. این‌امر درآغاز پیدایش این مبحث صادق بود، و امروز نیز چنین است.

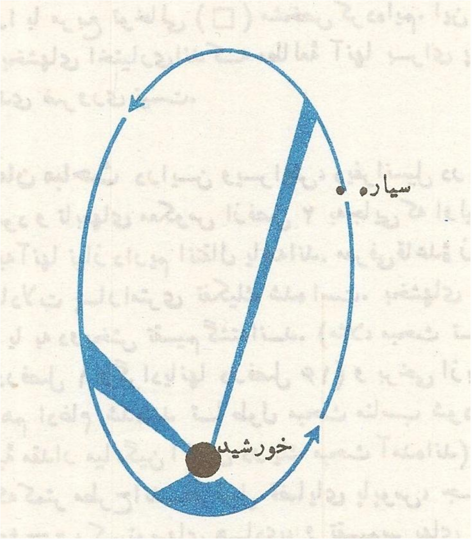
حساب دیفرانسیل و انتگرال در آغاز برای براورده‌کردن نیازهای دانشمندان قرن هفدهم ابداع شد. حساب دیفرانسیل با مسألهٔ محاسبهٔ آهنگهای تغییر سروکار داشت و به دانشمندان امکان می‌داد شیب خمهـا را تعریف‌کنند، سرعت و شتاب اجسام متحرك را محاسبه کنند، زاویهٔ آتشباری توپ را بـرای حصول بیشترین برد به‌دست‌آورند، و زمـانهایی راکـه سیارات نـزدیکترین و دورترین فاصله را از هـم دارند، پیش‌بینی‌کنند. حساب انتگرال به‌مسألهٔ تعیین تابع براساس اطلاع ازآهنگ تغییرش می‌پرداخت و این امکان را فراهم می‌کردکـه مکان آتی یك جسم را بـا توجه به‌مکان فعلی‌اش و نیروهای مؤثر برآن محاسبه‌کنند، مساحت‌نواحی نامنظم واقع درصفحه را بیابند، طول خمها را اندازه بگیرند، و محل مرکزجرم هرجسم دلخواه را به‌دست‌آورند.

پیش از پیشرفتهای ریاضیی که به‌کشف بزرگ‌ آیزك نیوتن (۱۶۴۲–۱۷۲۷) و بـارون‌گوتفرید ویلهلم‌لایب نیتس (۱۶۴۶–۱۷۱۶) انجامید، یوهانس‌کپلر منجم(۱۵۷۱–۱۶۳۰) با بیست‌سال تفکر، ثبت اطلاعات، و انجام محاسبات، سه‌قانون‌حرکت سیارات را که اکنون به‌نام او معروف‌اند،کشف کرد:

۱. هرسیاره درمداری بیضی‌شکل حرکت می‌کندکـه یك‌کانونش درخورشید قراردارد (شکل).

۲. بردار شعاعی(یعنی خط واصل بین خورشید وسیاره)درمدتهای مساوی مساحات مساوی را می‌روبد.

۳. مربع مـدت‌گردش هـرسیاره به‌دور خورشید، متناسب‌است با مکعب فاصلهٔ‌متوسط آن‌سیاره ازخورشید. (اگر T مدت گردش سیاره به‌دور خورشید و D فاصلهٔ‌متوسط باشد، نسبت T^{2}/D^{3}



گردش سیاره‌ای به دور خورشیدش. در اینجا ناحیه‌های سایه‌خورده مساحتهای برابر دارند. طبق قانون دوم‌کپلر، سیاره‌آن قسمت ازمرز این نواحی را کـه روی مدارش قرار دارد درزمـانهای مساوی می‌پیمایـد. بنابراین، سیاره در نـزدیکی خورشید تندتر حـرکت می‌کند تا درقسمتهای دورتر مدار.

برای تمام سیاره‌های منظومهٔ شمسی ثابت است.)

همان‌طورکه در بخش ۴.۱۴ خواهید دید، استنتاج قوانین کپلر از قوانین حرکت نیوتن بـا استفاده ازحساب دیفرانسیل و انتگرال‌کارساده‌ای است.

امـروز حساب دیفرانسیل و انتگرال و تعمیمهـای آن در آنـالیز ریـاضی قلمرو واقعاً گسترده‌ای دارنـد و فیزیکدانـان، ریاضیدانان، و منجمانی‌که اول‌بار این موضوع را ابداع کردند مسلماً شگفت‌زده و شادمان می‌شدند اگرمی‌دیدندکـه این‌موضوع

چه انبوهی ازمسائل را حل می‌کند و چه رشته‌های متنوعی آن را برای مدلسازی ریاضی به‌کارمی‌برند و به‌فهم‌عالم و دنیای پیرامون ما کمك می‌کنند. امیدواریم شما هم دراین شگفت‌زدگی و لذت سهیم باشید.

اقتصاددانان ازحساب دیفرانسیل و انتگرال برای پیش‌بینی گرایشهای کلی اقتصادی استفاده می‌کنند. اقیانوس‌شناسان از این حساب برای فرمولبندی نظریه‌هایی دربارهٔ جریانهای دریایی بهره می‌گیرند و هواشناسان آن را برای توصیف جریان هوای جو به‌کارمی‌گیرند. زیست‌شناسان به‌کمك‌حساب دیفرانسیل و انتگرال میزان جمعیت را پیش‌بینی می‌کنند و تأثیرجانوران شکارگرمانند روباه‌را برجمعیت جانوران‌شکارشونده تشریح‌می‌کنند. پژوهشگران پزشکی با استفاده از این حساب تجهیزات فراصوتی و پرتو x را برای بازبینی اندامهای داخلی بدن طراحی می‌کنند و دانشمندان علوم فضایی‌آن را برای طراحی موشکها وکشف سیاره‌های دوردست به‌کار می‌گیرند. روانشناسان از حساب دیفرانسیل و انتگرال برای درك توهمات بصری استفاده می‌کنند و فیزیکدانان آن را برای طراحی سیستمهای ناوبری لخت و مطالعهٔ ماهیت زمان و عالم به‌کار می‌برند. مهندسان هیدرولیك به‌کمك حساب دیفرانسیل و انتگرال الگوهای مطمئنی برای آب‌بندی شیرها در خطوط لوله می‌یابند و مهندسان برق با به‌کارگیری آن، تجهیزات استروبوسکوپی‌را طراحی ومعادلات‌دیفرانسیلی‌راکه توصیف‌کنندهٔ جریان الکتریکی درکامپیوترها هستند، حل می‌کنند. تولیدکنندگان وسائل ورزشی برای طراحی‌راکتهای تنیس و بیسبال، وتحلیلگران بازار سهام برای پیش‌بینی قیمتها و ارزیابی مخاطرهٔ نرخ بهره، این حساب را به‌کارمی‌گیرند و فیزیولوژیست‌ها با استفاده از آن تکانه‌ها (ایمپالسها)ی الکتریکی را در نورونهای دستگاه عصبی انسان توصیف می‌کنند. شرکتهای دارویی برای‌تعیین میزان‌مناسب موجودی دارو، و تولیدکنندگان الوار برای تعیین مناسبترین‌زمان قطع درختان، به‌کمك این حساب نیازمندند. این فهرست عملا بی‌پایان است زیرا امروز حساب دیفرانسیل و انتگرال تقریباً در هرزمینه و حرفه‌ای به‌طریقی به‌کار می‌رود.

حساب دیفرانسیل و انتگرالی که امروز به‌کار می‌بریم از نظرتاریخی حاصل تلاشهای افراد بسیاری است. ریشه‌های این حساب را تا هندسهٔ کلاسیك یونانی می‌توان ردیابی کرد، ولی ابداع آن عمدتاً کار دانشمندان قرن هفدهم است. از میان این دانشمندان می‌توان رنه‌دکارت (۱۵۹۶–۱۶۵۰)، بوناونتورا کاوالیری[1] (۱۵۹۸–۱۶۴۷)، پیردوفرما (۱۶۰۱–۱۶۶۵)، جان والیس (۱۶۱۶–۱۷۰۳) و جیمز گرگوری (۱۶۳۸–۱۶۷۵) را نام‌برد. این‌کار با ابداعات بزرگ نیوتن و لایب‌نیتس به‌اوج خود رسید. آنان پیشگام بودند.

پیشرفت حساب دیفرانسیل و انتگرال در طی قرن بعد با سرعت زیادی ادامه یافت و هرروز کاربردهای جدیدی برای آن درهندسه، مکانیك، مهندسی، و نجوم پیدا می‌شد. در زمرهٔ مهمترین افرادی که در این زمینه سهم داشتند، چندین نسل از برنولیها مخصوصاً یاکوب برنولی (۱۶۵۴–۱۷۰۵) و برادرش یوهان برنولی (۱۶۶۷–۱۷۴۸) بودند (خانوادهٔ برنولی همان نقشی را در ریاضیات داشتند که خانوادهٔ باخ درموسیقی)؛ همچنین باید از لئونهارت اویلر (۱۷۰۷–۱۷۸۳) —که با قدرت ابداع خارق‌العاده‌اش چهرهٔ اصلی ریاضیات درقرن هجدهم بود— یادکرد و نیز از ژوزف لوئی‌لاگرانژ (۱۷۳۶–۱۸۱۳)، و آدرین ماری‌لژاندر (۱۷۵۲–۱۸۳۳)، و بسیاری دیگر.

تکمیل ساختار منطقی روشهای حساب دیفرانسیل و انتگرال را ریاضیدانان قرن نوزدهم ازجمله برنهارد بولتسانو (۱۷۸۱–۱۸۴۸)، آگوستین لوئی‌کوشی (۱۷۸۹–۱۸۵۷)، و کارل وایرشتراس (۱۸۱۵–۱۸۹۷) برعهده‌گرفتند. همچنین‌قرن‌نوزدهم شاهد دورجدیدی از تعمیمهای‌جالب حساب دیفرانسیل و انتگرال و پیشرفتهای بزرگ ریاضیات در ورای این‌حساب بود. برای کسب اطلاعاتی درمورد این پیشرفتها می‌توانید‌کتاب مهم موریس کلاین تحت‌عنوان اندیشهٔ ریاضی از دوران باستان تا عصر جدید[2] را مطالعه‌کنید.

جان‌فون نویمان (۱۹۰۳–۱۹۵۷) یکی از ریاضیدانان بزرگ قرن بیستم نوشت «حساب دیفرانسیل و انتگرال نخستین دستاورد ریاضیات نوین است و درك اهمیت آن کارآسانی نیست. به‌عقیدهٔ من، این حساب روشنتر ازهرمبحث دیگری مرحلهٔ آغازی ریاضیات نوین را توصیف می‌کند؛ و نظام آنالیز ریاضی، که توسیع‌منطقی آن است، هنوز بزرگترین پیشرفت فنی در تفکر دقیق به‌شمار می‌آید.»

---

1. Bonaventura Cavalieri

2. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (New York: Oxford University Press, 1972).

۱

آهنگ تغییر تابع

چشم‌انداز

دراین فصل به‌اولین دیدگاه خود در بارهٔ نقش حساب دیفرانسیل وانتگرال درتوصیف سرعت تغییر شیئها می‌رسیم. نمودار انواع توابعی را که درمطالعات علمی مطرح می‌شوند — ازجمله نمودار خطها، تابعهای درجهٔ دوم، ریشه‌های دوم، تابعهای عکس، تابعهای اصلی مثلثاتی ــ رسم می‌کنیم. تابع قدرمطلق و نحوهٔ کاربرد آن درتعریف بازه‌ها را بررسی، و تابع بزرگترین عدد صحیح را به‌عنوان مثالی از یك تابع پله‌ای معرفی می‌کنیم. همچنین شیب خطها را تعریف و محاسبه کرده نشان می‌دهیم که فرما چگونه از شیب خط برای تعریف شیب خم استفاده کرد (امروز هم روش او را به‌کار می‌بریم). تعریف‌فرما به‌بررسی ریاضیات مربوط به‌حد، و به‌یك فرایندکلی برای اشتقاق توابعی که آهنگهای تغییر را اندازه می‌گیرند، می‌انجامد. تابعهای مشتق‌شده، که مشتق نامیده می‌شوند، تابعهای بنیادی حساب دیفرانسیل هستند و آنها را به‌تفصیل در فصلهای ۲ــ۴ مطالعه خواهیم کرد. همچنین، نظری به‌سرعت وسایر نمونه‌های آهنگ تغییر می‌افکنیم و قضیه‌ای عرضه می‌کنیم که به‌کمك آن می‌توان حد را به سرعت و باکمترین زحمت محاسبه کرد. سپس می‌بینیم مفهوم حد، که دراصل آن را برای تعریف مشتق معرفی می‌کنیم، ابزار بیانی لازم را برای توصیف ردهٔ خاصی از توابع موسوم به‌تابعهای پیوسته دراختیار ما می‌گذارد. این فصل را با توصیفی از ویژگیهای تابعهای پیوسته که دلیل اهمیت این تابعها درمطالعات علمی هستند، به‌پایان می‌آوریم. نقطهٔ عزیمت ما برای سیاحت درتمام این مباحث، صفحهٔ مختصات فرما و دکارت است.

۱.۱ مختصات برای صفحه

هندسهٔ تحلیلی

امروز معمولاً هندسه را جزء ریاضیات کاربردی نمی‌دانیم ولی ازنظر یونانیان اسکندرانی که اولین‌بار این موضوع را عرضه کردند، هندسه ابزاری بود برای مطالعهٔ دنیای **واقعی. برخلاف** آنان، ریاضیدانان هندی و مسلمان‌که مقدمات‌جبر را پدیدآوردند اثباتها و استنتاجهایشان را بدون اندیشیدن به‌تعابیر فیزیکی انجام می‌دادند. برای اینان قابل قبول بودکه صفر به‌عنوان عددی در حساب به‌کار رود حال‌آنکه ازنظر یونانیان، چون صفر نشان‌دهندهٔ هیچ‌کمیت فیزیکی نبود، صرفاً یك علامت مکان نگهدار به‌حساب می‌آمدکه برای نشان دادن نبودِ یك عدد به‌کار می‌رفت. هندسه و جبر تا همین چند قرن پیش تا حد زیادی به‌طور جداگانه تکامل می‌یافتند.

درقرن هفدهم، فرما و دکارت پیوندی بین جبر و هندسه برقرارکردندکه چهرهٔ ریاضیات را کلاً دگرگون‌کرد. این پیوند که ثمره‌اش را امروز هندسهٔ تحلیلی می‌خوانیم، وسیله‌ای را که دانشمندان قرن هفدهم برای‌کمّی‌کردن موضوعات مورد بحث خود بدان نیاز داشتند، دراختیار آنها گذاشت، وپیشرفتهای شگفت‌آور ریاضیات، فیزیك، نجوم، و زیست‌شناسی را پی‌ریزی کرد.

مختصات دکارتی

بحث هندسهٔ تحلیلی با انتساب مختصات عددی به همهٔ نقاط واقع در یك‌صفحه آغاز می‌شود. این مختصات که **به‌یاد دکارت مختصات**

دکارتی نامیده می‌شوند، این امکان را فراهم می‌آورند که معادله‌های جبری دومتغیره را به‌صورت خم و خط نمایش دهیم. همچنین با استفاده از آنها می‌توانیم زاویه‌ها و فاصله‌ها را حساب کنیم و برای توصیف مسیرهای حرکت اشیاء، معادله‌های مختصاتی بنویسیم. چون بیشتر نظریهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال را می‌توان به‌صورت هندسی نمایش داد، و چون کاربردهای حساب دیفرانسیل و انتگرال عمدتاً به‌حرکت و تغییر مربوط است، صفحهٔ مختصات هندسهٔ تحلیلی جایگاه طبیعی برای آموختن این حساب و کاربردهای آن است.

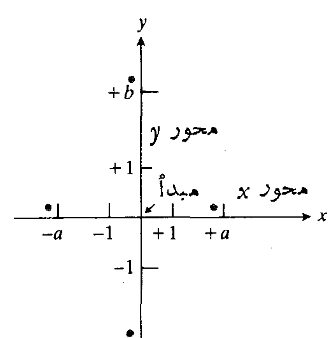
برای انتساب مختصات به‌نقاط واقع درصفحه، دوخطِ اعداد درنظر می‌گیریم که در نقاط صفر خود، یکدیگر را به‌زاویهٔ قائمه قطع کنند. فرض می‌کنیم که هریك از دوخط، اعداد حقیقی را نشان می‌دهد یعنی اعدادی را که به‌صورت اعشاری قابل نمایش‌اند. شکل ۱.۱، شیوهٔ معمولی ترسیم این خطها را نشان می‌دهد؛ یکی از دوخط، قائم است و دیگری، افقی است. خط افقی را **محور** x و خط قائم را **محور** y می‌خوانند. نقطهٔ تقاطع دوخط، **مبدأ** است.

روی محور x، عدد مثبت a به فاصلهٔ a واحد در سمت راست مبدأ قرار دارد و عدد منفی $-a$ به‌فاصلهٔ a واحد درسمت چپ مبدأ واقع است. روی محور y، عدد مثبت b به‌فاصلهٔ b واحد بالای مبدأ و عدد منفی $-b$ به‌فاصلهٔ b واحد پایین مبدأ قراردارد.

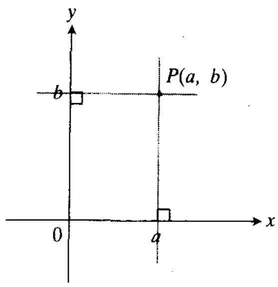
حال که محورها را در دست داریم، به‌هر نقطهٔ P درصفحه، یك جفت (a, b) از اعداد حقیقی را نسبت می‌دهیم. عدد a، عدد واقع درپای عمودی است که از P برمحور x رسم می‌شود. عدد b، عدد واقع درپای عمود از P برمحور y است. شکل ۲.۱ شیوهٔ کار را نشان می‌دهد. نماد (a, b) خوانده می‌شود «جفت اِی بی».

عدد a ازمحور x، **مختص** x نقطهٔ P است. عدد b ازمحور y، **مختص** y نقطهٔ P است. جفت (a, b)، **جفت مختصات** نقطهٔ P است که یك **جفت مرتب** می‌باشد؛ یعنی مختص x، عنصر **اول** است ومختص y، عنصر دوم. برای اینکه نشان دهیم P دارای جفت مختصات (a, b) است، گاهی P و (a, b) را همراه هم می‌نویسیم: $P(a, b)$.

می‌توان شیوه‌ای را که به‌هر نقطهٔ صفحه، یك جفت مرتب از



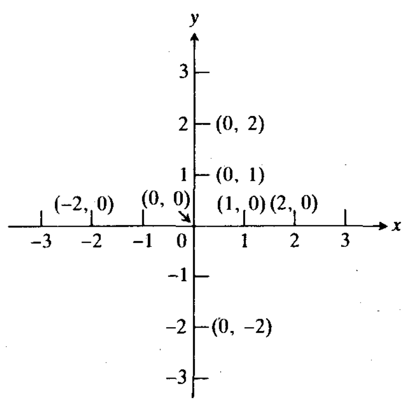
۱.۱ درمختصات دکارتی، درجه‌بندی هریك ازمحورها نسبت به‌مبدأ متقارن است.



۲.۱ جفت (a, b) بـه نقطه‌ای نسبت داده می‌شود که درآنجا، عمود برمحور x در a، عمود برمحور y در b را قطع می‌کنند.

اعداد حقیقی را نسبت می‌دهد معکوس کرد تا به‌هر جفت مرتب از اعداد حقیقی، نقطه‌ای در صفحه نسبت داده شود. نقطه‌ای که به‌جفت (a, b) منسوب می‌شود، محل تقاطع عمود برمحور x در a با عمود بر محور y در b است. بنابراین، انتساب مختصات، تناظر یك به یکی بین نقاط صفحه و مجموعهٔ همهٔ جفتهای مرتب اعداد حقیقی است. می‌توان گفت که هر نقطه، یك جفت دارد و هرجفت، یك نقطه.

پس، نقاط روی محورهای مختصات دونوع نشانهٔ عددی دارند: اعداد منفردی ازمحورها وجفتهایی از اعداد ازصفحه. این دو نوع مشخصهٔ عددی چگونه باهم تطبیق می‌کنند؟ به‌شکل ۳.۱ نگاه کنید. توجه کنید که هر نقطه روی محور x، مختص yاش صفر است وهر نقطهٔ روی محور y، مختص xاش صفر است. مختصات مبدأ عبارت‌اند از $(0, 0)$.



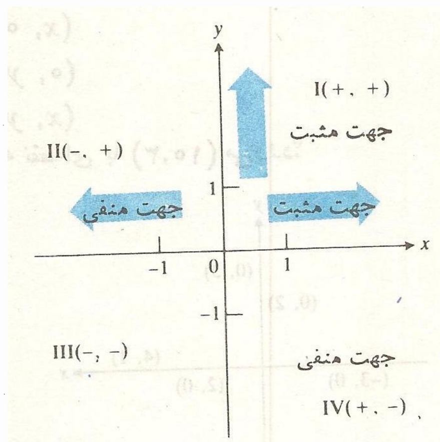
۳.۱ حال نقاط روی محورها به دوطریق نشانه‌گذاری می‌شوند.

جهت، و ربع صفحه

حرکت برروی محور x ازچپ به‌راست، حرکت **درجهت مثبت** x نامیده می‌شود. حرکت از راست به‌چپ، حرکت **درجهت منفی** x است. برروی محور y، جهت مثبت به‌سمت بالا و جهت منفی به‌سمت پایین است.

مبدأ، محور x را بـه دوقسمت تقسیم می‌کند: **قسمت مثبت محور x** درسمت راست مبدأ و **قسمت منفی محور x** درسمت چپ مبدأ. بـه همین نحو، مبدأ محور y را به‌**قسمت مثبت محور y** و **قسمت منفی محور y** تقسیم می‌کند.

محورها صفحه را به‌چهار ناحیه موسوم به‌چهار **ربع** تقسیم می‌کنندکـه ربعهای اول و دوم وسوم و چهارم نامیده می‌شوند و درشکل ۴.۱ با اعداد I، II، III، IV نشانه‌گذاری شده‌اند.



۴.۱ جهت روی محورهـا، x و y درجهت مثبت افزایش، و درجهت منفی کاهش می‌یابند. ربعها با اعداد رومی نشان داده شده‌اند.

چندکلمه دربارهٔ مقیاس

وقتی داده‌هـا را در صفحهٔ مختصات مشخص می‌کنیم یـا نمودار فرمولهـایی را رسم می‌کنیم کـه متغیرهـای آنها واحدهـای اندازه‌گیری متفاوتی دارند، واحدهایی کـه روی محورهـای مختصات نشان داده می‌شوند ممکن است تعبیرهای بسیار متفاوتی داشته بـاشند. اگـر اندازهٔ بدهی ملی در زمانهای مختلف را در دستگاه مختصات نشان دهیم، محور x ممکن است زمان را برحسب ماه نشان‌دهد ومحور y ممکن است بدهی‌را برحسب‌میلیارد ریال مشخص سازد. اگر فشار بخار را به‌صورت تابعی از دمای دیگ بخار نمایش دهیم، ممکن است محور x نشان‌دهندهٔ درجه برحسب فارنهایت بـاشد ومحور y، نشان‌دهندهٔ پوند در اینچ مربع. در این‌گونـه موارد، هیچ دلیلی ندارد کـه وقتی دومحور را رسم می‌کنیم، مقیاس یکسانی را به‌کار بریم. نیازی نیست‌که دوعدد ۱ روی دو محور، به‌فاصلهٔ یکسانی از مبدأ (برحسب میلیمتر یا واحد دیگری) قرار داشته‌باشند.

بـا این همه، وقتی نمودار تـوابعی را رسم می‌کنیم کـه متغیرهای آنها نشان‌دهندهٔ اندازهٔ‌کمیات فیزیکی نیستند یـا وقتی شکلهایی درصفحهٔ مختصات می‌کشیم تـا دربارهٔ جنبه‌های هندسی و مثلثاتی آنها آگاهی کسب‌کنیم، فرض می‌کنیم‌که مقیاس برروی دومحور، یکی است. دراین‌صورت، یك واحد فاصله دربالا وپایین صفحه بایك واحدفاصله‌درچپ و راست، یکسان‌است؛ همچنانکه در نقشه‌های مساحی یا گرافیکی، پاره خطهایی که باید طول یکسانی را نشان دهند، **همطول** رسم می‌شوند.

مسأله‌ها

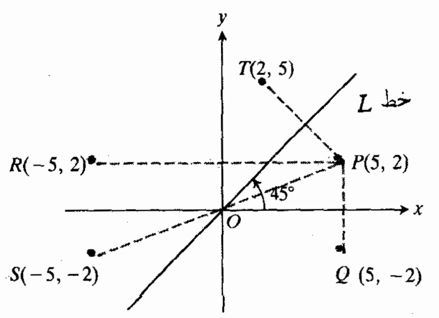
شکل ۵.۱ چهارنقطه را نشان می‌دهدکه ارتباطی با نقطهٔ P(۵, ۲) دارند:

الف) نقطهٔ Q به‌طوری‌که PQ عمود برمحور x است و محور x آن را نصف می‌کند. مختصات Q را به‌دست آورید. (P و Q نسبت به‌محور x متقارن هستند.)

ب) نقطهٔ R به‌طوری‌که PR عمود برمحور y است و محور y آن را نصف می‌کند. مختصات R را به‌دست آورید. (P و R نسبت به‌محور y متقارن هستند).

پ) نقطهٔ S به‌طوری که PS را مبدأ نصف می‌کند. مختصات S را به‌دست آورید. (P و S نسبت به‌مبدأ متقارن هستند.)

ت) نقطهٔ T به‌طوری‌که خط L که ازمبدأ می‌گذرد و با محور x زاویـهٔ ۴۵° می‌سازد، بـر PT عمود است و آن را نصف می‌کند. مختصات T را با این فرض‌که واحدها روی دومحور مساوی‌اند، به‌دست‌آورید. (P و T نسبت به L متقارن هستند.)



۵.۱ تقارن نسبت به‌محور x، محور y، مبدأ، وخط L با زاویهٔ ۴۵° نسبت به‌مبدأ.

مختصات Q، R، S، و T را برای نقاط $P(a, b)$ی مفروض در مسأله‌های ۱-۱۲ بیابید.

۱. (۱, −۲)

۲. (۲, −۱)

۳. (−۲, ۲)

۴. (−۲, ۱)

۵. (۰, ۱)

۶. (۱, ۰)

۷. (−۲, ۰)

۸. (۰, −۳)

۹. (−۱, −۳)

۱۰. $(\sqrt{۲}, -\sqrt{۲})$

۱۱. $(-\pi, -\pi)$

۱۲. (−۱٫۵, ۲٫۳)

۱۳. اگر $P=P(x, y)$، آنگاه مختصات نقطهٔ Q در قسمت (الف) بالا عبارت‌اند از $(x, -y)$، مختصات R، S، و T را برحسب x و y به‌دست آورید.

درمسأله‌های ۱۴–۲۰، فرض کنید که واحد طول روی دومحور یکی است.

۱۴. خطی رسم می‌شود که از نقاط (۰, ۰) و (۱, ۱) می‌گذرد. این خط چه زاویهٔ حاده‌ای با قسمت مثبت محور x می‌سازد؟

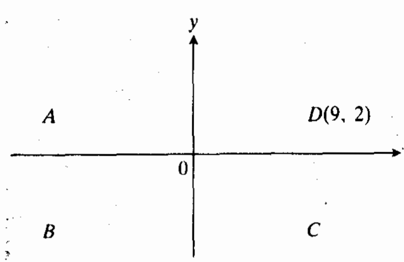
۱۵. سه متوازی‌الاضلاع وجود دارد که سه رأس آنها در (۱, −۱)، (۲, ۰)، و (۲, ۳) است. آنها را رسم کنید و جفتهای مختصات رأس چهارم را بیابید.

۱۶. اضلاع مستطیلی موازی محورها هستند و دو رأس آن در (۲, −۳) و (−۷, −۴) واقع‌اند.

الف) مختصات دو رأس دیگر را بیابید.

ب) مساحت مستطیل را بیابید.

۱۷. اضلاع مستطیل شکل ۶.۱ موازی محورها هستند. طول مستطیل، سه برابر عرض آن است. محیط آن، برابر ۵۶ واحد است. مختصات رأسهای A، B، و C را بیابید.



۶.۱ مستطیل مربوط به‌مسألهٔ ۱۷.

۱۸. دایره‌ای در ربع II مماس بر هردومحور است. این دایره برمحور y در (۰, ۳) مماس است.

الف) در چه نقطه‌ای بر محور x مماس است؟ با ترسیم نشان دهید.

ب) مختصات مرکز دایره را بیابید.

۱۹. خطی که ازنقاط (۱, ۱) و (۲, ۰) می‌گذرد، محور y را درنقطهٔ $(۰, b)$ قطع می‌کند. با استفاده از تشابه مثلثها، b را بیابید.

۲۰. یک دوران °۹۰ حول مبدأ و در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت، همان‌طور که در شکل ۷.۱ نشان داده شده، (۲, ۰) را به (۰, ۲) و (۰, ۳) را به (−۳, ۰) می‌برد. این دوران هریک ازنقاط زیر را به‌کجا می‌برد؟

الف) (۴, ۱)

ب) (−۲, −۳)

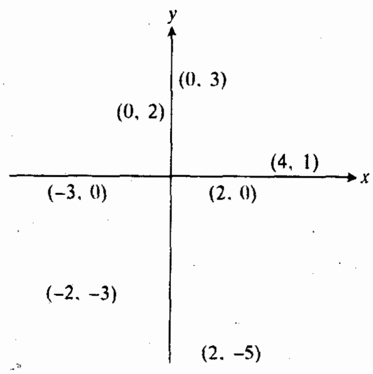
پ) (۲, −۵)

ت) $(x, ۰)$

ث) $(۰, y)$

ج) (x, y)

چ) چه نقطه‌ای به (۱۰,۳) می‌رود؟



۷.۱ نقاط با یک دوران °۹۰ حول مبدأ در خلاف جهت ساعت به‌مواضع جدیدی منتقل می‌شوند (مسألهٔ ۲۰).

۲.۱ شیب خط

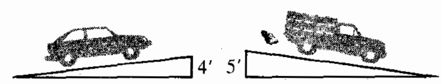
اگر سیر قیمت مواد خوراکی یا فولاد یا کامپیوتر را دنبال کنیم، می‌توانیم با مشخص‌کردن نقاطی روی کاغذ نمودار وگذراندن یک خم تقریبی ازآنها، تغییرات قیمتها را نظاره‌کنیم. این خم را می‌توان روز به‌روز و به‌محض ظهور قیمتهای جدید ادامه داد. چنین خمی بعداً به‌چه‌کاری می‌آید؟ از روی آن می‌توانیم ببینیم که درهر تاریخی، قیمت چه بوده است. با توجه به‌شیب خم (که معنی دقیقش بعداً خواهد آمد) می‌توانیم آهنگ افت وخیز قیمتها را مشاهده‌کنیم. اگر داده‌های دیگری را روی همین کاغذ مشخص کنیم، شاید بتوانیم ارتباط‌آن داده‌ها را با افت وخیز قیمتها ببینیم. به‌علاوه، این خم الگوهایی را نمایان می‌سازد که به‌کمک آنها می‌توانیم آینده را دقیقتر ازکسی که نمودار داده‌ها را رسم نمی‌کند، پیش‌بینی کنیم.

یکی از دلایل متعددی که باعث شده حساب دیفرانسیل و انتگرال درطی سالها تا این حد مفید وکارساز به‌شمار آید، این است‌که این حساب، ریاضیات مناسب برای برقرار ساختن ارتباط بین آهنگهای‌تغییر و شیب خمهای هموار است. تشریح این رابطه،

یکی از هدفهای این فصل است. طرح اصلی این است که ابتدا منظورمان را از شیب یك خط تعریف کنیم وسپس شیب یك خم در هر نقطهٔ خم را به عنوان حد شیب خطهای قاطعی که از آن نقطه می گذرند، تعریف نماییم. اینکه این کار دقیقاً چگونه انجام می‌شود، درطول فصل روشن خواهد شد. گام نخست ما، یافتن راهی عملی برای محاسبهٔ شیب خطهاست.

مهندسان راه و ساختمان برای محاسبهٔ شیب بستر جاده، اختلاف ارتفاع مسیر جاده را برمسافت متناظر در امتداد سطح افقی تقسیم می کنند وهمان‌طورکه درشکل ۸.۱ دیده می‌شودحاصل را معمولاً بصورت درصدی می نویسند. درطول ساحل دریا، شیب مسیر خط آهن معمولاً کمتر از ۲٪ است و درنواحی کوهستانی ممکن است به ۴٪ برسد. شیب بزرگراهها معمولاً کمتر از ۵٪ است.

درهندسهٔ تحلیلی، شیب را به همین روش محاسبه می کنیم، ولی معمولاً آن را بصورت درصدی نمی‌نویسیم.

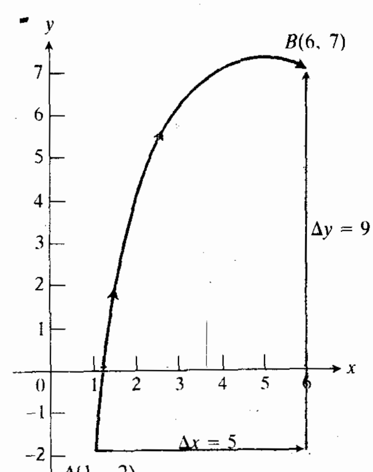


۸.۱ نمونه‌هایی از شیب بزرگراهها.

نمو

وقتی ذره‌ای از مکانی درصفحه به مکان دیگری حرکت می‌کند، تغییرات خالص مختصات آن با تفریق مختصات نقطهٔ آغاز از مختصات نقطهٔ پایان محاسبه می‌شود.

مثال ۱ شکل ۹.۱ مسیر ذره‌ای را نشان می‌دهد که از $A(1, -2)$ به $B(6, 7)$ حرکت می کند. تغییر خالص مختص x برابر است با $\Delta x = 6-1=5$ واحد. مختص y از $y=-2$ تا $y=7$ افزایش پیدا می کند و تغییر خالص آن برابر است با $\Delta y = 7-(-2)=9$ واحد. ■



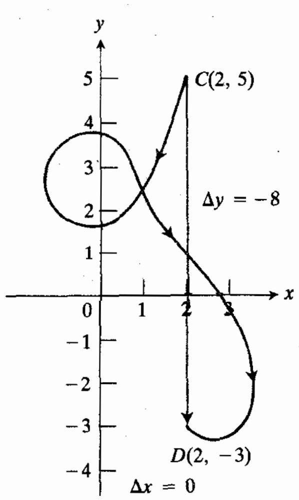
۹.۱ درحرکت ذره از A به B، $\Delta x = 6-1=5$ و $\Delta y = 7-(-2)=9$.

علامتهای Δx و Δy درمثال ۱، به‌ترتیب، «دلتا اکس» و «دلتا وای» خوانده می‌شوند. این علائم نشان‌دهندهٔ تغییرات خالص یا **نموهای** متغیرهای x و y اند. حرف Δ یکی ازحروف بزرگ **الفبای یونانی است که معادل d انگلیسی است و این حرف** با توجه به کلمهٔ difference [تفاضل] انتخاب شده است. هیچ یك از علامتهای Δx و Δy نشان‌دهندهٔ عمل ضرب نیست؛ Δx به‌معنی دلتا ضربدر x و Δy به‌معنی دلتا ضربدر y نیست.

وقتی ذره‌ای از (x_1, y_1) به (x_2, y_2) حرکت می کند، نموها برابرند با

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad \text{و} \quad \Delta y = y_2 - y_1 . \qquad (1)$$

مثال ۲ درشکل ۱۰.۱، تغییرات خالص مختصات در حرکت از $C(2, 5)$ به $D(2, -3)$ درامتداد هریك از دومسیر برابرند با $\Delta x = 2-2=0$ و $\Delta y = -3-5=-8$. تغییرخالص x، صفر است و y به‌اندازهٔ ۸ واحدکاهش می‌یابد. توجه کنید که مقادیر Δx و Δy به‌مسیر انتخاب شده بستگی ندارند.

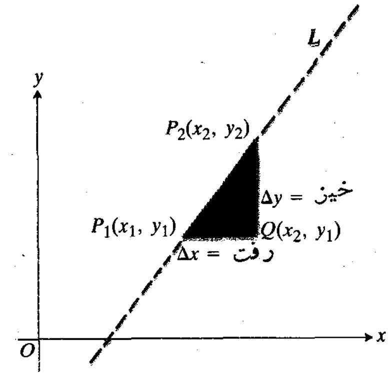


۱۰.۱ درحرکت از C به D، $\Delta x = 0$ و $\Delta y = -8$. ■

شیب خطهای غیرقائم

همهٔ خطها به‌جز خطهای قائم، شیب دارند. شیب را از روی تغییرات مختصات حساب می کنیم. وقتی که ببینیم این کار چگونه انجام می‌شود، خواهیم دیدکه چرا خطوط قائم شیب ندارند.

ابتدافرض کنید L یك‌خط غیرقائم درصفحه‌باشد. نیز فرض کنید $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ دونقطه روی L باشند. شکل ۱۱.۱ را ببینید. ما $\Delta y = y_2 - y_1$ را **خیز** از P_1 تا P_2 و $\Delta x = x_2 - x_1$ را **رفت** از P_1 تا P_2 می‌نامیم. چون L قائم



۱۱۰۱ شیب خط این است

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\text{خیز}}{\text{رفت}}.$$

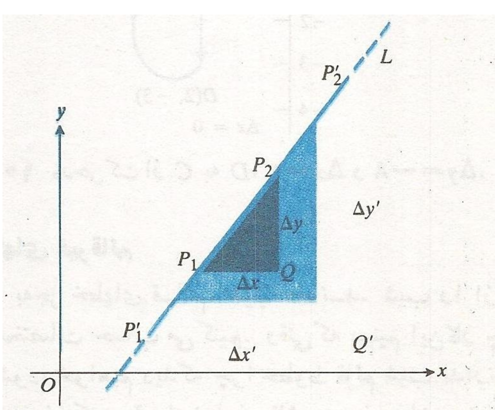
نیست، $\Delta x \neq 0$ و می‌توانیم **شیب** L را بـه‌صورت $\Delta y/\Delta x$ تعریف کنیم، یعنی مقدار خیز در واحد رفت. مرسوم است که شیب را با حرف m نشان می‌دهند.

$$\text{شیب}:\ m=\frac{\text{خیز}}{\text{رفت}}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}. \qquad (۲)$$

فرض کنید درمحاسبهٔ شیب درمعادلهٔ (۲)، به‌جای نقاط $P_۱$ و $P_۲$، زوج دیگری از نقاط، مثلا $P'_۱$ و $P'_۲$ را روی L در نظـر بگیریم. دراین صورت، خواهیم داشت

$$m'=\frac{y'_۲-y'_۱}{x'_۲-x'_۱}=\frac{\Delta y'}{\Delta x'}. \qquad (۳)$$

آیا همان مقدار قبلی را برای شیب به‌دست می‌آوریم؟ به عبارت دیگر، آیـا $m'=m$؟ همان‌طور که درشکل ۱۲۰۱ می‌توان دید، پاسخ مثبت است. اعداد m و m' برابرند زیرا نسبتهای اضلاع



۱۲۰۱ سه مثلث متشابه‌انـد. از اینجـا نتیجه می‌شود که $\Delta y/\Delta x=\Delta y'/\Delta x'$ زیرا نسبتهای اضلاع متناظر از مثلثهای متشابه، باهم‌برابرند.

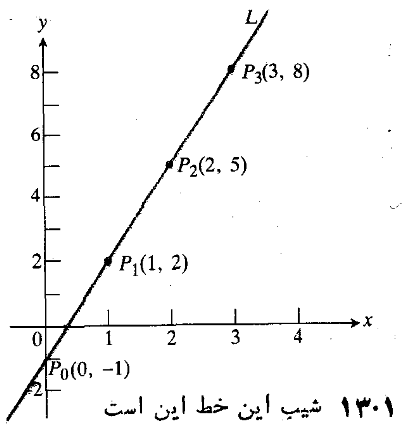
متناظر از مثلثهای متشابه‌اند

$$m'=\frac{\Delta y'}{\Delta x'}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=m. \qquad (۴)$$

شیب یك خط تنها به سرعت بالارفتن یـا پایین‌آمدن خط بستگی دارد و نه به‌نقاطی که برای محاسبهٔ شیب به‌کار می‌بریم.

خطی‌که با افزایش x به‌سمت بالا امتداد می‌یابد، مانند خط شکل ۱۳۰۱، دارای شیب مثبت‌است. خطی‌که با افزایش x به‌سمت پایین امتداد می‌یابد، مـانند خط شکل ۱۴۰۱، دارای شیب منفی است. شیب خط افقی صفر است. همهٔ نقاط روی این خط دارای مختص y واحدی هستند، بنابراین $\Delta y=0$.

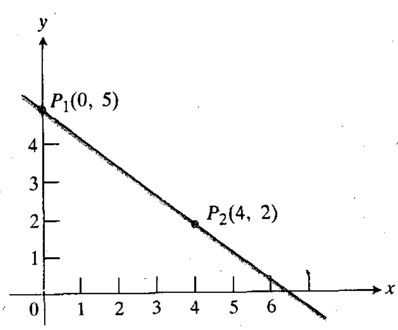
فرمول $m=\Delta y/\Delta x$ را درمورد خطهای قـائم نمی‌توان



۱۳۰۱ شیب این خط این است

$$m=\frac{۵-۲}{۲-۱}=۳.$$

این بدان معنی است که برای هرتغییرمکان روی خط داریم $\Delta y=۳\Delta x$ (مختصات نقاط مشخص شده را باهم مقایسه کنید).



۱۴۰۱ شیب این خط این است

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{۲-۵}{۴-0}=-\frac{۳}{۴}.$$

این بدان معنی است‌که وقتی x به‌اندازهٔ ۴ واحد افزایش می‌یابد، y به‌اندازهٔ ۳ واحد کاهش پیدا می‌کند.

به‌کار برد زیرا Δx روی هرخط قائم برابر صفر است. این نکته را به‌این‌شکل بیان می‌کنیم که خطوط قائم، شیب ندارند ویا شیب یك خط قائم، تعریف نمی‌شود.

مثال ۳ شیب خطی راکه درشکل ۱۳.۱ ازنقاط $P_۱(۱, ۲)$ و $P_۲(۲, ۵)$ می‌گذرد، محاسبه کنید.

حل: معادلهٔ (۲) را به‌کار می‌گیریم و به‌دست می‌آوریم

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۵-۲}{۲-۱}=\frac{۳}{۱}=۳.$$

اینکه شیب برابر ۳ است، به‌این معنی است‌که هروقت x یك‌واحد افزایش می‌یابد، y به‌اندازهٔ سه واحد افزایش پیدا می‌کند. به عبارت دیگر، تغییر y، ۳ برابر تغییر x است. روی این خط، $\Delta y=۳\Delta x$. شیب $m=۳$ یك ضریب تناسب است.
حال تصور کنید $P_۲$ را $(۱, ۲)$ بگیریم و $P_۱$ را $(۲, ۵)$. آیا معادلهٔ (۲) بازهم جواب $m=۳$ را می‌دهد؟ بله، به‌طوری‌که در زیر ملاحظه می‌شود، همین جواب به‌دست می‌آید

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۲-۵}{۱-۲}=\frac{-۳}{-۱}=۳.$$

تعویض شمارهٔ $P_۱$ و $P_۲$، علامتهای خیز و رفت را تغییر داد ولی نسبت آنها را تغییر نداد. ■

مثال ۴ شیب خطی راکه درشکل ۱۴.۱ ازنقاط $P_۱(۰, ۵)$ و $P_۲(۴, ۲)$ می‌گذرد، محاسبه کنید.

حل: از معادلهٔ (۲) داریم

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۲-۵}{۴-۰}=\frac{-۳}{۴}=-\frac{۳}{۴}.$$

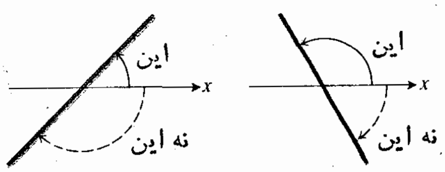
این بدان معنی است‌که هرگاه x به‌اندازهٔ ۴ واحد افزایش یابد، y به‌اندازهٔ ۳ واحد کاهش می‌یابد. ■

زاویهٔ میل

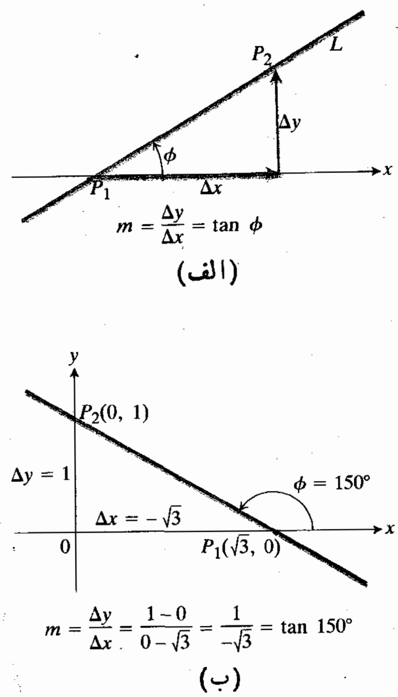
زاویهٔ میل خطی‌که محور x را قطع می‌کند، کوچکترین زاویه‌ای است‌که اگر اندازه‌گیری را در خلاف جهت عقربه‌های ساعت از محور x و درحول نقطهٔ تقاطع انجام دهیم، به‌دست می‌آوریم (شکل ۱۵.۱). زاویهٔ میل هرخط افقی برابر صفردرجه فرض می‌شود. بنابراین، زاویهٔ میل می‌تواند هراندازهٔ از ۰° تا ۱۸۰°، و نه خود ۱۸۰°، را داشته‌باشد.

شیب هرخط، تانژانت زاویهٔ میل آن خط است. شکل ۱۶.۱ نشان می‌دهدکه چرا چنین است. اگر m نشان‌دهندهٔ شیب و ϕ نشان‌دهندهٔ زاویه باشد، آنگاه

$$m=\tan\phi. \qquad (۵)$$



۱۵.۱ زاویه‌های میل درخلاف جهت عقربه‌های ساعت ازمحور x اندازه‌گیری می‌شوند.



۱۶.۱ شیب یك خط، تانژانت زاویهٔ میل آن است.

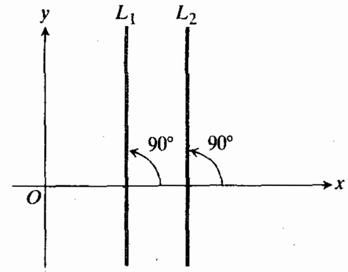
مثال ۵ شیب خطوطی راکه زوایای میل‌آنها نزدیك ۹۰° است، بررسی می‌کنیم؛ مثلاً

$$\phi_۱=۸۹^\circ ۵۹'،\quad m_۱=\tan\phi_۱\approx ۳۴۳۷٫۷$$

و

$$\phi_۲=۹۰^\circ ۰۱'،\quad m_۲=\tan\phi_۲\approx -۳۴۳۷٫۷.$$

اندازهٔ عددی شیب چنین خطوطی بسیار بزرگ است. اگر ϕ را بازهم نزدیکتر به ۹۰° اختیارکنیم، می‌توانیم اندازهٔ عددی شیب را ازهر عدد Nی، هرقدر بزرگ باشد، بزرگتر سازیم. این واقعیت دراین‌گفته خلاصه می‌شود که وقتی زاویهٔ میل یك خط به ۹۰° می‌گراید، شیب آن خط «بینهایت می‌شود»، ویا اینکه یك خط قائم، «شیب بینهایت» دارد. ولی، بیان دقیق این واقعیت این است‌که هیچ عدد حقیقی به شیب یك خط قائم نسبت نمی‌دهیم. خطهای قائم، شیب ندارند (شکل ۱۷.۱).



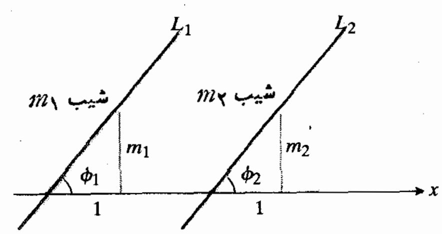
۱۷۰۱ وقتی $\phi = ۹۰°$، $\tan\phi$ تعریف نمی‌شود. خطهای قائم، زوایای میل مساوی دارند ولی شیب ندارند. ■

خطهایی که باهم موازی یا برهم عمودند

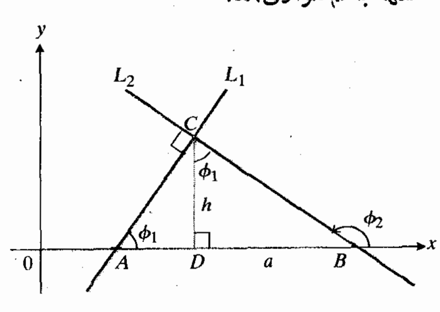
خطهای موازی، زوایای میل مساوی دارند. از این‌رو، اگر قائم نباشند، شیب آنها یکی است. به‌عکس، خطهایی که شیب مساوی دارند، زوایای میل آنها برابر است و بنابراین، باهم موازی‌اند. شکل ۱۸۰۱ را ببینید.

اگر هیچ‌یک از دوخط عمود برهم $L_۱$ و $L_۲$ قائم نباشد، شیبهای آنها، $m_۱$ و $m_۲$، با معادلهٔ $m_۱m_۲ = -۱$ به‌هم مربوط می‌شوند. شکل ۱۹۰۱ دلیل این امر را نشان می‌دهد.

$$m_۱ = \tan\phi_۱ = \frac{a}{h} \quad \text{درحالی‌که} \quad m_۲ = -\frac{h}{a}. \qquad (۶)$$



۱۸۰۱ اگر $m_۱ = m_۲$ آنگاه $\phi_۱ = \phi_۲$ و خطها باهم موازی‌اند.



۱۹۰۱ $\triangle ADC$ با $\triangle CDB$ متشابه است. از این‌رو، $\phi_۱$ زاویهٔ بالایی $\triangle CDB$ نیز هست. با توجه به‌اضلاع $\triangle CDB$ داریم $\tan\phi_۱ = a/h$.

بنابراین

$$m_۱m_۲ = -۱ \quad \text{یا} \quad m_۲ = -\frac{۱}{m_۱}. \qquad (۷)$$

مثال ۶ می‌دانیم خط L برخطی که شیب آن $-۳/۴$ است، عمود است. شیب L را بیابید.

حل: با توجه به‌معادلهٔ (۷)، شیب L قرینهٔ عکس $-۳/۴$ است. بنابراین، شیب L برابر است با $۴/۳$. ■

خلاصه

۱. شیب خط گذرنده از $P_۱(x_۱, y_۱)$ و $P_۲(x_۲, y_۲)$، $x_۱ \neq x_۲$، برابر است با

$$m = \frac{\text{خیز}}{\text{رفت}} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

۲. $m = \tan\phi$ (ϕ زاویهٔ میل است).
۳. خطهای قائم شیب ندارند.
۴. شیب خطهای افقی، ۰ است.
۵. مطالب زیر را دربارهٔ هر دوخطی که نه قائم باشند و نه افقی، به‌یاد داشته باشید

الف) دوخط باهم موازی‌اند $\Longleftrightarrow m_۲ = m_۱$؛
ب) دوخط برهم عمودند $\Longleftrightarrow m_۲ = -۱/m_۱$.
(علامت $\Longleftrightarrow$ خوانده می‌شود «اگر وتنها اگر»).

مسأله‌ها

درمسأله‌های ۱-۶، ذره‌ای درصفحه از A به B حرکت می‌کند. مطلوب است Δx و Δy.

۰۱ $A(-۱, ۱), B(۱, ۲)$
۰۲ $A(۱, ۲), B(-۱, -۱)$
۰۳ $A(-۳, ۲), B(-۱, -۲)$
۰۴ $A(-۱, -۲), B(-۳, ۲)$
۰۵ $A(-۳, ۱), B(-۸, ۱)$
۰۶ $A(۰, ۴), B(۰, -۲)$

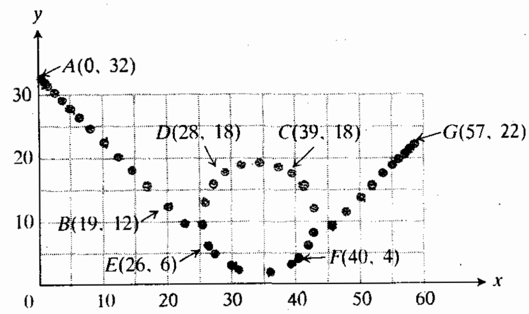
مسأله‌های ۷ و ۸ به‌شکل ۲۰۰۱ مربوط‌اند که مسیر حرکت توپی را نشان می‌دهد. قسمتی از این مسیر، به‌شکل یك حلقهٔ دایره‌ای است. حروف متوالی نشان‌دهندهٔ مواضع متوالی توپ هستند که مختصاتشان به‌نزدیکترین عدد صحیح گرد شده است.

۰۷ وقتی توپ شکل ۲۰۰۱
الف) از A به G

ب) از D به E

پ) از C به F

حرکت می‌کند، تغییرات خالص افقی و قائمی که در مختصات مرکز توپ پیش می‌آید، چقدر است؟



۲۰۱ شکل مربوط به‌مسأله‌های ۷ و ۸.

۸. اگر درشکل ۲۰۱ توپ بعداً از G بغلتد و به F برگردد، مختصات مرکز توپ با چه نموهایی تغییر می‌کنند؟

فرض کنید که ذره‌ای درصفحه با نموهای Δx و Δy مذکور در مسأله‌های ۹ـ۱۶، از $P_1(x, y)$ به $P_2(x+\Delta x, y+\Delta y)$ حرکت می‌کند. درهر مسأله، تعیین کنید که آیا P_2 در بالا، در زیر، درسمت راست، ویا درسمت چپ P_1 قرار دارد.

۹. $\Delta x = 6, \quad \Delta y = 3$

۱۰. $\Delta x = 5, \quad \Delta y = 0$

۱۱. $\Delta x = -2, \quad \Delta y = 0$

۱۲. $\Delta x = 0, \quad \Delta y = 2$

۱۳. $\Delta x = 3, \quad \Delta y = -1$

۱۴. $\Delta x = -1, \quad \Delta y = -2$

۱۵. $\Delta x = 0, \quad \Delta y = -5$

۱۶. $\Delta x = -4, \quad \Delta y = 0$

درمسأله‌های ۱۷ـ۳۲، نقاط A و B را روی نمودار مشخص کنید، وشیب خطی را که به وسیلهٔ آن نقاط معین می‌شود (درصورت وجود) بیابید. همچنین، شیب یکسان خطهای عمود بر AB را (درصورت وجود) پیدا کنید.

۱۷. $A(1, -2), \quad B(2, 1)$

۱۸. $A(-1, 2), \quad B(-2, -1)$

۱۹. $A(-2, -1), \quad B(1, -2)$

۲۰. $A(2, -1), \quad B(-2, 1)$

۲۱. $A(1, 0), \quad B(0, 1)$

۲۲. $A(-1, 0), \quad B(1, 0)$

۲۳. $A(2, 3), \quad B(-1, 3)$

۲۴. $A(0, 3), \quad B(2, -3)$

۲۵. $A(0, -2), \quad B(-2, 0)$

۲۶. $A(1, 2), \quad B(1, -3)$

۲۷. $A(0, 0), \quad B(-2, -4)$

۲۸. $A(1/2, 0), \quad B(0, -1/3)$

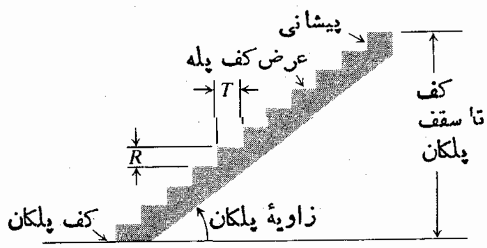
۲۹. $A(0, 0), \quad B(x, y), \quad (x \neq 0, y \neq 0)$

۳۰. $A(0, 0), \quad B(x, 0), \quad (x \neq 0)$

۳۱. $A(0, 0), \quad B(0, y), \quad (y \neq 0)$

۳۲. $A(a, 0), \quad B(0, b), \quad (a \neq 0, b \neq 0)$

مسائل ۳۳ـ۳۵ مربوط به‌پلکانی هستند که در شکل ۲۱۰۱ دیده می‌شود. شیب پلکان را می‌توان از روی نسبت پیشانی هرپله به‌عرض کف هرپله (R/T) به‌دست‌آورد. منبعی که این تصویر از آن گرفته شده، در تعریف‌پلکان می‌گوید که نباید شیب پلکان کوچکتر از ۵/۱۶ یا $31\frac{1}{4}\%$ و بزرگتر از ۹/۸ یا $112\frac{1}{2}\%$ باشد.



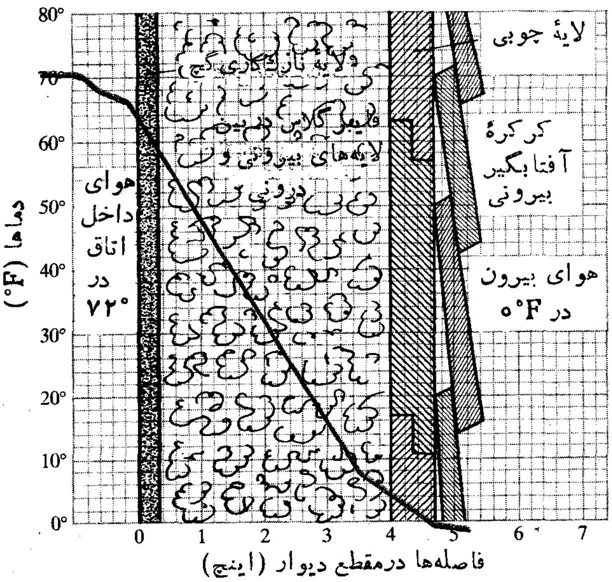
۲۱۰۱ پلکان مربوط به‌مسأله‌های ۳۳ـ۳۵؛ R پیشانی و T عرض کف هرپله است.

۳۳. ماکسیمم و مینیمم زوایایی که پلکان شکل ۲۱۰۱ می‌تواند برطبق تعریف داشته‌باشد، چقدر است؟

۳۴. زاویهٔ معمولی پلکان خانه‌ها، 40° است. اگر عرض کف پله ۹ اینچ باشد، پیشانی پله تقریباً چقدر است؟

۳۵. شیب یك پلکان 40° را حساب کنید.

مسأله‌های ۳۶ و ۳۷ را با اندازه‌گیری شیبها در شکل ۲۲۰۱ حل کنید.



۲۲۰۱ دماهای لایه‌های مختلف یك دیوار.

۳۶. آهنگ تغییر دما را برحسب درجه در اینچ برای هریك از موارد زیر بیابید.

الف) لایهٔ نازك‌کاری گچ

ب) فایبر گلاس

پ) لایهٔ چوبی

۳۷. کدام‌یك ازموادی که در مسألهٔ ۳۶ ذکر شد، بهترین عایق است؟ کدام‌یك بدترین عایق است؟ توضیح دهید.

۳۸. درهریك از موارد زیر، نقاط A، B، C، و D را مشخص کنید. سپس معین کنید که چهارضلعی $ABCD$ یك متوازی‌الاضلاع است یا نه و به‌این‌منظور، شیب اضلاع مقابل را با هم مقایسه کنید.

الف) $A(۰, ۱),\ B(۱, ۲),\ C(۲, ۱),\ D(۱, ۰)$

ب) $A(۳, ۱),\ B(۲, ۲),\ C(۰, ۱),\ D(۱, ۰)$

پ) $A(-۱, -۲),\ B(۲, -۱),\ C(۲, ۱),\ D(۱, ۰)$

ت) $A(-۲, ۲),\ B(۱, ۳),\ C(۲, ۰),\ D(-۱, -۱)$

ث) $A(-۱, ۰),\ B(۰, -۱),\ C(۲, ۰),\ D(۰, ۲)$

۳۹. درهریك ازموارد زیر، معین کنید که نقاط، همخط‌اند (روی یك خط راست مشترك واقع‌اند) یا نه.

الف) $A(۱, ۰),\ B(۰, ۱),\ C(۲, ۱)$

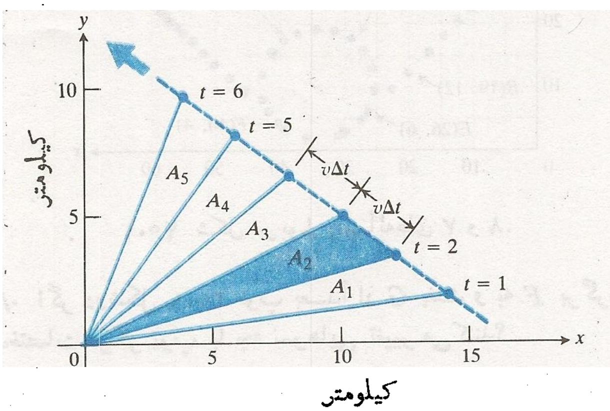
ب) $A(-۲, ۱),\ B(۰, ۵),\ C(-۱, ۲)$

پ) $A(-۲, ۱),\ B(-۱, ۱),\ C(۱, ۵),\ D(۲, ۷)$

ت) $A(-۲, ۳),\ B(۰, ۲),\ C(۲, ۰)$

ث) $A(-۳, -۲),\ B(-۲, ۰),\ C(-۱, ۲),\ D(۱, ۶)$

۴۰. ذره‌ای با سرعت ثابت v روی یك خط راست که از مبدأ نمی‌گذرد، حرکت می‌کند. دستگاه مختصات ومسیر ذره در شکل ۲۳۰۱ نشان داده شده‌اند. مواضع ذره روی خط به‌اندازهٔ $\Delta t = ۱$ ازیکدیگر فاصله دارند. چرا مساحتهای A_1، A_2، ...، A_5 در شکل ۲۳۰۱ باهم برابرند؟ (راهنمایی: خطی از مبدأ بر امتداد حرکت عمود کنید) طبق قانون دوم کپلر (درامده را ملاحظه کنید)، خطی که ذره را به‌مبدأ وصل می‌کند، در زمانهای مساوی مساحتهای مساوی را جارو می‌کند.



۲۳۰۱ اگر ذره‌ای روی یك‌خط راست‌که از مبدأ نمی‌گذرد با سرعت ثابت v حرکت‌کند، خطی‌که ذره را به‌مبدأ وصل می‌کند در زمانهای مساوی مساحات مساوی A_1، A_2، ... را جارو می‌کند (مسألهٔ ۴۰ را ببینید). واحد محورها، کیلومتر است. زمان با t نشان داده و برحسب ثانیه اندازه‌گیری می‌شود.

۴۱. ذره‌ای از $A(-۲, ۳)$ شروع به‌حرکت می‌کند ومختصاتش با نموهای $\Delta x = ۵$، $\Delta y = -۶$ تغییر می‌کنند. موضع جدید آن را بیابید.

۴۲. ذره‌ای از $A(۶, ۰)$ شروع به حرکت می‌کند و مختصاتش با نموهای $\Delta x = -۶$، $\Delta y = ۰$ تغییر می‌کند. موضع جدید آن را بیابید.

۴۳. وقتی ذره‌ای از $A(x, y)$ به $B(۳, -۳)$ می‌رود، مختصات آن با نموهای $\Delta x = ۵$ و $\Delta y = ۶$ تغییرمی‌کنند. x و y را بیابید.

۴۴. ذره‌ای از $A(۱, ۰)$ شروع به‌حرکت می‌کند، مبدأ را یك‌بار درخلاف جهت ساعت دور می‌زند، و به $A(۱, ۰)$ برمی‌گردد. تغییرات خالص مختصات آن را به‌دست آورید.

۳۰۱ معادله‌های خط

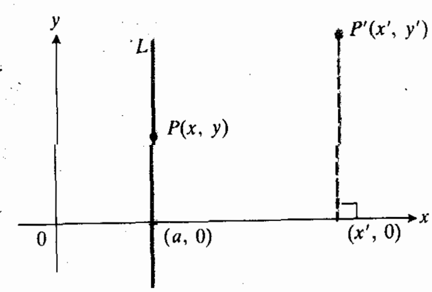
معادلهٔ یك خط، معادله‌ای است‌که مختصات نقاط واقع برخط در آن‌صدق‌کنند ومختصات نقاطی‌که برخط قرارندارند، در آن‌صدق نکنند.

چنین معادله‌ای چه فایده‌ای برای ما دارد؟ با ملاحظهٔ آن می‌فهمیم که خط چه وقتی قائم است و وقتی قائم نیست، شیب آن چیست. این گونه معادلات به‌ما نشان می‌دهند که چگونه مقدار y را به‌ازای هرمقدار x روی یك‌خط غیرقائم یا مقدار x را به‌ازای هرمقدار y روی یك خط غیرافقی حساب کنیم. این معادلات روش مفیدی برای تلخیص داده‌های عددی و پیش‌بینی مقادیر داده‌های ثبت نشده دراختیار ما می‌گذارند. همچنانکه درفصل ۲ خواهیم دید، معادلات خط نقش مهمی در براوردکردن ریشه‌های معادلاتی که حل مستقیم آنها بسیار پیچیده است،دارند. دراین بخش نشان می‌دهیم که چگونه معادلات خط درصفحهٔ مختصات را بنویسیم و تعبیر کنیم.

خطهای قائم

هرخط قائم L باید محور x را درنقطه‌ای چون $(a, ۰)$ قطع کند (شکل ۲۴۰۱). سایر نقاط روی L، درامتداد مستقیم، بالا یا پایین $(a, ۰)$ قرار دارند. این بدان معنی است که اولین مختص هر نقطهٔ $P(x, y)$ روی L، باید a باشد درحالی که y می‌تواند هرعددی باشد. به‌عبارت دیگر، مختصات تمام نقاط (x, y) روی L، در معادلهٔ $x=a$ صدق می‌کنند.

برای اینکه مطمئن شویم $x=a$ یك معادلهٔ L است، باید تحقیق کنیم که نقاط غیرواقع بر L مختص اولشان متفاوت با a است. قطعاً چنین است، زیرا عمودهایی که ازاین نقاط برمحور x رسم شوند، این محور را درنقطهٔ $x=a$ قطع نمی‌کنند. (شکل ۲۴۰۱ را ببینید.)

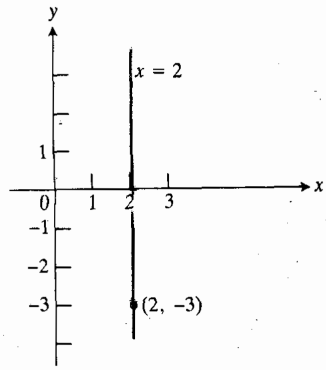


۲۴۰۱ اگر $P(x,y)$ روی L باشد، آنگاه $x=a$. به عکس، اگر $P'(x', y')$ بر L قرار نداشته باشد، آنگاه $x' \neq a$ زیرا پای عمودی که از P' برمحور x رسم شود، متفاوت با نقطهٔ $(a, ۰)$ است.

معادلهٔ متعارف خط قائم گذرنده از نقطهٔ (a, b) عبارت است از

$$x=a. \qquad (۱)$$

مثال ۱ معادلهٔ متعارف خط قائم گذرنده از نقطهٔ $(۲, -۳)$ عبارت است از $x=۲$. شکل ۲۵۰۱ را ببینید.



۲۵۰۱ معادلهٔ متعارف خط قائم گذرنده از $(۲, -۳)$ عبارت است از $x=۲$. ■

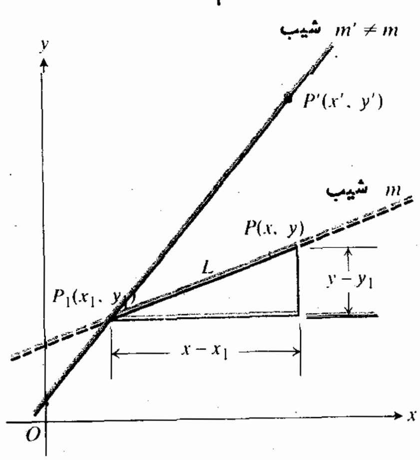
خطهای غیرقائم

برای نوشتن معادلهٔ خطی چون L که قائم نیست، کافی است که شیب m و مختصات یك نقطهٔ $P_1(x_1, y_1)$ روی آن خط را بدانیم. اگر $P(x, y)$ نقطهٔ دیگری روی L باشد (همان‌طور که درشکل ۲۶۰۱ هست)، آنگاه $x \neq x_1$ و می‌توانیم شیب L را به‌صورت زیر بنویسیم

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}. \qquad (۲)$$

سپس می‌توانیم این عبارت را مساوی m قرار دهیم و به دست آوریم

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=m. \qquad (۳)$$



۲۶۰۱ فرض کنید L خط گذرنده از $P_1(x_1, y_1)$ است که شیب آن m است. دراین صورت، سایر نقاط $P(x, y)$ روی این خط قرار دارند اگر و تنها اگر شیب PP_1 برابر m باشد. از اینجا، معادلهٔ نقطه‌ـشیب L به‌دست می‌آید.

اگر دوطرف معادلهٔ (۳) را در $x-x_۱$ ضرب کنیم، معادلهٔ مفیدتر

$$y-y_۱=m(x-x_۱) \qquad (۴)$$

را به‌دست می‌آوریم.

معادلهٔ (۴) یك معادلهٔ L است و این امر را بــه فوریت می‌توان تحقیق کرد. هر نقطه‌ای چون $(x,\ y)$ روی L دراین‌معادله صدق می‌کند ـ حتی نقطهٔ $(x_۱,\ y_۱)$. دربارهٔ نقاطی کــه روی L نیستند چه می‌توان گفت؟ اگر $P'(x',\ y')$ نقطه‌ای باشد که روی L قرار ندارد، آنگاه همان‌گونه‌کــه شکل ۲۶.۱ نشان می‌دهــد، شیب خط PP' یعنی m'، متفاوت با m است ومختصات P' یعنی x' و y' درمعادلات (۳) و (۴) صدق نمی‌کنند.

معادلهٔ (۴) یك معادلهٔ «نقطه‌ـشیب» خط L است.

تعریف

معادلهٔ **نقطه‌ـشیب** خط گذرنــده از نقطهٔ $(x_۱,\ y_۱)$ بــا شیب m عبارت است از

$$y-y_۱=m(x-x_۱)\,. \qquad (۵)$$

مثال ۲ معادلــه‌ای برای خط گذرنده از نقطهٔ $(۱,\ ۲)$ بــا شیب $m=-۳/۴$ بنویسید.

حل: درمعادلهٔ (۵) قرار می‌دهیم $(x_۱,\ y_۱)=(۱,\ ۲)$ و $m=-۳/۴$:

$$y-y_۱=m(x-x_۱)$$

$$y-۲=-\frac{۳}{۴}(x-۱)$$

$$y=-\frac{۳}{۴}x+\frac{۳}{۴}+۲$$

$$y=-\frac{۳}{۴}x+\frac{۱۱}{۴}\,\cdot$$ ■

مثال ۳ معادله‌ای برای خط‌گذرنده از $(-۲,\ -۱)$ و $(۳,\ ۴)$ بنویسید.

حل: ابتدا شیب را حساب می‌کنیم وسپس درمعادلــهٔ (۵) یکی ازنقاط داده شده را به‌عنوان $(x_۱,\ y_۱)$ به‌کار می‌بریم. شیب برابر است با

$$m=\frac{-۱-۴}{-۲-۳}=\frac{-۵}{-۵}=۱\,\cdot$$

$(x_۱,\ y_۱)$ را می‌توان $(-۲,\ -۱)$ ویا $(۳,\ ۴)$ اختیار کرد:

با $(x_۱,\ y_۱)=(۳,\ ۴)$	با $(x,\ y)=(-۲,\ -۱)$
$y-۴=۱\cdot(x-۳)$	$y-(-۱)=۱\cdot(x-(-۲))$
$y-۴=x-۳$	$y+۱=x+۲$
$y=x+۱$	$y=x+۱$

نتیجه یکی است

به‌هریك از دوطریق، به این نتیجه می‌رسیم کــه $y=x+۱$ یك معادلهٔ خط L است. ■

طول از مبدأ و عرض از مبدأ

مختص x نقطه‌ای کــه یك خط درآنجا محور x را قطع می‌کند، **طول از مبدأ** آن‌خط نامیده می‌شود. برای یافتن آن،درمعادلهٔ خط قرار می‌دهیم $y=۰$ ومعادله را نسبت به x حل می‌کنیم. مختص y نقطه‌ای‌که یك خط درآنجا محور y را قطع می‌کند، **عرض از مبدأ** آن خط نامیده می‌شود. برای یافتن آن، درمعادلهٔ خط قرار می‌دهیم $x=۰$ و معادله را نسبت به y حل می‌کنیم.

مثال ۴ طول از مبدأ و عــرض از مبدأ خط $y=۲x-۳$ را پیدا کنید.

حل: برای یافتن طول ازمبدأ، درمعادلهٔ خط قرار می‌دهیم $y=۰$ و معادله را نسبت به x حل می‌کنیم. ازاینجا به‌دست می‌آید

$$۰=۲x-۳ \quad \text{یا} \quad x=\frac{۳}{۲}\,.$$

طول از مبدأ، برابر است با ۳/۲.

برای یــافتن عرض از مبدأ، در معادلــهٔ خط قرار می‌دهیم $x=۰$ ومعادله را نسبت به y حل می‌کنیم.ازاینجا به‌دست می‌آید

$$y=۲(۰)-۳ \quad \text{یا} \quad y=-۳\,.$$

عرض از مبدأ، برابر است با ۳ـ. ■

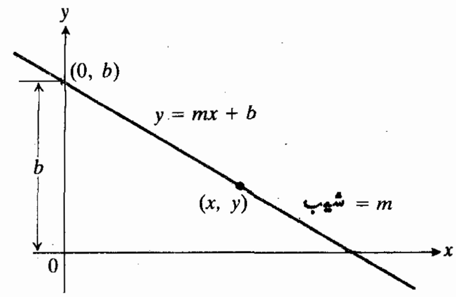
هرخطی‌که قــائم نباشد باید محور y را در نقطه‌ای چون $(۰,\ b)$ قطع‌کند. عدد b، عرض از مبدأ خط است. اگر درمعادلهٔ (۵) قرار دهیم $(x_۱,\ y_۱)=(۰,\ b)$، می‌بینیم که معادلهٔ نقطه‌ـشیب خط چنین است

$$y-b=m(x-۰) \qquad (۶)$$

که معادل است با

$$y=mx+b\,. \qquad (۷)$$

معادلهٔ $y=mx+b$ معادلــهٔ «شیب‌ـعرض از مبدأ» خط نــامیده می‌شود (شکل ۲۷.۱ را ببینید).



۲۷۰۱ خط $y=mx+b$ دارای شیب m وعرض از مبدأ b است.

تعریف

معادلهٔ شیب‌ـعرض ازمبدأ خطی با شیب m وعرض از مبدأ b عبارت است از

$$y=mx+b. \qquad (8)$$

درمثالهای ۲ و ۳، صورت نهایی معادلهٔ خط، معادلهٔ شیب‌ـعرض از مبدأ آن بود.

مثال ۵ معادلهٔ شیب‌ـعرض از مبدأ خطی که شیب آن $m=-3/4$ و عرض از مبدأ آن $b=5$ است، به صورت زیر است

$$y=-\frac{3}{4}x+5.$$

این همان خطی است که درشکل ۱۴۰۱ دیدید. ■

مثال ۶ شیب وعرض ازمبدأ خط $8x+5y=20$ را بیابید.

حل: معادله را نسبت به y حل می‌کنیم تا صورت شیب‌ـعرض ازمبدأ آن به‌دست آید. سپس شیب و عرض از مبدأ را از روی معادله می‌خوانیم

$$8x+5y=20$$
$$5y=-8x+20$$
$$y=-\frac{8}{5}x+4.$$

شیب عبارت است از $m=-8/5$. عرض از مبدأ عبارت است از $b=4$. ■

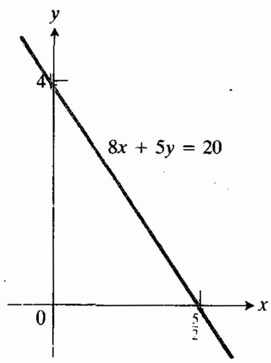
ترسیم سریع

روشی برای ترسیم سریع نمودار خط این است که نقاط تقاطع خط با محورها را مشخص کنیم و خطی از نقاط مشخص شده بگذرانیم. این روش فقط وقتی کارایی ندارد که خط از مبدأ بگذرد که دراین صورت، به جای دو نقطهٔ تقاطع، یك نقطه خواهیم داشت، ویا اینکه مشخص کردن نقاط تقاطع درشکل دشوار باشد.

مثال ۷ نمودار خط $8x+5y=20$ را رسم کنید.

حل:

۱. برای به‌دست‌آوردن طول از مبدأ خط، قرار می‌دهیم $y=0$ و به‌دست می‌آوریم $8x=20$ یا $x=5/2$.
۲. برای به‌دست‌آوردن عرض از مبدأ خط قرار می‌دهیم $x=0$ و به‌دست می‌آوریم $5y=20$ یا $y=4$.
۳. نقاط تقاطع با محورها را روی شکل مشخص می‌کنیم و خط را رسم می‌کنیم (شکل ۲۸۰۱).



۲۸۰۱ برای ترسیم نمودار $8x+5y=20$، نقاط تقاطع با محورها را مشخص می‌کنیم و خطی از نقاط مشخص شده می‌گذرانیم. ■

خطهای افقی

وقتی خط $y=mx+b$ افقی باشد، $m=0$ و معادله به صورت سادهٔ $y=b$ درمی‌آید.

معادلهٔ متعارف **خط افقی گذرنده از** (a, b) عبارت است از

$$y=b. \qquad (9)$$

مثال ۸ معادلهٔ خطی افقی که از نقطهٔ $(1, 2)$ می‌گذرد، عبارت است از $y=2$. ■

فاصلهٔ یك نقطه تا یك خط

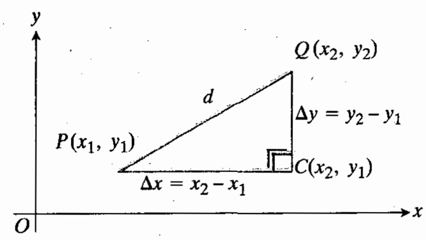
برای محاسبهٔ فاصلهٔ بین نقاط $P(x_1, y_1)$ و $Q(x_2, y_2)$، فرمول زیر را به‌کار می‌بریم

فرمول فاصلهٔ بین نقاط درصفحه

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (10)$$

شکل ۲۹۰۱ را ببینید.

برای محاسبهٔ فاصلهٔ نقطه‌ای چون $P(x_۱, y_۱)$ تا خطی مثل L، نقطهٔ $Q(x_۲, y_۲)$ درپای عمود وارد از P بر L را می‌یابیم وفاصلهٔ P تا Q را حساب می‌کنیم. مثال بعدی نشان می‌دهد که این کار چگونه انجام می‌شود.



۲۹۰۱ d، فاصلهٔ بین دونقطهٔ $P(x_۱, y_۱)$ و $Q(x_۲, y_۲)$، با به‌کاربردن قضیهٔ فیثاغورس در مورد مثلث قائم‌الزاویهٔ PCQ محاسبه می‌شود. چون $d^۲=(\Delta x)^۲+(\Delta y)^۲$، داریم

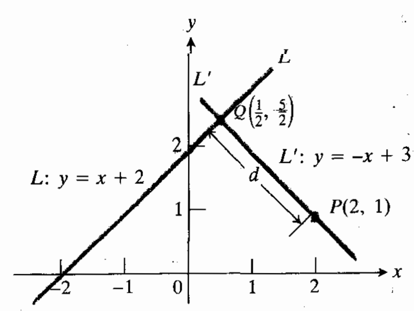
$$d=\sqrt{(\Delta x)^۲+(\Delta y)^۲}$$

یا

$$d=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}.$$

مثال ۹ فاصلهٔ نقطهٔ $P(۲, ۱)$ تا خط $L: y=x+۲$ را بیابید.

حل: مسأله را در سه گام حل می‌کنیم: (۱) معادلهٔ خط L' راکه از P می‌گذرد وعمود بر L است پیدا می‌کنیم؛ (۲) نقطهٔ Q، محل تقاطع L' و L، را می‌یابیم؛ و (۳) فاصلهٔ بین P و Q را محاسبه می‌کنیم. شکل ۳۰۰۱ را ببینید.



۳۰۰۱ فاصلهٔ $P(۲, ۱)$ تا L در امتداد L' عمود بر L اندازه‌گیری می‌شود. این فاصله را می‌توان ازمختصات P و Q محاسبه کرد.

گام ۱: معادله‌ای برای خط L' که از $P(۲, ۱)$ می‌گذرد وعمود بر L است‌می‌یابیم. شیب $L: y=x+۲$ عبارت‌است از $m=۱$. پس شیب L' عبارت است از $m=-۱/۱=-۱$. درمعادلات (۵) قرار می‌دهیم $(x_۱, y_۱)=(۲, ۱)$ و $m=-۳$ تا L' را به‌دست آوریم

$$y-۱=-۱(x-۲)$$
$$y=-x+۲+۱$$
$$y=-x+۳.$$

گام ۲: برای یافتن نقطهٔ Q، معادلات L و L' را با هم حل می‌کنیم. برای پیداکردن مختص x نقطهٔ Q، دوعبارت مربوط به y را مساوی هم قرار می‌دهیم

$$x+۲=-x+۳$$
$$۲x=۱$$
$$x=\frac{۱}{۲}.$$

حال می‌توانیم با قراردادن $x=۱/۲$ درمعادلهٔ هریك از دوخط، مختص y را به‌دست آوریم. ما به‌دلخواه $y=x+۲$ را انتخاب می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم

$$y=\frac{۱}{۲}+۲=\frac{۵}{۲}.$$

مختصات Q عبارت‌اند از $(۱/۲, ۵/۲)$.

گام ۳: برای محاسبهٔ فاصلهٔ بین $P(۲, ۱)$ و $Q(۱/۲, ۵/۲)$، از معادلهٔ (۱۰) استفاده می‌کنیم

$$d=\sqrt{\left(۲-\frac{۱}{۲}\right)^۲+\left(۱-\frac{۵}{۲}\right)^۲}=\sqrt{\left(\frac{۳}{۲}\right)^۲+\left(-\frac{۳}{۲}\right)^۲}$$

$$=\sqrt{\frac{۱۸}{۴}}=\frac{۳}{۲}\sqrt{۲}.$$

فاصلهٔ P تا L برابر است با $(۳/۲)\sqrt{۲}$. ■

نکته اگر برای مدرج‌کردن محورها واحد مشترکی به‌کار رفته باشد، فرمول $d=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}$ فاصلهٔ بین نقاط صفحه را برحسب آن واحد نشان می‌دهد. مثلا فرض کنید x و y برحسب متر باشند. دراین صورت، $(x_۲-x_۱)$ و $(y_۲-y_۱)$ برحسب مترند، مربع آنها برحسب مترمربع است، مجموع مربعات آنها برحسب مترمربع است، وجذر این مجموع نیز باز برحسب متر است. وقتی واحد دومحور یکی نباشد، از فرمول فاصله استفاده نمی‌کنیم زیرا در این صورت، این فرمول بی‌معناست.

معادلهٔ کلی خط

معادلهٔ

$$Ax+By=C \quad (A \text{ و } B \text{ هردو صفر نیستند}) \qquad (۱۱)$$

معادلهٔ کلی خط نـامیده می‌شود زیرا نمودارش همیشه یـك خط است ونیز هرخطی معادله‌اش به‌این صورت است. ما برای اثبات این موضوع صرف وقت نمی‌کنیم، ولی توجه داشته باشیدکه تمام معادلات این بخش را می‌توان به‌این شکل درآورد. چندتایی از آنها را در زیر ملاحظه می‌کنید.

معادله‌های خط

$x = a$	خط قائم گذرنده از (a, b)
$y = b$	خط افقی گذرنده از (a, b)
$y = mx + b$	معادلهٔ شیب-عرض ازمبدأ
$y - y_1 = m(x - x_1)$	معادلهٔ نقطه-شیب
$Ax + By = C$	معادلهٔ کلی خط (A و B هردو صفر نیستند)

مسأله‌ها

درهریك از مسأله‌هـای ۱-۸، معادله‌ای برای (الف) خط قائم و (ب) خط افقی گذرنده از نقطهٔ مفروض بنویسید.

۱. $(2, 3)$

۲. $(-7, -7)$

۳. $(0, 0)$

۴. $(0, -4)$

۵. $(-4, 0)$

۶. $(a, 0)$

۷. $(0, b)$

۸. (x_1, y_1)

درهریك ازمسأله‌های ۹-۱۴، معادلهٔ خطی راکه ازنقطهٔ P با شیب m می‌گذرد، بنویسید. سپس، نمودار خط را رسم کنید.

۹. $P(1, 1),\ m = 1$

۱۰. $P(1, -1),\ m = -1$

۱۱. $P(-1, 1),\ m = 1$

۱۲. $P(-1, 1),\ m = -1$

۱۳. $P(0, b),\ m = 2$

۱۴. $P(a, 0),\ m = -2$

درهریك از مسأله‌های ۱۵-۲۸، معادلهٔ خطی‌راکه از دونقطهٔ داده شده می‌گذرد، بیابید.

۱۵. $(0, 0),\ (2, 3)$

۱۶. $(1, 1),\ (2, 1)$

۱۷. $(1, 1),\ (1, 2)$

۱۸. $(-2, 1),\ (2, -2)$

۱۹. $(-2, 0),\ (-2, -2)$

۲۰. $(1, 3),\ (3, 1)$

۲۱. $(T, 0),\ (0, F_0)\ (T \neq 0,\ F_0 \neq 0)$

۲۲. $(0, 0),\ (1, 0)$

۲۳. $(0, 0),\ (0, 1)$

۲۴. $(2, -1),\ (-2, 3)$

۲۵. $(-0.7, 1.5),\ (1.4, 0.8)$

۲۶. $(\sqrt{2}, \sqrt{2}),\ (\sqrt{5}, \sqrt{5})$

۲۷. $(x_0, y_0),\ (x_1, y_1)$

۲۸. $(0.5, 10000),\ (2, 35000)$

درهریك از مسأله‌های ۲۹-۳۴، برای خطی‌که شیب و عرض از مبدأ آن داده شده، معادله‌ای بـه‌دست آورید. همچنین، خط را رسم کنید.

۲۹. $m = 3,\ b = -2$

۳۰. $m = -1,\ b = 2$

۳۱. $m = 1,\ b = \sqrt{2}$

۳۲. $m = -1/2,\ b = -3$

۳۳. $m = -5,\ b = 2.5$

۳۴. $m = 1/3,\ b = -1$

درهریك از مسأله‌های ۳۵-۴۸، شیب وطول وعرض از مبدأ خط را بیابید. سپس، خط را رسم کنید.

۳۵. $y = 3x + 5$

۳۶. $2y = 3x + 5$

۳۷. $x + y = 2$

۳۸. $2x - y = 4$

۳۹. $x-۲y=۴$

۴۰. $۳x+۴y=۱۲$

۴۱. $۴x-۳y=۱۲$

۴۲. $x=۲y-۵$

۴۳. $\frac{x}{۳}+\frac{y}{۴}=۱$

۴۴. $\frac{۲x}{۵}-\frac{y}{۳}=۱$

۴۵. $\frac{x}{۲}-\frac{y}{۳}=-۱$

۴۶. $\frac{x}{۳}+\frac{y}{۱}=-۱$

۴۷. $۱٫۰۵x-۰٫۳۵y=۷$

۴۸. $۰٫۹۸x+۱٫۹۶y=۹٫۸$

۴۹. معادلهٔ «طول‌وعرض‌ازمبدأ» خط. شیب‌خط $x/a+y/b=۱$ (a و b ثابتهایی مخالف صفرند) را بیابید. طول از مبدأ و عرض ازمبدأ خط چه هستند؟ (این معادله را معادلهٔ «طول وعرض ازمبدأ» خط می‌نامند.)

۵۰. معادلهٔ خطی راکه درشکل ۱۳.۱ دیدید، بنویسید.

۵۱. معادلهٔ خطی راکه درشکل ۱۶.۱ (ب) دیدید، بنویسید.

۵۲. خطهایی که ازمبدأ می‌گذرند.

الف) مطلوب است معادلات چهارخطی‌که ازمبدأ و، به‌ترتیب، ازنقاط (۱/۲ ،۱)، (۱ ،۱)، (۲ ،۱)، (۳ ،۱) می‌گذرند. این خطها را رسم کنید. شیب هرخط را روی آن بنویسید.

ب) دستورالعملهای قسمت (الف) را در مورد نقاط (۱/۲ ،۱-)، (۱ ،۱-)، (۲ ،۱-) و (۳ ،۱-) انجام دهید.

پ) مطلوب است معادلهٔ خطی‌که با شیب m ازمبدأ می‌گذرد. مختصات نقطهٔ تقاطع این خط را با خط $x=۱$ به‌دست‌آورید. نمودار را رسم‌کنید.

درمسأله‌های ۵۳-۶۶، مطلوب است (الف) معادلهٔ خطی‌که از P به‌موازات L می‌گذرد، (ب) معادلهٔ خط L' که از P می‌گذرد و بر L عمود است، و (پ) فاصلهٔ P تا L.

۵۳. $P(۲,۱),\ L: y=x+۲$

۵۴. $P(۰,۰),\ L: y=-x+۲$

۵۵. $P(۰,۰),\ L: x+\sqrt{۳}y=۳$

۵۶. $P(۱,۲),\ L: x+۲y=۳$

۵۷. $P(-۲,۲),\ L: ۲x+y=۴$

۵۸. $P(۳,۶),\ L: x+y=۳$

۵۹. $P(۱,۰),\ L: ۲x-y=-۲$

۶۰. $P(-۲,۴),\ L: x=۵$

۶۱. $P(۳,۲),\ L: x=-۵$

۶۲. $P(۳,۲),\ L: y=-۴$

۶۳. $P(a,b),\ L: x=-۱$

۶۴. $P(۳,-h),\ L: y=۴\ (h>۰)$

۶۵. $P(۴,۶),\ L: ۴x+۳y=۱۲$

۶۶. $P(۲/\sqrt{۳},-۱),\ L: \sqrt{۳}x+y=-۳$

درمسأله‌های ۶۷-۷۴، زاویهٔ میل خط مفروض را بیابید.

۶۷. $y=x+۲$

۶۸. $y=-x+۲$

۶۹. $x+\sqrt{۳}y=۳$

۷۰. $x+۲y=۳$

۷۱. $۲x+y=۴$

۷۲. $۲x-y=-۲$

۷۳. $۴x+۳y=۱۲$

۷۴. $\sqrt{۳}x+y=-۳$

درمسأله‌های ۷۵-۷۸، مطلوب است خطی‌که ازنقطهٔ مفروض با زاویهٔ میل مفروض ϕ می‌گذرد.

۷۵. $(۱,۴),\ \phi=۶۰^\circ$

۷۶. $(-۱,-۱),\ \phi=۱۳۵^\circ$

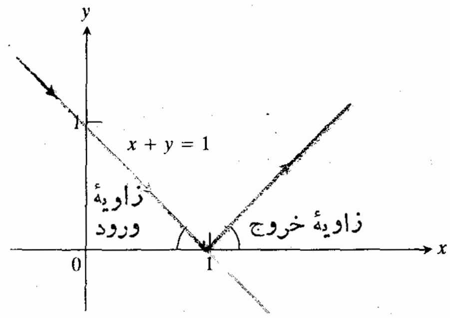
۷۷. $(-۲,۳),\ \phi=۹۰^\circ$

۷۸. $(۳,-۲),\ \phi=۰^\circ$

۷۹. فشار در زیرآب. فشاری چون p که بریک غواص در زیر آب وارد می‌شود با عمقی چون d که غواص درآن قرار دارد، به وسیلهٔ معادلهٔ $p=kd+۱$ (k مقدار ثابتی است) مربوط می‌گردد. وقتی $d=۰m$، فشار یک آتمسفر است. فشار در

۱۰۰ متری زیر آب تقریباً ۱۰٫۹۴ آتمسفر است. فشار را در ۵۰ متری زیر آب بیابید.

۸۰. نور بازتابیده. یك پرتو نور درامتداد خط $x+y=1$ به‌محور x برخورد می‌کند و سپس به سمت بالای محور xها بازتابیده می‌شود (شکل ۱٫۳۱).زاویهٔ خروج با زاویهٔ ورود برابر است. معادلهٔ مسیر پرتو خروجی را بنویسید.



۱٫۳۱ مسیر پرتو نور درمسألهٔ ۸۰.

۸۱. انبساط خطوط راه‌آهن. فولادی که خطوط راه‌آهن از آن ساخته می‌شود، براثر گرما منبسط می‌گردد. در هوای آزاد، طول s قطعه‌ای از راه‌آهن به‌دمای t آن از طریق یك معادلهٔ خطی مربوط می‌شود. درآزمایشی که درمورد قطعه‌ای از خطوط آهن انجام‌شده، اندازه‌های زیر به‌دست آمده است:

$$t_1 = ۶۵°\mathrm{F}, \qquad s_1 = ۳۵\ \mathrm{ft}$$

$$t_2 = ۱۳۵°\mathrm{F}, \qquad s_2 = ۳۵٫۱۶\ \mathrm{ft}.$$

معادله‌ای بنویسید که رابطهٔ بین s و t را نشان دهد.

۸۲. واحدهای دما. دما برحسب فارنهایت (F) و دما برحسب سانتیگراد (C) به وسیلهٔ یك معادلهٔ خطی به‌هم مربوط می‌شوند؛ یعنی، نمودار F برحسب C، یك خط راست است.

الف) با این شرط که به‌ازای F = ۳۲ داشته‌باشیم C = ۰ و به‌ازای F = ۲۱۲ داشته باشیم C = ۱۰۰، معادله‌ای پیدا کنید که F و C را به‌هم مربوط سازد.

ب) آیا دمایی هست که درآن F = C؟ اگر هست، چه دمایی است؟

۸۳. ماشین حساب. یکی ازمسیرهای راه‌آهن آمریکا درتیزترین قسمت مسیر شیبی برابر ۱٫۳۷٪ دارد. دراین نقطه، مسافرانی که درقسمت جلوی واگن قطار هستند در ارتفاعی چهارده فوت بالاتر ازمسافران عقب واگن قرار دارند. فاصلهٔ ردیفهای جلو و عقب واگن چقدر است؟

TOOLKIT PROGRAMS

Name That Function   Super * Grapher

۱٫۲ تابع و نمودار

مقادیر یك کمیت متغیر غالباً به مقادیر کمیت متغیر دیگری بستگی دارد. مثلاً:

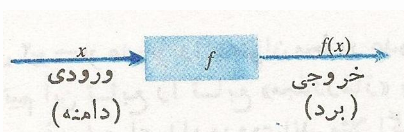
فشار در دیگ بخار نیروگاه به‌دمای بخار بستگی دارد.

آهنگ تخلیهٔ آب از وان حمام، وقتی درپوش وان را برمی‌داریم، به‌ارتفاع آب وان بستگی دارد.

مساحت دایره به‌شعاع آن بستگی دارد.

درهریك ازاین مثالها، مقادیر یك کمیت متغیر، که می‌توانیم آن را y بنامیم، وابسته به مقدار کمیت متغیر دیگری است که می‌توانیم آن را x بخوانیم. چون به‌علاوه، در هرمورد مقدار y به‌وسیلهٔ مقدار x کاملا معین می‌شود، می گوییم که y تابعی از x است.

در ریاضیات، هرقاعده‌ای که به‌هر عنصر ازیك مجموعه عنصری از مجموعهٔ دیگری را نسبت دهد، **تابع** نامیده می‌شود.این مجموعه‌ها می‌توانند مجموعه‌هایی از اعداد، مجموعه‌های جفتهایی از اعداد، مجموعه‌های نقاط، یا مجموعه‌های هرنوعی از اشیاء باشند. مجموعه‌ها لازم نیست یکی باشند. تمام کاری که تابع باید انجام دهد، این است که به‌هر عنصر از مجموعهٔ اول عنصری از مجموعهٔ دوم را نسبت دهد. بنا براین، هرتابع ماشینی است که به‌هر ورودی مجاز، یك خروجی منسوب می‌کند. ورودیها **دامنهٔ** تابع را تشکیل می‌دهند و خروجیها **برد** آن را (شکل ۱٫۳۲).



۱٫۳۲ نمودار عمل یك تابع f.

تعریف

هر تابع ازمجموعه‌ای چون D به‌مجموعه‌ای چون R، **قاعده‌ای است که به‌هر عنصر D تك عنصری از R را منسوب می‌کند.**

کلمهٔ تك درتعریف تابع به‌این معنی نیست که الزاماً فقط یك عنصر در برد تابع وجود دارد، هرچند چنین چیزی هم ممکن است؛ منظور ازکلمهٔ تك این است که به‌هر ورودی از دامنه دقیقاً یك خروجی از برد نسبت داده می‌شود، نه بیشتر و نه کمتر. به‌عبارت دیگر، هر ورودی درفهرست **جفتهای ورودی-خروجی** که به‌وسیلهٔ تابع تعریف می‌شود، دقیقاً یك‌بار ظاهر می‌گردد.

اویلر برای بیان عبارت «y تابعی از x است» یك روش نمادی ابداع کرد و نوشت

$$y = f(x) \qquad (۱)$$

که آن را به‌این‌صورت می‌خوانیم «وای برابر است با اِف اِکس». این نمایش نمادی کوتاهتر ازعبارات لفظی است که برای بیان

همین معنا به‌کار می‌رود و به‌علاوه به ما امکان می‌دهد که با تعویض حروفی که به‌کار می‌بریم، نامهای مختلفی به توابع مختلف بدهیم. برای گفتن این مطلب که فشار دیگ بخار تابعی از دمای بخار است، می‌توانیم بنویسیم $p=f(t)$. برای بیان این موضوع که مساحت دایره تابعی از شعاع آن است، می‌توانیم بنویسیم $A=g(r)$. (دراینجا ازحرف g استفاده می‌کنیم زیرا هم‌اکنون f را برای چیزدیگری به‌کار بردیم.) البته برای‌اینکه این رابطه‌ها معنایی داشته‌باشند باید بدانیم منظور از متغیرهای p، t، A و r چیست.

تابعهای با مقدار حقیقی از یك متغیر حقیقی

درقسمت اعظم بحث ما، دامنه و برد توابع مجموعه‌هایی از اعداد حقیقی‌اند. چنین توابعی را **تابعهای با مقدار حقیقی از یك متغیر حقیقی** می‌نامند. همچنانکه درمثالهای زیر دیده می‌شود، این توابع غالباً با فرمول یا معادله بیان می‌شوند.

مثال ۱ فرمول $A=\pi r^۲$ مساحت یك دایره، A، را به‌صورت تابعی از شعاع آن بیان می‌کند. مثلا اگر $r=۲$، داریم $A=\pi(۲)^۲=۴\pi$. ازلحاظ هندسی، دامنهٔ تابع، D، مجموعهٔ همهٔ شعاعهای ممکن ــ در این مورد مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی مثبت ــ است. برد نیز مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی مثبت است. ■

مثال ۲ فرمول $y=x^۲$ عدد y را به‌عنوان مجذور عدد x تعریف می‌کند. می‌توانیم این تابع را تابع «مجذورساز» بنامیم زیرا اعداد خروجی، مجذورات اعداد ورودی‌اند. مثلا اگر $x=۵$ داریم $y=(۵)^۲=۲۵$. نام معمولی این تابع، «تابع $y=x^۲$» است.

دامنهٔ تابع $y=x^۲$ مجموعهٔ مقادیر مجاز x است که دراین مورد، مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی است. برد تابع که ازمقادیر حاصلهٔ y به‌دست می‌آید، مجموعهٔ همهٔ اعداد نامنفی است. ■

مثال ۳ اگر نقطه‌ای چون (x, y) بر دایره‌ای درصفحه واقع باشد که مرکزش در مبدأ و شعاعش یك واحد است (شکل ۳۳۰۱)، آنگاه x و y درمعادلهٔ زیر صدق می‌کنند

$$x^۲+y^۲=۱.$$

این معادل است با اینکه بگوییم

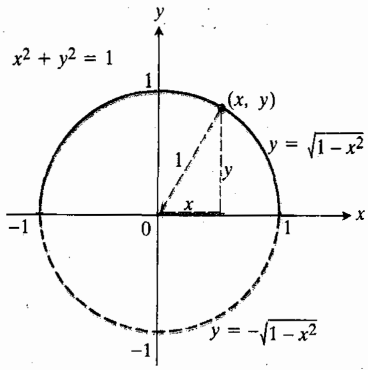
$$y^۲=۱-x^۲$$

یا

$$y=\pm\sqrt{۱-x^۲}$$

که دوفرمول ممکن y را به‌دست می‌دهد.

اگر نقطهٔ (x, y) برنیمهٔ بالایی دایره واقع باشد، که



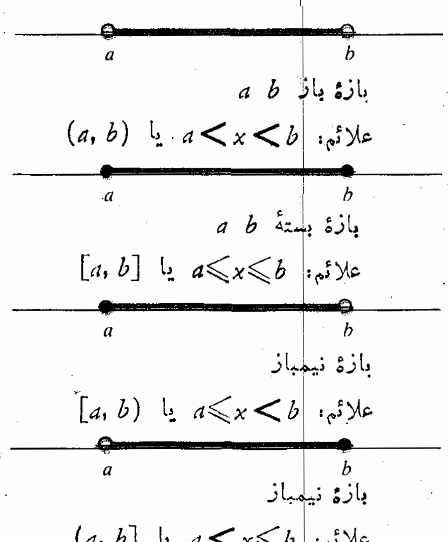
۳۳۰۱ دایرهٔ $x^۲+y^۲=۱$. در نیمهٔ بالایی، $y=\sqrt{۱-x^۲}$؛ درنیمهٔ پایینی، $y=-\sqrt{۱-x^۲}$.

نیمدایرهٔ با ضابطهٔ $y\geqslant ۰$ است، آنگاه $y=+\sqrt{۱-x^۲}$. اگر نقطه برنیمدایرهٔ پایینی واقع باشد، آنگاه $y=-\sqrt{۱-x^۲}$. هریك از دوفرمول، y را به‌صورت تابعی از x که دامنه‌اش بازهٔ از $x=-۱$ تا $x=۱$ است تعریف می‌کند. برد $y=\sqrt{۱-x^۲}$ عبارت است از $۰\leqslant y\leqslant ۱$ و برد $y=-\sqrt{۱-x^۲}$ عبارت است از $-۱\leqslant y\leqslant ۰$. ■

نکته معادلهٔ $x^۲+y^۲=۱$، y را به‌صورت تنها یك تابع از x تعریف نمی‌کند زیرا به‌ازای هر x بین -۱ و $+۱$، دو مقدار برای y به‌دست می‌آید.

دامنه و برد غالباً به‌صورت بازه‌اند

دامنه و برد بسیاری از توابع ریاضی، بازه‌هایی از اعداد حقیقی‌اند که نظایر آنها درشکل ۳۴۰۱ نشان داده شده‌است. مجموعهٔ همهٔ



۳۴۰۱ بازه‌های متناهی.

اعداد حقیقی که اکیداً بین دونقطهٔ ثابت a و b قرار دارند، یك **بازهٔ باز** است. بازه درهریك از دوانتها «باز» است زیرا هیچ‌یك ازنقاط انتهایی خود را دربر ندارد. بازه‌هایی‌که شامل هر دونقطهٔ انتهایی هستند، **بسته‌**اند. بازه‌هایی که یك نقطهٔ انتهایی را دربر دارند و شامل هر دونقطه نیستند، **نیمبازند** (بازه‌های نیمباز را نیمبسته هم می‌توان نامید ولی این اسم رایج نیست).

همان‌طورکه درشکل ۳۵۰۱ دیده می‌شود، دامنه و برد توابع ممکن است **بازه‌های نامتناهی** باشند.

مثال ۴

تابع	دامنه	برد
$y=x^2$	$-\infty<x<\infty$	$0\leqslant y$
$y=\sqrt{1-x^2}$	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$0\leqslant y\leqslant 1$
$y=\dfrac{1}{x}$	$x\neq 0$	$y\neq 0$
$y=\sqrt{x}$	$0\leqslant x$	$0\leqslant y$
$y=\sqrt{4-x}$	$x\leqslant 4$	$0\leqslant y$

در هریك ازموارد بالا، دامنهٔ تابع بزرگترین مجموعه ازمقادیر حقیقی x است که به‌ازای آنها، فرمول مربوطه مقادیری حقیقی از y را به‌دست می‌دهد.

فرمول $y=x^2$ به‌ازای هرعدد حقیقی x یك مقدار حقیقی از y را به‌دست می‌دهد.

فرمول $y=\sqrt{1-x^2}$ به‌ازای هرمقدار x دربازهٔ بستهٔ از -1 تا 1، یك مقدار حقیقی از y را به‌دست می‌دهد. در بیرون این دامنه، کمیت $1-x^2$ منفی است و ریشهٔ دوم آن یك عدد حقیقی نیست. (اعداد مختلط به صورت $a+bi$ که در آن $i=\sqrt{-1}$، تا فصل ۱۲ خارج ازمحدودهٔ بحث ما هستند.)

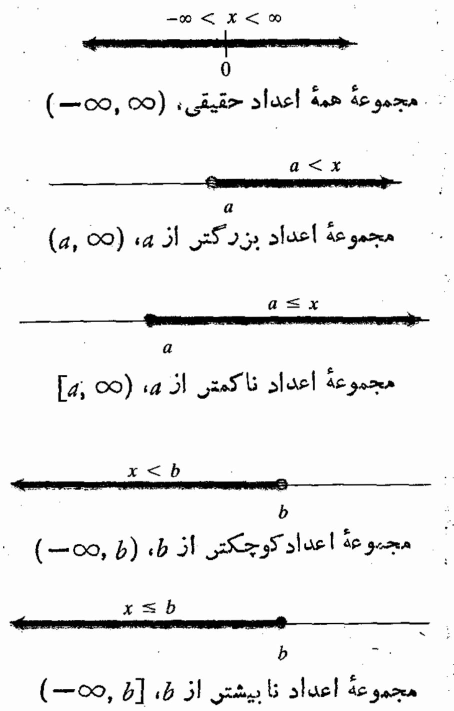
فرمول $y=1/x$ به‌ازای هر x بجز $x=0$ یك مقدار حقیقی y را به‌دست می‌دهد. نمی‌توانیم ۱ (یا هرعدد دیگری) را بر ۰ تقسیم‌کنیم.

فرمول $y=\sqrt{x}$ فقط وقتی x مثبت یا صفر باشد، یك مقدار حقیقی از y را به‌دست می‌دهد. وقتی x منفی باشد، عدد $y=\sqrt{x}$ یك عدد حقیقی نیست. بنابراین، دامنهٔ $y=\sqrt{x}$ عبارت است از بازهٔ $x\geqslant 0$.

درفرمول $y=\sqrt{4-x}$، کمیت $4-x$ نمی‌تواند منفی باشد. یعنی $4-x$ باید ناکمتر از ۰ باشد. با استفاده از علائم می‌توان نوشت

$$0\leqslant 4-x \tag{۲}$$

یا



۳۵۰۱ نیمخطهای روی خط اعداد وخود خط، **بازه‌های نامتناهی** نامیده می‌شوند. علامت ∞ (بینهایت) فقط برای آسانی کار در نمادگذاری به‌کار می‌رود؛ آن را نباید به‌این معنی گرفت‌که یك عدد ∞ وجود دارد.

$$x\leqslant 4. \tag{۳}$$

فرمول $y=\sqrt{4-x}$ به‌ازای هر x نابیشتر از ۴ مقداری حقیقی از y را به‌دست می‌دهد. ■

متغیرهای مستقل و وابسته، هشداری دربارهٔ تقسیم بر ۰، و قراردادی درمورد دامنه

متغیر x دریك تابع $y=f(x)$، **متغیر مستقل** یا **شناسهٔ** تابع نامیده می‌شود. متغیر y که مقدارش به x وابسته است، **متغیر وابستهٔ** تابع خوانده می‌شود.

وقتی تابع را تعریف می‌کنیم باید دو محدودیت را درنظر داشته باشیم. اول اینکه، هرگز نباید عمل تقسیم بر ۰ را انجام دهیم. وقتی رابطهٔ $y=1/x$ را می‌بینیم باید درنظر داشته باشیم که $x\neq 0$. صفر در دامنهٔ تابع قرار ندارد. وقتی فرمول $y=1/(x-2)$ را ملاحظه می‌کنیم، باید درنظر داشته باشیم‌که $x\neq 2$. دوم اینکه ما فقط با توابعی سروکار داریم‌که مقادیرشان حقیقی است (بجز درقسمت بسیارکوتاهی ازکتاب‌که بعداً خواهیم دید). بنابراین، وقتی با ریشهٔ دوم (یا چهارم، یا هر ریشهٔ دیگری

از درجهٔ زوج) روبرو می‌شویم باید دامنه را محدود کنیم. اگر $y=\sqrt{1-x^2}$، باید فکر کنیم که «x^2 نباید بزرگتر از ۱ باشد. دامنه نباید در بیرون بازهٔ $-1 \leqslant x \leqslant 1$ ادامه داشته باشد.»

درمورد دامنهٔ تابعی که با فرمول تعریف می‌شود، قراردادی را رعایت می‌کنیم. دامنه اگر به‌طور صریح مشخص نشده باشد، خود به‌خود عبارت است از بزرگترین مجموعه ازمقادیر x که به‌ازای آنها فرمول مربوطه مقادیری حقیقی از y را به‌دست دهد. اگر بخواهیم مقداری را از دامنه خارج سازیم، باید صریحاً ذکر کنیم. فرمول $y=x^2$ به‌ازای هرمقدار x مقداری حقیقی از y را به‌دست می‌دهد. بنا براین، اگر بدون ذکر محدودیت بنویسیم

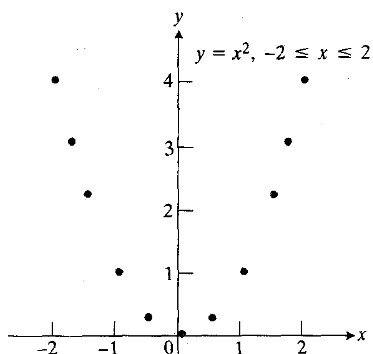
$$y=x^2$$

دامنهٔ موردنظر عبارت است از $-\infty < x < \infty$. برای خارج‌ساختن مقادیر منفی می‌نویسیم

$$y=x^2, \quad x \geqslant 0.$$

x	$y=x^2$
−۲٫۰	۴٫۰
−۱٫۷۵	۳٫۰۶۲۵
−۱٫۵	۲٫۲۵
−۱٫۰	۱٫۰
−۰٫۵	۰٫۲۵
۰	۰
۰٫۵	۰٫۲۵
۱٫۰	۱٫۰
۱٫۵	۲٫۲۵
۱٫۷۵	۳٫۰۶۲۵
۲٫۰	۴٫۰

(الف)



(ب)

۳۶۰۱ (الف) جدول جفتهای ورودی-خروجی تابع $y=x^2$. (ب) نقاطی که با استفاده از قسمت (الف) مشخص شده‌اند.

نمودار و ترسیم آن

نقاطی ازصفحه که جفتهای مختصات آنها جفتهای ورودی-خروجی یك تابع هستند، **نمودار** تابع را تشکیل می‌دهند. مثلا، خط L در شکل ۳۰۰۱ نمودار تابع $y=x+2$ است زیرا مجموعهٔ نقاطی ازصفحه است که جفتهای مختصات (x, y) آنها زوجهای ورودی-خروجی این تابع هستند.

مثال ۵ نمودار تابع $y=x^2$ را در بازهٔ $-2 \leqslant x \leqslant 2$ رسم کنید.

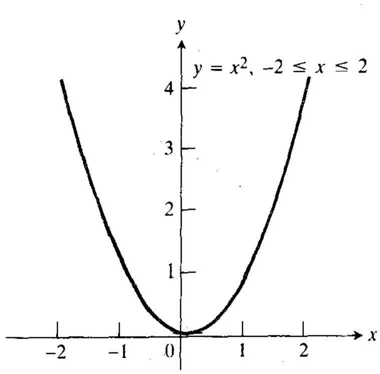
حل: برای ترسیم نمودار تابع، گامهای زیر را برمی‌داریم:

۱. جدولی ازجفتهای ورودی-خروجی تابع تشکیل می‌دهیم (شکل ۳۶۰۱ الف).

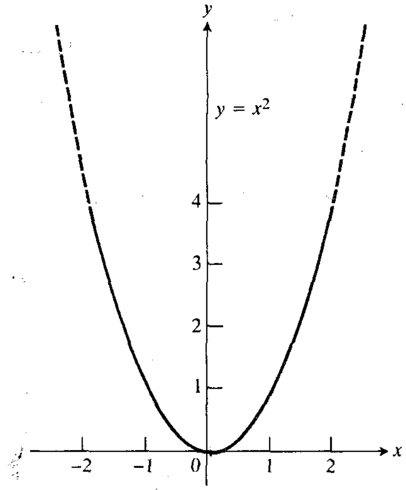
۲. نقاط متناظر را مشخص می‌کنیم تا شکل نمودار را نشان دهند (شکل ۳۶۰۱ ب).

۳. با وصل کردن نقاط، نمودار را رسم می‌کنیم (شکل ۳۷۰۱). ■

درمثال ۵ نمودار $y=x^2$ را در بازهٔ $-2 \leqslant x \leqslant 2$ رسم کردیم. دربارهٔ بقیهٔ نمودار چه می‌توان گفت؟ دامنه و برد $y=x^2$ هر دو نامتناهی‌اند، پس نمی‌توانیم امیدوار باشیم که تمام نمودار را رسم کنیم. ولی با بررسی فرمول $y=x^2$ و با توجه به‌شکلی که پیش‌رو داریم می‌توانیم تصور کنیم که نمودار به‌چه صورتی است. به‌موازات آنکه x درهریك از دو جهت از بازهٔ $-2 \leqslant x \leqslant 2$ دور می‌شود، $y=x^2$ به سرعت افزایش می‌یابد. وقتی x برابر با ۵ است، y برابر با ۲۵ است. وقتی x مساوی ۱۰ است، y مساوی ۱۰۰ است. نموداری که درشکل ۳۸۰۱ دیده می‌شود، همان‌نمودار شکل ۳۷۰۱ است که به سمت بالا ادامه یافته است.



۳۷۰۱ شکل ۳۶۰۱ که در آن، نقاط به‌هم وصل شده‌اند.



۳۸.۱ نمودار ۳۷.۱ که به‌سمت بالا ادامه یافته‌است.

ایدهٔ اصلی در ترسیم نمودار خمهایی که به صورت خط مستقیم نیستند، این است که نقاطی را مشخص کنیم و به‌این‌کار ادامه دهیم تا شکل خم معلوم شود و سپس با استفاده از فرمول y ببینیم که وقتی x بین نقاط مشخص شده یا درخارج آنها تغییر می‌کند، y چگونه تغییر می‌یابد. اما چه نقاطی را مشخص کنیم؟

دراینجا، قواعدی برای انتخاب نقاط مناسب ذکر می‌کنیم. در فصل ۳ دربارهٔ استفاده از فرمول $y=f(x)$ برای پیشگویی نحوهٔ تغییر y بین نقاط مشخص شده، بیشتر صحبت خواهیم کرد.

انتخاب نقاط برای ترسیم نمودار $y=f(x)$

۱. نقاط تماس یا تقاطع نمودار با محورها را مشخص کنید. این نقاط با قراردادن $y=0$ و $x=0$ در معادلهٔ $y=f(x)$ غالباً به‌آسانی پیدا می‌شوند.

۲. چند نقطهٔ نزدیک مبدأ را مشخص کنید. غالباً وقتی مقادیر x کوچک‌اند، مقادیر y به‌آسانی محاسبه یا براورد می‌شوند.

۳. نمودار تابع را در نقاط انتهایی دامنه‌اش یا در نزدیکی آنها رسم کنید.

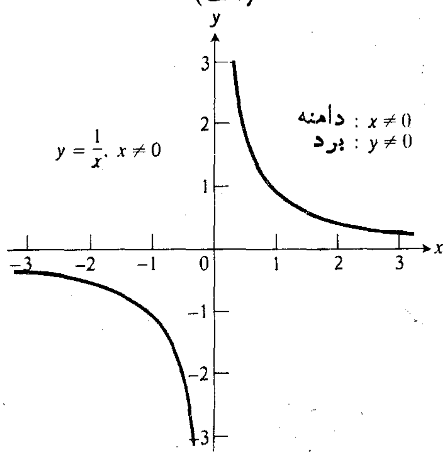
درشکلهای ۳۹.۱، ۴۰.۱، و ۴۱.۱ نمودار تابعهای $y=1/x$، $y=\sqrt{x}$، و $y=\sqrt{4-x}$ ازمثال ۴ دیده می‌شود. نمودار تابع $y=\sqrt{1-x^2}$ از مثال ۴، نیمدایرهٔ بالایی شکل ۳۳.۱ است.

تابعهایی که قطعه قطعه تعریف می‌شوند

توابعی که تاکنون نمودارشان را رسم کرده‌ایم، هریك به وسیلهٔ یك تك فرمول تعریف شده است. ولی در تعریف بعضی ازتوابع، فرمولهای مختلفی برای بخشهای مختلف دامنه به‌کار می‌رود. تابعی که درمثال زیر می‌آید، با سه فرمول تعریف می‌شود، یکی دربازهٔ $x<0$، دیگری در بازهٔ $0\leqslant x\leqslant 1$ و سومی در بازهٔ $x>1$.

x	$y=1/x$
−۲	−۱/۲
−۱	−۱
−۱/۲	−۲
−۱/۳	−۳
۱/۳	۳
۱/۲	۲
۱	۱
۲	۱/۲

(الف)

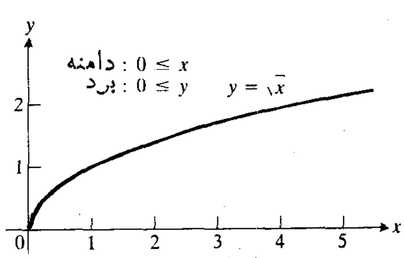


(ب)

۳۹.۱ (الف) مقادیر $y=1/x$ به ازای چند مقدار x. (ب) نمودار $y=1/x$.

x	$y=\sqrt{x}$
۰	۰
۱/۴	۱/۲
۱	۱
۲	$\sqrt{۲}$
۴	۲

(الف)

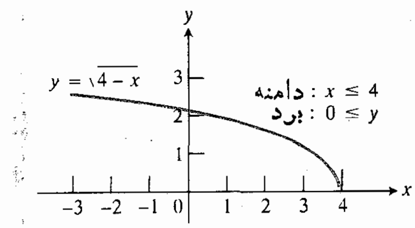


(ب)

۴۰.۱ (الف) مقادیر $y=\sqrt{x}$ به‌ازای چند مقدار x. (ب) نمودار $y=\sqrt{x}$.

x	$y=\sqrt{۴-x}$
۴٫۰	۰
۳٫۷۵	۰٫۵
۲٫۰	$\sqrt{۲}$
۰	۲٫۰
-۲	$\sqrt{۶}$

(الف)



(ب)

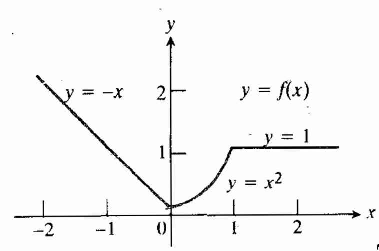
۴۱۰۱ (الف) مقادیر $y=\sqrt{۴-x}$ به‌ازای چند مقدار x. (ب) نمودار $y=\sqrt{۴-x}$.

با این حال، تابع فقط یک تابع است. دامنه‌اش، $-\infty<x<\infty$ است.

مثال ۶ مقادیر تابع

$$y=f(x)=\begin{cases}-x & x<۰\\ x^۲ & ۰\leqslant x\leqslant ۱\\ ۱ & x>۱.\end{cases}$$

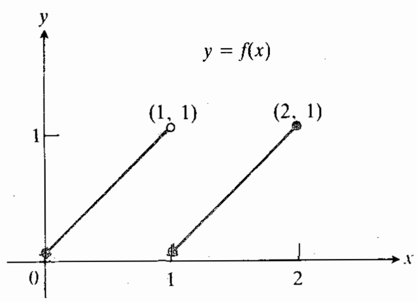
با فرمولهای $y=-x$ به ازای $x<۰$، $y=x^۲$ به ازای $۰\leqslant x\leqslant ۱$، و $y=۱$ به‌ازای $x>۱$ معین می‌شوند. شکل ۴۲۰۱ را ببینید.



۴۲۰۱ تابع $y=f(x)$ که نمودارش در اینجا دیده می‌شود با استفاده از فرمولهای مختلفی برای بخشهای گوناگون دامنهٔ آن رسم شده است. ■

مثال ۷ فرض کنید که نمودار تابعی چون $y=f(x)$ مرکب از پاره خطهایی است که در شکل ۴۳۰۱ نشان داده شده است. فرمولی برای f بنویسید.

حل: فرمولهایی برای پاره خطهای از (۰, ۰) به (۱, ۱) و از (۱, ۰) به (۲, ۱) می‌یابیم و سپس آنها را به‌روش مثال ۶ یکپارچه می‌کنیم.



۴۳۰۱ نمودار تابع $y=f(x)$ (مثال ۷) که در اینجا نشان داده می‌شود از دو پاره‌خط تشکیل یافته است. پاره‌خط سمت چپ یك نقطهٔ انتهایی خود را که در مبدأ است (و با نقطهٔ توپر نشان داده شده) در بر دارد ولی شامل نقطهٔ انتهایی (۱, ۱) نیست. پاره‌خط سمت راست هر دو نقطه را در بر دارد.

پاره‌خط از (۰, ۰) تا (۱, ۱). پاره خط گذرنده از (۰, ۰) و (۱, ۱) دارای شیب $m=(۱-۰)/(۱-۰)=۱$ و عرض از مبدأ $b=۰$ است. بنابراین، معادلهٔ شیب-عرض از مبدأ خط، $y=x$ است. پاره خط از (۰, ۰) تا (۱, ۱) که شامل نقطهٔ (۰, ۰) است ولی دربردارندهٔ (۱, ۱) نیست، نمودار تابع $y=x$ است که به بازهٔ نیمباز $۰\leqslant x<۱$ محدود شده باشد، یعنی

$$y=x,\quad ۰\leqslant x<۱.$$

پاره خط از (۱, ۰) تا (۲, ۱). خط گذرنده از (۱, ۰) و (۲, ۱) دارای شیب $m=(۱-۰)/(۲-۱)=۱$ است و از نقطهٔ (۱, ۰) می‌گذرد. پس معادلهٔ متناظر نقطه-شیب این خط چنین است

$$y-۰=۱(x-۱)\quad \text{یا}\quad y=x-۱.$$

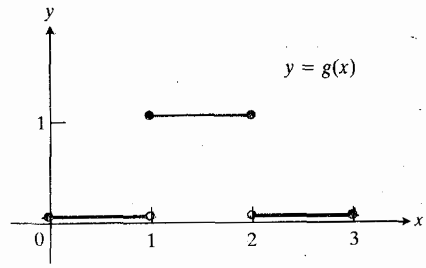
پاره خط از (۱, ۰) تا (۲, ۱) که شامل هردو نقطهٔ انتهایی خود باشد، نمودار $y=x-۱$ است که به‌بازهٔ بستهٔ $۱\leqslant x\leqslant ۲$ محدود شده باشد، یعنی

$$y=x-۱,\quad ۱\leqslant x\leqslant ۲.$$

فرمول تابع $y=f(x)$ که در شکل ۴۳۰۱ نشان داده شده است. مقادیر f روی بازهٔ $۰\leqslant x\leqslant ۲$ با ترکیب فرمولهایی که برای دوپاره خط نمودار به‌دست آوردیم، معین می‌شوند:

$$f(x)=\begin{cases} x & ۰\leqslant x<۱ \\ x-۱ & ۱\leqslant x\leqslant ۲. \end{cases}$$ ■

مثال ۸ دامنهٔ تابع «پله‌ای» $y=f(x)$ که نمودارش در شکل ۴۴۰۱ دیده می‌شود، بازهٔ بستهٔ $۰\leqslant x\leqslant ۳$ است. فرمولی برای $g(x)$ بیابید.



۴۴۰۱ توابعی نظیر تابعی که نمودارش در اینجا دیده می‌شود، **توابع پله‌ای** نامیده می‌شوند. مثال ۸ نشان می‌دهد که چگونه فرمولی برای g بنویسیم.

حل: نمودار از سه پاره‌خط افقی تشکیل یافته است. پاره‌خط سمت چپ، بازهٔ نیمباز $۰\leqslant x<۱$ روی محور x است که می‌توانیم آن را بخشی از خط $y=۰$ درنظر بگیریم

$$y=۰,\quad ۰\leqslant x<۱\,.$$

پاره‌خط دوم بخشی از خط $y=۱$ است که بالای بازهٔ بستهٔ $۱\leqslant x\leqslant ۲$ قرار دارد

$$y=۱,\quad ۱\leqslant x\leqslant ۲\,.$$

پاره‌خط سوم، بازهٔ نیمباز $۲<x\leqslant ۳$ روی خط $y=۰$ است

$$y=۰,\quad ۲<x\leqslant ۳\,.$$

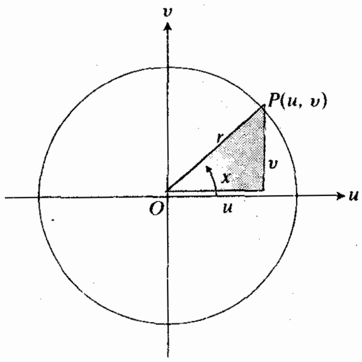
پس مقادیر g با فرمول سه قسمتی زیر معین می‌شوند:

$$g(x)=\begin{cases} ۰ & ۰\leqslant x<۱ \\ ۱ & ۱\leqslant x\leqslant ۲ \\ ۰ & ۲<x\leqslant ۳\,. \end{cases}$$ ■

سینوس، کسینوس، و تانژانت

وقتی زاویه‌ای به‌اندازهٔ x (برحسب درجه یا رادیان) در وضع متداول در مرکز دایره‌ای به‌شعاع r قرار دارد، همان‌طورکه در شکل ۴۵۰۱ دیده می‌شود، مقادیر سینوس، کسینوس، و تانژانت زاویه از فرمولهای زیر به‌دست می‌آیند

$$\sin x=\frac{v}{r},\qquad \cos x=\frac{u}{r},\qquad \tan x=\frac{v}{u}\,. \tag{۴}$$



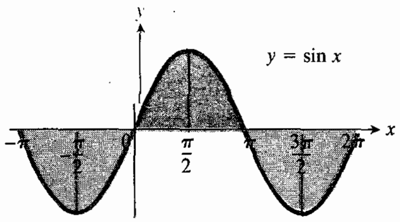
۴۵۰۱ زاویهٔ x در وضع متداول.

نمودار توابع $y=\sin x$، $y=\cos x$، و $y=\tan x$ درصفحهٔ xy درشکل ۴۶۰۱ دیده می‌شود.

تابع $\tan x$ به‌ازای زوایایی‌که برای آنها مخرج u صفر است، تعریف نمی‌شود. منظور، زاویه‌های $\pm ۹۰^\circ$، $\pm ۲۷۰^\circ$، و نظایر اینهاست. این زاویه‌ها از دامنهٔ تابع تانژانتی‌کنار گذاشته می‌شوند. زوایای‌کنار گذاشته شده برحسب رادیان عبارت‌اند از $\pm\pi/۲$، $\pm ۳\pi/۲$، ... . جدول ۱۰۱ و شکل ۴۶۰۱ را ببینید.

جدول ۱۰۱ مقادیر $\sin x$، $\cos x$، و $\tan x$ برای مقادیر انتخاب شده‌ای از x.

درجه	-۱۸۰	-۱۳۵	-۹۰	-۴۵	۰	۴۵	۹۰	۱۳۵	۱۸۰
x (برحسب رادیان)	$-\pi$	$-۳\pi/۴$	$-\pi/۲$	$-\pi/۴$	۰	$\pi/۴$	$\pi/۲$	$۳\pi/۴$	π
$\sin x$	۰	$-\sqrt{۲}/۲$	-۱	$-\sqrt{۲}/۲$	۰	$\sqrt{۲}/۲$	۱	$\sqrt{۲}/۲$	۰
$\cos x$	-۱	$-\sqrt{۲}/۲$	۰	$\sqrt{۲}/۲$	۱	$\sqrt{۲}/۲$	۰	$-\sqrt{۲}/۲$	-۱
$\tan x$	۰	۱		-۱	۰	۱		-۱	۰

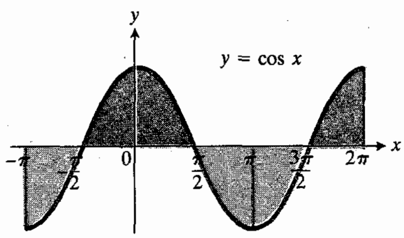


تابع: $y=\sin x$

دامنه: $-\infty < x < \infty$

برد: $-1 \leqslant y \leqslant 1$

(الف)

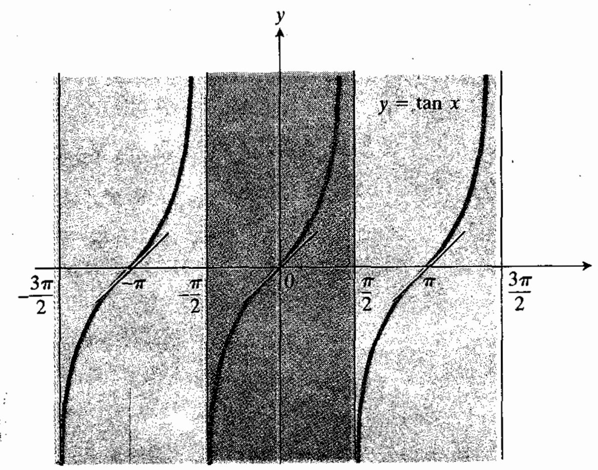


تابع: $y=\cos x$

دامنه: $-\infty < x < \infty$

برد: $-1 \leqslant y \leqslant 1$

(ب)



تابع: $y=\tan x$

دامنه: همهٔ اعدادحقیقی به‌استثنای مضارب صحیح فرد $\pi/2$

برد: $-\infty < y < \infty$

(پ)

۱.۴۶ نمودارتابعهای (الف) سینوسی، (ب) کسینوسی، و (پ) تانژانتی.

توجه کنید که

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

با توجه به‌این فرمول می‌توان توضیح داد که چرا نمودار تابع تانژانتی وقتی که x به‌مضرب صحیح فردی از $\pi/2$ نزدیك می‌شود، به‌اصطلاح «می‌ترکد». دراین‌گونه نقاط، سینوس برابر ۱ وکسینوس برابر ۰ است.

اخترشناسان، دریانوردان، و مساحان زاویه را برحسب درجه اندازه می‌گیرند، ولی در حساب دیفرانسیل و انتگرال، همان‌طورکه درفصل ۲ خواهیم دید، بهتر است که اندازه‌گیری برحسب رادیان باشد؛ به‌این دلیل، جدول ۱.۱ اندازه‌ها را هم برحسب رادیان وهم برحسب درجه نشان می‌دهد. ولی اگرمطالب مربوط به‌مثلثات و اندازهٔ رادیانی را ازیاد برده‌اید، نگران نباشید. مسائل انتهای این بخش به‌شما کمك خواهدکرد و نیز در فصل ۲ پیش ازآنکه از مثلثات به‌طور جدی استفاده کنیم، آن را مرور خواهیم کرد.

مثال ۹ دامنه و برد توابع زیر را بیابید.

الف) $y=\sin^2 x$

ب) $y=5\cos 2x$

پ) $y=-\tan x$

حل:

الف) تابع $y=\sin^2 x$ در هرجایی که $\sin x$ تعریف می‌شود، قابل تعریف است ومقادیرش مربعات مقادیر $\sin x$ هستند. دامنه‌اش مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی است. چون مقادیر $\sin x$ بازهٔ از -1 تا ۱ را پر می‌کنند، مقادیر $\sin^2 x$ بازهٔ از ۰ تا ۱ را می‌پوشانند.

ب) برای محاسبهٔ $y=5\cos 2x$، x را در ۲ ضرب می‌کنیم، کسینوس را می‌یابیم، و حاصل را در ۵ ضرب می‌کنیم. این تابع به‌ازای همهٔ مقادیر حقیقی x تعریف می‌شود. چون $\cos 2x$ از -1 تا ۱ تغییر می‌کند، $y=5\cos 2x$ از -5 تا ۵ تغییر می‌کند. نتیجه می‌گیریم که دامنه عبارت است از $-\infty < x < \infty$ و برد عبارت است از $-5 \leqslant y \leqslant 5$.

پ) برای محاسبهٔ $y=-\tan x$، $\tan x$ را حساب می‌کنیم و حاصل را در -1 ضرب می‌کنیم. درهرجاکه $\tan x$ قابل تعریف باشد، این تابع هم تعریف می‌شود، یعنی دامنه‌اش همهٔ مقادیر حقیقی x به‌استثنای مضارب صحیح فرد $\pi/2$ است. برد

تـابع، مجموعهٔ همهٔ مقادیـر حقیقی، یعنی $-\infty < y < \infty$ است. ■

مجموع، تفاضل، حاصلضرب، وخارج‌قسمت توابع

اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابعی با دامنه‌های D_f و D_g باشند، آنگاه

مجموع	$f(x)+g(x)$
تفاضل	$f(x)-g(x),\ \ g(x)-f(x)$
حاصلضرب	$f(x)\cdot g(x)$
خارج‌قسمت	$\dfrac{f(x)}{g(x)},\ g(x)\neq 0,\ \dfrac{g(x)}{f(x)},\ f(x)\neq 0$

نیز توابعی از x هستندکه به‌ازای هرمقدار x که هم در D_f و هم در D_g باشد، تعریف می‌شوند. ولی برای اینکه دامنهٔ خارج‌قسمت $f(x)/g(x)$ به‌دست آید باید نقاطی که به‌ازای آنها $g(x)=0$ کنار گذاشته شوند. به‌همین نحو، هر نقطه‌ای که در آن $f(x)=0$، بایدکنار گذاشته شود تا دامنهٔ خارج‌قسمت $g(x)/f(x)$ به‌دست آید.

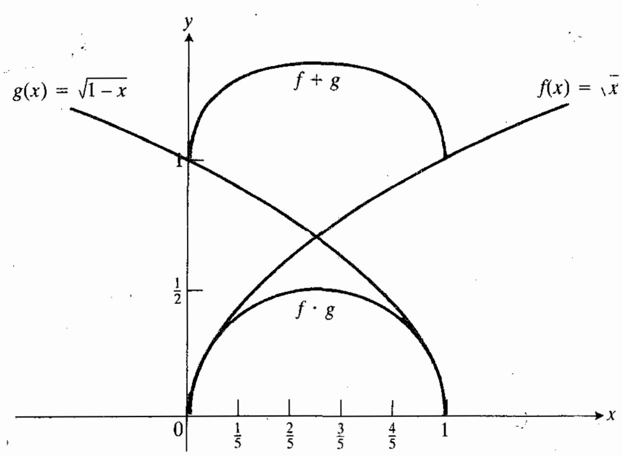
مثال ۱۰ دامنه‌های توابع

$$f(x)=\sqrt{x},\qquad g(x)=\sqrt{1-x}$$

و دامنه‌های متناظر $f+g$، $f-g$، $g-f$، $f\cdot g$، f/g، و g/f را به‌دست آورید.

حل: به‌شکل ۴۷.۱ نگاه کنید. دامنه‌های f و g عبارت‌اند از

$$D_f=[0,\infty),\quad D_g=(-\infty,1].$$



۴۷.۱ دامنهٔ تابع $f+g$، اشتراک دامنه‌های f و g است، یعنی بازهٔ $[0,1]$ روی محور x. این بازه، دامنهٔ تابع $f\cdot g$ نیز هست. مثال ۱۰ را ببینید.

نقاط مشترک این دامنه‌هـا، نقاط بـازهٔ بستهٔ $[0,1]$ هستند. روی $[0,1]$ داریم

مجموع $f+g$:	$f(x)+g(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$
تفاضل $f-g$:	$f(x)-g(x)=\sqrt{x}-\sqrt{1-x}$
$g-f$:	$g(x)-f(x)=\sqrt{1-x}-\sqrt{x}$
حاصلضرب $f\cdot g$:	$f(x)\cdot g(x)=\sqrt{x(1-x)}$
خارج‌قسمت f/g:	$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\sqrt{\dfrac{x}{1-x}},\ x\neq 1$
g/f:	$\dfrac{g(x)}{f(x)}=\sqrt{\dfrac{1-x}{x}},\ x\neq 0$

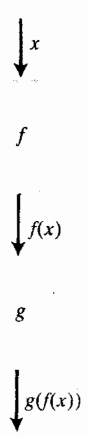
دامنهٔ توابع $f+g$، $f-g$، $g-f$، و $f\cdot g$، همین بازهٔ بستهٔ $[0,1]$ است.

عدد $x=1$ را بـاید از دامنهٔ f/g کنار گذاشت زیـرا $g(1)=\sqrt{1-1}=0$. بنابراین، دامنهٔ f/g بازهٔ نیمباز $[0,1)$ است.

همین‌طور، عدد $x=0$ باید از دامنهٔ g/f کنارگذاشته شود زیرا $f(0)=\sqrt{0}=0$. پس دامنهٔ g/f، بازهٔ نیمباز $(0,1]$ است. ■

ترکیب تابعها

فرض کنیدکه خروجیهای تابعی چون f را بتوان به‌عنوان ورودیهای تابعی چون g به‌کار برد. دراین صورت، چنانکه در شکل ۴۸.۱ دیده‌می‌شود، می‌توانیم f و g را باهم ترکیب کنیم تا تابع جدیدی تشکیل شود که ورودیهایش ورودیهای f و خروجیهایش اعـداد $g(f(x))$ بـاشند. گوییم تابع $g(f(x))$ (کـه خوانده می‌شود «جي افِ اکس») **ترکیب** f و g است. این تابع با ترکیب‌کردن



۴۸.۱ دو تابع را وقتی می‌توان باهم ترکیب کردکه برد اولی در دامنهٔ دومی واقع باشد.

f و g به‌دست می‌آید، به‌این ترتیب که اول f وارد کار می‌شود و بعد g. نماد معمولی این ترکیب، $g\circ f$ است که خوانده می‌شود «جی‌اف» بنابراین، مقدار $g\circ f$ در x برابر است با

$$(f\circ g)(x)=g(f(x)).$$

مثال ۱۱ اگر $f(x)=\sin x$ و $g(x)=-x/۲$، فرمولی برای ترکیب $g(f(x))$ بنویسید.

حل: همان‌طورکه ازشکل ۴۸۰۱ برمی‌آید، می‌توانیم با قراردادن $f(x)=\sin x$ به جای متغیر ورودی x در $g(x)=-x/۲$، فرمولی برای $g(f(x))$ به‌دست آوریم

$$g(x)=-\frac{x}{۲}$$

$$g(f(x))=-\frac{f(x)}{۲}=-\frac{\sin x}{۲}.$$

فرمولی که درجستجوی آن هستیم، این است

$$g(f(x))=-\frac{\sin x}{۲}.$$ ■

مثال ۱۲ اگر $f(x)=x^۲$ و $g(x)=x-۷$، فرمولی برای $g(f(x))$ بیابید. سپس مقدار $g(f(۲))$ را پیدا کنید.

حل: برای یافتن $g(f(x))$، به‌جای x درفرمول $g(x)$ عبارت مربوط به $f(x)$ را قرار می‌دهیم

$$g(x)=x-۷$$

$$g(f(x))=f(x)-۷=x^۲-۷.$$

سپس‌مقدار $g(f(۲))$ را با قراردادن ۲ به‌جای x به‌دست‌می‌آوریم

$$g(f(۲))=(۲)^۲-۷=۴-۷=-۳.$$ ■

اگر ترتیب ترکیب‌کردن توابع تغییر کند، معمولاً نتیجه تغییر می‌کند. درمثال ۱۲، توابع $f(x)=x^۲$ و $g(x)=x-۷$ را با این ترتیب ترکیب کردیم که اول f و بعد g را به‌کار بردیم و تابع $g\circ f$ را به‌دست‌آوردیم که مقدارش در x برابر $g(f(x))=x^۲-۷$ است. درمثال زیر می‌بینیم که وقتی ترتیب را معکوس می‌کنیم تا تابع $f\circ g$ را به‌دست آوریم، چه اتفاقی می‌افتد.

مثال ۱۳ اگر $f(x)=x^۲$ و $g(x)=x-۷$، فرمولی برای $f(g(x))$ بیابید. سپس $f(g(۲))$ را پیدا کنید.

حل: برای یافتن $f(g(x))$، در فرمول مربوط به $f(x)$ به‌جای x عبارت مربوط به $g(x)$ را قرار می‌دهیم

$$f(x)=x^۲$$

$$f(g(x))=(g(x))^۲=(x-۷)^۲.$$

وسپس برای پیداکردن $f(g(۲))$، ۲ را به‌جای x قرارمی‌دهیم

$$f(g(۲))=(۲-۷)^۲=(-۵)^۲=۲۵.$$ ■

نکته: در نماد تابعهای مرکب، پرانتز نشان می‌دهد که‌کدام تابع اول وارد کار می‌شود:

نماد $g(f(x))$ می‌گوید «اول f، بعد g». برای محاسبهٔ $g(f(۲))$، ابتدا $f(۲)$ را به‌دست می‌آوریم و سپس g را اعمال می‌کنیم.

نماد $f(g(x))$ می‌گوید «اول g، بعد f». برای محاسبهٔ $f(g(۲))$، ابتدا $g(۲)$ را به‌دست می‌آوریم و سپس f را اعمال می‌کنیم.

مسأله‌ها

درمسأله‌های ۱–۱۲، دامنه و برد هرتابع را بیابید.

۱. $y=۲\sqrt{x}$

۲. $y=۱+\sqrt{x}$

۳. $y=-\sqrt{x}$

۴. $y=\sqrt{-x}$

۵. $y=\sqrt{x+۴}$

۶. $y=\sqrt{x-۲}$

۷. $y=\frac{۱}{x-۲}$

۸. $y=\frac{۱}{x+۲}$

۹. $y=۲\cos x$

۱۰. $y=-\cos x$

۱۱. $y=-۳\sin x$

۱۲. $y=۲\sin ۴x$

درمسأله‌های ۱۳–۳۰، (الف) دامنه و (ب) برد تابع را بیابید. سپس (پ) نمودار تابع را رسم کنید.

۱۳. $y=x^۲+۱$

۱۴. $y=x^{۲}-۲$

۱۵. $y=-x^{۲}$

۱۶. $y=۴-x^{۲}$

۱۷. $y=\sqrt{x+۱}$

۱۸. $y=\sqrt{۴-x}$

۱۹. $y=۱+\sqrt{x}$

۲۰. $y=\sqrt{۹-x^{۲}}$

۲۱. $y=(\sqrt{۲x})^{۲}$

۲۲. $y=\frac{۲}{x}$

۲۳. $y=-\frac{۱}{x}$

۲۴. $y=\frac{۱}{x^{۲}}$

۲۵. $y=\sin ۲x$

۲۶. $y=\cos ۲x$

۲۷. $y=\sin^{۲} x$

۲۸. $y=\cos^{۲} x$

۲۹. $y=۱+\sin x$

۳۰. $y=۱-\cos x$

۳۱. تابع $y=۱/\sqrt{x}$ را درنظر بگیرید.
الف) آیا x می‌تواند منفی باشد؟
ب) آیا x می‌تواند برابر صفر باشد؟
پ) دامنهٔ تابع چیست؟

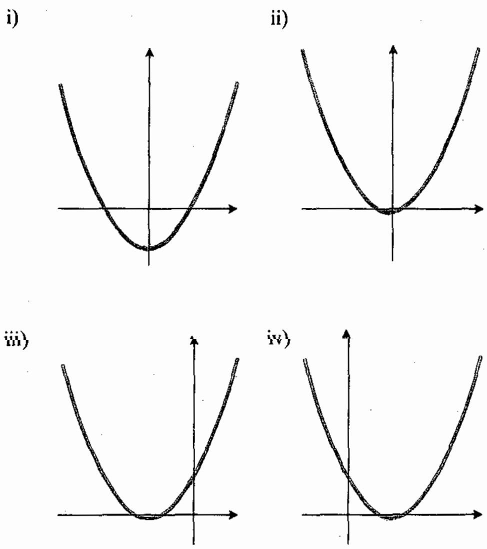
۳۲. تابع $y=\sqrt{۲-\sqrt{x}}$ را درنظر بگیرید.
الف) آیا x می‌تواند منفی باشد؟
ب) آیا $\sqrt{x}$ می‌تواند بزرگتر از ۲ باشد؟
پ) دامنهٔ تابع چیست؟

۳۳. تابع $y=\sqrt{(۱/x)-۱}$ را درنظر بگیرید.
الف) آیا x می‌تواند منفی باشد؟
ب) آیا x می‌تواند برابر صفر باشد؟
پ) آیا x می‌تواند بزرگتر از ۱ باشد؟
ت) دامنهٔ تابع چیست؟

۳۴. تابع $y=\sqrt{(۱+\cos ۲x)/۲}$ را درنظر بگیرید.
الف) آیا x می‌تواند هرمقدار حقیقی را اختیار کند؟
ب) بزرگترین مقدار $\cos ۲x$ کدام است؟ کوچکترین‌مقدار آن چیست؟
پ) بزرگترین‌وکوچکترین‌مقدار $(۱+\cos ۲x)/۲$ چیست؟
ت) دامنه و برد $y=\sqrt{(۱+\cos ۲x)/۲}$ چیست؟

۳۵. تابع $y=\tan(x/۲)$ را درنظر بگیرید.
الف) چه مقادیری از $x/۲$ باید از دامنهٔ $\tan(x/۲)$ کنار گذاشته شوند؟
ب) چه مقادیری از x باید از دامنهٔ $\tan(x/۲)$ کنار گذاشته شوند؟
پ) تابع $y=\tan(x/۲)$ بر بازهٔ $-\pi<x<\pi$ چه مقادیری اختیار می‌کند؟
ت) دامنه و برد $y=\tan(x/۲)$ چیست؟

۳۶. از نمودارهای شکل ۴۹.۱ کدامها می‌توانند نمودار یکی از توابع زیر باشند و چرا؟
الف) $y=x^{۲}-۱$
ب) $y=(x-۱)^{۲}$



۴۹.۱ نمودارهای مربوط به‌مسأله‌های ۳۶ و ۳۷.

۳۷. از نمودارهای شکل ۴۹.۱ کدامها نمی‌توانند نمودار $y=۴x^{۲}$ باشند و چرا؟

۳۸. معادلهٔ $x=y^{۲}$ را نسبت به y حل کنید و دستگاهی از معادلات به‌دست آورید که هم‌ارز این معادله باشد و هریك از معادلات دستگاه، y را به صورت تابعی از x بیان کند. نمودار این دو معادله را رسم کنید. (راهنمایی: شکل ۴۰.۱ را ببینید).

۳۹. جدول مقادیر تابع زیر را به ازای $x=۰, ۱, ۲$ تشکیل

دهید و نمودار تابع را رسم کنید.

$$y=\begin{cases} x & ۰\leqslant x\leqslant ۱\\ ۲-x & ۱\leqslant x\leqslant ۲\end{cases}$$

نمودار توابع مذکور درمسائل ۴۰–۴۳ را رسم کنید.

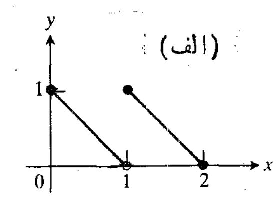
۴۰. $$y=\begin{cases} ۳-x & x\leqslant ۱\\ ۲x & ۱< x\end{cases}$$

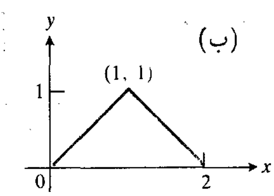
۴۱. $$y=\begin{cases} ۱/x & x< ۰\\ x & ۰\leqslant x\end{cases}$$

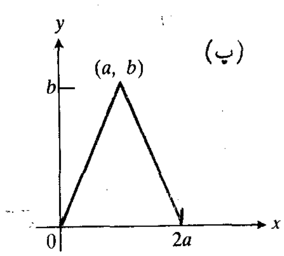
۴۲. $$y=\begin{cases} ۱ & x< ۵\\ ۰ & ۵\leqslant x\end{cases}$$

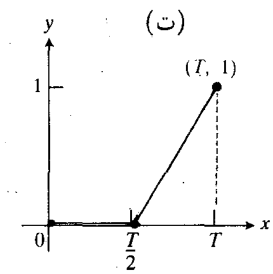
۴۳. $$y=\begin{cases} ۱ & x< ۰\\ \sqrt{x} & x\geqslant ۰\end{cases}$$

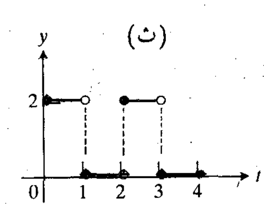
۴۴. برای توابعی که نمودارهای آنها در شکلهای زیر دیده می‌شود، فرمولهایی بیابید.

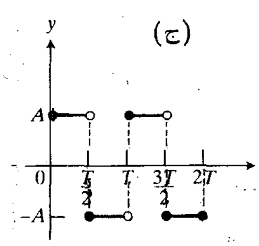












درمسأله‌های ۴۵–۴۷، دامنهٔ f و g و دامنه‌های متناظر $f+g$، $f-g$، $f\cdot g$، f/g، و g/f را به‌دست آورید.

۴۵. $f(x)=x,\ g(x)=\sqrt{x-۱}$

۴۶. $f(x)=\dfrac{۱}{x-۲},\ \ g(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{x-۱}}$

۴۷. $f(x)=\sqrt{x},\ \ g(x)=\sqrt[۴]{x+۱}$

۴۸. اگر $g(x)=۳۷-x-۳x^۳+x^۴$، آنگاه $g(-۲)$ برابر است با

الف) ۳۱.

ب) ۷۵.

پ) ۷۹.

ت) عددی جز اینها.

۴۹. اگر $h(x)=۱+۵/x$، مطلوب است

الف) $h(-۱)$

ب) $h(۱/۲)$

پ) $h(۵)$

ت) $h(۵x)$

ث) $h(۱۰x)$

ج) $h(۱/x)$

۵۰. اگر $f(x)=x+۵$ و $g(x)=x^۲-۳$، مطلوب است

الف) $g(f(۰))$

ب) $f(g(۰))$

پ) $g(f(x))$

ت) $f(g(x))$

ث) $f(f(-۵))$

ج) $g(g(۲))$

چ) $f(f(x))$

ح) $g(g(x))$

۵۱. فرض کنید $f(x)=(x-۱)/x$. نشان دهید که

$$f(x)\cdot f(۱-x)=۱.$$

۵۲. اگر $f(x)=۱/x$، مطلوب است

الف) $f(۲)$

ب) $f(x+۲)$

پ) $(f(x+۲)-f(۲))/۲$

۵۳. اگر $F(t)=۴t-۳$، مطلوب است

$$(F(t+h)-F(t))/h.$$

۵۴. درجدول زیر، جاهای خالی را پر کنید:

	$f(x)$	$g(x)$	$(g\circ f)(x)$
الف)	$x-۷$	$\sqrt{x}$	
ب)	$x+۲$	$۳x$	
پ)		$\sqrt{x-۵}$	$\sqrt{x^۲-۵}$
ت)	$\dfrac{x}{x-۱}$	$\dfrac{x}{x-۱}$	
ث)		$۱+\dfrac{۱}{x}$	x
ج)	$\dfrac{۱}{x}$		x

TOOLKIT PROGRAMS

Function Evaluator Super * Grapher
Name That Function

۵.۱ قدرمطلق

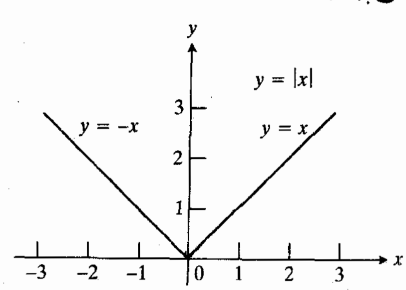
دراین بخش، قدرمطلق عدد حقیقی را معرفی می‌کنیم و نگاهی بر ویژگیهای قدرمطلق، که باعث می‌شود این مفهوم در حساب دیفرانسیل و انتگرال مفید باشد، می‌افکنیم. همچنین تابع «بزرگترین عدد صحیح» راکه در ریاضیات و علوم کامپیوتر مفید واقع می‌شود، بررسی می‌کنیم.

تابع قدرمطلق

قدرمطلق عددی مانند x، عدد $\sqrt{x^۲}$ است. اگر x مثبت باشد، قدرمطلق آن همان x است. ولی اگر x منفی باشد، قدرمطلق آن $-x$ است. اگر x صفر باشد، قدرمطلقش صفر است. نماد قدرمطلق، $|x|$ است که خوانده می‌شود «قدرمطلقِ اکس». پس

$$|x|=\sqrt{x^۲}=\begin{cases} x & x\geqslant ۰ \\ -x & x\leqslant ۰. \end{cases} \qquad (۱)$$

نمودار تابع $y=|x|$ درشکل ۵۰۱ رسم شده است.



۵۰۱ قدرمطلق تابع.

تعریف

قدرمطلق عددی چون x، عدد $|x|=\sqrt{x^۲}$ است.

مثال ۱ قدرمطلق ۳، برابر است با $۳=|۳|$. قدرمطلق ۰ برابر است با $۰=|۰|$. قدرمطلق $۵-$ برابر است با

$$|-۵|=-(-۵)=۵. \quad ■$$

مثال ۲ معادلهٔ $|۲x-۳|=۷$ را حل کنید.

حل: از $|۲x-۳|=۷$ نتیجه می‌شود که

$$۲x-۳=\pm۷$$

$$۲x=۳\pm۷$$

$$۲x=-۴ \quad \text{یا} \quad ۲x=۱۰$$

$$x=-۲ \quad \text{یا} \quad x=۵$$

معادله دوجواب دارد: $x=۵$ و $x=-۲$. ■

قدرمطلق حاصلضرب دو عدد، حاصلضرب قدرمطلقهای آنهاست. با استفاده از علائم می‌توان نوشت

(۲) به‌ازای همهٔ اعداد a و b، $|ab|=|a||b|$.

مثال ۳ مثالهایی از $|ab|=|a||b|$:

$$|(-۱)(۴)|=|-۱||۴|=(۱)(۴)=۴$$

$$|۳x|=|۳||x|=۳|x|$$

$$|-۲(x+۵)|=|-۲||x+۵|=۲|x+۵|. \quad ■$$

رابطهٔ (۲) برقرار است زیرا

$$|ab| \underset{\substack{\Uparrow\\ \text{تعریف } |ab|}}{=} \sqrt{(ab)^۲} \underset{\substack{\Uparrow\\ \text{زیرا}\\ (ab)^۲=a^۲b^۲}}{=} \sqrt{a^۲b^۲} \underset{\substack{\Uparrow\\ \text{ریشهٔ دوم}\\ \text{حاصلضرب}\\ \text{اعداد نامنفی،}\\ \text{حاصلضرب}\\ \text{ریشه‌های دوم}\\ \text{آنهاست.}}}{=} \sqrt{a^۲}\sqrt{b^۲} \underset{\substack{\Uparrow\\ \text{تعریف } |a| \text{ و}\\ \text{تعریف } |b|}}{=} |a||b| \qquad (۳)$$

قدرمطلق مجموع دو عدد هیچگاه بزرگتر از مجموع قدرمطلقهای آنها نیست. اگر این مطلب را با استفاده از علائم بیان کنیم، یك نابرابری به دست می‌آوریم که به‌نابرابری مثلثی معروف است.

نابرابری مثلثی

(۴) بهازای همهٔ اعداد a و b، $|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

مثال ۴ مثالهایی از $|a+b|\leqslant|a|+|b|$:

$$|۰+۵|=۵\leqslant|۰|+|۵|=۰+۵=۵$$
$$|-۳+۰|=۳\leqslant|-۳|+|۰|=۳+۰=۳$$
$$|۳+۵|=۸\leqslant|۳|+|۵|=۳+۵=۸$$
$$|-۳-۵|=۸\leqslant|-۳|+|-۵|=۳+۵=۸.$$

در هرچهار مورد، $|a+b|$ برابر است با $|a|+|b|$. ازطرف دیگر،

$$|-۳+۵|=|۲|<|-۳|+|۵|=۸$$
$$|۳-۵|=|-۲|<|۳|+|-۵|=۸.$$

در هر دومورد، $|a+b|$ کوچکتر از $|a|+|b|$ است. ■

قاعده این است که هرگاه علامت a و علامت b یکی نباشد، $|a+b|$ کوچکتر از $|a|+|b|$ است.

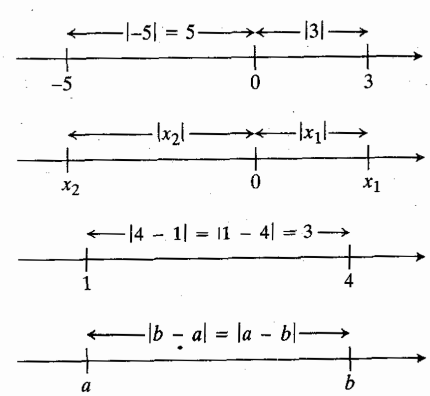
دقت کنید که خطهای نشاندهندهٔ قدرمطلق درعباراتی نظیر $|-۳+۵|$ حالتی مانند پرانتز دارند: قبل از قدرمطلق گرفتن، عمل جمع را انجام میدهیم.

قدرمطلق و فاصله

اعداد $|a-b|$ و $|b-a|$ همیشه برابرند زیرا

$$|a-b|=|(-۱)(b-a)|=|-۱||b-a|=|b-a|.$$

این قدرمطلقها فاصلهٔ بین a و b رویخط اعداد را بهدست میدهند (شکل ۵۱۰۱). این موضوع با فرمول ریشهٔ دوم برای فاصله در صفحه، مطابقت دارد زیرا



۵۱۰۱ قدرمطلقها، فواصل بین نقاط روی محورها را بهدست میدهند.

(۵) $\sqrt{(a-b)^۲+(۰-۰)^۲}=\sqrt{(a-b)^۲}=|a-b|$

(۶) $\sqrt{(۰-۰)^۲+(a-b)^۲}=\sqrt{(a-b)^۲}=|a-b|.$

(۷) بهازای همهٔ اعداد a و b، $|a-b|=|b-a|$.

این عدد، فاصلهٔ بین a و b روی خط اعداد است.

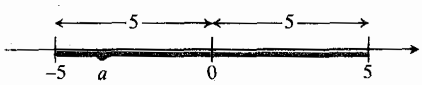
استفاده از قدرمطلق برای تعریف بازهها

رابطهٔ بین قدرمطلق و فاصله بهما امکان میدهد که نابرابریهای قدرمطلقی را برای مشخص کردن بازهها بهکار بریم.

یك نابرابریِ نظیر $|a|<۵$ حاکی ازآن است که فاصلهٔ a تا مبدأ کمتر از ۵ واحد است. این معادلاست با اینکه بگوییم a بین ۵− و ۵ قرار دارد. با استفاده از علائم میتوان نوشت

(۸) $$|a|<۵ \iff -۵<a<۵ .$$

مجموعهٔ اعداد a با ضابطهٔ $|a|<۵$ همان بازهٔ باز از ۵− تا ۵ است (شکل ۵۲۰۱).



۵۲۰۱ معنی $|a|<۵$ این است که $-۵<a<۵$.

درحالتکلی، اگر c عدد مثبتی باشد، قدرمطلق a کوچکتر از c است اگروتنها اگر a دربازهٔ بین $-c$ و c قرار داشتهباشد.

(۹) $$|a|<c \iff -c<a<c.$$

مثال ۵ مقادیری از x را بیابیدکه در نابرابری $|x-۵|<۹$ صدق کنند.

حل: ابتدا رابطهٔ (۹) را با ضوابط $a=x-۵$ و $c=۹$ بهکار میگیریم تا

$$|x-۵|<۹$$

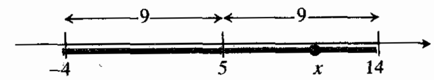
تبدیل شود به

(۱۰) $$-۹<x-۵<۹.$$

سپس، ۵ را بههر سهکمیت رابطهٔ (۱۰) میافزاییم تا x بهصورت تنها ظاهر شود

$$-۹+۵<x-۵+۵<۹+۵$$
$$-۴<x<۱۴.$$

این مراحل نشان میدهند که مقادیری از x که در نابرابری $|x-۵|<۹$ صدق میکنند، اعدادواقع دربازهٔ $-۴<x<۱۴$ هستند (شکل ۵۳۰۱ را ببینید).



۵۳۰۱ معنی $|x-5|<9$ این است که $-4<x<14$. ■

مثال ۶ مقادیری از x را بیابیدکه درنابرابری زیر صدق کنند

$$\left|\frac{3x+1}{2}\right|<1.$$

حل: نابرابری

$$\left|\frac{3x+1}{2}\right|<1$$

را تبدیل می‌کنیم به

$$-1<\frac{3x+1}{2}<1$$

و سپس به

$$-2<3x+1<2$$

و بعد به

$$-3<3x<1$$

و بالاخره به

$$-1<x<\frac{1}{3}.$$

(شکل ۵۴۰۱ را ببینید.)

۵۴۰۱ نابرابری

$$\left|\frac{3x+1}{2}\right|<1$$

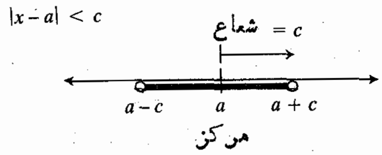
بر بازهٔ $-1<x<1/3$ برقرار است. ■

مثال ۷ نقاط انتهایی بازه‌ای را که با نامساوی $|x-a|<c$ معین می‌شود، پیداکنید.

حل: برای یافتن نقاط انتهایی بازهٔ $|x-a|<c$ (شکل ۵۵۰۱)، عملیات زیر را انجام می‌دهیم

$$|x-a|<c$$
$$-c<x-a<c$$
$$a-c<x<a+c.$$

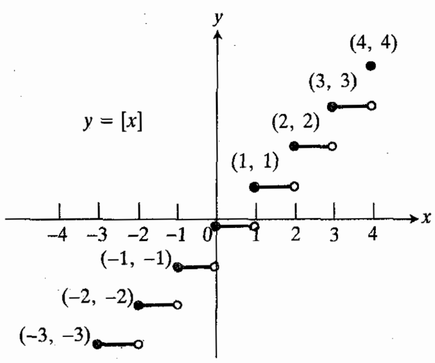
نقاط انتهایی، $a-c$ و $a+c$ هستند.



۵۵۰۱ بازهٔ باز $|x-a|<c$ از $a-c$ تا $a+c$ امتداد دارد. ■

تابع بزرگترین عدد صحیح

بزرگترین عدد صحیحی که نابیشتر از عددی چون x باشد، بزرگترین عدد صحیح موجود در x نامیده می‌شود. نماد آن، $[x]$ است که خوانده می‌شود «بزرگترین عدد صحیح موجود در x». نمودار تابع $y=[x]$ درشکل ۵۶۰۱ رسم شده‌است.



۵۶۰۱ نمودار $y=[x]$، بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از x. دامنه: $-\infty<x<\infty$؛ برد: اعداد صحیح. ■

مثال ۸ مقدار $[x]$ به‌ازای چند مقدار x:

مقادیر مثبت: $[3.4]=3, \quad [2]=2, \quad [1.9]=1,$

مقدار صفر: $[0]=0, \quad [0.5]=0,$

مقادیر منفی: $[-0.5]=-1, \quad [-1.2]=-2,$

دقت کنیدکه اگر x منفی باشد، $[x]$ ممکن است قدرمطلقش از قدرمطلق x بزرگتر باشد. ■

درعلم کامپیوتر، نماد معمولی برای بزرگترین عدد صحیح موجود در x این است

$$\lfloor x \rfloor \qquad (11)$$

نماد زیر نیز برای نشان دادن کوچکترین عدد صحیحی که ناکمتر از x باشد به‌کار می‌رود

$$\lceil x \rceil \qquad (12)$$

تابع بزرگترین عدد صحیح یك **تابع پله‌ای** است. مدل

بسیاری از چیزهایی را که در اطراف خود می‌بینیم می‌توان به‌صورت توابع پله‌ای درنظر گرفت، مثلاً

هزینهٔ پست‌کردن بسته به‌صورت تابعی از وزن

عملکرد چراغ چشمک‌زن به‌صورت تابعی از زمان

عددی که ماشینی با خروجیهای رقمی نشان‌می‌دهد، به‌صورت تابعی از زمان

توابع پله‌ای دارای نقاط **ناپیوستگی** هستند، یعنی نقاطی که در آنها تابع ازمقداری به‌مقدار دیگر می‌جهد بدون آنکه هیچ‌یك از مقادیر میانی را اختیار کند. همان‌طورکه در شکل ۵۶٫۱ دیده می‌شود، $y=[x]$ از $y=۱$ به‌ازای $x<۲$، به $y=۲$ به‌ازای $x=۲$ می‌جهد بدون آنکه‌هیچ‌یك از مقادیر بین ۱ و ۲ را بگیرد.

ویژگیهای عددی قدرمطلق

۱. $|a|=\sqrt{a^۲}$ (تعریف $|a|$)

۲. $|ab|=|a||b|$

۳. $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$

۴. $|a-b|=|b-a|$

۵. $|a+b|\leqslant|a|+|b|$

ویژگیهای ۱ـ۵ برای همهٔ اعداد a و b برقرارند.

بازه و قدرمطلق

۶. $-c<a<c \iff |a|<c$

۷. $a-c<x<a+c \iff |x-a|<c$

مسأله‌ها

درمسأله‌های ۱ـ۴، قدرمطلق را حساب کنید.

۱. $|-۳|$

۲. $|۲-۷|$

۳. $|-۲+۷|$

۴. $|۱٫۱-۵٫۲|$

درمسأله‌های ۵ـ۱۰، معادله را حل کنید.

۵. $|x|=۲$

۶. $|x-۳|=۷$

۷. $|۲x+۵|=۴$

۸. $|۱-x|=۱$

۹. $|۸-۳x|=۹$

۱۰. $\left|\frac{x}{۲}-۱\right|=۱$

درمسأله‌های ۱۱ـ۲۰، هریك ازنابرابریهای قدرمطلقی را با بازهٔ متناظر آن جور کنید.

۱۱. $|x|<۲$	الف) $-۲<x<۱$
۱۲. $|x+۳|<۱$	ب) $-۱<x<۳$
۱۳. $|x-۵|<۲$	پ) $۳<x<۷$
۱۴. $\left|\frac{x}{۲}\right|<۱$	ت) $-\frac{۵}{۲}<x<-\frac{۳}{۲}$
۱۵. $|۱-x|<۲$	ث) $-۲<x<۲$
۱۶. $|۲x-۵|\leqslant۱$	ج) $-۴<x<۴$
۱۷. $|۲x+۴|<۱$	چ) $-۴<x<-۲$
۱۸. $\left|\frac{x-۱}{۲}\right|<۱$	ح) $۲\leqslant x\leqslant۳$
۱۹. $\left|\frac{۲x+۱}{۳}\right|<۱$	خ) $-۲\leqslant x\leqslant۲$
۲۰. $|x^۲-۲|\leqslant۲$	

درمسأله‌های ۲۱ـ۳۲، هر نابرابری قدرمطلقی یك یا چند بازه را تعریف می‌کند. این بازه‌ها را با نابرابریهایی که شامل قدرمطلق نباشند، مشخص کنید.

۲۱. $|x|<۲$

۲۲. $|x|\leqslant۲$

۲۳. $|x-۱|\leqslant۲$

۲۴. $|x-۱|<۲$

۲۵. $|x+۱|<۳$

۲۶. $|x+۲|\leqslant۱$

۲۷. $|۲x+۲|<۱$

۲۸. $|۱-x|<۱$

۲۹. $|۱-۲x|\leqslant۱$

۳۰. $|۳x-۶|<۱$

۳۱. $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant 1$

۳۲. $\left|\frac{x}{2}-1\right| \leqslant 1$

در هریك از مسأله‌های ۳۳ـ۴۱، بازه‌ای از مقادیر x یا مقادیر y داده شده است. این بازه‌ها را با استفاده ازقدرمطلق مشخص کنید. رسم نمودار بازه ممکن است به‌شما کمك کند.

۳۳. $-8 < x < 8$

۳۴. $-3 < y < 5$

۳۵. $-5 < x < 1$

۳۶. $1 < y < 7$

۳۷. $-a < y < a$

۳۸. $-1 < x < 2$

۳۹. $L-\epsilon < y < L+\epsilon$ (L و ϵ ثابت‌اند)

۴۰. $1-\delta < x < 1+\delta$ (δ ثابت است)

۴۱. $x_0-5 < x < x_0+5$ (x_0 ثابت است)

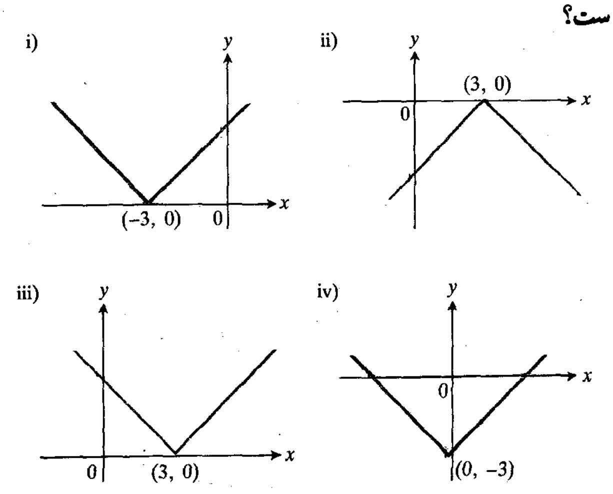
۴۲. در دام $|-a| = a$ نیفتید. این رابطه به‌ازای همهٔ مقادیر a برقرار نیست.

الف) مقداری برای a بیابید که به‌ازای آن، $|-a| \neq a$.

ب) به‌ازای چه‌مقادیری از a رابطهٔ $|-a| = a$ برقرار است؟

۴۳. به‌ازای چه مقادیری از x، $|x-1|$ برابر با $x-1$ است؟ و به‌ازای چه مقادیری از x برابر با $1-x$ است؟

۴۴. کدام یك از نمودارهای شکل ۱.۵۷ نمودار $y=|x-3|$ است؟



۱.۵۷ نمودارهای مربوط به‌مسألهٔ ۴۴.

در مسأله‌های ۴۵ـ۴۸، نمودار تابع را رسم کنید.

۴۵. $y=-|x|$

۴۶. $y=|x-1|$

۴۷. $y=\frac{|x|-x}{2}$

۴۸. $y=\frac{|x|+x}{2}$

۴۹. دامنه و برد توابع $y=\sqrt{x^2}$ و $y=(\sqrt{x})^2$ را با هم مقایسه کنید.

۵۰. اگر $g(x)=\sqrt{x}$ و $(g\circ f)(x)=|x|$، مطلوب است $f(x)$.

۵۱. اگر $f(x)=x^2+2x+1$ و $(g\circ f)(x)=|x+1|$، مطلوب است $g(x)$.

۵۲. توابع $f(x)$ و $g(x)$ راکه ترکیبات آنها در دو رابطهٔ زیر صدق می‌کنند، بیابید.

$$(g\circ f)(x)=|\sin x| \quad \text{و} \quad (f\circ g)(x)=(\sin\sqrt{x})^2.$$

تابع بزرگترین عدد صحیح

۵۳. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=x-[x], \quad -3\leqslant x\leqslant 3$

ب) $y=\left[\frac{x}{2}\right], \quad -3\leqslant x\leqslant 3$

پ) $y=[2x]-2[x]$

ت) $y=\frac{1}{2}([x]+x)$

۵۴. به‌ازای چه مقادیری از x رابطهٔ $[x]=0$ برقرار است؟

۵۵. وقتی x مثبت یا صفر است، $[x]$ قسمت صحیح نمایش اعشاری x است. وقتی x منفی است، چه توصیف مشابهی از $[x]$ می‌توان ارائه داد؟

TOOLKIT PROGRAMS
Super * Grapher

۱.۶ خط مماس وشیب خمهای درجهٔ دوم و سوم

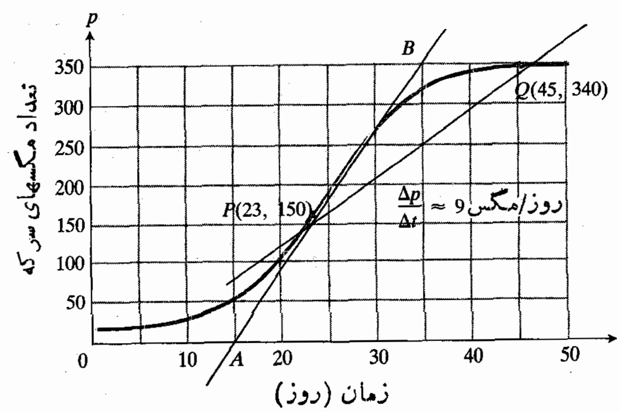
حال به‌اولین دیدگاه خود از نقش حساب دیفرانسیل وانتگرال در

توصیف تغییر می‌رسیم. بحث را از آهنگ متوسط تغییر یك کمیت در یك دورهٔ زمانی آغاز می‌کنیم و آن را با تشریح روشنی برای توصیف آهنگ تغییر یك کمیت در یك لحظه، به‌پایان می‌آوریم. برای مرتبط ساختن این دومفهوم، آهنگ متوسط تغییر را با شیب خط قاطع یکی می‌گیریم.

آهنگ متوسط تغییر

با آهنگ متوسط تغییر درمواردی از قبیل سرعت متوسط (مسافت طی شده تقسیم برزمان سپری‌شده، مثلاً، برحسب کیلومتر درساعت)، آهنگ رشد جمعیت (برحسب درصد در سال)، و میزان متوسط بارندگی ماهانه (برحسب سانتیمتر درماه) رو به‌رو می‌شویم. **آهنگ متوسط تغییر** یك کمیت در یك دورهٔ زمانی، حاصل تقسیم میزان تغییر آن کمیت برطول آن دورهٔ زمانی است.

زیست‌شناسان تجربی غالباً به مطالعهٔ آهنگ رشد جمعیت درشرایط آزمایشگاهی کنترل‌شونده علاقه دارند. شکل ۵۸.۱ نشان‌دهندهٔ داده‌های حاصل از یك آزمایش در مورد رشد تعداد مگسهای سرکه است. این داده‌ها زمینهٔ بحث اولین مثال را فراهم می‌کنند.



۵۸.۱ رشد تعداد مگسهای سرکه در یك آزمایش کنترل‌شونده.

مثال ۱ آهنگ متوسط رشد جمعیت در شرایط آزمایشگاهی. نمودار شکل ۵۸.۱ نشان می‌دهد که چگونه تعداد مگسهای سرکه در یك آزمایش کنترل‌شوندهٔ ۵۰ روزه افزایش می‌یابد. برای ترسیم نمودار، تعداد مگسها را دربازه‌های زمانی مساوی درنظر گرفته، به ازای هریك از اعداد حاصل نقطه‌ای مشخص کرده، و سپس خم همواری که ازنقاط مشخص‌شده بگذرد، کشیده‌ایم.

در روز ۲۳، تعداد ۱۵۰ مگس و در روز ۴۵، تعداد ۳۴۰ مگس وجود داشته‌است. بنابراین تعداد مگسها در ۲۲ = ۲۳ − ۴۵ روز ۱۹۰ = ۱۵۰ − ۳۴۰ تا افزایش یافته است. پس آهنگ متوسط تغییر تعداد مگسها از روز ۲۳ تا روز ۴۵ چنین بوده‌است:

(۱) آهنگ متوسط تغییر: $\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{۳۴۰ - ۱۵۰}{۴۵ - ۲۳} = \frac{۱۹۰}{۲۲}$

≈ ۹ مگس در روز

آهنگ متوسط در رابطهٔ (۱)، شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ

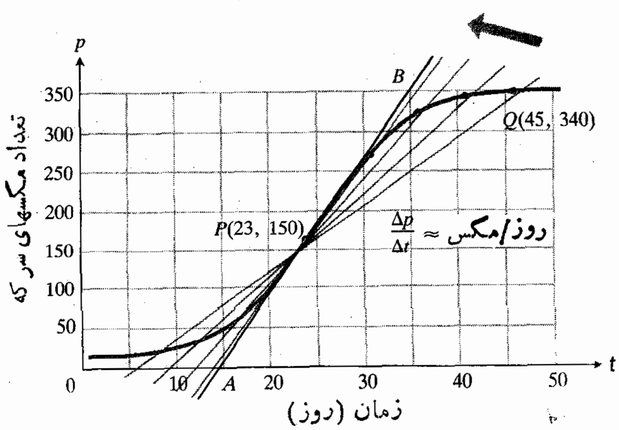
$$P(۲۳, ۱۵۰) \text{ و } Q(۴۵, ۳۴۰)$$

است که روی خم تابع تعداد مگسها قرار دارند. (خطی که از دو نقطهٔ واقع بریك خم می‌گذرد، یك خط **قاطع** خم نامیده می‌شود.) شیب قاطع PQ را می‌توان با استفاده از مختصات P و Q محاسبه کرد

(۲) شیب قاطع: $\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{۳۴۰ - ۱۵۰}{۴۵ - ۲۳} = \frac{۱۹۰}{۲۲}$

≈ ۹ مگس در روز

با مقایسهٔ روابط (۱) و (۲) می‌توان دید که آهنگ متوسط تغییر در (۱) با شیب در (۲) از لحاظ واحد ومقدار یکی است. همیشه می‌توان آهنگ متوسط تغییر را به عنوان شیب یك خط قاطع در نظر گرفت. ■



(الف)

Q	(مگس در روز) PQشیب$=\Delta p/\Delta t$
(۴۵, ۳۴۰)	(۳۴۰−۱۵۰)/(۴۵−۲۳) ≈ ۹
(۴۰, ۳۳۰)	(۳۳۰−۱۵۰)/(۴۰−۲۳) ≈ ۱۳
(۳۵, ۳۱۰)	(۳۱۰−۱۵۰)/(۳۵−۲۳) ≈ ۱۵
(۳۰, ۲۶۵)	(۲۶۵−۱۵۰)/(۳۰−۲۳) ≈ ۱۶٫۴

(ب)

۵۹.۱ (الف) چهار خط قاطع خم شکل ۵۸.۱ که از نقطهٔ $P(۲۳, ۱۵۰)$ می‌گذرند. (ب) شیب چهار خط قاطع.

علاوه بر آهنگ متوسط رشد تعداد مگسها از روز ۲۳ تا روز ۴۵، می‌خواهیم سرعت رشد تعداد آنها در روز ۲۳ را نیز بدانیم. به‌این منظور، تغییر شیب قاطع PQ را وقتی Q درامتداد خم بـه سوی P می‌رود، ملاحظه می‌کنیم. نتایج حاصل بـرای چهار وضعیت Q را درشکل ۵۹۰۱ می‌بینید.

از لحاظ هندسی، هنگامی کـه Q در امتداد خم به‌سمت P میل می‌کند این‌پدیده را ملاحظه می‌کنیم: قاطع PQ به‌خط مماس AB کـه بدون دقت زیاد در P رسم کردیم، میل می‌کند. این بدان‌معنی است که، علی‌رغم محدودیتهای ترسیم ما، شیبهای خطوط قاطع به‌شیب خط مماس میل می‌کنند که می‌توانیم آن‌را با استفاده ازمختصات A و B حساب‌کنیم.

$$\text{مگس در روز } ۱۷ = \frac{۳۵۰-۰}{۳۵-۱۵}$$

از لحاظ تغییر جمعیت، وقتی Q به P میل می‌کند این پدیده را مشاهده می‌کنیم: آهنگ متوسط رشد در بازه‌های زمانی که به‌طور فزاینده‌ای کوچکتر می‌شوند به‌شیب مماس برخم در P (۱۷ مگس در روز) میل می‌کند. بنابراین، شیب خط مماس عددی است که مـا آن را به عنوان آهنگ تغییر تعداد مگسها در روز ۲۳ = t درنظر می‌گیریم.

تعریف شیب و خط مماس

به‌نظر می‌آید نتیجهٔ داستان مگس سرکه این باشد که باید آهنگ تغییر مقدار تابع $y=f(x)$ نسبت به x را در هرمقدار $x=x_1$ به‌عنوان شیب مماس برخم $y=f(x)$ در $x=x_1$ تعریف کنیم. امـا خط مماس برخم $y=f(x)$ درنقطه‌ای دلخواه چون P را چگونه تعریف کنیم و شیب آن را از فرمول $y=f(x)$ چگونه به‌دست آوریم؟

یافتن پاسخی برای این پرسش درنظر دانشمندان اوائل قرن هفدهم اهمیتی داشت که به‌بیان درنمی‌آید. در اپتیك، زاویه‌ای که یك پرتو نور تحت آن زاویه به‌سطح یك عدسی برخورد می‌کند نسبت بـه‌مماس برسطح تعریف می‌شود. درفیزیك، جهت حرکت یك جسم درهر نقطه از مسیرش درامتداد مماس برمسیر است. در هندسه، زاویهٔ بین دوخم متقاطع، زاویهٔ بین مماسهای آنها درنقطهٔ تقاطع آنهاست.

پاسخی کـه سرانجام فرمـا در ۱۶۲۹ یـافت، یکی از دستاوردهای مهم آن قرن درحساب دیفرانسیل و انتگرال به‌شمار می‌آید. مـا هنوز هم روش او را برای تعریف مماس و به دست آوردن فرمولهای شیب خم و آهنگ تغییر بـه‌کار می‌بریم. این روش از این قرار است:

۱. درشروع کار، آنچه را می‌توانیم، محاسبه می‌کنیم؛ یعنی شیب قاطعی را که از P و نقطه‌ای چون Q در نزدیکی P و روی خم می‌گذرد.
۲. مقدار حدی شیب قاطع را (درصورت وجود) هنگامی که Q درامتداد خم به P میل می‌کند، می‌یابیم.
۳. این عـدد را شیب خم در P می‌گیریم و مماس بـر خم در P را به عنوان خطی که با این شیب از P می‌گذرد، تعریف می‌کنیم.

مثال ۲ مطلوب است شیب سهمی $y=x^۲$ در نقطهٔ $P(۲,۴)$. معادله‌ای برای مماس برسهمی دراین نقطه بنویسید.

حل: ابتدا خط قاطعی درنظر می‌گیریم که از $P(۲,۴)$ و نقطه‌ای مـانند $Q(۲+\Delta x, (۲+\Delta x)^۲)$ واقع برخم بگذرد (شکل ۶۰۱). سپس فرمولی بـرای شیب قـاطع می‌نویسیم و ملاحظه می‌کنیم کـه وقتی Q به P میل می‌کند، چه اتفاقی برای شیب می‌افتد.

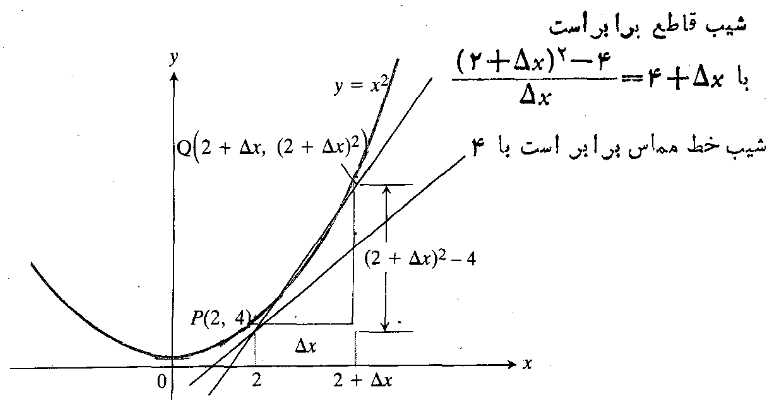
شیب قاطع PQ عبارت است از

$$m_{\sec}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(۲+\Delta x)^۲-۲^۲}{\Delta x}=\frac{۴+۴\Delta x+(\Delta x)^۲-۴}{\Delta x}$$

$$=\frac{۴\Delta x+(\Delta x)^۲}{\Delta x}=۴+\Delta x\,. \qquad (۳)$$

نماد $m_{\sec}$ نشان‌دهندهٔ شیب قاطع است.

هنگامی‌که Q در امتداد خم به P میل می‌کند، Δx به ۰ و $m_{\sec}=۴+\Delta x$ بـه ۴ = ۰ + ۴ میل می‌کند. ایـن رفتار را



۶۰۱ وقتی Q در امتداد خم بـه P میل می‌کند، شیب قاطع PQ به ۴ میل می‌کند.

به‌این صورت توصیف می‌کنیم که حد m_{sec} وقتی Δx به ۰ میل می‌کند، برابر با ۴ است. این حد را به‌عنوان شیب سهمی در P تعریف می‌کنیم. مفهوم هندسی این مطلب این است‌ که وقتی Q در امتداد خم به‌سمت P حرکت می‌کند، خط قاطع PQ به‌خطی میل می‌کند که از P می‌گذرد و شیب آن برابر است با $m=4$. این خطی است که ما آن را به‌عنوان مماس برسهمی $y=x^2$ در نقطهٔ $P(2, 4)$ تعریف می‌کنیم. معادلهٔ نقطه-شیب آن به طریق معمول به‌دست می‌آید

نقطه: $(2, 4)$

شیب: $m=4$

معادله: $y-4=4(x-2)$

$$y-4=4x-8$$

$$y=4x-4$$ ■

مثال بعدی نشان می‌دهد که چگونه فرمولی برای شیب در هرنقطهٔ سهمی $y=x^2$ بیابیم.

مثال ۳ فرمولی برای شیب سهمی $y=x^2$ در هرنقطهٔ روی خم پیدا کنید.

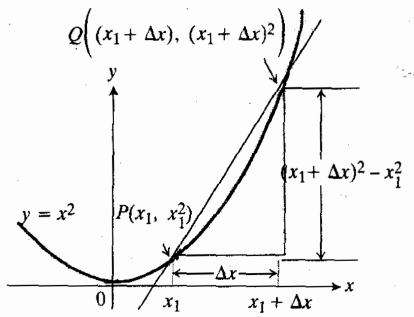
حل: روش فرما را گام به‌گام اجرا می‌کنیم.

فرض‌کنید $P(x_1, x_1^2)$ نقطهٔ دلخواهی روی سهمی و Q نقطه‌ای از سهمی و درنزدیکی P باشد (شکل ۶۱۰۱). مختصات Q را می‌توان به‌صورت $(x_1+\Delta x, (x_1+\Delta x)^2)$ نوشت که در آن، Δx تفاضل مختص x نقطهٔ P از مختص x نقطهٔ Q است. شیب قاطع PQ برحسب این مختصات عبارت است از

$$\begin{aligned} m_{sec}&=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_1+\Delta x)^2-x_1^2}{\Delta x}\\ &=\frac{x_1^2+2x_1\Delta x+(\Delta x)^2-x_1^2}{\Delta x} \qquad (4)\\ &=\frac{2x_1\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x_1+\Delta x. \end{aligned}$$

حال، گام مهمی درپیش داریم. وقتی Q درامتداد خم به P میل می‌کند، مقدار $2x_1$ درعبارت $2x_1+\Delta x$ تغییر نمی‌کند ولی مقدار Δx بـه‌صفر میل می‌کند. بنابراین، مقـدار $2x_1+\Delta x$ بـه $2x_1+0=2x_1$ میل می‌کند. این مطلب را بـه‌این‌صورت بیان می‌کنیم که حد m_{sec} وقتی Δx به ۰ میل می‌کند برابر است با $2x_1$. طبق تعریف ما، شیب سهمی در P عدد $2x_1$ است.

از آنجا که x_1 می‌تواند هرمقداری از x باشد، می‌توانیم اندیس ۱ را حـذف کنیم. شیب در هرنقطهٔ (x, y) روی سهمی



۶۱۰۱ شیب قاطع PQ برابر است با $[(x_1+\Delta x)^2-x_1^2]/(\Delta x)=2x_1+\Delta x.$

به‌صورت زیر است

$$m=2x.$$

مثلا وقتی $x=2$، شیب سهمی برابر است با $m=2\times 2=4$، که این را درمثال ۲ ملاحظه‌کردیم. ■

مثال بعدی نشان می‌دهد که چگونه فرمول شیب $m=2x$ از مثال ۳ را برای یافتن معادلات خطهای مماس به‌کار بریم.

مثال ۴ معادلاتی برای خطوط مماس بـر خم $y=x^2$ در نقاط $(-1/2, 1/4)$ و $(1, 1)$ بیابید.

حل: فـرمول شیب $m=2x$ از مثال ۳ را برای یـافتن معادلهٔ نقطه-شیب هریك از خطهای مماس به‌کار می‌بریم.

مماس در $(-1/2, 1/4)$

نقطه: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

شیب: $m=2x=2\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

معادله: $y-\frac{1}{4}=-1\left(x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

$$y-\frac{1}{4}=-x-\frac{1}{2}$$

$$y=-x-\frac{1}{4}$$

مماس در $(1, 1)$

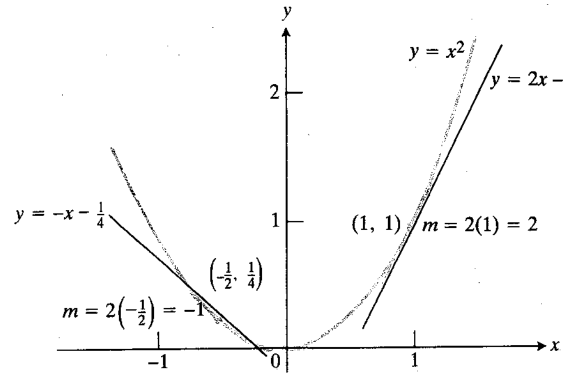
نقطه: $(1, 1)$

شیب: $m=2x=2(1)=2$

معادله: $y-1=2(x-1)$

$$y-۱=۲x-۲$$
$$y=۲x-۱$$

شکل ۶۲.۱ را ببینید.



۶۲.۱ شیب مماس بر سهمی $y=x^۲$ در نقطه‌ای چون (x, y) برابر است با $m=۲x$. ■

بحث خود را در یك تعریف خلاصه می‌کنیم.

شیب و مماس

اگر شیبهای قاطعهای PQی یك خم، وقتی که Q در امتداد خم به P میل می‌کند، دارای مقداری حدی باشند، این مقدار را به‌عنوان **شیب** خم در P تعریف می‌کنیم. سپس، **مماس** بر خم در P را به‌عنوان خطی که با این شیب از P می‌گذرد، تعریف می‌کنیم.

مثال ۵ مطلوب‌است فرمولی برای شیب خم $y=x^۳-۳x+۳$ در یك نقطهٔ دلخواه $P(x, y)$ روی خم.

حل: درآغاز، فرمولی برای شیبهای قاطعهایی که از P می‌گذرند، می‌یابیم و سپس با استفاده از آنها شیب خم در P را پیدا می‌کنیم.

چون $P(x, y)$ روی خم قرار دارد، مختص y آن در معادلهٔ $y=x^۳-۳x+۳$ صدق می‌کند. پس، مختصات P برحسب x عبارت‌اند از

$$P(x,\ x^۳-۳x+۳). \qquad (۵)$$

مختصات هرنقطهٔ Q واقع بر خم که تفاوت مختص اولش با x به‌اندازهٔ Δx باشد، عبارت‌اند از

$$Q(x+\Delta x,\ (x+\Delta x)^۳-۳(x+\Delta x)+۳). \qquad (۶)$$

رفت از P تا Q عبارت است از Δx. خیز از P تا Q عبارت است از

$$\begin{aligned}\Delta y &= [(x+\Delta x)^۳-۳(x+\Delta x)+۳]-[x^۳-۳x+۳]\\ &= [x^۳+۳x^۲\Delta x+۳x(\Delta x)^۲\\ &\quad +(\Delta x)^۳-۳x-۳\Delta x+۳]-[x^۳-۳x+۳]\\ &= ۳x^۲\Delta x+۳x(\Delta x)^۲+(\Delta x)^۳-۳\Delta x. \qquad (۷)\end{aligned}$$

بنابراین، شیب PQ برابر است با

$$\begin{aligned}m_{PQ} &= \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{۳x^۲\Delta x+۳x(\Delta x)^۲+(\Delta x)^۳-۳\Delta x}{\Delta x}\\ &= ۳x^۲+۳x(\Delta x)+(\Delta x)^۲-۳. \qquad (۸)\end{aligned}$$

وقتی Q در امتداد خم به P میل می‌کند، Δx به ۰ و m_{PQ} به‌عدد زیر میل می‌کند.

$$m=۳x^۲+۳x(۰)+(۰)^۲-۳=۳x^۲-۳. \qquad (۹)$$

این عددی است که آن را شیب خم در P می‌نامیم. فرمولی که درجستجوی آن هستیم این است

$$m=۳x^۲-۳. \qquad (۱۰)$$ ■

مثال ۶ معادله‌ای برای خط مماس بر خم $y=x^۳-۳x+۳$ در نقطهٔ $(۰, ۳)$ بیابید.

حل: فرمول شیب $m=۳x^۲-۳$ از مثال ۵ را به‌کار می‌گیریم و معادلهٔ نقطه‌ـشیب خط را پیدا می‌کنیم.

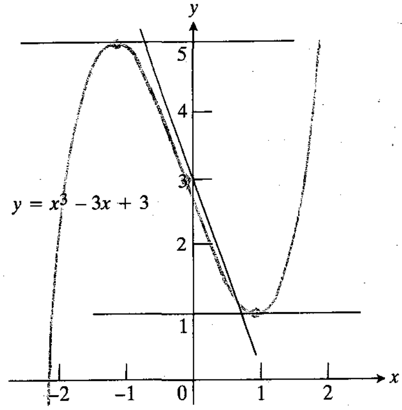
نقطه: $(۰, ۳)$

شیب: $m=۳x^۲-۳=۳(۰)^۲-۳=-۳$

معادله: $y-۳=-۳(x-۰)$

$$y-۳=-۳x$$
$$y=-۳x+۳.$$

شکل ۶۳.۱ را ببینید.



۶۳.۱ سه خط مماس بر خم $y=x^۳-۳x+۳$. ■

مثال ۷ آیا خم $y=x^3-3x+3$ مماس افقی دارد و اگر دارد در چه نقاطی؟

حل: نقاطی را جستجو می‌کنیم که در آنها شیب صفر است. برای یافتن این نقاط، فرمول شیب را (که درمثال ۵ به دست آوردیم) مساوی صفر قرار می‌دهیم و معادله را حل می‌کنیم

$$3x^2-3=0$$

$$3x^2=3$$

$$x^2=1$$

$$x=\pm 1.$$

مختصهای x نقاط مورد نظر عبارت‌اند از $x=1$ و $x=-1$. مختصهای y را می‌یابیم.

وقتی $x=1$، $y=(1)^3-3(1)+3=1$.

وقتی $x=-1$، $y=(-1)^3-3(-1)+3=5$.

دونقطه وجود دارد که در آنها مماس، افقی است: $(1,1)$ و $(-1,5)$. شکل ۶۳۰۱ را ببینید. ■

مسأله‌ها

۱. درمثال ۱، افزایشی را که در تعداد مگسهای سرکه در خلال روز دهم به‌وقوع می‌پیوندد، براوردکنید. به‌این منظور، درشکل ۵۸۰۱ بااستفاده از خط‌کش شیب خم را در $t=10$ براوردکنید.

۲. الف) سهمی $y=x^2$ را رسم کنید و نقاط $(-2,4)$، $(-1,1)$، $(0,0)$، $(1/2,1/4)$، و $(1,1)$ را نشان دهید.
ب) معادله‌ای برای خط مماس بر سهمی در $P(1,1)$ بنویسید.
پ) شیبهای قاطعهایی راکه از $P(1,1)$ و هریك از چهار نقطهٔ $(-2,4)$، $(-1,1)$، $(0,0)$، و $(1/2,1/4)$ می‌گذرند، حساب کنید.
ت) فرض‌کنید Δx نمو کوچکی در x باشد. شیب m_{PQ} قاطع گذرنده از نقاط $P(1,1)$ و $Q(1-\Delta x,(1-\Delta x)^2)$ را به‌صورت تابعی از Δx بیان‌کنید. حد m_{PQ} را وقتی Δx به صفر میل می‌کند، پیدا کنید. رابطهٔ بین این حد و شیب مماس برسهمی در $P(1,1)$ چیست؟

۳. فرض‌کنید Q نقطه‌ای از خم $y=x^3-3x+3$ باشد که مختص x آن برابر است با $h\neq 0$.
الف) مطلوب است شیب قاطع گذرنده از Q و نقطهٔ $P(0,3)$.
ب) مطلوب است حد شیب قاطع در قسمت (الف) وقتی Q به P میل می‌کند.
پ) معادله‌ای برای مماس بر خم در P بنویسید.

۴. مطلوب است معادلاتی برای خطوط مماس برخم $y=x^3-3x+3$ از مثال ۵ درنقاط زیر:
الف) $(3,21)$
ب) $(-3,-15)$
پ) $(\sqrt{2},3-\sqrt{2})$

درمسأله‌های ۵-۲۰:
الف) فرمولی بیابیدکه شیب را درهرنقطهٔ دلخواه $P(x,y)$ واقع بر خم مفروض به‌دست دهد.
ب) با استفاده از فرمول شیب که درقسمت (الف) به‌دست می‌آید، معادله‌ای برای خط مماس بر خم در نقطهٔ مفروض بنویسید.
پ) نقاطی راکه درآنها خم دارای مماس افقی است بیابید.

۵. $y=x^2+1,\quad (2,5)$

۶. $y=-x^2,\quad (1,-1)$

۷. $y=4-x^2,\quad (-1,3)$

۸. $y=x^2-4x,\quad (4,0)$

۹. $y=x^2+3x+2,\quad (-1,0)$

۱۰. $y=x^2-2x-3,\quad (0,-3)$

۱۱. $y=x^2+4x+4,\quad (-2,0)$

۱۲. $y=6+4x-x^2,\quad (2,10)$

۱۳. $y=x^2-4x+4,\quad (1,1)$

۱۴. $y=2-x-x^2,\quad (1,0)$

۱۵. $y=x^3,\quad (1,1)$

۱۶. $y=x^3-12x,\quad (0,0)$

۱۷. $y=x^3-3x,\quad (-1,2)$

۱۸. $y=4x^3+6x^2+1,\quad (-1,3)$

۱۹. $y=x^3-3x^2+4,\quad (1,2)$

۲۰. $y=2x^3+3x^2-12x,\quad (2,4)$

TOOLKIT PROGRAMS

Function Evaluator   Super * Grapher
Secant Lines

۷.۱ شیب خم $y=f(x)$: مشتق

در بخش ۶.۱، شیب خمهای درجهٔ دوم و درجهٔ سوم را محاسبه کردیم. اکنون می‌پردازیم به‌نمودار تابعهای دیگر. محاسبات شیب دراینجا هم، مثل بخش ۶.۱، به‌مفهوم حد وابسته است و این مفهوم را در اینجا هم به طور غیررسمی درنظر می‌گیریم. پس از عرضهٔ کاربردهایی از مشتق دربخش ۸.۱، مجدداً در بخشهای ۹.۱ و ۱۰.۱ به‌مفهوم حد برمی‌گردیم. درآنجا، هدف ما این خواهد بود که پایهٔ ریاضی محکمی برای حد بسازیم و برای روشهای محاسبهٔ سریع درفصل ۲، آمادگی پیداکنیم.

مشتق تابع

فرض‌کنیم $P(x, y)$ نقطه‌ای از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد (شکل ۶۴.۱). اگر $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ نقطهٔ دیگری ازاین نمودار باشد، آنگاه

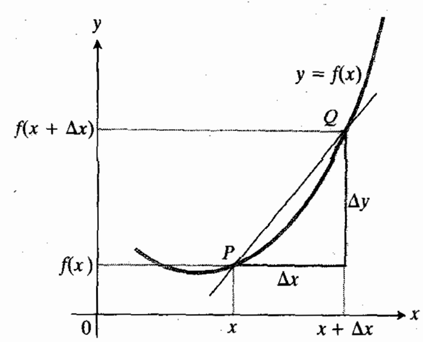
$$y+\Delta y=f(x+\Delta x).$$

از طرفین این رابطه، $y=f(x)$ را کم می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

شیب خط PQ عبارت است از

$$PQ \text{ شیب } =\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \qquad (۱)$$



۶۴.۱ شیب خط PQ عبارت است از $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

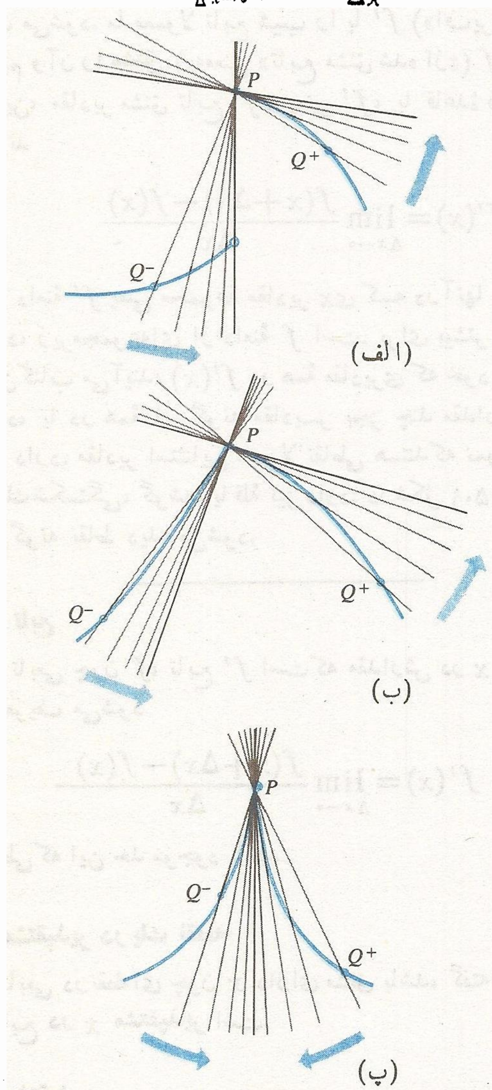
در معادلهٔ (۱) عمل تقسیم را فقط می‌توان نشان داد زیرا دراینجا فرمولی برای f در دست‌نداریم. برای هرتابع مشخصی، مانند تابع $f(x)=x^3-3x+3$ درمثال ۵ ازبخش ۶.۱، این تقسیم را باید قبل از عمل بعدی انجام داد.

بعد از اجرای عمل تقسیم، x را ثابت نگه می‌داریم و می‌گذاریم Δx به‌صفرمیل‌کند. اگر شیب قاطع به‌مقداری میل کند که فقط به x بستگی داشته‌باشد، این مقدار را شیب خم در P می‌نامیم:

$$\text{شیب خم در } P=\lim_{Q\to P} PQ \text{ شیب }$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (۲)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$



۶۵.۱ همان‌طور که از این تصویرها پیداست، مشتق در نقطه‌ای‌که نمودار تابع یك شکستگی، گوشه، یا قلهٔ تیز دارد، تعریف نمی‌شود. در (الف) و (ب) وقتی $Q\to P$ وضعیت حدی واحدی وجود ندارد. در (پ) وقتی $Q\to P$ قاطعها قائم می‌شوند؛ خم دارای یك مماس قائم در P است ولی شیب ندارد.

نماد «$\lim\ldots$» با $\Delta x \to 0$ در زیر آن، خوانده می‌شود «حد...، وقتی Δx به‌صفر میل می‌کند.»

کسر

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

درمعادلهٔ (۲)، «خارج‌قسمت تفاضلها برای f در x» نامیده می‌شود.

شیب خم در P خودش تابعی از x است که به‌ازای هر مقداری از x که حد مذکور درمعادلهٔ (۲) وجود داشته باشد، تعریف می‌شود. ما معمولا تابع شیب را با f' («اف‌پریم») نشان می‌دهیم وآن را **مشتق** (به‌معنی «تابع مشتق شده از») f می‌نامیم. بنابراین، مقادیر مشتق تابع f، یعنی f'، با قاعدهٔ زیر تعریف می‌شوند

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \qquad (۳)$$

دامنهٔ f' یعنی مجموعهٔ مقادیر xی که درآنها f' تعریف می‌شود، زیرمجموعه‌ای از دامنهٔ f است. برای بیشتر توابعی که در این کتاب می‌آیند، $f'(x)$ در همهٔ مقادیری که خود f تعریف می‌شود، یا در همهٔ این‌گونه مقادیر بجز چند مقدار استثنایی، وجود دارد. مقادیر استثنایی معمولاً نقاطی هستندکه نمودار f در آنها یك شکستگی، گوشه، یا قلهٔ تیز دارد؛ درشکل ۶۵.۱ نمونه‌ای ازاین‌گونه نقاط دیده می‌شود.

مشتق تابع

مشتق تابعی چون f، تابع f' است که مقدارش در x با معادلهٔ زیر تعریف می‌شود

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \qquad (۴)$$

به‌شرطی که این حد موجود باشد.

تابع مشتقپذیر در یك نقطه

اگر تابعی درنقطه‌ای چون x دارای مشتق باشد، گفته می‌شود که آن تابع **در** x **مشتقپذیر** است.

تابع مشتقپذیر

اگر تابعی در هر نقطهٔ دامنه‌اش مشتقپذیر باشد، گفته می‌شود که آن تابع **مشتقپذیر** است.

شاخه‌ای از ریاضیات که به‌مشتق می‌پردازد، **حساب دیفرانسیل** نامیده می‌شود.

محاسبات و نمادها

مثال ۱ طبق مثال ۳ از بخش ۶.۱، مشتق $f(x)=x^۲$ عبارت است از $f'(x)=۲x$. مشتق به‌ازای هرمقدار x تعریف می‌شود. ■

مثال ۲ طبق مثال ۵ ازبخش ۶.۱، مشتق $f(x)=x^۳-۳x+۳$ عبارت است از $f'(x)=۳x^۲-۳$. مشتق به ازای هرمقدار x تعریف می‌شود. ■

معمولترین نمادها برای مشتق $y=f(x)$، علاوه‌بر $f'(x)$ عبارت‌اند از

y' («وای‌پریم»)

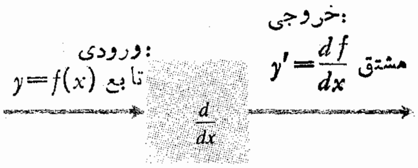
$\dfrac{dy}{dx}$ («دیِ وای بر دیِ اکس»)

$\dfrac{df}{dx}$ («دیِ اف بر دیِ اکس»)

قسمت d/dx نشان‌دهندهٔ عمل مشتقگیری نسبت به x است وگاهی می‌نویسیم

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(y) \quad \text{یا} \quad \frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}(f).$$

عبارت dy/dx را به‌صورت «مشتق y نسبت به x» و df/dx را به‌صورت «مشتق f نسبت به x» نیز می‌خوانیم. شکل ۶۶.۱ را ببینید.

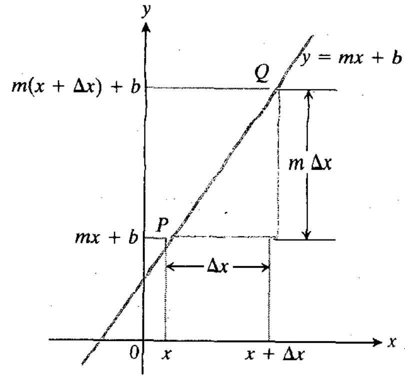


۶۶.۱ نمودار عمل مشتقگیری نسبت به x.

اکنون دو تعریف برای شیب خط $y=mx+b$ داریم: عدد m از بخش ۲.۱، و شیبی که این‌خط به‌عنوان نمودار تابع $f(x)=mx+b$ دارد. وقتی تعریف جدیدی را به‌دست می‌دهیم، خوب است مطمئن شویم که تعریفهای جدید و قدیم هرگاه درمورد شیء واحدی به‌کار روند، باهم تطبیق می‌کنند. در مثال بعدی، در جهت کسب چنین اطمینانی حرکت می‌کنیم.

مثال ۳ نشان دهید که مشتق $f(x)=mx+b$ شیب خط $y=mx+b$ است. شکل ۶۷.۱ را ببینید.

حل: در رابطهٔ (۴) فرض می‌کنیم $f(x)=mx+b$ و حد را محاسبه می‌کنیم. این محاسبه در چهارگام انجام می‌شود.



۶۷.۱ روی خط $y=mx+b$ شیب هرخط قاطع برابر است با m.

گام ۱: فرمولهای مربوط به $f(x+\Delta x)$ و $f(x)$ را می‌نویسیم

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x)&=m(x+\Delta x)+b\\ &=mx+m\,\Delta x+b\\ f(x)&=mx+b. \end{aligned}$$

گام ۲: $f(x)$ را از $f(x+\Delta x)$ کم می‌کنیم

$$f(x+\Delta x)-f(x)=m\,\Delta x.$$

گام ۳: طرفین را بر Δx تقسیم می‌کنیم

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{m\,\Delta x}{\Delta x}=m.$$

گام ۴: حد را وقتی $\Delta x \to 0$ محاسبه می‌کنیم. چون خارج‌قسمت تفاضلها صرفنظر از اینکه Δx چه باشد دارای مقدار ثابت m است، مقدار حدی آن نیز m است

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} m=m.$$

این نشان می‌دهد که درهر مقدار x، مشتق f عبارت است از شیب خط. ■

مثال ۴ نشان دهید که تابع $y=|x|$ در هر نقطه بجز $x=0$ دارای مشتق است.

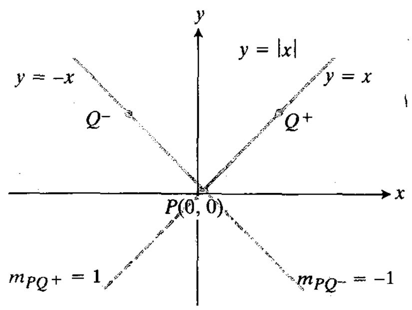
حل: وقتی x مثبت است، $y=|x|=x$. با توجه به مثال ۳، اگر داشته باشیم $m=1$ و $b=0$، مشتق $y=x$ عبارت است از $y'=1$.

وقتی x منفی است، $y=|x|=-x$. مشتق $y=-x$ (بنا به‌مثال ۳ با ضوابط $m=-1$ و $b=0$) عبارت است از $y'=-1$.

بنابراین

$$y'=\begin{cases} 1 & x>0\\ -1 & x<0. \end{cases} \qquad (۵)$$

در بارهٔ $x=0$ چه می‌توان گفت؟ در $x=0$ مشتق وجود ندارد. برای ملاحظهٔ دلیل این امر، توجه‌کنید که خم $y=|x|$ تنها دو قاطع داردکه از نقطهٔ $P(0,0)$ می‌گذرند: خط $y=x$ وخط $y=-x$ (شکل ۶۸.۱). اگر Q نقطه‌ای روی نمودار ودر سمت راست P باشد، قاطع PQ خط $y=x$ است‌که شیب آن برابر است با $+1$. اگر Q نقطه‌ای روی نمودار و درسمت چپ P باشد، قاطع PQ خط $y=-x$ است‌که شیب آن برابر است با -1.



۶۸.۱ خطهای $y=x$ و $y=-x$ تنها قاطعهای نمودار $y=|x|$ هستندکه ازمبدأ می‌گذرند.

وقتی Q روی نمودار به P میل می‌کند، خود قاطعها ساکن می‌مانند. برای اینکه حد مذکور در رابطهٔ (۴) موجود باشد، باید وقتی Q به P میل می‌کند، شیبهای قاطعهای سمت راست وسمت چپ برهم منطبق شوند. ولی هرگز چنین نمی‌شود. هرقدر Q به P نزدیك شود، بازهم شیب در سمت چپ -1 و در سمت راست $+1$ است. ■

به‌کاربردن h به‌جای Δx

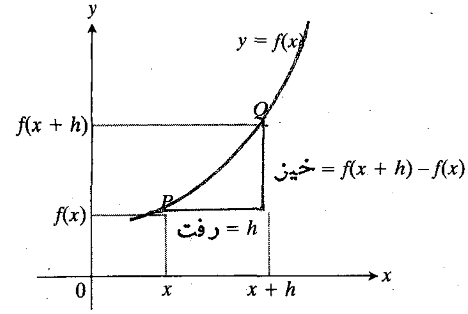
برای ساده‌کردن خارج‌قسمت تفاضلهای

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

گاهی به‌جای Δx تك حرف h را به‌کار می‌بریم. بنابراین، رابطه‌ای‌که مشتق f را در x تعریف می‌کند به‌صورت زیر است

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \qquad (۶)$$

شکل ۶۹.۱ را ببینید. این تغییر، محاسبهٔ مشتق را آسانتر می‌سازد.



۶۹٫۱ وقتی تفاضل بین مختصهای x نقاط P و Q را به‌جای Δx، h بنامیم، رابطهٔ معرف مشتق $y=f(x)$ چنین می‌شود

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

مثال ۵ اگر $y=\sqrt{x}$ و $x>0$، مطلوب است dy/dx.

حل: رابطهٔ (۶) را با ضوابط $f(x+h)=\sqrt{x+h}$ و $f(x)=\sqrt{x}$ به‌کار می‌بریم و خارج‌قسمت را تشکیل می‌دهیم

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}. \qquad (7)$$

متأسفانه اگر در اینجا ۰ را به‌جای h قرار دهیم، با تقسیم برصفر سروکار خواهیم داشت؛ لذا به جستجوی معادلی می‌پردازیم که در آن، این اشکال پیش نیاید. اگر در رابطهٔ (۷) صورت کسر را گویا کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}. \qquad (8)$$

حال، وقتی h به ۰ میل می‌کند، مخرج آخرین کسری که به دست آورده‌ایم به $\sqrt{x}+\sqrt{x}=2\sqrt{x}$ میل می‌کند که مثبت است زیرا $x>0$. بنابراین

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \qquad (9)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}. \qquad ■$$

مثال ۶ شیب خم $y=\sqrt{x}$ در $x=4$ را بیابید.

حل: شیب، مقدار مشتق $y=\sqrt{x}$ در $x=4$ است. از معادلهٔ (۹) به‌دست می‌آوریم

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=4}=\left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=4}=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}. \qquad ■$$

مثال ۷ اگر $y=1/x$، مطلوب است dy/dx.

حل: رابطهٔ (۶) را با ضوابط $f(x+h)=1/(x+h)$ و $f(x)=1/x$ به‌کار می‌بریم و خارج‌قسمت زیر را تشکیل می‌دهیم

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$$

$$=\frac{1}{h}\cdot\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}$$

$$=\frac{1}{h}\cdot\frac{-h}{x(x+h)}=\frac{-1}{x(x+h)}. \qquad (10)$$

از اینجا دیده می‌شود که

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{x(x+h)}$$

$$=\frac{-1}{x(x+0)}=-\frac{1}{x^2}. \qquad (11) \qquad ■$$

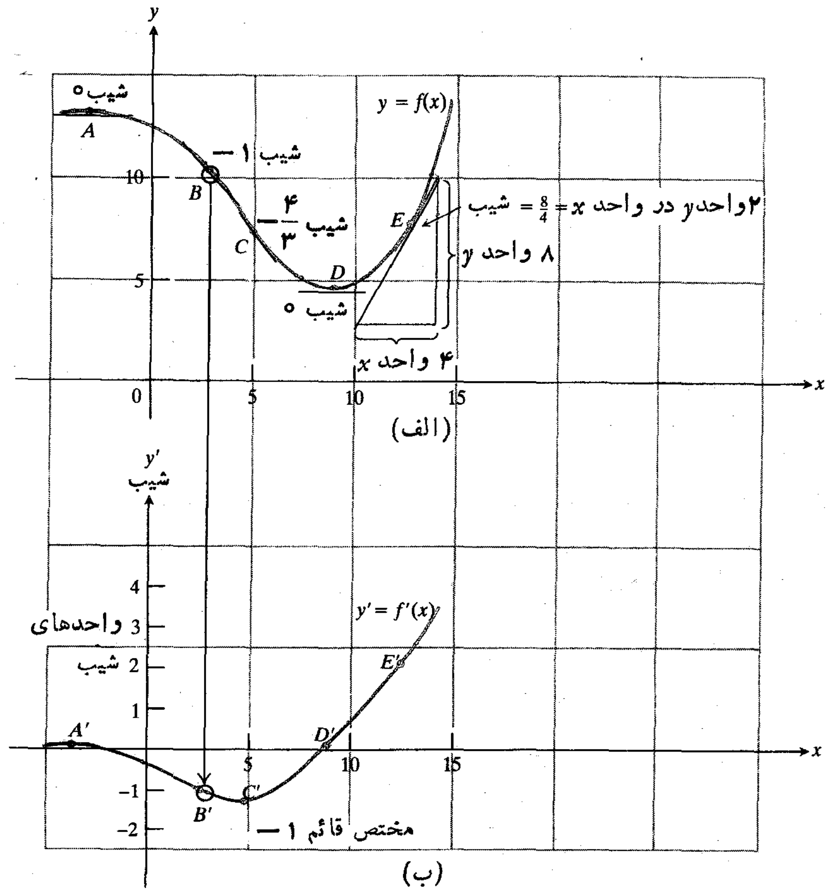
براوردکردن $f'(x)$ از روی نمودار $f(x)$

وقتی درآزمایشگاه یا در جریان عمل داده‌ها را ثبت می‌کنیم، در واقع مقادیر تابعی چون $y=f(x)$ را ضبط می‌کنیم. مثلاً ممکن است فشار گاز را به صورت تابعی از حجم در یك دمای مفروض یا اندازهٔ جمعیت را به‌شکل تابعی از زمان ثبت‌کنیم. برای اینکه ببینیم شکل تابع چگونه است، معمولاً نقاط متناظر بـا داده‌ها را مشخص می‌کنیم و خمی ازآنها می‌گذرانیم.

حتی اگر فرمولی برای تابع $y=f(x)$ نداشته باشیم که از روی آن مشتق $y'=f'(x)$ را محاسبه کنیم، بـاز هم ترسیم نمودار f' از طریق براوردکـردن شیبها روی نمودار f ممکن است. مثال زیر نشان می‌دهد که این‌کار را چگونه می‌توان انجام داد و از نمودار f' چه چیزهایی می‌توان آموخت.

مثال ۸ نمودار تـابع $y=f(x)$ در شکل ۷۰٫۱ (الف) نشان داده شده است. نمودار مشتق این تابع را رسم‌کنید.

حل: شیب نمودار f را درچندین بازه برحسب واحدهایی از y در واحد x، براورد می‌کنیم. سپس این براوردهـا را در صفحهٔ مختصاتی که محور افقی‌اش با واحدهای x و محور قائمش با واحدهای‌شیب [illegible]شده باشد، مشخص‌می‌کنیم (شکل ۷۰٫۱ ب).



۷۰۱ نمودار $y'=f'(x)$ در (ب) را بـا مشخص‌کردن شیبهای نمودار $y=f(x)$ در (الف) رسم‌کرده‌ایم. مختص قائم B' شیب خم در B است، و الی‌آخر. نمودار $y'=f'(x)$ نشان می‌دهدکه چگونه شیب f با x تغییر می‌کند.

حال، خم همواری از نقاط مشخص شده می گذرانیم.

از روی نمودار $y'=f'(x)$ می‌توان فوراً دیدکه

۱. درکجا آهنگ تغییر مثبت، منفی، و صفر است؛

۲. انـدازهٔ تقریبی آهنگ رشد در هر x و رابطه‌اش بـا اندازهٔ $f(x)$ چیست؛

۳. درکجا خود آهنگ تغییر صعودی یـا نـزولی است. (مسائل ۲۵–۲۸ را ببینید.) ■

مسأله‌ها

در مسأله‌های ۱–۲۰، f' (مشتق تابع f) را با استفاده از رابطهٔ (۴) یا (۶) بیابید. سپس، شیب خم $y=f(x)$ در $x=3$ را پیدا کنید و معادله‌ای برای خط مماس بنویسید.

۰۱ $f(x)=x^{2}$

۰۲ $f(x)=x^{3}$

۰۳ $f(x)=2x+3$

۰۴ $f(x)=x^{2}-x+1$

۰۵ $f(x)=1+\sqrt{x}$

۰۶ $f(x)=\dfrac{1}{x^{2}}$

۰۷ $f(x)=\dfrac{1}{2x+1}$

۰۸ $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

۰۹ $f(x)=2x^{2}-x+5$

۰۱۰ $f(x)=x^{3}-12x+11$

۰۱۱ $f(x)=x^{4}$

۰۱۲ $f(x)=ax^{2}+bx+c$ (a، b، و c ثابت‌اند)

۱۳. $f(x)=x-\frac{1}{x}$

۱۴. $f(x)=ax+\frac{b}{x}$ (a و b ثابت‌اند)

۱۵. $f(x)=\sqrt{2x}$

۱۶. $f(x)=\sqrt{x+1}$

۱۷. $f(x)=\sqrt{2x+3}$

۱۸. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

۱۹. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+3}}$

۲۰. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

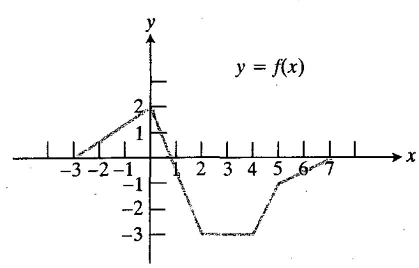
۲۱. نمودار مشتق $f(x)=|x|$ را رسم کنید (مثال ۴). سپس، نمودار تابع $y=|x|/x$، $x\neq 0$ را رسم کنید. چه نتیجه‌ای می‌توانید بگیرید؟

۲۲. دامنه و برد تابع $y=1/x$ را با دامنه و برد مشتقش $dy/dx=-1/x^2$ مقایسه کنید.

۲۳. نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل ۷۱۰۱ از پاره‌خطهایی تشکیل شده‌که انتها به‌انتها به‌هم وصل شده‌اند.

الف) نمودار مشتق تابع را رسم کنید. محور قائم را محور y' بنامید. نمودار باید یک تابع پله‌ای را نشان دهد.

ب) مشتق به‌ازای چه مقادیری از x بین ۳- و ۷ تعریف نمی‌شود؟



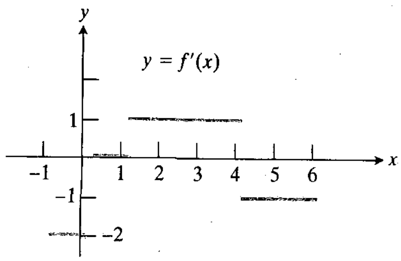
۷۱۰۱ نمودار مربوط به‌مسألهٔ ۲۳.

۲۴. با استفاده از اطلاعاتی‌که در زیر دربارهٔ تابع $y=f(x)$ داده می‌شود، نمودار تابع را در بازهٔ $-1\leqslant x\leqslant 6$ رسم کنید.

i) نمودار f متشکل از پاره‌خطهایی است که انتها به‌انتها به‌هم وصل می‌شوند.

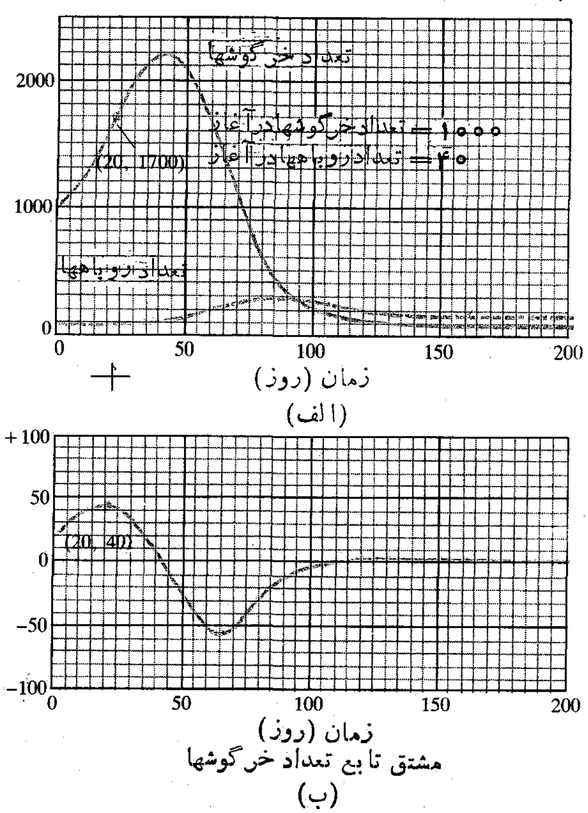
ii) نمودار f از نقطهٔ $(-1, 1)$ شروع می‌شود.

iii) مشتق f تابعی پله‌ای است که در شکل ۷۲۰۱ دیده می‌شود.



۷۲۰۱ نمودار مربوط به‌مسألهٔ ۲۴.

مسأله‌های ۲۵–۲۷ مربوط به نمودارهای شکل ۷۳۰۱ هستند. نمودارهای قسمت (الف) تعداد روباهها و تعداد خرگوشها را در جامعهٔ کوچکی‌از جانوران قطبی نشان می‌دهند‌که به‌صورت توابعی از زمان برای مدت ۲۰۰ روز رسم شده‌اند. تعداد خرگوشها در آغاز افزایش می‌یابد و در همین حال روباهها نیز تولید مثل می‌کنند. ولی روباهها از گوشت خرگوشها تغذیه می‌کنند و به‌موازات آنکه تعداد روباهها افزایش می‌یابد، جمعیت‌خرگوشها در جایی ماکسیمم شده بعد‌کم می‌شود. شکل ۷۳۰۱ (ب) نمودار مشتق تابع تعداد خرگوشهاست که مانند مثال ۸، با مشخص‌کردن شیبها به‌دست آمده است.



۷۳۰۱ نمودار مربوط به‌مسأله‌های ۲۵–۲۷.

۲۵. مقدار مشتق تابع تعداد خرگوشها درشکل ۷۳۰۱، وقتی این تابع بزرگترین مقدار را دارد، چقدر است؟ وقتی کوچکترین مقدار را دارد چقدر است؟

۲۶. مقدار تابع تعداد خرگوشها درشکل ۷۳.۱، وقتی مشتق این تابع بزرگترین مقدار را دارد چقدر است؟ وقتی کوچکترین مقدار را دارد چقدر است؟

۲۷. شیب خم تعداد روباهها را با چه واحدهایی می‌توان اندازه گرفت؟

۲۸. الف) با استفاده از روش نموداری مثال ۸، مشتق تابع تعداد مگسهای سرکه را که درشکل ۵۸.۱ نشان داده شد، رسم کنید. محورهای افقی و قائم را با چه واحدهایی باید مدرج کرد؟
ب) تعداد مگسهای سرکه در خلال چه روزهایی سریعترین افزایش را دارد؟ در چه روزهایی کندترین افزایش را دارد؟

TOOLKIT PROGRAMS

Derivative Grapher   Super * Grapher
Secant Lines

۸.۱ سرعت و سایر آهنگهای تغییر

سقوط آزاد

در توصیف نخستین ثانیه‌های حرکت شیئی چون گلوله یا سنگ که از حالت سکون سقوط می‌کند، مقاومت هوا و تغییرات شتاب گرانش را نادیده می‌گیریم. این حرکت ساده شده، سقوط آزاد نام دارد.

مثال ۱ شکل ۷۴.۱ سقوط آزاد سنگی را نشان می‌دهد که در زمان $t=۰$ از حالت سکون رها می‌شود. تحت این شرایط، مسافتی که شیء سقوط می‌کند، s، به‌صورت تابعی از زمان، t، با معادلهٔ زیر بیان می‌شود:

$$s=\frac{۱}{۲}gt^{۲}. \qquad (۱)$$

عدد g شتاب گرانش درسطح زمین است. به‌طور تجربی معلوم‌شده که اگر s برحسب فوت و t برحسب ثانیه اندازه‌گیری شود، مقدار شتاب $۳۲\ \mathrm{ft/sec^{۲}}$ است. بنا براین

$$s=\frac{۱}{۲}\times ۳۲t^{۲}=۱۶t^{۲}\ \mathrm{ft}. \qquad (۲)$$

اگر s برحسب سانتیمتر اندازه‌گیری شود، آنگاه $g=۹۸۰\ \mathrm{cm/sec^{۲}}$ و

$$s=\frac{۱}{۲}\times ۹۸۰t^{۲}=۴۹۰t^{۲}\ \mathrm{cm}. \qquad (۳)$$

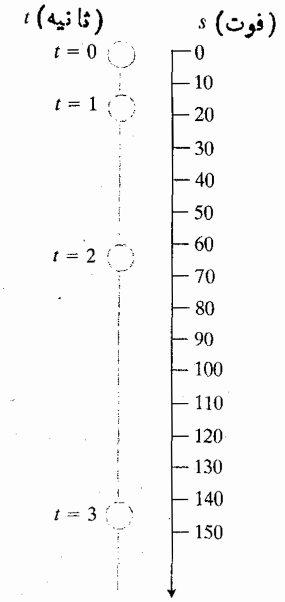
درخلال دوثانیهٔ اول، سنگ به‌اندازهٔ

$$s=۱۶(۲)^{۲}=۶۴\ \mathrm{ft}$$

یا

$$s=۴۹۰(۲)^{۲}=۱۹۶۰\ \mathrm{cm}=۱۹٫۶\ \mathrm{m}$$

سقوط می‌کند. ■



۷۴.۱ مسافت طی شده به‌وسیلهٔ سنگی که در $t=۰$ ثانیه ازحالت سکون رها می‌شود.

سرعت

فرض کنید می‌دانیم که معادلهٔ حرکت جسمی در امتداد یك خط به‌صورت زیر است

$$s=f(t) \qquad (۴)$$

و می‌خواهیم سرعت جسم را در لحظه‌ای چون t بیابیم. چگونه می‌توانیم سرعت لحظه‌ای یك جسم متحرك را تعریف کنیم؟ اگر فرض کنیم مسافت و زمان کمیتهای فیزیکی اساسیی هستند که می‌توانیم آنها را اندازه بگیریم، می‌شود به‌صورت زیر استدلال کرد. دربازه‌ای که از زمان t تا زمان $t+\Delta t$ امتداد دارد، جسم از موضع $s=f(t)$ به‌موضع

$$s+\Delta s=f(t+\Delta t) \qquad (۵)$$

حرکت می‌کند و تغییر خالص موضع، یا **تغییرمکان** برابر است با

$$\Delta s=f(t+\Delta t)-f(t). \qquad (۶)$$

(همهٔ اینها را می‌توان با وسائل اندازه‌گیری زمان و طول اندازه گرفت.)

پس، سرعت متوسط جسم در بازهٔ زمانی از t تا $t+\Delta t$ برابر است با Δs تقسیم بر Δt:

تعریف

سرعت متوسط

سرعت متوسط جسمی که درامتداد یك خط حرکت می‌کند، عبارت است از

$$v_{\mathrm{av}}=\frac{\text{تغییر مکان}}{\text{مسافت طی‌شده}}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}. \quad (۷)$$

[درفرمول بالا، v_{av} نشان‌دهندهٔ سرعت متوسط است].

مثلا دوندهٔ سریعی که ۱۰۰ متر را در ۱۰ ثانیه می‌دود، سرعت متوسطش برابر است با

$$v_{\mathrm{av}}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{۱۰۰\ \mathrm{m}}{۱۰\ \mathrm{sec}}=۱۰\ \mathrm{m/sec}.$$

برای به‌دست‌آوردن v، سرعت لحظه‌ای جسم متحرکی که در زمان t در موضع $s=f(t)$ قرار دارد، از سرعت متوسط حد می‌گیریم

$$v=\lim_{\Delta t\to ۰} v_{\mathrm{av}}=\lim_{\Delta t\to ۰}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to ۰}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}. \quad (۸)$$

به‌عبارت دیگر، سرعت لحظه‌ای، بـه عنوان تابعی از زمان t، را مشتق s نسبت به t تعریف می‌کنیم.

تعریف

سرعت لحظه‌ای

سرعت لحظه‌ای جسمی‌که در امتداد یك خط حرکت می‌کند، مشتق موضع آن، $s=f(t)$، نسبت به t است

$$v=\frac{ds}{dt}=f'(t). \quad (۹)$$

مثال ۲ مانند مثال ۱، جسمی با ضابطهٔ $s=(۱/۲)gt^۲$ به طور آزاد سقوط می‌کند. سرعت لحظه‌ای آن را به‌صورت تابعی از t پیداکنید. سرعت جسم را ۲ ثانیه پس از رهاشدن برحسب فوت برثانیه بیابید.

حل: سرعت لحظه‌ای، مشتق تـابع $s=(۱/۲)gt^۲$ نسبت به t است. خارج‌قسمت تفاضلها برای محاسبهٔ مشتق چنین است

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{(۱/۲)g(t+\Delta t)^۲-(۱/۲)gt^۲}{\Delta t}$$

$$=\frac{۱}{۲}g\,\frac{t^۲+۲t\,\Delta t+(\Delta t)^۲-t^۲}{\Delta t}=\frac{۱}{۲}g(۲t+\Delta t).$$

سرعت لحظه‌ای در زمان t برابر است با

$$v=\lim_{\Delta t\to ۰}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to ۰}\frac{۱}{۲}g(۲t+\Delta t)=\frac{۱}{۲}g(۲t+۰)=gt. \quad (۱۰)$$

یا به‌طور خلاصه

$$v=gt. \quad (۱۱)$$

اگر s برحسب فوت و t برحسب ثانیه باشد، $g=۳۲\ \mathrm{ft/sec}$ و

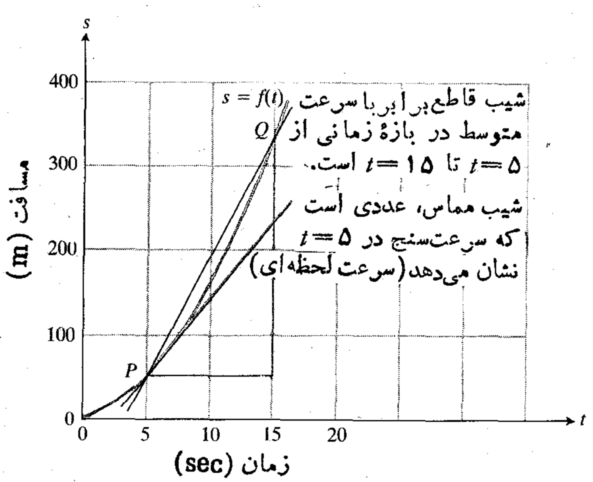
$$v=۳۲t\ \mathrm{ft/sec}^۲. \quad (۱۲)$$

دو ثانیه بعد از رهاشدن، سرعت برابر است با

$$v=۳۲(۲)=۶۴\ \mathrm{ft/sec}. \quad ■$$

وقتی نمودار $s=f(t)$ را بـه‌صورت تابعی از t رسم می‌کنیم، سرعتهای متوسط و لحظه‌ای تعابیر هندسی دارند (شکل ۷۵۰۱). سرعت متوسط، شیب یـك خط قـاطع است و سرعت لحظه‌ای در زمـان t، شیب خط مماس درنقطهٔ $(t,\ f(t))$ است. وقتی اطلاعات ما در بارهٔ حرکت از روی نمودار به‌دست می‌آید و نه از روی معادله، برای براورد سرعتها می‌توانیم از این تعبیر استفاده‌کنیم که شیب مماس را بـه‌عنوان سرعت در نظر بگیریم. (مسأله‌های ۱۲–۱۴ و ۲۲ را ببینید.)

مرسوم است‌که سرعت لحظه‌ای را فقط **سرعت** می‌نامند و ما هم ازاین پس آن را چنین خواهیم نامید.



۷۵۰۱ نمودار زمان بـه مسافت، برای یك نوع اتومبیل مرسدس بنز. شیب خط قاطع، سرعت متوسط در بازهٔ ۱۰ ثانیه‌ای $t=۵$ تا $t=۱۵$ sec است که دراین مورد برابر است با ۲۹٫۵ m/sec یـا ۱۰۶٫۲۵ km/h. شیب خط مماس در P، عددی است که سرعت‌سنج در $t=۵$ sec نشان می‌دهد وتقریباً ۱۸ m/sec یا ۶۵ km/h است.

سایر آهنگهای تغییر

آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای، کاربردهای متعدد دیگری نیز دارند.

مثال ۳ مقدار آب در یک مخزن آب، Q (برحسب گالن)، در زمان t (برحسب دقیقه)، تابعی از t است. آب ممکن است از بیرون به‌درون و یا از درون به‌بیرون مخزن جریان داشته باشد. در این صورت، فرض کنید که Q از زمان t تا زمان $t+\Delta t$ به‌اندازهٔ ΔQ تغییر کند. پس، آهنگهای متوسط و لحظه‌ای تغییر Q نسبت به t چنین است

سرعت متوسط: $$\frac{\Delta Q}{\Delta t}(\text{gal/min})$$

سرعت لحظه‌ای: $$\frac{dQ}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}(\text{gal/min}).\ \blacksquare$$

گرچه طبیعی است که وقتی صحبت از آهنگهای تغییر در میان است به‌حرکت و زمان فکر کنیم، ولی هیچ لزومی *ندارد* که تا این حد خود را محدود کنیم. می‌توان آهنگ متوسط تغییر را برای هر تابع $y=f(x)$ روی هر بازه‌ای در دامنهٔ تابع تعریف کرد و نیز آهنگ لحظه‌ای تغییر را به‌عنوان حد آهنگهای متوسط تغییر، به‌شرطی که این حد موجود باشد، تعریف نمود.

تعریف

آهنگ تغییر

آهنگ متوسط تغییر تابعی چون $y=f(x)$ روی بازهٔ از x تا $x+\Delta x$ چنین است

$$\text{آهنگ متوسط تغییر}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر f در x، مشتق زیر است

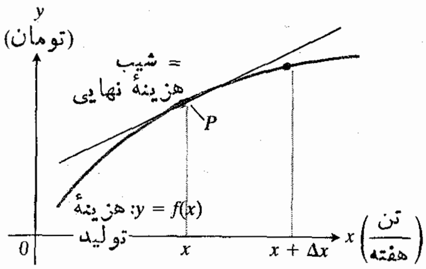
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(\text{آهنگ متوسط تغییر})$$

به‌شرطی که این حد موجود باشد.

بنابراین، آهنگ لحظه‌ای تغییر f نسبت به x، مقدار f' در x است. حتی وقتی x نشان‌دهندهٔ زمان نیست، بازهم اصطلاح «لحظه‌ای» را به‌کار می‌بریم.

☐ هزینهٔ نهایی

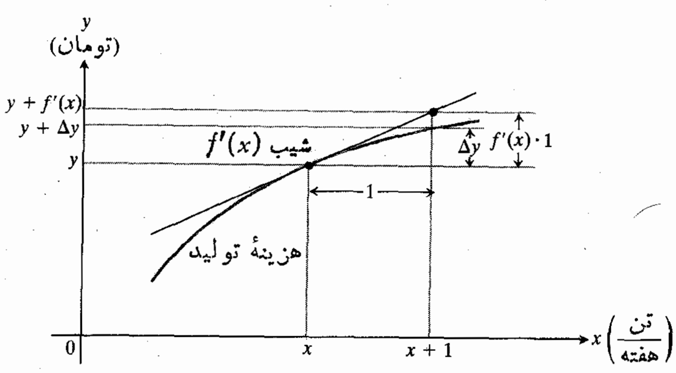
اقتصاددانان غالباً مشتق تابع را **مقدار نهایی** تابع می‌نامند. مثلاً، فرض کنید برای یک شرکت، تولید x تن فولاد درهفته، مبلغ $y=f(x)$ تومان هزینه دارد. اگر این شرکت بخواهد $x+\Delta x$ تن کالا درهفته تولید کند، هزینهٔ بیشتری، مثلاً $y+\Delta x$ تومان، متحمل می‌شود. افزایش متوسط هزینه در هر تن کالای اضافی، $\Delta y/\Delta x$ است. حد این نسبت وقتی Δx به‌سمت صفر میل می‌کند، **هزینهٔ نهایی** تولید x تن فولاد در هفته است. (شکل ۷۶۰۱ را ببینید.)



۷۶۰۱ تولید هفتگی فولاد: $y=f(x)$ هزینهٔ تولید x تن فولاد است. هزینهٔ تولید Δx تن فولاد اضافی با فرمول $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ معین می‌شود.

هزینهٔ نهایی را چگونه تعبیر می‌کنیم؟ ابتدا می‌توان گفت که هزینهٔ نهایی، شیب نمودار $y=f(x)$ درنقطه‌ای است که درشکل ۷۶۰۱ با حرف P مشخص شده است. اما بیش از این هم می‌توان گفت.

شکل ۷۷۰۱ تصویر بزرگ شده‌ای از خم و مماس بر خم در P را نشان می‌دهد. از روی شکل می‌توان دید که اگر شرکت، که درحال حاضر x تن کالا تولید می‌کند، میزان تولید را یك تن افزایش دهد، هزینهٔ اضافی Δy برای تولید آن یك تن تقریباً



۷۷۰۱ وقتی میزان تولید هفتگی فولاد از x تن به $x+1$ تن افزایش می‌یابد، خم هزینه به اندازهٔ Δy صعود می‌کند. خط مماس به اندازهٔ حاصلضرب شیب در رفت، یعنی $f'(x)\cdot 1=f'(x)$ بالا می‌رود. چون $\Delta y/\Delta x\approx f'(x)$، وقتی $\Delta x=1$ داریم $\Delta y\approx f'(x)$.

برابر با $f'(x)$ است. یعنی

(۱۳) اگر $\Delta x = ۱$، $\Delta y \approx f'(x)$.

اهمیت اقتصادی هزینهٔ نهایی از اینجا ناشی می‌شود. هزینهٔ نهایی، پیش‌بینی یا براوردی است از هزینهٔ تولید یك واحد کالای بیشتر؛ یعنی هزینهٔ تقریبی تولید یك اتومبیل بیشتر، یك رادیوی بیشتر، یك ماشین رختشویی بیشتر، و . . . است.

فرمولهای سقوط آزاد درنزدیکی سطح زمین

۱. $s=\frac{۱}{۲}gt^{۲}$ مسافت $=s$، زمان $=t$

$v=gt$ ثابت گرانشی $=g$

سرعت $=v$

۲. $s=۱۶t^{۲}$ $s=\mathrm{ft},\ t=\mathrm{sec}$

$v=۳۲t$ $g=۳۲\ \mathrm{ft/sec^{۲}},\ v=\mathrm{ft/sec}$

۳. $s=۴۹۰t^{۲}$ $s=\mathrm{cm},\ t=\mathrm{sec}$

$v=۹۸۰t$ $g=۹۸۰\ \mathrm{cm/sec^{۲}},\ v=\mathrm{cm/sec}$

۴. $s=۴٫۹t^{۲}$ $s=\mathrm{m},\ t=\mathrm{sec}$

$v=۹٫۸t$ $g=۹٫۸\ \mathrm{m/sec^{۲}},\ v=\mathrm{m/sec}$

مسأله‌ها

۱. اگر a، b، و c ثابت باشند و

$$f(t)=at^{۲}+bt+c$$

نشان دهید که

$$f'(t)=\lim_{\Delta t\to ۰}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=۲at+b.$$

قوانین حرکت در مسأله‌های ۲-۱۰ موضع یك جسم متحرك، $s=f(t)$، را به‌صورت تابعی از t به‌دست می‌دهند که s برحسب متر و t برحسب ثانیه اندازه‌گیری می‌شود.

الف) تغییرمکان و سرعت متوسط را برای بازهٔ زمانی از $t=۰$ تا $t=۲$ ثانیه پیداکنید.

ب) با استفاده از فرمول $f'(t)=۲at+b$ در مسألهٔ ۱، سرعت $v=ds/dt$ را به‌صورت تابعی از t بیان کنید.

پ) با استفاده از فرمول به‌دست‌آمده درقسمت (ب)، سرعت جسم را در $t=۲$ ثانیه بیابید.

۲. $s=۴٫۹t^{۲}$ (سقوط آزاد روی زمین)

۳. $s=۰٫۸t^{۲}$ (سقوط آزاد روی ماه)

۴. $s=۱٫۸۶t^{۲}$ (سقوط آزاد روی مریخ)

۵. $s=۲t^{۲}+۵t-۳$

۶. $s=t^{۲}-۳t+۲$

۷. $s=۴-۲t-t^{۲}$

۸. $s=۳-۲t^{۲}$

۹. $s=۴t+۳$

۱۰. $s=(۱/۲)gt^{۲}+v_{۰}t+s_{۰}$ (g، $v_{۰}$، و $s_{۰}$ ثابت‌اند)

۱۱. شکل ۷۸.۱ عکسهایی از دوتوپ را نشان می‌دهدکه پس از رهاشدن آنها در لحظات مختلفی گرفته شده است. مقیاس روی شکل برحسب سانتیمتر مشخص شده‌است.

الف) ازفرمولهای سقوط آزادکه درانتهای این بخش آمدند، دراینجا کدام فرمولها s و v را به‌دست می‌دهند؟

ب) چه مدتی طول کشیده‌که توپها $۱۵۰\ \mathrm{cm}$ اول را طی کنند؟ سرعت متوسط آنها دراین مدت چقدر بوده است؟

پ) زمان بین گرفتن دوعکس متوالی چقدر بوده است؟

۱۲. الف) با استفاده از نمودار شکل ۷۵.۱، سرعت متوسط اتومبیل در ۱۰ ثانیهٔ اول را براورد کنید.

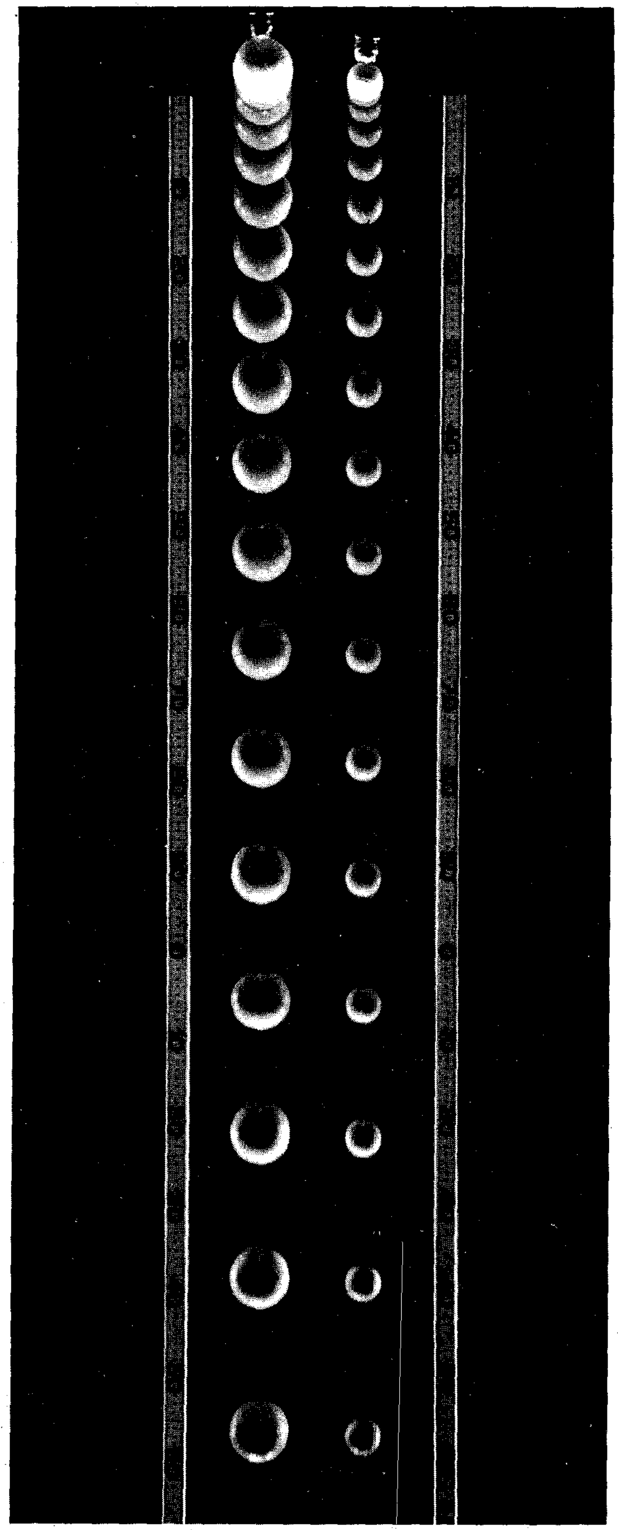
ب) سرعتی را که سرعت‌سنج اتومبیل در ثانیهٔ $t=۱۵$ نشان می‌دهد، براورد کنید؛ به‌این منظور، شیب خم را با یك خط‌کش براورد نمایید.

۱۳. داده‌های زیر، مختصات s یك جسم متحرك را به‌ازای مقادیر گوناگون t به‌دست می‌دهند. روی کاغذ مختصات، s را برحسب t رسم کنید و خم همواری ازنقاط داده شده بگذرانید. با فرض‌اینکه این خم هموار حرکت جسم را نشان می‌دهد، سرعت را در (الف) $t=۱٫۰$؛ (ب) $t=۲٫۵$؛ (پ) $t=۲٫۰$، به‌دست آورید.

s(برحسب فوت)	۱۰	۳۸	۵۸	۷۰	۷۴	۷۰	۵۸	۳۸	۱۰
t(برحسب ثانیه)	۰	۰٫۵	۱٫۰	۱٫۵	۲٫۰	۲٫۵	۳٫۰	۳٫۵	۴٫۰

۱۴. یك واکنش شیمیایی وقتی‌که به‌مدت t دقیقه انجام می‌گیرد، مقدار $A(t)$ از یك ماده را تولید می‌کند. جدول زیر، مقادیرمتناظر $A(t)$ را به‌ازای چند مقدار t نشان می‌دهد.

t(برحسب دقیقه)	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰
$A(t)$ (برحسب مول)	۲۶٫۵	۳۶٫۵	۴۴٫۸	۵۲٫۱	۵۷٫۱	۶۱٫۳	۶۴٫۴



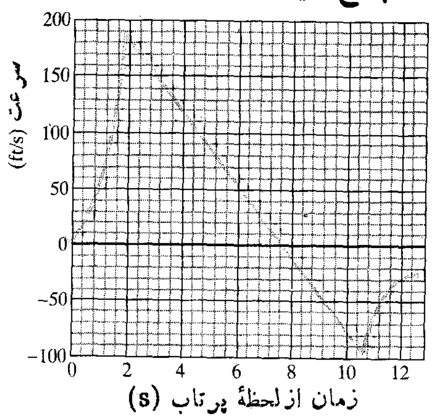
۷۸۰۱ سقوط دو توپ (از حال سکون).

الف) آهنگ متوسط واکنش در بازهٔ زمانی $t = ۲۰$ تا $t = ۳۰$ را پیدا کنید.

ب) نقاط متناظر با داده‌های جدول را مشخص کنید، خم همواری از آنها بگذرانید، و آهنگ لحظه‌ای واکنش در $t = ۲۵$ را براوردکنید.

وقتی مدلی از یك موشك پرتاب می‌شود، پیشران چند ثانیه‌ای می‌سوزد و به‌موشك شتابی به‌سمت بالا می‌دهد. پس از این فرایند سوختن، موشك مدتی به‌طرف بالا می‌رود وسپس شروع به سقوط می‌کند. مدت کوتاهی پس از آنکه موشك شروع به پایین آمدن کرد، مقدار کمی از یك مادهٔ منفجره باعث می‌شود که چتری باز شود و این چتر از سرعت موشك می‌کاهد تا هنگام برخورد با زمین درهم نشکند.

شکل ۷۹۰۱ داده‌های مربوط به‌سرعت را در پرتاب مدل یك موشك نشان می‌دهد. با استفاده از این داده‌ها به پرسشهای مسائل ۱۵–۱۹ پاسخ دهید.



۷۹۰۱ سرعت مدلی از یك موشك (مسائل ۱۵–۱۹).

۱۵. سرعت صعود موشك وقتی پیشران از سوختن باز می‌ایستد چقدر است؟

۱۶. پیشران چند ثانیه می‌سوزد؟

۱۷. موشك چه موقعی به بالاترین نقطه می‌رسد؟ دراین موقع، سرعت موشك چقدر است؟

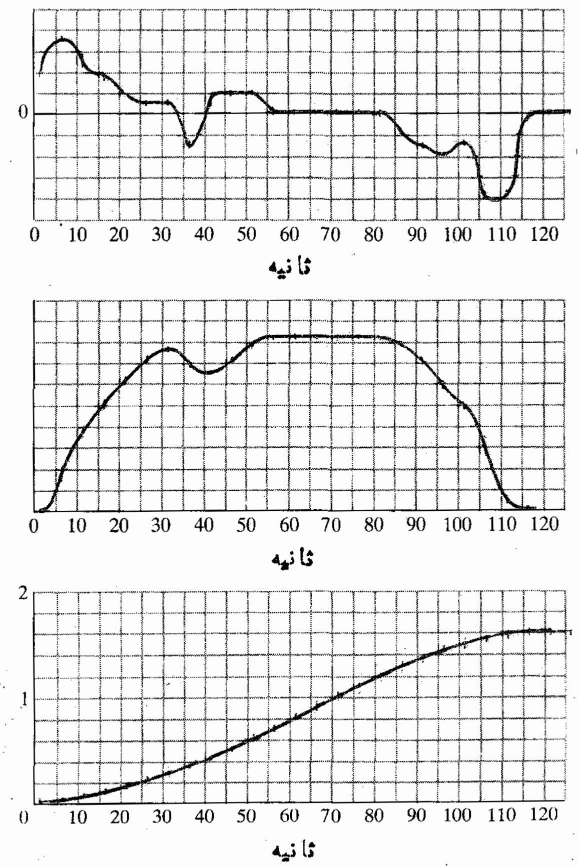
۱۸. چتر چه موقعی باز می‌شود؟ در این موقع، سرعت سقوط موشك چقدر است؟

۱۹. قبل از اینکه چتر باز شود، موشك چه مسافتی پایین می‌آید؟

۲۰. وقتی یك مادهٔ ضد باکتری به‌غذایی‌که باکتریها درآن‌مشغول رشد بودند افزوده شد، تعداد باکتریها مدتی همچنان افزایش یافت ولی بعد این رشد متوقف شد و تعداد شروع به‌کاهش کرد. تعداد باکتریها در زمان t (برحسب ساعت) برابر با $b(t) = 10^6 + 10^4 t - 10^3 t^2$ بود. با استفاده از نتیجهٔ مسألهٔ ۱، آهنگهای رشد را در (الف) $t = ۰$؛ (ب) $t = ۵$؛ و (پ) $t = ۱۰$ ساعت بیابید.

۲۱. میزان آب موجود در یك مخزن برحسب گالن، t دقیقه بعد از آنکه تخلیهٔ مخزن شروع شده است، برابر است با $Q(t)=۲۰۰(۳۰-t)^۲$. درپایان دقیقهٔ دهم، سرعت خروج آب از مخزن چقدر است؟ آهنگ متوسط خروج آب از مخزن در خلال ۱۰ دقیقهٔ اول چقدر است؟

۲۲. سه نمودار شکل ۸۰۱، نشان‌دهندهٔ مسافت طی شده (برحسب مایل)، سرعت (برحسب مایل برساعت)، و شتاب (مشتق سرعت که برحسب مایل برساعت‌بر ثانیه اندازه‌گیری می‌شود) برای هر ثانیه ازحرکت دو دقیقه‌ای یك اتومبیل است. کدام نمودار نشان‌دهندهٔ (الف) مسافت؛ (ب) سرعت؛ (پ) شتاب است؟ (ت) واحد مقیاس محور قائم برای نمودار سرعت، ۵ مایل برساعت در نظر گرفته شده‌است. مقادیر ماکسیمم و مینیمم شتاب را براورد کنید.



۸۰۱ حرکت دو دقیقه‌ای یك اتومبیل. کدام‌یك ازاین خمها نشان دهندهٔ مسافت است؛ کدام‌یك سرعت؛ کدام‌یك شتاب؛

۲۳. هزینهٔ نهایی. فرض کنید هزینهٔ تولید x ماشین لباسشویی برحسب دلار برابر است با $f(x)=۲۰۰۰+۱۰۰x-۰{,}۱x^۲$.

الف) هزینهٔ متوسط تولید ۱۰۰ ماشین لباسشویی را پیدا کنید.

ب) هزینهٔ نهایی تولید ۱۰۰ ماشین لباسشویی را پیدا کنید.

پ) با محاسبهٔ مستقیم هزینه نشان دهید که هزینهٔ نهایی تولید ۱۰۰ ماشین لباسشویی تقریباً برابر است با هزینهٔ تولید یك ماشین لباسشویی که بعد از ۱۰۰ ماشین تولید می‌شود.

۹.۱ حد

می‌دانیم که برای به‌دست آوردن مشتق، لازم است حد را محاسبه کنیم. ولی حد دقیقاً چیست وچگونه می‌توان آن را بدون زحمت زیاد محاسبه کرد؟ دراین بخش، به‌این موضوع می‌پردازیم.

مسأله

روش فرما برای یافتن مشتق ایجاب می‌کند که مقدار حدی خارج‌قسمت

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \qquad (۱)$$

را وقتی Δx به صفر میل می‌کند، بیابیم. ما درچند مورد برای انجام دادن این کار صورت را بر Δx تقسیم کردیم تا عبارتی به‌دست آوریم که بتوانیم درآن به‌جای Δx عدد صفر را قرار دهیم و حد را بیابیم.

متأسفانه، این روش جبری دو اشکال دارد: وقتگیر است و همیشه هم قابل کاربرد نیست. مثلا هیچ راهی برای تقسیم صورت کسر زیر بر Δx وجود ندارد

$$\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}. \qquad (۲)$$

این همان خارج قسمتی است که برای یافتن مشتق تابع سینوسی باید آن را به‌کار بریم. ما به‌روش بهتری برای محاسبهٔ حد نیاز داریم.

یك نماد ساده‌تر

درهنگام محاسبهٔ حد

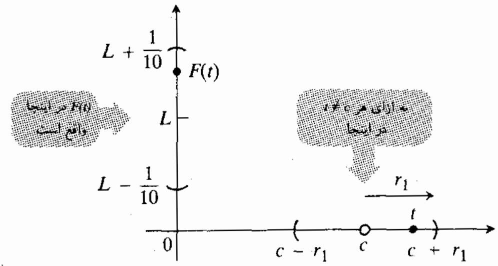
$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \qquad (۳)$$

وقتی Δx به صفر میل می‌کند، x را ثابت نگه می‌داریم در حالی که Δx تغییر می‌کند. دراین ضمن، کل خارج‌قسمت را به‌عنوان تابعی از یك متغیر، دراینجا Δx، درنظر می‌گیریم. مادام که مشغول چنین کاری هستیم، می‌توانیم نمادهای ساده‌تری را به‌کار ببریم: F برای تابع و t برای متغیر. پس باید مشخص کنیم که وقتی می‌گوییم «تابعی چون F از تك متغیری چون t، وقتی t به‌مقدار از پیش تعیین شده‌ای چون c میل می‌کند، دارای حد است.» منظورمان چیست. پس ازآن، می‌توانیم به‌عقب برگردیم و ببینیم که دربارهٔ مقدار حدی $(f(x+\Delta x)-f(x))/\Delta x$ وقتی Δx به‌صفر میل می‌کند، چه می‌توان گفت. در این ضمن، لازم نیست به‌مشتق بیندیشیم، کافی است به‌حد فکر کنیم.

تعریف حد

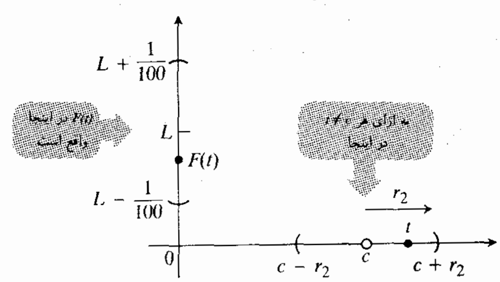
فرض کنید مقادیر تابعی چون $F(t)$ را درحالی نظاره می‌کنیم که t به‌سمت c حرکت می‌کند بـدون آنکه عملا مقدار c را اختیار کند (درست همان‌طورکه Δx به ۰ میل می‌کند بدون آنکه مقدار ۰ را اختیار کند). چه اطلاعی باید دربارهٔ مقادیر F داشته‌باشیم تا بگوییم که حد آنها L است؟ چه الگویی در رفتار آنها بایـد مشاهده‌کنیم تا مطمئن شویم که نهایتاً به L می‌گرایند؟

خواست ما این است کـه مثلا بتوانیم بگوییم وقتی t در محدوده‌ای به‌مرکز c و به‌شعاع r_1 قرار دارد، $F(t)$ درمحدوده‌ای به‌مرکز L و به‌شعاع یك دهم واحد واقع است.



ولی این به‌خودی خود کافی نیست زیرا وقتی t به حرکت خود به‌سمت c ادامه می‌دهد، ممکن است $F(t)$ به‌جای اینکه به L نزدیك شود، در داخل بازهٔ $(L-۱/۱۰ \quad L+۱/۱۰)$ این سو و آن سو بجهد.

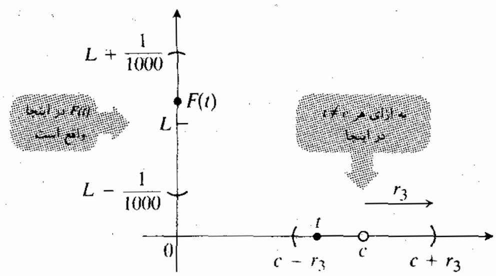
پس لازم است این را هم بگوییم کـه وقتی t حرکت خود را به‌سمت c ادامه می‌دهد، $F(t)$ باید نهایتاً به L نزدیك ونزدیکتر شود؛ و لازمهٔ این‌حرف این‌است‌که مثلا به‌ازای همهٔ مقادیر t در محدوده‌ای به‌مرکز c و به‌شعاع کوچکتر r_2، $F(t)$ در محدوده‌ای به‌مرکز L و به‌شعاع ۱/۱۰۰ واحد قرار داشته‌باشد.



ولی این هم کافی نیست. اگـر $F(t)$ پس ازآن در داخل بـازهٔ $(L-۱/۱۰۰, L+۱/۱۰۰)$ این‌سو و آن‌سو بجهد و به‌سمت L میل نکند چه می‌شود؟ شاید بهتر بودکه بگوییم $F(t)$ لازم است پس ازمدتی در داخل محدوده‌ای به مرکز L و به‌شعاع ۱/۱۰۰۰ واحد قرار داشته بـاشد. یعنی به‌ازای همهٔ مقادیر t در محدوده‌ای به مرکز c و به شعاع r_3، که از r_2 هم کوچکتر است، تمام مقادیر $F(t)$ در بازهٔ

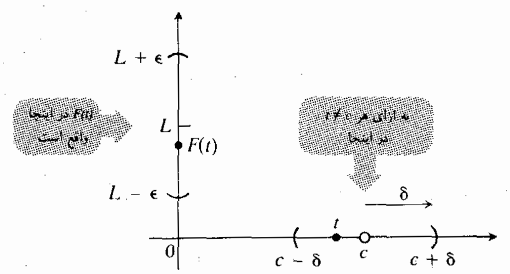
$$L-\frac{۱}{۱۰۰۰}<F(t)<L+\frac{۱}{۱۰۰۰}$$

واقع باشندکه این را درشکل زیر ملاحظه می‌کنید.



ولی این هم تضمین نمی‌کندکـه اکنون وقتی t به سمت c میل می‌کند، $F(t)$ به‌سمت L برود. حتی اگر قبلا $F(t)$ به‌اطراف جهش نکرده باشد، ممکن است حالا شروع به‌این کارکند. برای منظوری‌که داریم، به‌شرایط قویتری نیاز است.

در واقع لازم است کـه به‌ازای هر بازهٔ حول L، هرقدر کوچك، بتوانیم بازه‌ای از اعداد حول c بیابیم‌که همهٔ مقادیر F آنهـا در داخل آن بازهٔ حول L باشند. به‌عبارت دیگر، به‌ازای هر شعاع مثبت ϵ حول L، یـك شعاع مثبت δ حول c وجود داشته بـاشد به‌قسمی که برای همهٔ مقادیر t در محدوده‌ای به مرکز c و به‌شعاع δ واحد (به‌استثنای خود $t=c$) مقادیر $F(t)$ درمحدوده‌ای به‌مرکز L و به‌شعاع ϵ واحد واقع باشند:



بنابراین، هرقدر t (بدون مساوی‌شدن با c) بـه c نزدیکتر شود، $F(t)$ نیز باید به L نزدیکتر شود.

تعریف

حد

حد $F(t)$ وقتی t به‌سمت c میل می‌کند، عدد L است اگر: به‌ازای هرشعاع $0<\epsilon$ حول L، یك شعاع $0<\delta$ حول c وجود داشته باشد به‌قسمی که به‌ازای هر t

$$(۴)\qquad 0<|t-c|<\delta \text{ نتیجه بدهد } |F(t)-L|<\epsilon .$$

عبارت «حد $F(t)$ وقتی t بـه c میل می‌کند، برابر L است» را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\lim_{t\to c} F(t)=L .$$

اینکه بگوییم وقتی t به c می‌گراید $F(t)$ بـه حد L میل

می‌کند، اجمالاً به‌این معنی است که به‌ازای هر ϵ مثبت، یك عدد کوچك δی مثبت وجود دارد (که به ϵ وابسته است) به‌طوری‌که اگر t مقید به‌محدوده‌ای به‌مرکز c و به‌شعاع δ واحد باشد، $F(t)$ درمحدوده‌ای به‌مرکز L و به‌شعاع ϵ واحد قرار دارد.

چنین تصورکنیدکه می‌خواهیم شیئی مانند یك محور مولد را با ماشین وبا دقت زیادی بسازیم. خواست ما این است‌که قطر محور L باشد ولی ازآنجایی که هیچ‌کاری در حد ایده‌آل انجام نمی‌شود، باید به‌این قناعت‌کنیم که قطر $F(t)$ درحدود $L\pm\epsilon$ باشد. عدد δ نشان می‌دهد که ابزارکنترل ما، t، چقدر باید دقیق باشد تا تضمین شود که قطر محور با این درجه از دقت ساخته می‌شود.

مثالها ـ آزمودن تعریف

هروقت تعریف جدیدی ارائه می‌کنیم، خوب است آن را باتوجه به مثالهای آشنا بیازماییم تا ببینیم که نتایجی سازگار با تجربیات گذشتهٔ ما به‌دست می‌آید یا نه. مثلاً، تجربهٔ ما حاکی‌است که وقتی t به ۱ میل می‌کند، $5t$ به $5=5(1)$ و $5t-3$ به $2=5(1)-3$ میل می‌کند. اگر تعریف ما می‌گفت‌که‌هریك‌از این حدها صفر است، ویا حرف مهمل دیگری از این قبیل، آن‌را دور می‌انداختیم و درجستجوی تعریف دیگری برمی‌آمدیم. سه مثال زیر را تا حدی به‌این دلیل می‌آوریم که نشان دهیم تعریف مذکور در رابطهٔ (۴) آن نوع نتایجی راکه می‌خواهیم، به‌دست می‌دهد.

مثال ۱ نشان دهیدکه طبق تعریف حد، $\lim\limits_{t\to 1}(5t-3)=2$.

حل: تعریف حد را با ضوابط $c=1$، $F(t)=5t-3$، و $L=2$ به‌کار می‌بریم. برای اینکه تعریف برقرار باشد، باید نشان دهیم‌که به‌ازای هر $\epsilon>0$ (شعاع حول $L=2$) یك $\delta>0$ (شعاع حول $c=1$) وجود دارد به‌قسمی‌که به‌ازای هر t،

$$0<|t-1|<\delta \implies |(5t-3)-2|<\epsilon.$$

(علامت $\implies$ خوانده می‌شود «نتیجه می‌دهد»). نامساوی ϵ را از

$$|(5t-3)-2|<\epsilon$$

به

$$|5t-5|<\epsilon$$

و سپس به

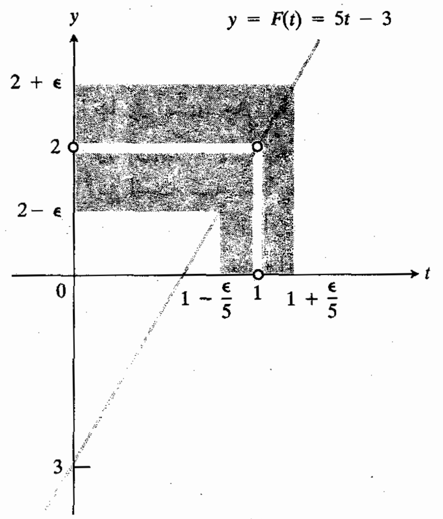
$$5|t-1|<\epsilon$$

و آنگاه به

$$|t-1|<\frac{\epsilon}{5}$$

تبدیل می‌کنیم.

این نامساویها همگی معادل‌اند. بنابراین، نامساوی ϵ اولیه درصورتی برقرار است‌که $|t-1|<\epsilon/5$. ازاین‌رو δ را برابر $\epsilon/5$ می‌گیریم. شکل ۸.۱ را ببینید.

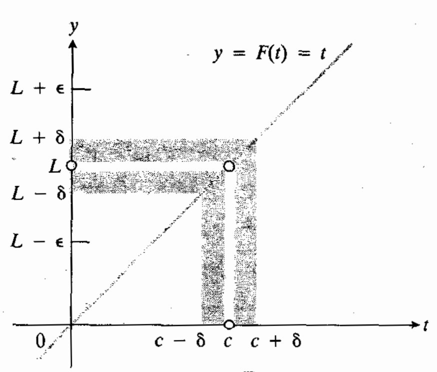


۸.۱ درمورد تابع $F(t)=5t-3$ می‌بینیم‌که $0<|t-1|<\epsilon/5$ برقراری $|F(t)-2|<\epsilon$ را تضمین می‌کند.

مقدار $\delta'=\epsilon/5$ تنها مقدار δ نیست‌که نامساوی ϵ را برقرار می‌سازد. هرمقدار مثبت کوچکتر δ نیز این کار را انجام می‌دهد. تعریف ما درجستجوی «بهترین» δ نیست؛ هر δیی که رابطه را برقرارکند، کافی است. ■

مثال ۲ تحقیق‌کنیدکه برطبق تعریف حد، $\lim\limits_{t\to c}t=c$.

حل: تعریف حد را با ضوابط $F(t)=t$ و $L=c$ به‌کار می‌بریم. برای اینکه تعریف برقرار باشد، باید نشان‌دهیم که به‌ازای هر $\epsilon>0$ مفروض (شعاع حول $L=c$) یك $\delta>0$ (شعاع حول



۸.۲ درمورد تابع $F(t)=t$ می‌بینیم‌که رابطهٔ $0<|t-c|<\delta$ برقراری‌رابطهٔ $|F(t)-c|<\epsilon$ را به‌ازای $\delta\leqslant\epsilon$ تضمین می‌کند.

c روی محور t) وجود دارد به‌قسمی که به‌ازای هر t،

$$0 < |t-c| < \delta \Longrightarrow |t-c| < \epsilon.$$

اگر δ برابر با ϵ یا هرعدد مثبت کوچکتری باشد، نامساوی ϵ برقرار خواهد بود (شکل ۸۲۰۱). ■

درعبارت

$$F(t) \to L \quad \text{،} t \to c \quad \text{وقتی}$$

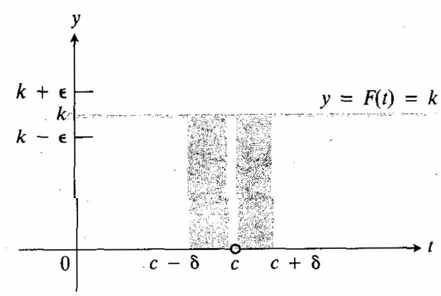
که به صورت «وقتی t به c میل می‌کند $F(t)$ به L میل می‌کند» خوانده می‌شود، فعل «میل کردن» مفهوم حرکت را تداعی می‌کند که گاهی موجه نیست. مثلا، تابعی که به‌ازای همهٔ مقادیر t دارای مقدار ثابت $F(t)=k$ است مسلماً اگر t به عدد دلخواه c میل کند، حدی برابر k دارد. این را درمثال زیر ملاحظه می‌کنیم.

مثال ۳ فرض کنید $F(t)=k$ تابعی باشد که مقدارش به‌ازای هر t، برابر با k است. نشان دهید که به‌ازای هر c، $\lim_{t\to c} F(t)=k$.

حل: تعریف حد را با ضوابط $F(t)=k$ و $L=k$ به‌کار می‌بریم. باید نشان دهیم که به‌ازای هر $\epsilon > 0$ یك $\delta > 0$ وجود دارد به‌قسمی که برای هر t،

$$0 < |t-c| < \delta \Longrightarrow |k-k| < \epsilon.$$

دراینجا هر δ مثبت به‌کار ما می‌آید زیرا $k-k=0$ به‌ازای همهٔ tها از ϵ کوچکتر است (شکل ۸۳۰۱).

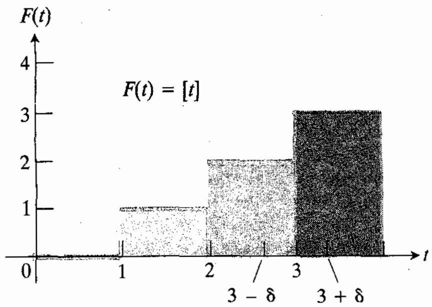


۸۳۰۱ درمورد تابع $F(t)=k$ می‌بینیم که به‌ازای هر δی مثبت، $|F(t)-k| < \epsilon$. ■

حد چپ و حد راست

گاهی اوقات مقادیر تابعی چون $F(t)$، وقتی t از دوجهت مختلف به‌عددی مثل c میل می‌کند، به حدهای مختلفی می‌گرایند. درچنین حالاتی، حد تابع F را وقتی t از سمت راست به c میل می‌کند **حد راست** F در c، و حد تابع F را وقتی t ازسمت چپ به c میل می‌کند **حد چپ** F در c می‌نامیم.

مثال ۴ نشان دهید که تابع بزرگترین عدد صحیح $F(t)=[t]$، وقتی t به‌سمت ۳ میل می‌کند، حد ندارد (شکل ۸۴۰۱).



۸۴۰۱ تابع بزرگترین عدد صحیح به‌ازای هرعددصحیح حدهای چپ وراست مختلفی دارد.

حل: اولین حدس ما این است که تابع دارای حد $L=۳$ باشد زیرا وقتی t برابر با ۳ یا کمی بزرگتر ازآن است، مقادیر $F(t)=[t]$ نزدیك به ۳ هستند. ولی وقتی t کمی کوچکتر از ۳ است، مثلا $t=۲٫۹۹۹۹$، آنگاه $۲=[t]$. یعنی اگر δ عدد مثبتی کوچکتر از ۱ باشد آنگاه

$$[t]=۲ \quad \text{،} ۳-\delta < t < ۳ \quad \text{اگر}$$

درحالی‌که

$$.[t]=۳ \quad \text{،} ۳ < t < ۳+\delta \quad \text{اگر}$$

حال اگر ϵ مثبت کوچکی، مثلا $\epsilon = ۰٫۰۱$ را درنظر بگیریم، نمی‌توانیم $\delta > 0$ی بیابیم که رابطهٔ زیر را برقرار سازد

$$.|[t]-۳| < \epsilon \quad \text{،} 0 < |t-۳| < \delta \quad \text{اگر}$$

در واقع، هیچ عدد Lی حد این تابع نیست. وقتی t نزدیك ۳ است، برخی از مقادیر تابع $[t]$ برابر ۲ و سایر مقادیر تابع برابر ۳ هستند. از اینرو مقادیر تابع جملگی نزدیك هیچ عدد Lی نیستند. بنابراین

$$\lim_{t\to ۳} [t] \quad \text{وجود ندارد.}$$

ولی حدهای چپ و راست در ۳ وجود دارند. حد راست عبارت است از

$$L^+ = \lim_{t\to ۳^+} [t] = ۳$$

و حد چپ عبارت است از

$$L^- = \lim_{t\to ۳^-} [t] = ۲.$$

نماد $t \to ۳^+$ را می‌توان بدین صورت خواند: t ازبالا (یا «از راست» یا «ازطریق مقادیر بزرگتر از ۳») به ۳ میل می‌کند. نماد $t \to ۳^-$ نیز معنای مشابهی دارد. ■

تعریف رسمی حد راست وچپ چنین است:

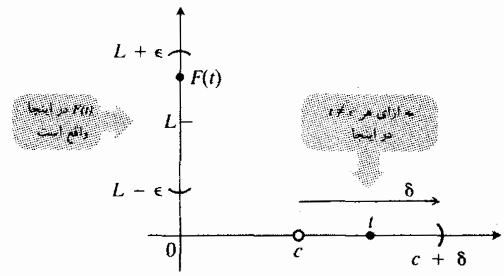
تعریف

حد راست: $\lim_{t\to c^+} F(t)=L$

حد تـابع $F(t)$ وقتی t از راست به c میل می‌کند برابر با L است اگر:

به‌ازای هر $\epsilon>۰$ مفروض (هرشعاع حول L) یك $\delta>۰$ (شعاعی درسمت راست c) وجود داشته باشد که به‌ازای هر t،

$$c<t<c+\delta \Longrightarrow |F(t)-L|<\epsilon. \qquad (۵)$$



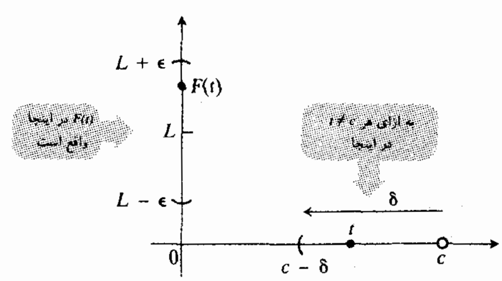
تعریف

حد چپ: $\lim_{t\to c^-} F(t)=L$

حد تـابع $F(t)$ وقتی t از چپ به c میل می‌کند برابر با L است اگر:

به‌ازای هر $\epsilon>۰$ مفروض (هرشعاع حول L) یك $\delta>۰$ (شعاعی درسمت‌چپ c) وجود داشته‌باشد به‌قسمی که به‌ازای هر t،

$$c-\delta<t<c \Longrightarrow |F(t)-L|<\epsilon. \qquad (۶)$$



ازمقایسهٔ روابط (۵) و (۶) با رابطهٔ (۴)، ارتباط حدهای راست‌وچپ‌یك تابع در یك نقطه با حدی‌که قبلا تعریف شد،معلوم می‌شود. اگر c را از عناصر نامساویهای δ در روابط (۵) و (۶) کم‌کنیم، این نامساویها به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$۰<t-c<\delta \Longrightarrow |F(t)-L|<\epsilon. \qquad (۵')$$

و

$$-\delta<t-c<۰ \Longrightarrow |F(t)-L|<\epsilon. \qquad (۶')$$

روابط (۵′) و (۶′) برروی هم معادل رابطهٔ زیرند:

$$۰<|t-c|<\delta \Longrightarrow |F(t)-L|<\epsilon. \qquad (۴)$$

که همان رابطهٔ (۴) درتعریف حد است. بـه‌طور خلاصه، $F(t)$ در یك نقطه دارای حد است اگر و تنها اگر حدهـای راست و چپ در آنجا موجود و برابر باهم باشند.

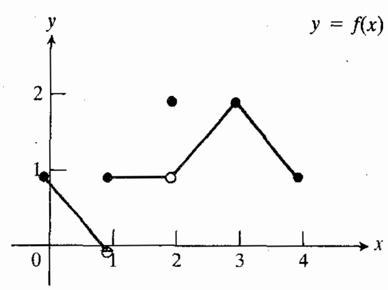
گاهی $\lim_{t\to c} F(t)$ را حد **دوطرفهٔ** F در c می‌نامیم تـا آن را از حدهای **یکطرفهٔ** راست و چپ F در c متمایز کنیم.

رابطهٔ بین حدهای یکطرفه و دوطرفه

تابعی چون $F(t)$ در نقطه‌ای مانند c دارای حد است اگر و تنها اگر حدهای راست و چپ در c موجود و برابر باهم باشند. بـا استفاده از نمادها می‌توان نوشت

$$\lim_{t\to c} F(t)=L \iff \lim_{t\to c^+} F(t)=L \text{ و } \lim_{t\to c^-} F(t)=L. \qquad (۷)$$

مثال ۵ همهٔ گزاره‌های زیر دربارهٔ تابع $y=f(x)$ که نمودارش درشکل ۸۵۰۱ رسم شده، صادق‌اند.



۸۵۰۱ درمثال ۵ ویـژگیهای حـدی تـابع $y=f(x)$ که‌دراینجا رسم‌شده، شرح‌داده‌می‌شود.

در $x=۰$: $\lim_{x\to ۰^+} f(x)=۱$

در $x=۱$: $\lim_{x\to ۱^-} f(x)=۰$ اگرچه $f(۱)=۱$.

$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۱$

وقتی $x\to ۱$، $f(x)$ حد ندارد. (حدهای راست و چپ در ۱ برابر باهم نیستند.)

در $x=۲$: $\lim_{x\to ۲^-} f(x)=۱$

$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=۱$

$\lim_{x\to ۲} f(x)=۱$ اگرچه $f(۲)=۲$.

در $x=۳$:
$$\lim_{x\to ۳^-} f(x)=\lim_{x\to ۳^+} f(x)=\lim_{x\to ۳} f(x)=f(۳)=۲.$$

در $x=۴$: $\quad \lim_{x\to ۴^-} f(x)=۱.$

درهر نقطهٔ دیگر c بین ۰ و ۴، $f(x)$ وقتی $x\to c$، حد دارد. ■

مثال ۶ نشان دهیدکه $f(x)=|x|$ در $x=۰$ مشتق ندارد.

حل: باید نشان دهیم که خارج‌قسمت تفاضلهای زیر

$$\frac{|۰+\Delta x|-|۰|}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x} \qquad (۸)$$

وقتی $\Delta x\to ۰$ حد ندارد. چون وقتی $\Delta x>۰$ داریم $\Delta x=|\Delta x|$، حد راست در ۰ چنین است

$$\lim_{\Delta x\to ۰^+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰^+} ۱=۱. \qquad (۹)$$

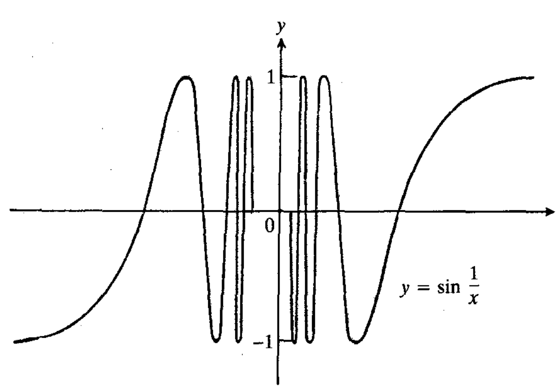
چون وقتی $\Delta x<۰$ داریم $|\Delta x|=-\Delta x$، حد چپ چنین‌است

$$\lim_{\Delta x\to ۰^-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰^-} -۱=-۱. \qquad (۱۰)$$

حدهای راست و چپ در ۰ برابر نیستند. بنابراین، خارج قسمت تفاضلهای (۸) وقتی $\Delta x\to ۰$، حد ندارد. ■

گاهی یك تابع $f(x)$ در یك نقطه نه حد راست دارد و نه حد چپ. مثال زیر نشان می‌دهد که چگونه چنین چیزی ممکن است.

مثال ۷ نشان دهید که تابع $y=\sin(۱/x)$ وقتی $x\to ۰$ حد ندارد.



۸۶.۱ تابع $y=\sin(۱/x)$ وقتی x به ۰ میل می‌کند نه حد راست دارد و نه حد چپ.

حل: شکل ۸۶.۱ را ببینید. درهر بازهٔ حول $x=۰$، تابع تمام مقادیر بین ۱− و ۱+ را اختیار می‌کند. بنابراین، هیچ تك عدد Lای وجود نداردکه وقتی x نزدیك ۰ است، مقادیرتابع همگی نزدیك آن عدد باشند. حتی وقتی که x را به‌مقادیر مثبت یا مقادیر منفی محدودکنیم، باز هم این حکم برقرار است. به‌عبارت دیگر، وقتی x به ۰ میل می‌کند، این تابع نه حد راست دارد نه حد چپ. ■

روشهای محاسبه

اکنون به‌قضیه‌ای می‌رسیم که به‌ما می‌گوید حد مجموع و حد حاصلضرب توابعی را که حدهای آنها معلوم است، چگونه حساب کنیم. و نیز می‌گوید که حد بسیاری از نسبتهای این توابع را چگونه به‌دست آوریم.

قضیهٔ ۱

قضیهٔ ترکیب حدها

اگر $\lim_{t\to c} F_۱(t)=L_۱$ و $\lim_{t\to c} F_۲(t)=L_۲$، آنگاه

i) $\lim[F_۱(t)+F_۲(t)]=L_۱+L_۲$.

ii) $\lim[F_۱(t)-F_۲(t)]=L_۱-L_۲$.

iii) $\lim[F_۱(t)F_۲(t)]=L_۱L_۲$.

iv) $\lim[kF_۲(t)]=kL_۲$ (به‌ازای هر k).

v) $\lim\frac{F_۱(t)}{F_۲(t)}=\frac{L_۱}{L_۲}$ اگر $L_۲\neq ۰$.

همهٔ این حدها وقتی $t\to c$ گرفته می‌شوند، و $L_۱$ و $L_۲$ اعداد حقیقی هستند.

به‌عبارت دیگر، فرمولهای قضیهٔ ۱ می‌گویند:

i) حد مجموع دوتابع، مجموع حدهای آنهاست.

ii) حد تفاضل دوتابع، تفاضل‌حدهای آنهاست.

iii) حد حاصلضرب‌دوتابع،حاصلضرب حدهای آنهاست.

iv) حد حاصلضرب یك عدد ثابت در یك تابع، برابر است با حاصلضرب آن عدد ثابت در حد آن تابع.

v) حد خارج‌قسمت دو تابع، خارج‌قسمت حدهای آنهاست به‌شرطی‌که مخرج به‌صفر نگراید.

قضیهٔ ۱ برای حدهای راست ($t\to c^+$) و برای حدهای چپ ($t\to c^-$) نیز صادق است.

در درس مقدماتی حساب دیفرانسیل و انتگرال غالباً مناسب می‌بینندکه نتایج قضیهٔ ۱ را قبل از اثبات آن به‌کار برند. برای خوانندگانی که به‌اثبات این قضیه علاقه‌مندند، اثبات را درپیوست ۱ آورده‌ایم. دراینجا می‌توانیم این قضیه را به‌زبانی غیررسمی بیان‌کنیم که برای خواننده بسیار قابل‌قبول باشد: وقتی t نزدیك به c است، $F_۱(t)$ نزدیك به $L_۱$ است و $F_۲(t)$ نزدیك به $L_۲$ است.

پس طبیعی است که فکر کنیم $F_1(t)+F_2(t)$ نزدیک به L_1+L_2 است؛ $F_1(t)-F_2(t)$ نزدیک به L_1-L_2 است؛ $F_1(t)F_2(t)$ نزدیک به L_1L_2 است؛ $kF_2(t)$ نزدیک به kL_2 است؛ و $F_1(t)/F_2(t)$ نزدیک به L_1/L_2 است اگر L_2 صفر نباشد.

آنچه باعث می‌شود این استدلال حالت اثبات را نداشته باشد این است که کلمهٔ «نزدیک» دقیق نیست. عبارات «به اندازهٔ دلخواه نزدیک به» و «به‌اندازهٔ کافی نزدیک به» ممکن است استدلال را کمی بهتر کنند ولی برهان قاطع این قضیه، استدلال دقیق ϵ و δیی است که در پیوست ۱ آمده است.

اهمیت قضیهٔ ۱ در این است که ما را از اینکه در همهٔ موارد استدلالهای $\epsilon-\delta$یی بیاوریم، معاف می‌سازد.

مثال ۸ چون با توجه به‌مثالهای ۲ و ۳ می‌دانیم که $\lim\limits_{t\to c} t=c$ و $\lim\limits_{t\to c} k=k$، داریم

$$\lim_{t\to c} t^2=\lim_{t\to c}(t)(t)=(c)(c)=c^2 \quad (\text{از iii})$$

$$\lim_{t\to c}(t^2-5)=c^2-5 \quad (\text{از ii})$$

$$\lim_{t\to c} 4t^2=4c^2 \quad (\text{از iv})$$

و اگر $c\neq 0$،

$$\lim_{t\to c}\frac{t^2-5}{4t^2}=\frac{c^2-5}{4c^2} \quad (\text{از v}) \quad \blacksquare$$

همان‌طور که از مثال ۸ برمی‌آید، حد هر تابع چندجمله‌ای $f(t)$ وقتی $t\to c$ برابر با $f(c)$ است. به‌عبارت دیگر، این حد را می‌توان با محاسبهٔ مقدار چندجمله‌ای در $t=c$ پیدا کرد. همین‌طور، حد نسبت $f(t)/g(t)$ از دوچندجمله‌ای وقتی $t\to c$ برابر با $f(c)/g(c)$ است به‌شرطی که $g(c)\neq 0$.

حد چندجمله‌ای

اگر $f(t)=a_nt^n+a_{n-1}t^{n-1}+\dots+a_0$ یک تابع چندجمله‌ای دلخواه باشد، آنگاه

$$\lim_{t\to c} f(t)=f(c)=a_nc^n+a_{n-1}c^{n-1}+\dots+a_0.$$

حد خارج‌قسمت چندجمله‌ایها

اگر $f(t)$ و $g(t)$ چندجمله‌ای باشند، آنگاه

$$\lim_{t\to c}\frac{f(t)}{g(t)}=\frac{f(c)}{g(c)}،\quad \text{به‌شرطی که } g(c)\neq 0.$$

درمحاسبات شیب وسرعت که قبلا دراین فصل انجام‌دادیم، از این واقعیات استفاده کردیم. کسانی که خواستار اثباتهای رسمی هستند، می‌توانند به‌پیوست ۱، مسائل ۱-۵، مراجعه کنند.

مثال ۹ درمثال ۵ بخش ۱.۶، برای محاسبهٔ شیب $m=3x^2-3$ متعلق به‌خم $y=x^3-3x+3$، حد $3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2-3$ را وقتی Δx به صفر میل می‌کند، پیدا کردیم. اگر x را ثابت بگیریم، این عبارت یک تابع چندجمله‌ای از Δx است. پس، حد عبارت است از مقدار چندجمله‌ای در $\Delta x=0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}[3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2-3]$$
$$=3x^2+3x(0)+(0)^2-3$$
$$=3x^2-3. \quad \blacksquare$$

مثال ۱۰ مطلوب است محاسبهٔ

$$\lim_{t\to 2}\frac{t^2+2t+4}{t+2}.$$

حل: تابعی که می‌خواهیم حدش را بیابیم، خارج‌قسمت دو چندجمله‌ای است. مخرج، $t+2$، به‌ازای $t=2$ برابر ۰ نیست. بنابراین، حد عبارت است ازمقدار خارج‌قسمت در $t=2$:

$$\lim_{t\to 2}\frac{t^2+2t+4}{t+2}=\frac{(2)^2+2(2)+4}{2+2}=\frac{12}{4}=3. \quad \blacksquare$$

مثال ۱۱ مطلوب است محاسبهٔ

$$\lim_{t\to 2}\frac{t^3-8}{t^2-4}.$$

حل: مخرج در $t=2$ برابر ۰ است و نمی‌توانیم حد را با جانشانی مستقیم به‌دست آوریم. با این حال، اگر صورت و مخرج را تجزیه کنیم می‌بینیم که

$$\frac{t^3-8}{t^2-4}=\frac{(t-2)(t^2+2t+4)}{(t-2)(t+2)}.$$

برای $t\neq 2$،

$$\frac{t-2}{t-2}=1.$$

بنابراین، به‌ازای همهٔ مقادیر t که متفاوت با ۲ باشند (مقادیری که در واقع حد را وقتی $t\to 2$، تعیین می‌کنند)،

$$\lim_{t\to 2}\frac{t^3-8}{t^2-4}=\lim_{t\to 2}\frac{t^2+2t+4}{t+2}=\frac{(2)^2+2(2)+4}{2+2}$$
$$=\frac{12}{4}=3.$$

برای محاسبهٔ این حد، صورت و مخرج را برعامل مشترك تقسیم کردیم و نتیجه را به‌ازای $t=2$ حساب کردیم. ■

مثال ۱۱ نکتهٔ ریاضی مهمی را دربارهٔ حد نشان می‌دهد: حد تابع $f(t)$ وقتی $t \to c$ هیچگاه به این بستگی ندارد که در $t=c$ چه اتفاقی می‌افتد. حد (در صورت وجود) به‌وسیلهٔ مقادیر f در $t \neq c$ کاملاً معین می‌شود. در مثال ۱۱، خارج‌قسمت $f(t)=(t^3-8)/(t^2-4)$ در $t=2$ حتی تعریف نمی‌شود. با این حال، حد آن وقتی $t \to 2$، وجود دارد و برابر با ۳ است.

قضیهٔ ساندویچ و $(\sin\theta)/\theta$

این بخش را با قضیه‌ای که بعداً به‌آن نیاز خواهیم داشت، به‌پایان می‌آوریم.

قضیهٔ ۲

قضیهٔ ساندویچ

فرض کنید که به‌ازای هر $t\neq c$ در بازه‌ای حول c،

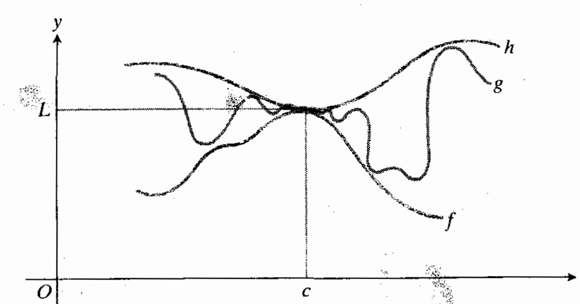
$$f(t) \leqslant g(t) \leqslant h(t)$$

و وقتی t به c میل می‌کند، $f(t)$ و $h(t)$ هر دو به حد L میل می‌کنند، در این صورت

$$\lim_{t\to c} g(t)=L.$$

به شکل ۸۷.۱ نگاه کنید. قضیهٔ ساندویچ‌هم در مورد حدهای راست و چپ و هم در مورد حد دوطرفه صادق است.

ایدهٔ نهفته در قضیهٔ ۲ این است که اگر $f(t)$ و $h(t)$ به سمت L بروند و $g(t)$ بین آنها «گرفتار» باشد، $g(t)$ را هم باخودشان به سوی L می‌برند



۸۷.۱ قضیهٔ ساندویچ. اگر $\lim_{t\to c} f(t)$ و $\lim_{t\to c} h(t)$ هردو برابر با L باشند، آنگاه $\lim_{t\to c} g(t)=L$ زیرا به‌ازای مقادیر tی نزدیك c داریم $f(t)\leqslant g(t)\leqslant h(t)$. نمودار g بین نمودارهای f و h گیر می‌افتد.

$$\begin{array}{ccccc} f(t) & \leqslant & g(t) & \leqslant & h(t) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ L & \leqslant & \lim g(t) & \leqslant & L. \end{array}$$

می‌توان $g(t)$ را مانند یك توپ پینگ‌پنگ بین دو راکت درنظر گرفت که وقتی $t \to c$ راکتها نزدیکتر به‌هم حرکت کنند. اثباتی از این قضیه را در انتهای پیوست ۱ آورده‌ایم.

مثال ۱۲ به‌عنوان کاربردی از قضیهٔ ساندویچ، نشان می‌دهیم که اگر θ برحسب رادیان اندازه‌گیری شود،

$$\lim_{\theta\to 0} \sin\theta = 0 \qquad (۱۱)$$

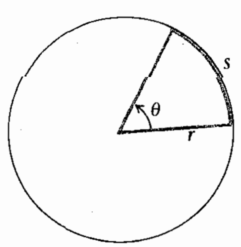
$$\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1 \qquad (۱۲)$$

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1. \qquad (۱۳)$$

حل: اندازهٔ یك زاویه برحسب رادیان [اندازهٔ رادیانی] را می‌توان به صورت

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad (۱۴)$$

تعریف کرد که در آن، s طول قوسی است که اضلاع زاویه از دایره‌ای به شعاع r جدا می‌کنند، اگر مرکز دایره در رأس زاویه قرار گیرد. شکل ۸۸.۱ این تعریف را نشان می‌دهد. (دربارهٔ اندازهٔ رادیانی در بخش ۲.۶ که مباحث مثلثات مرور می‌شود، مطالب بیشتری خواهد آمد.)



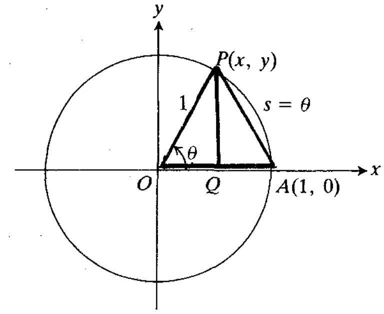
۸۸.۱ رادیان $\theta = s/r$.

در شکل ۸۹.۱، O مرکز یك دایرهٔ واحد و θ اندازهٔ یك زاویهٔ حادهٔ AOP برحسب رادیان است. توجه کنید که تحت این شرایط، $s=\theta$ (زیرا $s=r\theta$ و $r=1$). حال $\triangle APQ$ یك مثلث قائم‌الزاویه با ساقهایی به طول

$$QP=\sin\theta,\quad AQ=1-\cos\theta$$

است. ازقضیهٔ فیثاغورس و با توجه به این واقعیت که $AP<\theta$، به دست می‌آوریم

$$\sin^2\theta+(1-\cos\theta)^2=(AP)^2<\theta^2. \qquad (۱۵)$$



۸۹۰۱ اندازهٔ رادیانی در یك دایره واحد: $r=1, s=\theta$.

هردو جملهٔ سمت چپ رابطهٔ (۱۵) مثبت‌اند، بنابراین هریك از آنها از مجموع آن دو، یعنی $\theta^{۲}$، کوچکتر است:

$$\sin^{۲}\theta < \theta^{۲} \qquad (۱۶)$$

$$(۱-\cos\theta)^{۲} < \theta^{۲} \qquad (۱۷)$$

یا

$$-\theta < \sin\theta < \theta \qquad (۱۸)$$

$$-\theta < ۱-\cos\theta < \theta\,. \qquad (۱۹)$$

حال فرض می‌کنیم θ به ۰ میل کند. چون $\lim_{\theta\to ۰} -\theta = ۰$ و $\lim_{\theta\to ۰}\theta = ۰$، قضیهٔ ساندویچ می‌گوید که در حد، روابط (۱۸) و (۱۹) به صورت زیر در می‌آیند

$$۰ \leqslant \lim_{\theta\to ۰}\sin\theta \leqslant ۰ \qquad (۲۰)$$

$$۰ \leqslant \lim_{\theta\to ۰}(۱-\cos\theta) \leqslant ۰\,. \qquad (۲۱)$$

بنابراین، از آنجا که

$$۰ = \lim_{\theta\to ۰}(۱-\cos\theta) = ۱ - \lim_{\theta\to ۰}\cos\theta$$

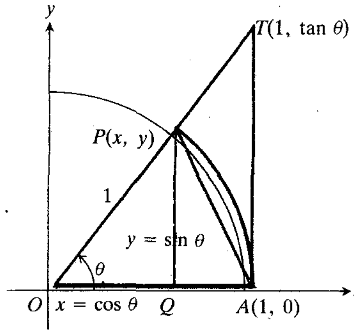
داریم

$$\lim_{\theta\to ۰}\sin\theta = ۰,\quad \lim_{\theta\to ۰}\cos\theta = ۱\,.$$

برای اثبات رابطهٔ (۱۳)، نشان می‌دهیم که حدهای راست و چپ $(\sin\theta)/\theta$ در ۰ هردو برابر با ۱ هستند. و از این طریق خواهیم دانست که حد دو طرفه وجود دارد و برابر با ۱ است.

برای اینکه نشان دهیم حد سمت راست برابر با ۱ است، در شکل ۹۰۱ فرض می‌کنیم θ مثبت و کوچکتر از $\pi/۲$ باشد. مساحتهای $\triangle OAP$، قطاع OAP، و $\triangle OAT$ را باهم مقایسه می‌کنیم و می‌بینیم که

$$\text{مساحت } \triangle OAP < \text{مساحت قطاع } OAP < \text{مساحت } \triangle OAT \qquad (۲۲)$$



۹۰۱ مساحت $\triangle OAT$ > مساحت قطاع OAP > مساحت $\triangle OAP$

این مساحتها را می‌توان به صورت زیر برحسب θ بیان کرد

$$\text{مساحت } \triangle OAP = \frac{۱}{۲}\times\text{قاعده}\times\text{ارتفاع} = \frac{۱}{۲}(۱)(\sin\theta) \qquad (۲۳)$$

$$= \frac{۱}{۲}\sin\theta$$

$$\text{مساحت قطاع } OAP = \frac{۱}{۲}r^{۲}\theta = \frac{۱}{۲}(۱)^{۲}\theta = \frac{\theta}{۲} \qquad (۲۴)$$

$$\text{مساحت } \triangle OAT = \frac{۱}{۲}\times\text{قاعده}\times\text{ارتفاع} = \frac{۱}{۲}(۱)(\tan\theta)$$

$$= \frac{۱}{۲}\tan\theta \qquad (۲۵)$$

بنابراین

$$\frac{۱}{۲}\sin\theta < \frac{۱}{۲}\theta < \frac{۱}{۲}\tan\theta\,. \qquad (۲۶)$$

اگر هرسه جملهٔ نابرابری بالا را برعدد مثبت $(۱/۲)\sin\theta$ تقسیم کنیم، بازهم نابرابری برقرار است

$$۱ < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{۱}{\cos\theta}\,. \qquad (۲۷)$$

جمله‌های روابط ۲۷ را معکوس می‌کنیم و این کار باعث معکوس شدن نابرابریها می‌شود

$$\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < ۱\,. \qquad (۲۸)$$

چون وقتی θ به ۰ نزدیک می‌شود $\cos\theta$ به ۱ میل می‌کند، قضیهٔ ساندویچ می‌گوید که

$$\lim_{\theta\to ۰^{+}}\frac{\sin\theta}{\theta} = ۱\,. \qquad (۲۹)$$

حدود مد دور در (۲۹) حد راست است زیرا ما بامقادیر θ

جدول ۲.۱

$\dfrac{\sin\theta}{\theta}$	$\sin\theta$	θ (رادیان)	درجه
تعریف نشده	۰	۰	0°
۰٫۹۹۹۹۵	۰٫۰۱۷۴۵۲	۰٫۰۱۷۴۵۳	1°
۰٫۹۹۹۸	۰٫۰۳۴۸۹۹	۰٫۰۳۴۹۰۷	2°
۰٫۹۹۸۷	۰٫۰۸۷۱۶	۰٫۰۸۷۲۷	5°
۰٫۹۹۵	۰٫۱۷۳۶۵	۰٫۱۷۴۵۳	10°

بین ۰ و $\pi/2$ سروکار داشته‌ایم،ولی وقتی هم که θ از سمت چپ به ۰ میل می‌کند، همین حد برای $(\sin\theta)/\theta$ بـه دست می‌آید. زیرا اگر $\theta=-\alpha$ و α مثبت باشد، آنگاه

$$\frac{\sin\theta}{\theta}=\frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha}=\frac{-\sin(\alpha)}{-\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\alpha}. \qquad (۳۰)$$

بنابراین

$$\lim_{\theta\to 0^-}\frac{\sin\theta}{\theta}=\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1 \qquad (۳۱)$$

روابط (۲۹) و (۳۱) همراه باهم نتیجه می‌دهند که

$$\lim_{\theta\to 0}(\sin\theta)/\theta=1.$$

جدول ۲.۱، مقادیر $\sin\theta$ و $(\sin\theta)/\theta$ را به ازای چند مقدار θ در نزدیکی صفر نشان می‌دهد. برای مـلاحظهٔ میل‌کردن $(\sin\theta)/\theta$ به ۱، جدول را از پایین به بالا بخوانید. ■

مثال ۱۳

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{3x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=3\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)=3. \quad ■$$

مثال ۱۴

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\,\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$=\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right]\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\right)\right]=(1)(1)=1. \quad ■$$

مسأله‌ها

در مسأله‌های ۱ـ۲۶، حد را بیابید.

۱. $\lim_{x\to 2} 2x$

۲. $\lim_{x\to 0} 2x$

۳. $\lim_{x\to 4} 4$

۴. $\lim_{x\to -2} 4$

۵. $\lim_{x\to 1}(3x-1)$

۶. $\lim_{x\to 1/3}(3x-1)$

۷. $\lim_{x\to 5} x^2$

۸. $\lim_{x\to 2} x(2-x)$

۹. $\lim_{x\to 0}(x^2-2x+1)$

۱۰. $\lim_{x\to 5}(x^2-3x-18)$

۱۱. $\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)$

۱۲. $\lim_{t\to 2} t^2$

۱۳. $\lim_{x\to 1}|x-1|$

۱۴. $\lim_{x\to -3}|x|$

۱۵. $\lim_{x\to 0} 5(2x-1)$

۱۶. $\lim_{x\to 1} x(2x-1)$

۱۷. $\lim_{x\to 2} 3x(2x-1)$

۱۸. $\lim_{x\to 2} 3(2x-1)(x+1)$

۱۹. $\lim_{x\to 2} 3x^2(2x-1)$

۲۰. $\lim_{x\to 2} 3(2x-1)(x+1)^2$

۲۱. $\lim_{x\to -1}(x+3)$

۲۲. $\lim_{x\to -1}(x+3)^2$

۲۳. $\lim_{x\to -1}(x^2+6x+9)$

۲۴. $\lim_{x\to -2}(x+3)^{171}$

۲۵. $\lim_{x\to -4}(x+3)^{1984}$

۲۶. $\lim_{x\to 1}(x^3+3x^2-2x-17)$

۲۷. فرض کنید $\lim_{x\to c} f(x)=۵$ و $\lim_{x\to c} g(x)=-۲$.

الف) مطلوب است $\lim_{x\to c} f(x)\,g(x)$.

ب) مطلوب است $\lim_{x\to c} ۲f(x)\,g(x)$.

۲۸. فرض کنید $\lim_{x\to b} f(x)=۷$ و $\lim_{x\to b} g(x)=-۳$. مطلوب است $\lim_{x\to b} [f(x)+g(x)]$.

۲۹. فرض کنید $\lim_{x\to b} f(x)=۷$ و $\lim_{x\to b} g(x)=-۳$. مطلوب است

الف) $\lim_{x\to b} (f(x)+g(x))$

ب) $\lim_{x\to b} f(x)\cdot g(x)$

پ) $\lim_{x\to b} ۴g(x)$

ت) $\lim_{x\to b} f(x)/g(x)$

۳۰. فرض کنید $\lim_{x\to -۲} p(x)=۴$، $\lim_{x\to -۲} r(x)=۰$، و $\lim_{x\to -۲} s(x)=-۳$. مطلوب است

الف) $\lim_{x\to -۲} (p(x)+r(x)+s(x))$

ب) $\lim_{x\to -۲} p(x)\cdot r(x)\cdot s(x)$

در مسألههای ۳۱-۵۱، حد را بیابید.

۳۱. $\lim_{t\to ۲} \frac{t+۳}{t+۲}$

۳۲. $\lim_{x\to ۵} \frac{x^۲-۲۵}{x-۵}$

۳۳. $\lim_{x\to ۵} \frac{x^۲-۵}{x+۵}$

۳۴. $\lim_{x\to ۵} \frac{x-۵}{x^۲-۲۵}$، اگر وجود داشته باشد

۳۵. $\lim_{x\to ۵} \frac{x+۵}{x^۲-۲۵}$، اگر وجود داشته باشد

۳۶. $\lim_{x\to ۱} \frac{x^۲-x-۲}{x^۲-۱}$

۳۷. $\lim_{x\to ۰} \frac{۵x^۳+۸x^۲}{۳x^۴-۱۶x^۲}$

۳۸. $\lim_{y\to ۲} \frac{y^۲+۵y+۶}{y+۲}$

۳۹. $\lim_{y\to ۲} \frac{y^۲-۵y+۶}{y-۲}$

۴۰. $\lim_{x\to -۵} \frac{x^۲+۳x-۱۰}{x+۵}$

۴۱. $\lim_{x\to ۴} \frac{x-۴}{x^۲-۵x+۴}$

۴۲. $\lim_{t\to ۳} \frac{t^۲-۳t+۲}{t^۲-۱}$

۴۳. $\lim_{t\to ۱} \frac{t^۲-۳t+۲}{t^۲-۱}$

۴۴. $\lim_{x\to ۲} \frac{x-۲}{x^۲-۶x+۸}$

۴۵. $\lim_{x\to -۳} \frac{x^۲+۴x+۳}{x-۳}$

۴۶. $\lim_{x\to -۳} \frac{x+۳}{x^۲+۴x+۳}$

۴۷. $\lim_{x\to -۲} \frac{x^۲+x-۲}{x^۲-۴}$

۴۸. $\lim_{x\to ۱} \frac{x^۲+x-۲}{x-۲}$

۴۹. $\lim_{x\to ۲} \frac{x^۲-۷x+۱۰}{x-۲}$

۵۰. $\lim_{t\to ۱} \frac{t^۳-۱}{t-۱}$.

۵۱. $\lim_{x\to a} \frac{x^۳-a^۳}{x^۴-a^۴}$

۵۲. مطلوب است $\lim_{x\to ۱} [(x^n-۱)/(x-۱)]$، که n عدد صحیح مثبتی است. نتیجهٔ خودتان را با حدهایی که در مسائل ۵۰ و ۵۱ بهدست آمدند مقایسه کنید.

۵۳. مثالی از توابع f و g بیاورید بهطوری که وقتی $x\to ۰$، $f(x)+g(x)$ بهسمت حدی میل کند حتی اگر $f(x)$ و $g(x)$ وقتی $x\to ۰$ به طور جداگانه به حدی میل نکنند.

۵۴. درمسألهٔ ۵۳ بهجای $f(x)+g(x)$ قرار دهید $f(x)\,g(x)$ و مسأله را حل کنید.

۵۵. مثالی از توابع f و g بیاورید به‌طوری که $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x)$ موجود باشد، ولی حداقل یکی از توابع f و g وقتی $x\to 0$، حد نداشته باشد.

هریك از حدهای مذکور در مسائل ۵۶ و ۵۷، مشتق یك تابع در $x=0$ است. تابع را بیابید.

۵۶. $\lim_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^2-1}{h}$

۵۷. $\lim_{h\to 0}\dfrac{|-1+h|-|-1|}{h}$

۵۸. کدام گزاره‌های زیر در مورد تابع f که در شکل ۹۱۰۱ به ازای $-1\leqslant x\leqslant 3$ تعریف می‌شود، صادق‌اند؟

الف) $\lim_{x\to -1^+} f(x)=1$

ب) $\lim_{x\to 2} f(x)$ وجود ندارد.

پ) $\lim_{x\to 2} f(x)=2$

ت) $\lim_{x\to 1^-} f(x)=2$

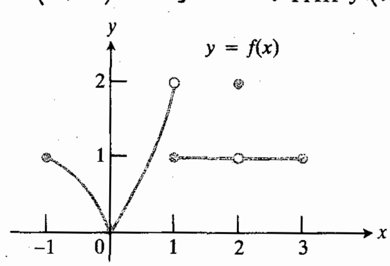
ث) $\lim_{x\to 1^+} f(x)=1$

ج) $\lim_{x\to 1} f(x)$ وجود ندارد.

چ) $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)$

ح) $\lim_{x\to c} f(x)$ به ازای هر c در $(-1,1)$ وجود دارد.

خ) $\lim_{x\to c} f(x)$ به‌ازای هر c در $(1,3)$ وجود دارد.



۹۱۰۱ تابع مربوط به مسألهٔ ۵۸.

نمودار توابع مذکور در مسائل ۵۹ و ۶۰ را رسم کنید. سپس به‌پرسشهای زیر پاسخ دهید

الف) در کدام نقاط c از دامنهٔ f، $\lim_{x\to c} f(x)$ وجود دارد؟

ب) در چه نقاطی فقط حد چپ وجود دارد؟

پ) در چه نقاطی فقط حد راست وجود دارد؟

۵۹. $$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & 0\leqslant x<1\\ 1 & 1\leqslant x<2\\ 2 & x=2.\end{cases}$$

۶۰. $$f(x)=\begin{cases}x & -1\leqslant x<0 \ \text{یا}\ 0<x\leqslant 1\\ 1 & x=0\\ 0 & x<-1 \ \text{یا}\ x>1.\end{cases}$$

در مسأله‌های ۶۱–۶۸، حد را بیابید. در مسأله‌های ۶۱–۶۴ دو کروشه نشان دهندهٔ تابع بزرگترین عدد صحیح است.

۶۱. $\lim_{x\to 0^+} [x]$

۶۲. $\lim_{x\to 0^-} [x]$

۶۳. $\lim_{x\to 0.5} [x]$

۶۴. $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{x}{[x]}$

۶۵. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x}{|x|}$

۶۶. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x}{|x|}$

۶۷. $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-9}{|x-3|}$

۶۸. $\lim_{x\to 3^-} \dfrac{x^2-9}{|x-3|}$

۶۹. به‌ازای چه مقادیری از c، تابع بزرگترین عدد صحیح $f(x)=[x]$ وقتی $x\to c$ به یک حد میل می‌کند؟

۷۰. به ازای چه مقادیری از c، تابع $f(x)=x/|x|$ وقتی $x\to c$ به یك حد میل می‌کند؟

در مسأله‌های ۷۱–۸۶، حد را بیابید.

۷۱. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$

۷۲. $\lim_{x\to 0^+} \cos x$

۷۳. $\lim_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}$

۷۴. $\lim_{h\to 0}\dfrac{\sin^2 h}{h}$

۷۵. $\lim\limits_{h\to ۰} \dfrac{\sin^۲ h}{h^۲}$

۷۶. $\lim\limits_{t\to ۰} \dfrac{۲\sin t\cos t}{t}$

۷۷. $\lim\limits_{x\to ۰} \tan x$

۷۸. $\lim\limits_{\theta\to ۰} \dfrac{\tan\theta}{\theta}$

۷۹. $\lim\limits_{x\to ۰^-} \sin x$

۸۰. $\lim\limits_{x\to ۰^+} \dfrac{\sin x}{|x|}$

۸۱. $\lim\limits_{x\to ۰^-} \dfrac{\sin x}{|x|}$

۸۲. $\lim\limits_{x\to ۰} x\cos x$

۸۳. $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\sin ۲x}{x}$

۸۴. $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\sin ۵x}{\sin ۳x}$

۸۵. $\lim\limits_{y\to ۰} \dfrac{\tan ۲y}{۳y}$

۸۶. $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\sin ۲x}{۲x^۲+x}$

۸۷. الف) نشان دهید که به ازای هر $x\neq ۰$،

$$-|x|\leqslant x\sin(۱/x)\leqslant |x|.$$

ب) با استفاده از قضیهٔ ساندویچ و نابرابری مذکور در قسمت (الف)، $\lim\limits_{x\to ۰} x\sin(۱/x)$ را محاسبه کنید.

۸۸. نابرابری

$$۱-\frac{x^۲}{۶}<\frac{\sin x}{x}<۱$$

اگر x برحسب رادیان اندازه‌گیری شود و $|x|<۱$، برقرار است. این نابرابری، و قضیهٔ ساندویچ را به کار گیرید و $\lim\limits_{x\to ۰}(\sin x)/x$ را محاسبه کنید.

۸۹. در هریك از موارد زیر، حد L تابع $F(t)$ را وقتی $t\to c$، بیابید. سپس نشان دهید که به‌ازای $\epsilon>۰$ مفروض، يك $\delta>۰$ وجود دارد به‌طوری که برای هر t،

$$۰<|t-c|<\delta\Rightarrow |F(t)-L|<\epsilon.$$

در هر مورد، نموداری مشابه با نمودار شکل ۸۱.۱ رسم کنید.

الف) $F(t)=۲t+۳$، $c=۱$

ب) $F(t)=۲t-۳$، $c=۱$

پ) $F(t)=۵-۳t$، $c=۲$

ت) $F(t)=۷$، $c=-۱$

ث) $F(t)=\dfrac{t^۲-۴}{t-۲}$، $c=۲$

ج) $F(t)=\dfrac{t^۲+۶t+۵}{t+۵}$، $c=۵$

چ) $F(t)=\dfrac{۳t^۲+۸t-۳}{۲t+۶}$، $c=-۳$

ح) $F(t)=\dfrac{۴}{t}$، $c=۲$

خ) $F(t)=\dfrac{(۱/t)-(۱/۳)}{t-۳}$، $c=۳$

۹۰. دامنه‌ای به صورت $۰<|t-۳|<\delta$ بیابید به طوری که وقتی t محدود به این دامنه است، تفاضل عددی بین $t^۲$ و ۹ کوچکتر از (الف) ۱۰/۱؛ (ب) ۱۰۰/۱؛ و (پ) ϵ باشد که ϵ می‌تواند هرعدد مثبت دلخواهی باشد.

۹۱. در مسألهٔ ۹۰، به جای $t^۲$ و ۹ قرار دهید $t^۲+t$ و ۱۲، و مسأله را حل کنید.

۹۲. **ماشین حساب** گاهی اگر معلوم باشد که حد موجود است، حدس زدن مقدار آن آسان است.

الف) بدون توجه به مسألهٔ وجود یا عدم وجود حد زیر (البته این حد وجود دارد ومتناهی است) با استفاده از يك ماشین‌حساب مقدار آن را حدس بزنید. ابتدا Δx را به‌این صورت اختیار کنید: $\Delta x=۰٫۱,\ ۰٫۰۱,\ ۰٫۰۰۱,\ \ldots$ و این کار را ادامه دهید تا وقتی که برای حدس زدن حد راست آمادگی پیدا کنید. سپس حدس خودتان را با به‌کارگیری $\Delta x=-۰٫۱,\ -۰٫۰۱,\ \ldots$ بیازمایید.

$$\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\sqrt{۴+\Delta x}-۲}{\Delta x}.$$

ب) حد مذکور در قسمت (الف) را به‌يك مشتق مربوط سازید.

۹۳. **ماشین حساب** مقدار مشتق $f(x)=\sqrt{۹-x^۲}$ در $x=۰$

را براورد کنید؛ به این منظور، خارج قسمت تفاضلهای مناسب را بنویسید و نظیر مسألهٔ ۹۲ (الف) عمل کنید.

> **TOOLKIT PROGRAMS**
> Function Evaluator   Limit Problems
> Limit Definition

۱۰.۱ حد و بینهایت

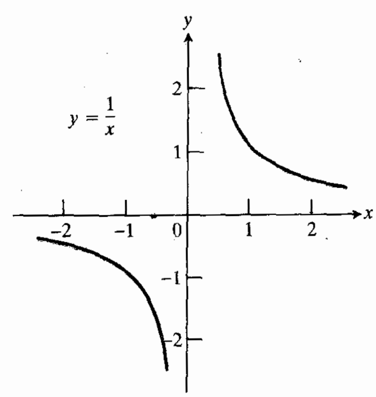
در این بخش شرح می‌دهیم که معنی میل کردن مقادیر یك تابع به‌بینهایت چیست و نیز می‌گوییم که وقتی x به‌بینهایت می‌گراید، **منظور از حد تابعی چون $f(x)$ چیست.** با اینکه هیچ عدد حقیقی «بینهایت» وجود ندارد، واژهٔ «بینهایت» ابزار مناسبی است که با آن می‌توانیم رفتار بعضی‌توابع را وقتی دامنه یا برد آنها با هیچ کرانی محدود نمی‌شود، توصیف کنیم.

حد، وقتی $x\to\infty$ **یا** $x\to-\infty$

تابع

$$y=\frac{1}{x} \tag{1}$$

که نمودارش درشکل ۹۲.۱ رسم شده، به‌ازای همهٔ اعداد حقیقی بجز $x=0$ تعریف می‌شود. دراین مورد، گزاره‌های‌زیر به‌وضوح صادق‌اند.



۹۲.۱ نمودار $y=1/x$.

الف) وقتی x کوچك و مثبت است، $1/x$ بزرگ و مثبت است. مثلاً

$$\frac{1}{0.001}=1000.$$

ب) وقتی x کوچك و منفی است، $1/x$ بزرگ و منفی است. مثلاً

$$\frac{1}{-0.001}=-1000.$$

پ) وقتی x بزرگ و مثبت است، $1/x$ کوچك و مثبت است. مثلاً

$$\frac{1}{10000}=0.0001.$$

ت) وقتی x بزرگ و منفی است، $1/x$ کوچك و منفی است. مثلاً

$$\frac{1}{-10000}=-0.0001.$$

این حقایق گاهی به صورت زیر خلاصه می‌شوند:

الف) وقتی x از سمت راست به ۰ میل می‌کند، $1/x$ به ∞ می‌گراید.

ب) وقتی x از سمت چپ به ۰ میل می‌کند، $1/x$ به $-\infty$ می‌گراید.

پ) وقتی x به ∞ می‌گراید، $1/x$ به ۰ میل می‌کند.

ت) وقتی x به $-\infty$ میل می‌کند، $1/x$ به ۰ میل می‌کند.

علامت ∞، **بینهایت**، نشان دهندهٔ هیچ عدد حقیقی *نیست*. نمی‌توانیم ∞ را در حساب به روش معمول به‌کار ببریم، ولی مفید است که بتوانیم جمله‌هایی از قبیل «حد $1/x$ وقتی x به بینهایت میل می‌کند صفر است» را برزبان آوریم، و برطبق تعریف زیر می‌توانیم چنین کاری بکنیم.

تعریف

حد، وقتی $x\to\infty$ **یا** $x\to-\infty$

۱. حد تابع $f(x)$ وقتی x به‌بینهایت میل می‌کند عدد L است،

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L$$

اگر: به ازای هر $\epsilon>0$ یك عدد M وجودداشته باشدبه‌طوری که به ازای هر x،

$$M<x \Rightarrow |f(x)-L|<\epsilon. \tag{2}$$

۲. حد $f(x)$ وقتی x به بینهایت منفی میل می‌کند عدد L است،

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$$

اگر: به ازای هر $\epsilon>0$ یك عدد N وجود داشته باشد به‌قسمی که به ازای هر x،

$$x<N\Rightarrow|f(x)-L|<\epsilon. \tag{3}$$

عبارت

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L$$

به زبان غیر رسمیتر به‌این معنی است که اگر x را مثبت و به‌قدر کافی بزرگ اختیار کنیم، $f(x)$ را می‌توانیم به قدر دلخواه به L نزدیك سازیم. همین‌طور

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$$

به‌این معنی است که اگر x را منفی و به قدر کافی بزرگ (یعنی به قدر کافی دور از مبدأ در سمت چپ) اختیار کنیم، $f(x)$ را می‌توانیم به قدر دلخواه به L نزدیك سازیم.

نابرابریهای مذکور در گزاره‌های (۲) و (۳) به‌این معنی هستندکه اگر $|x|$ به‌قدر کافی بزرگ باشد، خم $y=f(x)$ بین خطهای $L-\epsilon$ و $L+\epsilon$ قرار دارد؛ این را در شکلهای ۹۳۰۱ و ۹۴۰۱ می‌بینید؛ مثالهای ۱ و ۷ نیز در همین باره‌اند.

مثال ۱ نشان دهید که برطبق تعریفهای حد، وقتی $x\to\infty$ و $x\to-\infty$،

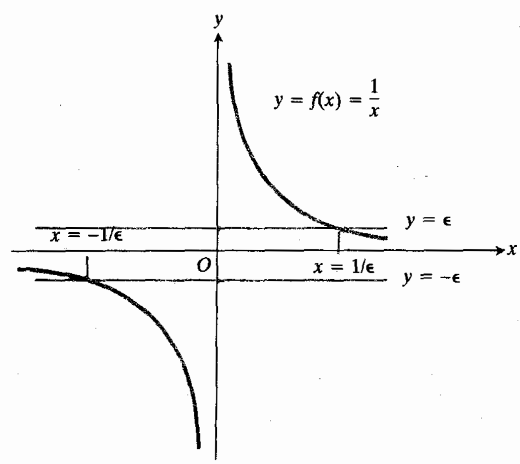
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0. \qquad (۴)$$

حل: شکل ۹۳۰۱ را ببینید. به ازای هر $\epsilon>0$ داریم

$$\left|\frac{1}{x}-0\right|=\left|\frac{1}{x}\right|<\epsilon \qquad (۵)$$

به شرط آنکه

$$|x|>\frac{1}{\epsilon}. \qquad (۶)$$



۹۳۰۱ وقتی $|x|>1/\epsilon$، خم $y=1/x$ بین خطهای $y=\epsilon$ و $y=-\epsilon$ قرار دارد.

بنابراین، $1/x$ به ازای هر $x>M=1/\epsilon$ و هر

$$x<N=-1/\epsilon$$

دربازه‌ای به مرکز ۰ و به شعاع ϵ قرار دارد. ■

مثال ۲ فرض کنید f تابعی است که به‌ازای همهٔ xها دارای مقدار ثابت k است. با استفاده از تعریفهای حد، وقتی $x\to\infty$ و $x\to-\infty$، نشان دهید که

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=k \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=k. \qquad (۷)$$

حل: اگر تعریفها را باضوابط $f(x)=k$ و $L=k$ به‌کار بریم، خواهیم داشت

به ازای هر $\epsilon>0$، $|k-k|=0<\epsilon$. ■

قضیهٔ زیر که دربارهٔ حد مجموع، تفاضل، حاصلضرب، و خارج قسمت است، مشابه باقضیهٔ متناظر در مورد حدها درحالت $x\to c$ است. این قضیه به ما می‌گوید که چگونه می‌توان با ترکیب نتایجی از قبیل آنچه درمثالهای ۱ و ۲ دیدیم، حدهای دیگر را حساب‌کرد.

قضیهٔ ۳

قضیهٔ ترکیب حدها در بینهایت

اگر

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L_1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to\infty} g(x)=L_2$$

که در آنها، L_1 و L_2 اعداد حقیقی (متناهی) هستند، آنگاه

i) $\lim_{x\to\infty}[f(x)+g(x)]=L_1+L_2$

ii) $\lim_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=L_1-L_2$

iii) $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x)=L_1L_2$

iv) به‌ازای هر k ، $\lim kf(x)=kL_1$

v) اگر $L_2\neq 0$، $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$

این احکام‌هم برای $x\to-\infty$ وهم برای $x\to\infty$ برقرارند.

مثال ۳

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{7x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{7+(4/x)}=\frac{1}{7+0}=\frac{1}{7}.$$ ■

مثال ۴

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{x^{۲}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{x}\cdot\frac{۱}{x}=۰\cdot۰=۰\ . \qquad \blacksquare$$

مثال ۵

$$\lim_{x\to\infty}\frac{۲x^{۲}-x+۳}{۳x^{۲}+۵}=\lim_{x\to\infty}\frac{۲-(۱/x)+(۳/x^{۲})}{۳+(۵/x^{۲})}$$

$$=\frac{۲-۰+۰}{۳+۰}=\frac{۲}{۳}\ . \qquad \blacksquare$$

مثال ۶

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۵x+۳}{۲x^{۲}-۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(۵/x)+(۳/x^{۲})}{۲-(۱/x^{۲})}=\frac{۰+۰}{۲-۰}=۰. \qquad \blacksquare$$

مثال ۷ مطلوب است

$$\lim_{x\to\infty}\left(۲+\frac{\sin x}{x}\right).$$

حل: داریم

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=۰ \qquad \text{و} \qquad \lim_{x\to\infty}۲=۲$$

زیرا درحالی‌که $x\to\infty$، $-۱\leqslant\sin x\leqslant۱$. بنابراین

$$\lim_{x\to\infty}\left(۲+\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}۲+\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$$

$$=۲+۰=۲\ .$$

شکل۹۴۰۱ را ببینید. $\blacksquare$

$\lim f(x)=\infty$ یا $\lim f(x)=-\infty$

رفتار تابع $۱/x$ وقتی $x\to۰$ و رفتار توابعی از این قبیل، گاه عباراتی مانند

$$\lim_{x\to c}f(x)=\infty \tag{۸}$$

$$\lim_{x\to c^{+}}f(x)=\infty \tag{۹}$$

$$\lim_{x\to c^{-}}f(x)=\infty \tag{۱۰}$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty \tag{۱۱}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty \tag{۱۲}$$

را القا می‌کند. در هر مورد، منظورمان این است که مقدار $f(x)$ سرانجام از هر عدد حقیقی مثبت B تجاوز می‌کند. یعنی، به ازای هر عدد حقیقی B، هرقدر بزرگ، شرط

$$f(x)>B \tag{۱۳}$$

به ازای همهٔ مقادیر x در مجموعهٔ محدود شده‌ای که معمولاً به B بستگی دارد، برقرار است. مجموعهٔ محدود شده در(۸) به‌شکل زیر است

$$۰<|x-c|<\delta\ .$$

در (۹)، مجموعهٔ مزبور، بازه‌ای در سمت راست c است:

$$c<x<c+\delta\ .$$

در(۱۰)، مجموعهٔ مورد نظربازه‌ای در سمت چپ c است:

$$c-\delta<x<c\ .$$

در (۱۱)، مجموعه به شکل بازهٔ نامتناهی زیر است

$$M<x<\infty\ .$$

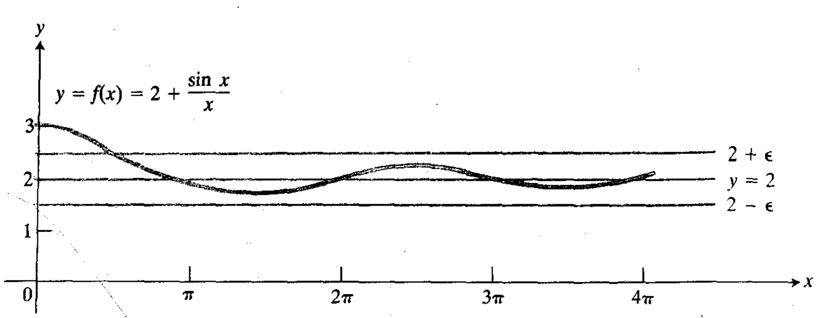
در (۱۲)، مجموعه به شکل بازهٔ نامتناهی زیر است

$$-\infty<x<M\ .$$

اگر در (۱۳) به جای شرط $f(x)>B$ شرط

$$f(x)<-B \tag{۱۴}$$

را قرار دهیم که در آن $B-$ عدد حقیقی منفی دلخواهی است،



۹۴۰۱ نمودار $y=۲+(\sin x)/x$ حول خط $y=۲$ نوسان می‌کند. وقتی، $x\to\infty$، دامنهٔ نوسان به سمت صفر کاهش می‌یابد. چون وقتی $x>۰$ داریم

$$\left|۲+\frac{\sin x}{x}-۲\right|=\frac{|\sin x|}{x}\leqslant\frac{۱}{x}$$

خم‌به‌ازای $x>۱/\epsilon$ بین‌خطهای $y=۲+\epsilon$ و $y=۲-\epsilon$ قرار دارد.

می‌توانیم حدهای زیر را هم تعریف کنیم.

$$\lim_{x\to c} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to c^+} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to c^-} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to \infty} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=-\infty.$$

مثال ۸

الف) $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$

ب) $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$

پ) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$

ت) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty$

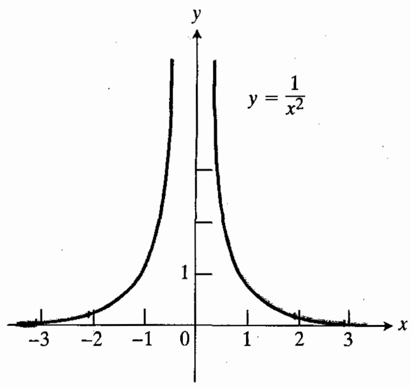
ث) $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty$

ج) $\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x^2-4}=\infty$

چ) $\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x^2-4}=-\infty$

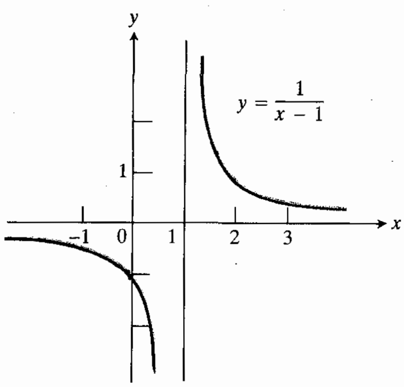
ح) $\lim_{x\to -\infty} 2x-\frac{3}{x}=-\infty$. ■

نمودارهای $y=1/x^2$، $y=1/(x-1)$، و $y=1/(x^2-4)$ را درشکل ۹۵۰۱ می‌بینید. درفصل ۳ موضوع ترسیم این گونه توابع را به‌طورکلی بررسی خواهیم کرد.



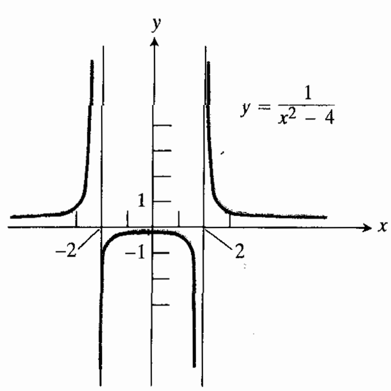
$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$

(الف)



$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty$

(ب)



$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x^2-4}=-\infty$ $\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x^2-4}=\infty$

(پ)

۹۵۰۱ نمودار بعضی از توابع مثال ۸.

مثال ۹

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2-3}{7x+4}=\lim_{x\to -\infty}\frac{2x-(3/x)}{7+(4/x)}=-\infty\ . \quad ■$$

جانشانی $x=1/h$

همان طور که در بسیاری از مثالهای قبل دیدید، یك راه برای محاسبهٔ حد خارج‌قسمت دوچند جمله‌ای وقتی $x\to\infty$، این است که صورت و مخرج را برجمله‌ای از مخرج که دارای بزرگترین توان x است تقسیم کنیم و ببینیم که برای صورت و مخرج جدید وقتی $x\to\infty$ چه پیش می‌آید.

راه دیگر این است که فرض کنیم $x=1/h$ و حد را وقتی $h\to 0^+$ محاسبه کنیم.

مثال ۱۰ (با مثال ۵ مقایسه کنید.)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+3}{3x^2+5}=\lim_{h\to0^+}\frac{(2/h^2)-(1/h)+3}{(3/h^2)+5}$$

$$=\lim_{h\to0^+}\frac{2-h+3h^2}{3+5h^2}=\frac{2-0+3(0)^2}{3+5(0)^2}=\frac{2}{3}\,. \quad ■$$

مثال ۱۱

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x+3}{2x^2-1}=\lim_{h\to0^+}\frac{(5/h)+3}{(2/h^2)-1}$$

$$=\lim_{h\to0^+}\frac{5h+3h^2}{2-h^2}=\frac{0}{2}=0\,. \quad ■$$

برای محاسبهٔ حد خارج قسمت دو چند جمله‌ای وقتی $x\to-\infty$ می‌توانیم قرار دهیم $h=1/x$ و حد را وقتی $h\to0^-$ حساب کنیم.

مثال ۱۲ (با مثال ۹ مقایسه کنید.)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-3}{7x+4}=\lim_{h\to0^-}\frac{(2/h^2)-3}{(7/h)+4}$$

$$=\lim_{h\to0^-}\frac{2-3h^2}{7h+4h^2}=-\infty\,.$$

جانشانی $x=1/h$ ممکن است درمحاسبهٔ حد توابع دیگر نیز مفید باشد. ■

مثال ۱۳

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{h\to0^+}\frac{\sin h}{h}=1\,. \quad ■$$

مسأله‌ها

در مسأله‌های ۱-۳۲، حد را بیابید.

۱. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{5x+7}$

۲. $\lim_{t\to\infty}\frac{t^3+7}{t^4}$

۳. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2+3}$

۴. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-6x}{4x-8}$

۵. $\lim_{y\to\infty}\frac{3y+7}{y^2-2}$

۶. $\lim_{x\to\infty}\frac{7x-28}{x^3}$

۷. $\lim_{t\to\infty}\frac{t^2-2t+3}{2t^2+5t-3}$

۸. $\lim_{t\to\infty}\frac{t^2+1}{t+1}$

۹. $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}$

۱۰. $\lim_{x\to\infty}[x]$

۱۱. $\lim_{x\to-\infty}|x|$

۱۲. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|}$

۱۳. $\lim_{a\to\infty}\frac{|a|}{|a|+1}$

۱۴. $\lim_{t\to-\infty}\frac{t}{t+1}$

۱۵. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+5x^2-7}{10x^3-11x+5}$

۱۶. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)\left(\frac{5x^2-1}{x^2}\right)$

۱۷. $\lim_{s\to\infty}\left(\frac{s}{s+1}\right)\left(\frac{s^2}{5+s^2}\right)$

۱۸. $\lim_{x\to\infty}\frac{8x^{22}-7x^2+5}{2x^{23}+x^{22}}$

۱۹. $\lim_{r\to-\infty}\frac{8r^2+7r}{4r^2}$

۲۰. $\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3}{x^3-3x^2+6x}$

۲۱. $\lim_{y\to\infty}\frac{y^4}{y^4-7y^3+7y^2+9}$

۲۲. $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-6x+2}{10x^3+5}$

۲۳. $\lim_{x\to\infty}\frac{x-3}{x^2-5x+4}$

۲۴. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{9x^4+x}{2x^4+4x^2-x+6}$

۲۵. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x^3-2x+3}{3x^3+3x^2-5x}$

۲۶. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^3-2x+3}{3x^3+3x^2-5x}$

۲۷. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}$

۲۸. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-x^2}{1+2x^2}$

۲۹. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x}\right)$

۳۰. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin 2x}{x}$

۳۱. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\cos\dfrac{1}{x}\right)$

۳۲. $\lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{1}{y^2+5}$

در مسأله‌های ۳۳-۵۰، حد را بیابید.

۳۳. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{3x}$

۳۴. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2}{x}$

۳۵. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{5}{2x}$

۳۶. $\lim\limits_{t\to 2^+} \dfrac{t^2+4}{t-2}$

۳۷. $\lim\limits_{t\to 2} \dfrac{t^2-4}{t-2}$

۳۸. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x}{x-2}$

۳۹. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{x-1}$

۴۰. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{|x|+1}$

۴۱. $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{1}{x+1}$

۴۲. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{|x|}$

۴۳. $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{1}{x+2}$

۴۴. $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2}{x-3}$

۴۵. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2}$

۴۶. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2}{x^2-1}$

۴۷. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+5}{x-2}$

۴۸. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2+5}$

۴۹. $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2+3x-10}{x+5}$

۵۰. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+4}{x^2+2x-3}$

۵۱. مطلوب است محاسبهٔ

$$\lim \frac{x-1}{2x^2-7x+5}$$

وقتی (الف) $x \to 0$، (ب) $x\to\infty$، و (پ) $x \to 1$.

۵۲. دامنه و برد تابع زیر را بیابید

$$y=\sqrt{\frac{1}{x}-1}.$$

نمودار توابعی را که در مسائل ۵۳-۵۶ آمده‌اند، رسم کنید.

۵۳. $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$

۵۴. $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$

۵۵. $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$

۵۶. $f(x)=\dfrac{1}{|x|}$

۵۷. مطلوب است $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ اگر داشته باشیم

$$\frac{2x-3}{x}<f(x)<\frac{2x^2+5x}{x^2}.$$

۵۸. فرض کنید $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ یك چند جمله‌ای از درجهٔ n و

$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_1x+b_0$$

یك چند جمله‌ای از درجهٔ m باشد. نشان دهید که

$$\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x)$$

برابر a_n/b_m است اگر $m=n$، برابر صفر است اگر $m>n$، و نامتناهی است اگر $n>m$. (راهنمایی: صورت و مخرج کسر را بر x^m تقسیم کنید. اگر $n=m$، برای x^n/x^m وقتی $x\to\infty$ چه پیش می‌آید؟ اگر $m>n$، چه می‌توان گفت؟ اگر $m<n$، چه اتفاقی می‌افتد؟)

۱۱۰۱ پیوستگی

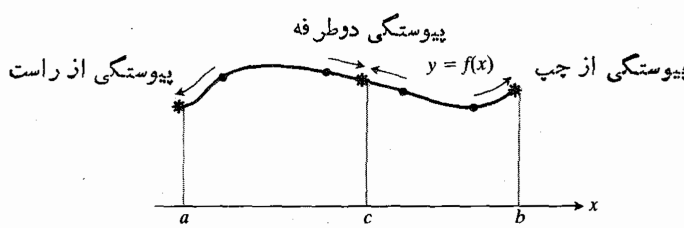
در این بخش، معنی پیوسته‌بودن تابع را شرح می‌دهیم و ویژگیهایی را که دلیل اهمیت توابع پیوسته در کارهای علمی‌اند، توصیف می‌کنیم.

توابع پیوسته

تابعی مانند $y=f(x)$ که بتوان نمودار آن را درهر بازه‌ای از دامنه‌اش با حرکت پیوستهٔ نوك قلم رسم کرد، مثالی از يك **تابع پیوسته** است. ارتفاع نمودار این تابع در طول بازه به‌طور پیوسته با x تغییر می‌کند. درهر نقطهٔ داخلی دامنهٔ تابع، مانند نقطهٔ c در شکل ۹۶۰۱، مقدار تابع، $f(c)$، حد مقادیر تابع در هريك از دوطرف است؛ یعنی

$$f(c)=\lim_{x\to c} f(x).$$

مقدار تابع در هر نقطهٔ انتهایی نیز، حد مقادیر تابع درنزدیکی آن است. در نقطهٔ انتهایی چپ a در شکل ۹۶۰۱،



۹۶۰۱ پیوستگی در a، b، و c.

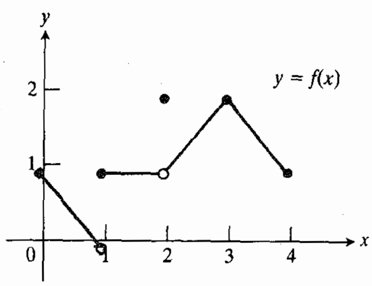
$$f(a)=\lim_{x\to a^+} f(x).$$

در نقطهٔ انتهایی راست، b،

$$f(b)=\lim_{x\to b^-} f(x).$$

به‌عنوان يك مثال مشخص، به‌تابع شکل ۹۷۰۱ نظری می‌افکنیم که در مثال ۵ از بخش ۹۰۱ در جستجوی حدهای آن بودیم.

مثال ۱ تابعی که در شکل ۹۷۰۱ دیده می‌شود در هر نقطهٔ دامنه‌اش به استثنای $x=1$ و $x=2$ پیوسته است. در این نقاط، در نمودار شکستگی وجود دارد. به رابطهٔ بین حد f و مقدار f در هر نقطهٔ دامنهٔ تابع توجه کنید.



۹۷۰۱ ناپیوستگی در $x=1$ و $x=2$.

نقاط ناپیوستگی:

در $x=1$: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ وجود ندارد.

در $x=2$: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$، ولی $f(2)\neq 1$.

نقاطی که f در آنها پیوسته است:

در $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$.

در $x=4$: $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=f(4)$.

در هر نقطهٔ $0<c<4$ به استثنای $x=1, 2$:

$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c). \qquad ■$$

حال به تعریف رسمی پیوستگی در نقطه‌ای از دامنهٔ تابع می‌رسیم. در این تعریف، بین پیوستگی در يك نقطهٔ انتهایی (که با يك حد یکطرفه سروکار دارد) و پیوستگی در يك نقطهٔ داخلی (که با يك حد دوطرفه سروکار دارد) فرق می‌گذاریم.

چند تعریف

پیوستگی در يك نقطهٔ داخلی

تابعی چون $y=f(x)$ در يك نقطهٔ داخلی از دامنه‌اش، مانند

c، پیوسته‌است اگر

$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c). \qquad (۱)$$

پیوستگی در یك نقطهٔ انتهایی

تابعی چون $y=f(x)$ در یك نقطهٔ انتهایی چپ از دامنه‌اش، مانند a، پیوسته است اگر

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a). \qquad (۲)$$

تابعی چون $y=f(x)$ در یك نقطهٔ انتهایی راست از دامنه‌اش، مانند b، پیوسته است اگر

$$\lim_{x\to b^-} f(x)=f(b). \qquad (۳)$$

تابع پیوسته

یك‌تابع پیوسته است اگر در هرنقطه از دامنه‌اش پیوسته باشد.

ناپیوستگی در یك نقطه

اگر تابعی چون f در نقطه‌ای مانند c پیوسته نباشد، گوییم‌که f در c ناپیوسته است و c را یك نقطهٔ ناپیوستگی f خوانیم.

پیوستگی توابع را معمولاً[۶] با آزمون زیر می‌آزمایند.

آزمون پیوستگی

تابع $y=f(x)$ در $x=c$ پیوسته است اگر و تنها اگر هرسه گزارهٔ زیر صادق باشند:

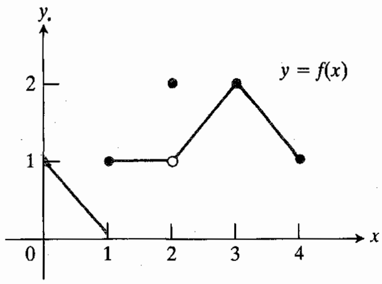
۱. $f(c)$ وجود دارد (c در دامنهٔ f است).
۲. $\lim_{x\to c} f(x)$ وجود دارد (f وقتی $x\to c$ دارای‌حد است).
۳. $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$ (این حد برابر با مقدار تابع است).

(در آزمون پیوستگی، اگر c یك نقطهٔ داخلی دامنهٔ f باشد حد مورد نظر دوطرفه است؛ و اگر c یك نقطهٔ انتهایی دامنه باشد، حد مزبور یك حد یکطرفهٔ مناسب (چپ یاراست) است.)

مثال ۲ اگر آزمون پیوستگی را در مورد تابع $y=f(x)$ مثال ۱ در نقاط $x=۰, ۱, ۲, ۳, ۴$ به‌کار بریم، نتایج زیر به‌دست می‌آید. نمودار f را در اینجا مجدداً در شکل ۹۸۰۱ رسم کرده‌ایم.

الف) f در $x=۰$ پیوسته است زیرا

i) $f(۰)$ وجود دارد (برابر با ۱ است)



۹۸۰۱ این تابع در $x=۰, ۳, ۴$ پیوسته و در $x=۱,۲$ ناپیوسته است.

ii) $\lim_{x\to ۰^+} f(x)=۱$ (f وقتی $x\to ۰^+$ دارای‌حد است)

iii) $\lim_{x\to ۰^+} = f(۰)$ (این‌حدبرابر بامقدار تابع است).

ب) f در $x=۱$ ناپیوسته است زیرا $\lim_{x\to ۱} f(x)$ وجود ندارد. تابع درقسمت(۲)ی آزمون‌صدق نمی‌کند. (حدهای‌راست وچپ در $x=۱$ وجود دارند، ولی برابر باهم نیستند.)

پ) f در $x=۲$ ناپیوسته است‌زیرا $\lim_{x\to ۲} f(x)\neq f(۲)$. تابع در قسمت (۳)ی آزمون صدق نمی‌کند.

ت) f در $x=۳$ پیوسته است زیرا

i) $f(۳)$ وجود دارد (برابر با ۲ است)

ii) $\lim_{x\to ۳} f(x)=۲$ (f وقتی $x\to ۳$ دارای حداست)

iii) $\lim_{x\to ۳} f(x)=f(۳)$ (این‌حدبرابر بامقدار تابع است).

ث) f در $x=۴$ پیوسته است زیرا

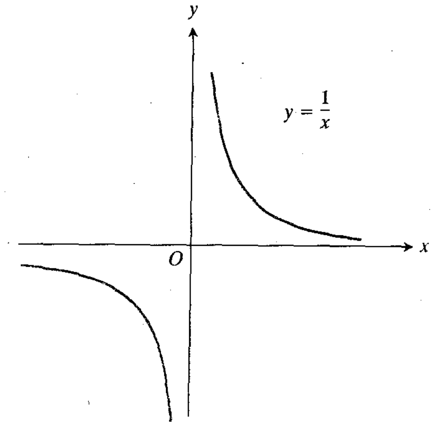
i) $f(۴)$ وجود دارد (برابر با ۱ است)

ii) $\lim_{x\to ۴^-} f(x)=۱$ (f وقتی $x\to ۴^-$ دارای‌حد است)

iii) $\lim_{x\to ۴^-} f(x)=f(۴)$ (این‌حد برابر بامقدارتابع است). ■

مثال ۳ تابع $y=۱/x$ در هر مقدار x به استثنای $x=۰$ پیوسته است. تابع در $x=۰$ تعریف نمی‌شود و بنابراین در $x=۰$ در قسمت (۱) آزمون پیوستگی صدق نمی‌کند. شکل ۹۹۰۱ را ببینید. ■

مثال ۴ تابع بزرگترین عدد صحیح $y=[x]$ در هرعدد صحیح ناپیوسته است. این تابع به ازای هیچ عدد صحیحی به حدی میل نمی‌کند و بنابراین، درقسمت (۲)ی‌آزمون پیوستگی به‌ازای‌هیچ عدد صحیحی صادق نیست. ■



۹۹۰۱ تابع $y=1/x$ در هرنقطه به استثنای $x=0$ پیوسته است.

مثال ۵ تابعهای $y=\sin x$ و $y=\cos x$ در $x=0$ پیوسته‌اند. بنا به مثال ۱۲ در بخش ۹۰۱،

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0=\sin 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0}\cos x=1=\cos 0.$$

در فصل ۲ خواهیم دید که توابع سینوسی، و کسینوسی در هر نقطه پیوسته‌اند. ■

مثال ۶ چند جمله‌ایها و خارج قسمت چند جمله‌ایها.

الف) هرچند جمله‌ای $f(x)=a_nx^n+\dots+a_1x+a_0$ پیوسته است. در بخش ۹۰۱ دیدیم که در هر نقطهٔ c،

$$\lim_{x\to c}f(x)=f(c).$$

ب) هرخارج‌قسمت $f(x)/g(x)$ ازچند جمله‌ایها پیوسته است مگر آنکه $g(x)=0$. در بخش ۹۰۱ دیدیم که در هر نقطهٔ c که در آن g برابر صفر نباشد داریم

$$\lim_{x\to c}f(x)/g(x)=f(c)/g(c).$$ ■

همان‌طور که ممکن است حدس زده باشید، ترکیبهای جبری توابع پیوسته درهمهٔ نقاطی که‌آن توابع تعریف می‌شوند، پیوسته‌اند.

قضیهٔ ۴

قضیهٔ ترکیب حدها برای توابع پیوسته

اگر توابع f و g در $x=c$ پیوسته باشند، آنگاه همهٔ ترکیبهای زیر در $x=c$ پیوسته‌اند:

i) $f+g$

ii) $f-g$

iii) fg

iv) kg (هر عدد k)

v) f/g، به شرطی که $g(c)\neq 0$.

اثبات قضیهٔ ۴ در واقع حالت خاصی از قضیهٔ ترکیب حدها در بخش ۹۰۱ است. اگر آن قضیه را برحسب توابع f و g بیان کنیم، به این صورت در می‌آید که اگر

$$\lim_{x\to c}f(x)=f(c) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to c}g(x)=g(c)$$

آنگاه

i) $\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)]=f(c)+g(c)$

ii) $\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)]=f(c)-g(c)$

iii) $\lim_{x\to c}f(x)g(x)=f(c)g(c)$

iv) $\lim_{x\to c}kg(x)=kg(c)$ (هر عدد k)

v) $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(c)}{g(c)}$، به‌شرطی که $g(c)\neq 0$.

به عبارت دیگر، حدهای توابع مذکور در (i)-(iv) وقتی $x\to c$ وجود دارند و برابر بامقادیر تابع در $x=c$ هستند. بنابراین، هر يك از توابع سه شرط آزمون پیوستگی را در هر نقطهٔ داخلی $x=c$ از دامنه‌اش برآورده می‌سازد. با استدلالهای مشابهی در مورد حدهای راست و چپ، قضیه برای پیوستگی در نقاط انتهایی نیز ثابت می‌شود.

مثال ۷ تابعهای

$$f(x)=x^{14}+20x^4,\quad g(x)=5x(2-x)+1/(x^2+1)$$

در هر مقدار x پیوسته‌اند. تابع

$$h(x)=\frac{x+3}{x^2-3x-10}=\frac{x+3}{(x-5)(x+2)}$$

در هر مقدار x بجز $x=5$ و $x=-2$ پیوسته است. ■

تابعهای مشتقپذیر، پیوسته‌اند

اگر تابعی در نقطه‌ای چون c مشتقپذیر باشد، در این نقطه پیوسته هم هست.

قضیهٔ ۵

هر تابع در هرنقطه‌ای که مشتق داشته باشد، در آن نقطه پیوسته است. یعنی، اگر $y=f(x)$ در c دارای مشتق $f'(c)$ باشد، آنگاه f در $x=c$ پیوسته است.

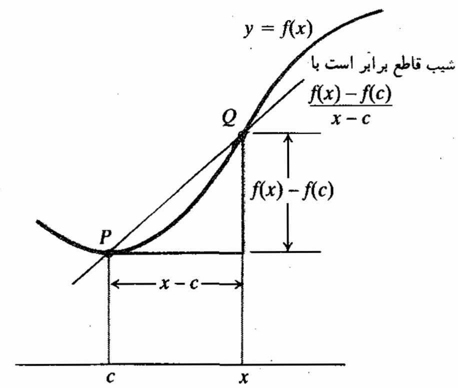
اثبات باید نشان دهیم که

$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c).$$

اگر روی نمودار $f(x)$ در شکل ۱۰۰٫۱ نقاطی مانند P و Q در نظر بگیریم، مشتق $f'(c)$ را می‌توانیم از معادلهٔ زیر به‌دست آوریم

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}. \qquad (۴)$$

ایدهٔ اثبات این‌است: وقتی $x\to c$، مخرج $x-c$ به ۰ میل می‌کند. بنابراین، اگر قرار باشد که حد مذکور در رابطهٔ (۴) متناهی باشد، صورت $f(x)-f(c)$ نیز باید به ۰ میل کند و این بدان معنی است که $f(x)$ باید به $f(c)$ میل کند.



۱۰۰٫۱ شکل برای اثبات اینکه یك تابع در هرنقطه‌ای که مشتق داشته‌باشد، در آن نقطه پیوسته است.

به طور رسمی، می‌توانیم به این واقعیت استناد کنیم که حد حاصلضرب چند تابع، حاصلضرب حدهای آن توابع است و نشان دهیم که

$$\lim_{x\to c}[f(x)-f(c)]=\lim_{x\to c}\left[(x-c)\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right]$$

$$=\lim_{x\to c}(x-c)\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

$$=0\cdot f'(c)=0. \qquad (۵)$$

از معادلهٔ $\lim_{x\to c}[f(x)-f(c)]=0$ نتیجه می‌شود که

$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c).$$

این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

مثال ۸ توابع زیر پیوسته‌اند

الف) $y=\sqrt{x}$ (به‌ازای $x>0$ بنا به‌مثال ۵ بخش ۷٫۱ مشتقپذیر است و در $x=0$ پیوسته است زیرا $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$)

ب) $y=x^2$ (بنا به مثال ۱ بخش ۷٫۱ مشتقپذیر است)

پ) $y=|x|$ (اگر $x\neq 0$، بنا به مثال ۴ بخش ۷٫۱ مشتقپذیر است و در $x=0$ پیوسته است زیرا $\lim_{x\to 0}|x|=0$).

گرچه مشتقپذیری، پیوستگی را ایجاب می‌کند ولی همان طور که در مثال زیر خواهید دید، عکس این موضوع صادق نیست. ■

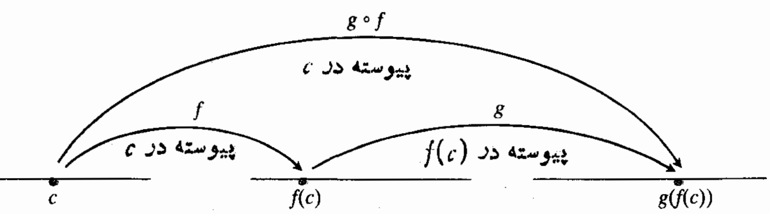
مثال ۹ تابع $y=|x|$ در $x=0$ پیوسته است ولی این تابع در $x=0$ مشتق ندارد. ■

ترکیبهای تابعهای پیوسته، پیوسته‌اند

همهٔ ترکیبهای توابع پیوسته، پیوسته‌اند. این بدان معنی است که ترکیبهایی چون

$$y=|\cos x| \qquad \text{و} \qquad y=\sin\sqrt{x}$$

در هر نقطه‌ای که تعریف بشوند، پیوسته‌اند. ایده این است که اگر $f(x)$ در $x=c$ و $g(x)$ در $x=f(c)$ پیوسته باشند، آنگاه $g\circ f$ در $x=c$ پیوسته است. شکل ۱۰۱٫۱ را ببینید.



۱۰۱٫۱ ترکیبهای توابع پیوسته، پیوسته‌اند.

قضیهٔ ۶

اگر f در c و g در $f(c)$ پیوسته باشند، آنگاه تابع مرکب $g\circ f$ در c پیوسته است.

برای ملاحظهٔ طرحی از اثبات قضیهٔ ۶، مسألهٔ ۶ درپیوست ۱ را ببینید.

مثال ۱۰ نشان دهید که تابع

$$y=\left|\frac{x\sin x}{x^2+2}\right|$$

در هر مقدار x پیوسته است.

حل: تابع y، ترکیب تابعهای پیوستهٔ زیراست

$$f(x)=\frac{x\sin x}{x^2+2} \quad \text{و} \quad g(x)=|x|.$$

تابع f بنابه قضیهٔ ۴، تابع g بنابه‌مثال ۸، و ترکیب‌آنها، $g\circ f$، بنا به قضیهٔ ۶ پیوسته‌اند. ■

اگر یك تابع مرکب $g\circ f$ درنقطه‌ای چون $x=c$ پیوسته باشد، حد آن وقتی $x\to c$ برابر است با $g(f(c))$.

مثال ۱۱

الف) $\lim\limits_{x\to ۱}\sin\sqrt{x-۱}=\sin\sqrt{۱-۱}=\sin ۰=۰$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰}|۱+\cos x|=|۱+\cos ۰|=|۱+۱|=۲$.

■

تابعهای پیوسته ویژگیهای مهمی دارند

توابع پیوسته را به این دلیل مطالعه می‌کنیم که در ریاضیات و رشته‌های کاربردی مفیدند. همان‌طور که در فصل ۴ خواهیم دید، هر تابع پیوسته، مشتق تابع دیگری است. توان دستیابی به یك تابع از روی اطلاعاتی که در بارهٔ مشتقش داریم، یکی از بزرگترین امکاناتی است که حساب دیفرانسیل و انتگرال در اختیار ما می‌گذارد. مثلاً، اگر فرمولی مانند $v(t)$ برای سرعت یك جسم متحرك به‌عنوان تابع پیوسته‌ای از زمان در دست باشد، با استفاده از مطالب فصلهای ۲، ۳، و ۴ می‌توانیم فرمولی چون $s(t)$ به دست آوریم که بگوید در هر لحظه، جسم از نقطهٔ شروع حرکت چقدر دور شده‌است.

به علاوه، تابعی که در هر نقطهٔ یك بازهٔ بسته $[a, b]$ پیوسته است، در این بازه یك مقدار ماکسیمم و یك مقدار مینیمم دارد. همیشه وقتی می‌خواهیم نمودار یك تابع را رسم کنیم، به جستجوی این مقادیر می‌پردازیم وخواهیم دید که چه نقشی درحل مسأله (فصل ۳) و در شرح و بسط حساب انتگرال (فصلهای ۴ و ۵) دارند.

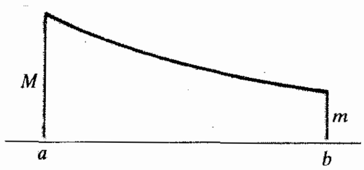
و بالاخره، تابعی مانند f که در هرنقطه از یك بازهٔ بسته $[a, b]$ پیوسته است، هرمقدار بین $f(a)$ و $f(b)$ را اختیار می‌کند. بعضی از پیامدهای این ویژگی را در سطور آتی خواهیم دید.

اثبات این ویژگیها نیازمند اطلاعات مبسوطی از دستگاه اعداد حقیقی است و در اینجا به آن نمی‌پردازیم. این گونه اثباتها را می‌توان در بیشتر کتابهای درسی در زمینهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته پیدا کرد.

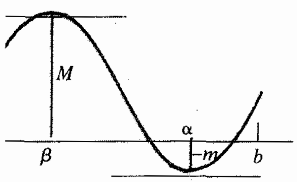
قضیهٔ ۷

قضیهٔ ماکسیمم-مینیمم (ماکسیمین) برای توابع پیوسته

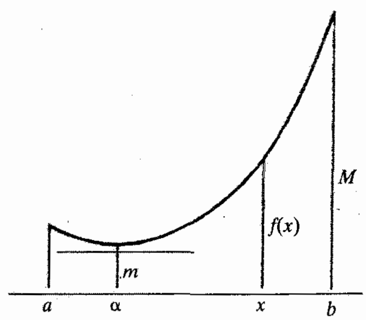
اگر f در هر نقطه از بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه f یك مقدار مینیمم m و یك مقدار ماکسیمم M بر $[a, b]$ اختیار می‌کند. یعنی، اعدادی چون α و β در $[a,b]$ وجود دارند به‌طوری که $f(\alpha)=m$، $f(\beta)=M$، ودرهمهٔ نقاط x در $[a,b]$، $m\leqslant f(x)\leqslant M$. (شکل ۱۰۲۰۱ را ببینید.)



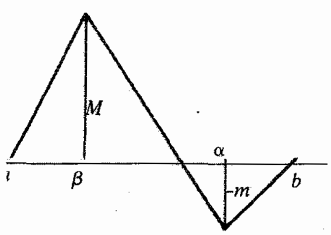
ماکسیمم و مینیمم در نقاط انتهایی $[a,b]$



مینیمم و ماکسیمم در نقاط داخلی



مینیمم m در نقطهٔ داخلی αی بازه؛ ماکسیمم M در نقطهٔ انتهایی b



مینیمم و ماکسیمم در نقاط داخلی: β که در آنجا شیب صفر نیست. این بر$[a,b]$ پیوسته است ولی در α و β مشتقپذیر نیست.

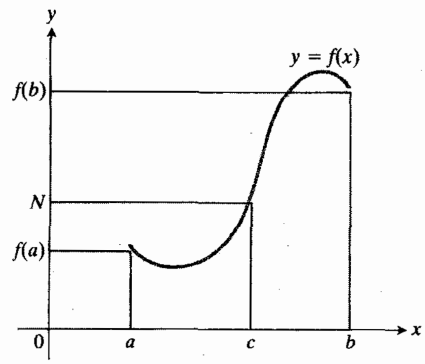
۱۰۲۰۱ تابعی که بر یك بازه بسته، پیوسته است،مقادیر مینیمم وماکسیممی بر آن بازه اختیار می‌کند.

قضیهٔ ۸

قضیهٔ مقدار میانی

اگر f در هر نقطه از بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد و N عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد، آنگاه دست‌کم یك نقطهٔ c بین a و b وجود داردکه درآن نقطه، f مقدار N را اختیار می‌کند. (شکل ۱۰۳۰۱ را ببینید.)

نتیجه‌ای از این قضیه در ترسیم نمودار: اتصال تصور کنید



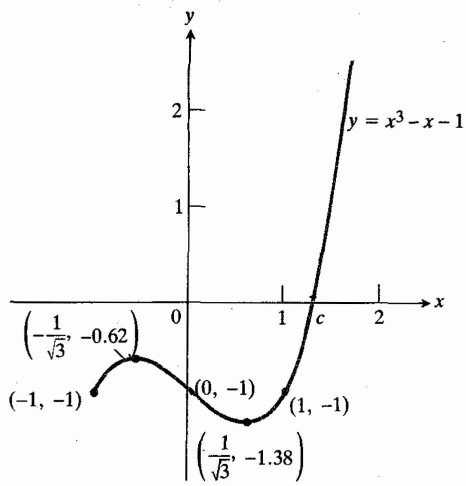
۱۰۳۰۱ تابعی چون $y=f(x)$ که بر $[a,b]$ پیوسته است، هرمقدار N بین $f(a)$ و $f(b)$ را اختیار می‌کند.

می‌خواهیم نمودار تابعی مانند $y=f(x)$ را رسم کنیم که در سراسر بازه‌ای چون I روی محور x، پیوسته است. قضیهٔ ۸ می‌گوید که نمودار f روی I هیچگاه از یك مقدار y به مقدار دیگر y نمی‌رود مگر آنکه مقادیر y بین آنها را اختیار کند. نمودار f روی I **متصل** است: چنین نموداری یك خم واحد بدون شکستگی است، مانند نمودار $y=\sin x$. نمودار f جهشهایی نظیر جهشهای نمودار $y=[x]$ یا شاخه‌های جداگانه‌ای مانند شاخه‌های $y=\tan x$ ندارد.

نتیجه‌ای از این قضیه در پیداکردن ریشه تصور کنید که $f(x)$ در هرنقطه از بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته است و نیز $f(a)$ و $f(b)$ علامتهای متفاوتی دارند. دراین صورت، صفر بین $f(a)$ و $f(b)$ قرار دارد، بنابراین دست‌کم یك عدد c بین a و b وجود دارد که $f(c)=0$. به عبارت دیگر، اگر f پیوسته و $f(a)$ و $f(b)$ علامتهای متفاوتی داشته باشند، آنگاه معادلهٔ $f(x)=0$ دست‌کم یك جواب دربازهٔ باز (a,b) دارد. این واقعیت، چنانکه در فصل ۲ خواهیم دید، ما را در تعیین جوابهای معادلات یاری می‌کند. نقطه‌ای را که در آن $f(x)=0$، گاه **صفر** تابع می‌نامند.

مثال ۱۲ آیا عددی حقیقی وجود دارد که یك واحد کمتر از مکعبش باشد؟

حل: چنین عددی باید در معادلهٔ $x=x^3-1$ یا $x^3-x-1=0$ صدق کند. از اینرو، به جستجوی یك صفر تابع $f(x)=x^3-x-1$ می‌پردازیم. با آزمون می‌بینیم که $f(1)=-1$ و $f(2)=5$. نتیجه می‌گیریم که معادلهٔ $f(x)=0$ دست کم یك جواب c بین ۱ و ۲ دارد. در این نقطه، $c^3-c-1=0$ یا $c=c^3-1$. پس، پاسخ ما مثبت است، عددی که یك واحد از مکعبش کمتر باشد، وجود دارد. در



۱۰۴۰۱ نمودار $f(x)=x^3-x-1$ محور x را بین $x=1$ و $x=2$ قطع می‌کند.

بخش ۹۰۲، که در آنجا ریشه‌یابی را مطالعه خواهیم کرد، خواهیم دید که c تقریباً ۱٫۳۲ است. شکل ۱۰۴۰۱ را ببینید. ■

مشتق دارای ویژگی مقدار میانی است

گاهی اطلاع از این نکته مفید واقع می‌شود که مشتق دارای ویژگی مقدار میانی است: اگر f در هرنقطه از یك بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ دارای مشتق باشد، آنگاه f' هرمقدار بین $f'(a)$ و $f'(b)$ را اختیار می‌کند. ما در بخش ۲۰۳ و در ارتباط با نقاط عطف به این موضوع باز می‌گردیم، ولی اثباتی ارائه نخواهیم داد. اثبات در کتابهای پیشرفته آمده است.

گسترش پیوسته

گاهی دامنهٔ یك تابع را گسترش می‌دهیم تا نقاط پیوستگی بیشتری را در بر گیرد. اگر c نقطه‌ای باشد که در آنجا f تعریف نشده ولی $\lim_{x\to c} f(x)$ وجود داشته باشد، می‌توانیم $f(c)$ را به عنوان مقدار این حد تعریف کنیم. تابع f گسترش یافته، خود به خود پیوسته است زیرا $f(c)$ وجود دارد و برابر با $\lim_{x\to c} f(x)$ است.

مثال ۱۳ آیا می‌توان $f(2)$ را طوری تعریف کرد که گسترش

$$f(x)=\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$$

در $x=2$ پیوسته باشد؟ اگر پاسخ مثبت است، $f(2)$ چه مقداری باید داشته باشد؟

حل: برای اینکه f در $x=2$ پیوسته باشد، $f(2)$ باید برابر با $\lim_{x\to 2} f(x)$ باشد. آیا f در $x=2$ حدی دارد، و اگر

چنین است، حدآن چیست؟ برای پاسخ دادن به این پرسش، سعی می‌کنیم صورت و مخرج کسر بالا را تجزیه کنیم تا ببینیم که آیا می‌توان این کسر را طوری بازنویسی کرد که به ازای $x=2$ از تقسیم برصفر اجتناب شود یا خیر. داریم

$$f(x)=\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x+3}{x+2}.$$

بنابراین،

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x+2}=\frac{2+3}{2+2}=\frac{5}{4}$$

و اگر تعریف کنیم $f(2)=5/4$، خواهیم داشت

$$f(2)=\lim_{x\to 2} f(x).$$

تابع گسترش یافتهٔ

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4} & x\neq 2\\[2mm] \dfrac{5}{4} & x=2\end{cases}\qquad (6)$$

در $x=2$ پیوسته است زیرا $\lim_{x\to 2} f(x)$ موجود وبرابر با $f(2)$ است. ■

تابع مذکور در رابطهٔ (۶)، **گسترش پیوستهٔ** تابع اصلی به نقطهٔ $x=2$ خوانده می‌شود. در اینجا مثال دیگری می‌آوریم.

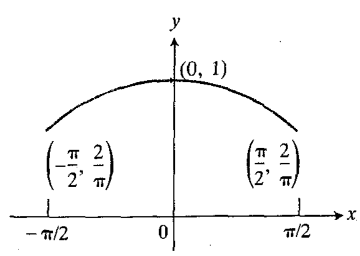
مثال ۱۴ تابع $y=(\sin x)/x$ در $x=0$ پیوسته نیست ولی، همان طورکه در بخش ۹.۱ دیدیم، $\lim_{x\to 0}(\sin x)/x=1$.
بنابراین، می‌توان این تابع را چنان گسترش داد که در $x=0$ پیوسته شود. تعریف می‌کنیم

■ ■ ■

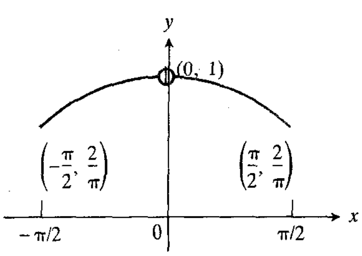
مقاله‌ای دربارهٔ توابع پیوسته که برندهٔ جایزه شد

ریاضیدانان اوایل قرن هیجدهم ویژگیهای توابع پیوسته یا «خوشرفتار» را به‌این دلیل‌مطالعه می‌کردند که نشان دهند اگریک خم نقاطی درهردوطرف یك خط داشته باشد، آن خط و خم مسلماً یکدیگر را قطع می‌کنند. ولی در نیمهٔ دوم آن قرن، مسائلی در ریاضیات مطرح شدندکه باتوابع پیچیده‌تر سروکارداشتند و باعث شدندکه‌ریاضیدانان توجه خودرا به‌ویژگی‌اساسی‌پیوستگی‌معطوف کنند. در سال ۱۷۸۷، آکادمی سن‌پترزبورگ مسابقه‌ای برای نوشتن مقاله‌ای‌دربارهٔ این مسأله ترتیب داد: «آیا توابع دلخواهی که با انتگرالگیری از معادلات سه یاچند متغیره به دست می‌آیند هرگونه خم یا رویه، اعم از جبری، متعالی، مکانیکی، ناپیوسته، و حاصل از حرکت آزادانهٔ دست، را نشان می‌دهند؛ یا آنکه این توابع فقط شامل خمهایی هستندکه به‌وسیلهٔ یك معادلهٔ جبری یا متعالی نشان داده می‌شوند؟» جایزهٔ این مسابقه را ریاضیدان نسبتاً گمنام، ال. اف. ای اربوگاست برد. او ویژگیهای بنیادی توابع پیوسته را بیان کرد. این ویژگیها بعداً در آثار برنهارد بولتسانو و آگوستین لویی کوشی دوباره مطرح شد؛ این دونفر اطلاعی از کار اربوگاست نداشتند.

۱۰.۵.۱ (الف) نمودار $f(x)=(\sin x)/x$ به‌ازای $-\pi/2\leqslant x\leqslant\pi/2$ شامل نقطهٔ $(0,1)$ نیست زیرا تابع در $x=0$ تعریف نمی‌شود. ولی می‌توانیم ناپیوستگی نمودار را با تعریف $f(0)=1$ رفع کنیم. وقتی این نقطه را به‌این‌طریق وارد نمودار کردیم، خم پیوسته‌ای را که در شکل (ب) دیده می‌شود به دست می‌آوریم.



(ب)



(الف)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq ۰\\ ۱ & x=۰ .\end{cases}$$

تابع f در $x=۰$ پیوسته است زیرا $\lim_{x\to ۰} f(x)=f(۰)$. شکل ۱۰۵.۱ را ببینید. ■

ملاحظات پایانی

توجه به این نکته مهم است که باید بین پیوستگی تابع $y=f(x)$ در $x=c$ و حد داشتن آن تابع وقتی $x\to c$، فرق بگذاریم. حد، $\lim_{x\to c} f(x)$، جایی است که وقتی $x\to c$ تابع به سوی آن می‌رود. پیوستگی عبارت است از این ویژگی که وقتی x عملاً به c می‌رسد $f(x)$ نیز به نقطه‌ای که به سویش درحرکت بوده وارد می‌شود. اگر حد آن چیزی باشد که وقتی $x\to c$ انتظارش را دارید، و عدد $f(c)$ چیزی باشد که در $x=c$ به آن می‌رسید، آنگاه تابع در c پیوسته است اگر چیزی که انتظارش را دارید با $f(c)$ یکی باشد.

و بالاخره، آزمون پیوستگی را به یاد آورید:

۱. آیا $f(c)$ وجود دارد؟

۲. آیا $\lim_{x\to c} f(x)$ وجود دارد؟

۳. آیا $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$؟

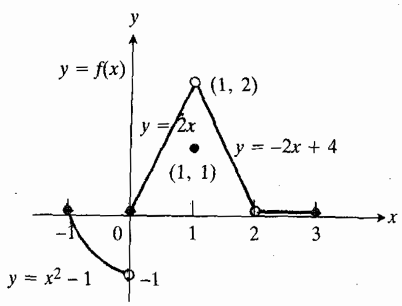
برای اینکه f در $x=c$ پیوسته باشد، پاسخ هر سه سؤال باید مثبت باشد.

مسأله‌ها

مسأله‌های ۱ـ۶ مربوط به تابع زیرند

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۱ & -۱\leqslant x<۰\\ ۲x & ۰\leqslant x<۱\\ ۱ & x=۱\\ -۲x+۴ & ۱<x<۲\\ ۰ & ۲<x\leqslant ۳ .\end{cases}$$

نمودار این تابع در شکل ۱۰۶.۱ رسم شده‌است.



۱۰۶.۱ تابع $y=f(x)$ در مسائل ۱ـ۶.

۱. الف) آیا $f(-۱)$ وجود دارد؟

ب) آیا $\lim_{x\to -۱^+} f(x)$ وجود دارد؟

پ) آیا $\lim_{x\to -۱^+} f(x)=f(-۱)$؟

ت) آیا f در $x=-۱$ پیوسته است؟

۲. الف) آیا $f(۱)$ وجود دارد؟

ب) آیا $\lim_{x\to ۱} f(x)$ وجود دارد؟

پ) آیا $\lim_{x\to ۱} f(x)=f(۱)$؟

ت) آیا f در $x=۱$ پیوسته است؟

۳. الف) آیا f در $x=۲$ تعریف می‌شود؟ (به تعریف f نگاه کنید.)

ب) آیا f در $x=۲$ پیوسته است؟

۴. f درچه مقادیری از x پیوسته است؟

۵. الف) مقدار $\lim_{x\to ۲} f(x)$ چیست؟

ب) چه مقداری باید به $f(۲)$ نسبت داد تا f در $x=۲$ پیوسته شود؟

۶. $f(۱)$ به‌چه مقدار جدیدی‌تبدیل شود تا f در $x=۱$ پیوسته گردد؟

۷. تابع‌زیر درچه نقاطی پیوسته است؟ (راهنمایی: نمودار تابع را رسم کنید.)

$$f(x)=\begin{cases} ۰ & x<۰\\ ۱ & ۰\leqslant x\leqslant ۱\\ ۰ & ۱<x .\end{cases}$$

۸. فرض کنید $f(x)$ به‌صورت زیر تعریف شود

$$f(x)=\begin{cases} ۱ & x<۰\\ \sqrt{۱-x^{۲}} & ۰\leqslant x\leqslant ۱\\ x-۱ & x>۱ .\end{cases}$$

آیا f پیوسته است؟ (راهنمایی: نمودار تابع را رسم کنید.)

توابع مذکوردرمسائل زیرازبخش ۱.۹، درچه نقاطی پیوسته‌اند؟

۹. مسألهٔ ۵۸

۱۰. مسألهٔ ۵۹

۱۱. مسألهٔ ۶۰

نقاطی را (در صورت وجود) بیابید که توابع مذکور در مسائل ۱۲–۲۱ در آن نقاط پیوسته نیستند.

۱۲. $y=\frac{۱}{x-۲}$

۱۳. $y=\frac{۱}{(x+۲)^۲}$

۱۴. $y=\frac{x}{x+۱}$

۱۵. $y=\frac{x+۱}{x^۲-۴x+۳}$

۱۶. $y=|x-۱|$

۱۷. $y=\frac{x+۳}{x^۲-۳x-۱۰}$

۱۸. $y=\frac{x^۳-۱}{x^۲-۱}$

۱۹. $y=\frac{۱}{x^۲+۱}$

۲۰. $y=\frac{\cos x}{x}$

۲۱. $y=\frac{|x|}{x}$

۲۲. تابع $f(x)$ با ضابطهٔ $f(x)=(x^۲-۱)/(x-۱)$ به‌ازای $x\neq۱$ و نیز $f(۱)=۲$ تعریف می‌شود. آیا f در $x=۱$ پیوسته است؟ توضیح دهید.

۲۳. $g(۳)$ را چنان تعریف کنید که $g(x)=(x^۲-۹)/(x-۳)$ گسترش یابد و در $x=۳$ پیوسته شود.

۲۴. $h(۲)$ را چنان تعریف کنید که

$$h(x)=(x^۲+۳x-۱۰)/(x-۲)$$

گسترش یابد و در $x=۲$ پیوسته شود.

۲۵. $f(۱)$ را طوری تعریف کنید که

$$f(x)=(x^۳-۱)/(x^۲-۱)$$

گسترش یابد و در $x=۱$ پیوسته شود.

۲۶. $g(۴)$ را چنان تعریف کنید که

$$g(x)=(x^۲-۱۶)/(x^۲-۳x+۴)$$

گسترش یابد و در $x=۴$ پیوسته گردد.

۲۷. الف) نمودار تابع زیر را رسم کنید

$$f(x)=\begin{cases}x & ۰\leqslant x\leqslant ۱\\ ۲-x & ۱<x\leqslant ۲.\end{cases}$$

ب) آیا f در $x=۱$ پیوسته است؟
پ) آیا f در $x=۱$ مشتق دارد؟

۲۸. در شکل ۹۷.۱، $f(۲)$ را چگونه باید تعریف کرد که تابع در $x=۲$ پیوسته باشد؟

۲۹. برای اینکه تابع زیر در $x=۳$ پیوسته باشد، چه مقداری باید به a نسبت داد؟

$$f(x)=\begin{cases}x^۲-۱ & x<۳\\ ۲ax & x\geqslant ۳.\end{cases}$$

۳۰. برای اینکه تابع زیر در $x=۱/۲$ پیوسته باشد، چه مقداری باید به b نسبت داد؟

$$g(x)=\begin{cases}x^۳ & x<۱/۲\\ bx^۲ & x\geqslant ۱/۲.\end{cases}$$

حدهای مذکور در مسائل ۳۱–۳۴ را بیابید

۳۱. $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱+\cos x}{۲}$

۳۲. $\lim\limits_{x\to ۰}\cos\left(۱-\frac{\sin x}{x}\right)$

۳۳. $\lim\limits_{x\to ۰}\tan x$

۳۴. $\lim\limits_{x\to ۰}\sin\left(\frac{\pi}{۲}\cos(\tan x)\right)$

۳۵. مقدار ماکسیمم $y=|x|$ به‌ازای $-۱\leqslant x\leqslant ۱$ چقدر است؟ مقدار مینیمم آن چقدر است؟

۳۶. تابع شکل ۹۷.۱ درچه مقادیری از x مقدار ماکسیمم خود را اختیار می‌کند؟ آیا این تابع مقدار مینیممی‌هم می‌گیرد؟ توضیح دهید.

۳۷. آیا تابع $y=x^2$ بر بازهٔ باز $-1<x<1$ مقدار ماکسیممی دارد؟ مقدار مینیمم چطور؟ توضیح دهید.

۳۸. تابع بزرگترین‌عددصحیح $y=[x]$ بر بازهٔ بستهٔ $0 \leqslant x \leqslant 1$ مقدار مینیمم $m=0$ ومقدار ماکسیمم $M=1$ را اختیار می‌کند، گرچه در $x=1$ ناپیوسته است. آیا این واقعیت، قضیهٔ ۷ را نقض نمی‌کند؟ چرا؟

۳۹. می‌دانیم که یک تابع پیوستهٔ $y=f(x)$ در $x=0$ منفی و در $x=1$ مثبت است. چرا معادلهٔ $f(x)=0$ دست کم یک جواب بین $x=0$ و $x=1$ دارد؟ با ترسیم نمودار توضیح دهید.

۴۰. با فرض اینکه $y=\cos x$ پیوسته است، نشان دهید که معادلهٔ $\cos x = x$ دست‌کم یک جواب دارد. (راهنمایی: نشان دهیدکه تابع $f(x)=\cos x - x$ دست‌کم یک صفردارد.)

۴۱. نشان دهید که تابع

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x \geqslant 0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

مشتق هیچ تابعی نیست. (راهنمایی: آیا f دارای ویژگی مقدار میانی است؟)

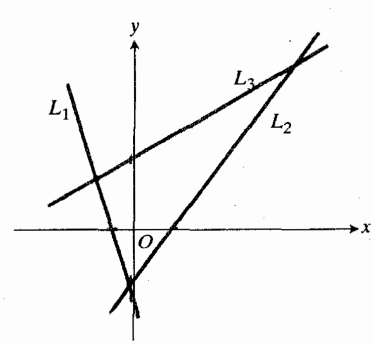
TOOLKIT PROGRAMS

Continuity at a Point Super * Grapher
Limit Problems

پرسشها و تمرینهای مروری

۱. شیب خط راست را تعریف کنید. شیب خط را از روی نمودارش چگونه می‌یابید؟ از روی معادلهٔ خط چطور؟

۲. تصور کنیدکه m_1، m_2 و m_3 شیبهای خطوط L_1، L_2 و L_3 در شکل ۱۵۷.۱ باشند. شیبها را به ترتیب صعودی اندازهٔ آنها بنویسید.



۱۵۷.۱ مربوط به تمرین مروری ۲.

۳. خانوادهٔ خطهای $y-y_1=m(x-x_1)$ را در هریک از حالات زیر توصیف کنید.

الف) اگر (x_1, y_1) ثابت باشد و خطها به ازای مقادیر مختلف m رسم شوند.

ب) اگر m و x_1 ثابت باشند و خطها به‌ازای مقادیرمختلف y_1 رسم شوند.

۴. تابع را تعریف کنید. دامنه و برد تابع چیست؟

۵. آیا دایرهٔ $x^2+y^2=1$ نمودار تابعی چون $y=f(x)$ است؟ توضیح دهید.

۶. اگر $f(x)=1/x$ و $g(x)=1/\sqrt{x}$، دامنهٔ f، g، $f+g$، $f-g$، $f \cdot g$، f/g، g/f، $f \circ g$، و $g \circ f$ چیست؟ دامنهٔ $h(x)=g(x+4)$ کدام است؟

۷. اگر $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\sqrt{1-x}$، فرمولی برای $(g \circ f)(x)$ بیابید. دامنه و برد $g \circ f$ را پیدا کنید.

۸. در هندسه، مماس بر دایره را به عنوان خطی تعریف می‌کنیم که دایره را دقیقاً در یك نقطه قطع می‌کند. آیا این تعریف برای سایر خمهای درصفحه نیز مناسب است؟ توضیح دهید. بحث را با ترسیم نمودار روشن سازید.

۹. شیب خم را در نقطه‌ای روی خم تعریف کنید.

۱۰. سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای را تعریف کنید.

۱۱. مفاهیم شیب خم وسرعت لحظه‌ای درقالب چه‌مفهوم کلیتری می‌گنجند؟

۱۲. مشتق یك تابع را درنقطه‌ای از دامنه‌اش تعریف‌کنید. برای روشن ساختن تعریف خود، آن را در مورد تابع $f(x)=x^2$ در $x=2$ به‌کار برید.

۱۳. مثالی از یك تابع پیوسته بیاوریدکه (الف) در نقطه‌ای مشتق نداشته باشد؛ (ب) در چند نقطه مشتق نداشته باشد؛ (پ) در بینهایت نقطه مشتق نداشته باشد.

۱۴. فرض‌کنید $\lim_{t \to c} F(t) = -7$ و $\lim_{t \to c} G(t)=0$. حدهریك از توابع زیر را وقتی t به c میل می‌کند، پیدا کنید.

الف) $3 \cdot F(t)$

ب) $(F(t))^2$

پ) $F(t) \cdot G(t)$

ت) $\dfrac{F(t)}{G(t)+7}$

۱۵. معنی عبارات زیر را بیان کنید.

الف) $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$

ب) $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=k$

۱۶. حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x+2}$

ب) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+2}$

پ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$

ت) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{4x}$

۱۷. تعیین کنید که کدام حدهای زیر موجودند، و آنهایی را که موجودند محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{5x+7}$

ب) $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{4z^3+3z^2+2}{z^4+5z^2+1}$

پ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$

ت) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+3x}{1+5x}$

۱۸. توصیفهای نادرستی از حد. با مثال نشان دهید که گزاره‌های زیر نادرست‌اند.

الف) عدد L حد $f(x)$ است وقتی x به c میل می‌کند، اگر $f(x)$ وقتی x به c میل می‌کند به L نزدیکتر شود.

ب) عدد L حد $f(x)$ است وقتی x به c میل می‌کند، اگر به‌ازای هر $\epsilon>0$ مفروض، مقداری از x وجود داشته‌باشد که به‌ازای آن، $|f(x)-L|<\epsilon$.

۱۹. نمودار تابع زیر را رسم کنید و دربارهٔ پیوستگی آن بحث کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x+1/x & x<0 \\ -x^3 & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ -1 & 1<x<2 \\ 1 & x=2 \\ 0 & x>2 \end{cases}$$

۲۰. مثالی از گسترش پیوستهٔ یك تابع بیاورید.

۲۱. مثالی از تابعی بیاورید که بر $0\leqslant x\leqslant 1$ تعریف شود، دربازهٔ باز $0<x<1$ پیوسته باشد، و در $x=0$ ناپیوسته باشد.

۲۲. دربارهٔ رابطهٔ بین پیوستگی و مشتقپذیری یك تابع در نقطه‌ای از دامنه‌اش، قضیه‌ای بیان و اثبات کنید.

۲۳. تعیین کنید که این گزاره درست است یا نادرست: اگر $y=f(x)$ پیوسته باشد، و داشته‌باشیم $f(1)=0$ و $f(2)=3$، آنگاه f مقدار ۲٫۵ را در نقطه‌ای بین $x=1$ و $x=2$ اختیار می‌کند. توضیح دهید.

۲۴. تابع $y=1/x$ مقدار ماکسیمم یا مقدار مینیممی بر بازهٔ $[-1,1]$ اختیار *نمی*‌کند. آیا این امر با قضیهٔ ۷ تناقض دارد؟ چرا؟

مسأله‌های گوناگون

۱. موضع ثانویهٔ ذره‌ای درصفحه، پس از آنکه مختصاتش با نموهای $\Delta x=h$ و $\Delta y=k$ تغییر می‌کنند، $B(u,v)$ است. موضع اولیهٔ آن را بیابید.

۲. ذره‌ای در صفحه از $A(-2,5)$ حرکت می‌کند و روی محور y قرار می‌گیرد، به‌قسمی که $\Delta y=3\Delta x$. مختصات جدید آن را بیابید.

۳. ذره‌ای روی‌سهمی $y=x^2$ از نقطهٔ $A(1,1)$ حرکت می‌کند و به نقطهٔ $B(a,a^2)$، $a\neq 1$ می‌رود. سهمی را رسم کنید ونشان دهید که اگر $\Delta x\neq 0$، $\Delta y/\Delta x=a+1$.

۴. الف) نقاط $A(8,1)$، $B(2,10)$، $C(-4,6)$، $D(2,-3)$، و $E(14/3,6)$ را روی شکل مشخص کنید.

ب) شیب هریك از خطهای AB، BC، CD، DA، CE، و BD را بیابید.

پ) آیا چهار نقطه از پنج نقطهٔ A، B، C، D، و E یك متوازی‌الاضلاع تشکیل می‌دهند؟ چرا؟

ت) آیا سه نقطه از پنج نقطه روی یك خط راست مشترك قرار دارند؟ چرا؟

ث) آیا مبدأ $(0,0)$ روی خط راستی واقع است که از دوتا از پنج نقطه می‌گذرد؟ چرا؟

ج) معادلات خطهای AB، CD، AD، CE، BD را پیداکنید.

چ) مختصات نقاط تقاطع خطهای AB، CD، AD، CE، و BD را با محور x و محور y بیابید.

۵. الف) برای خطی که از $P(1,-3)$ می‌گذرد و عمود برخط $L: 2y-3x=4$ است، معادله‌ای بیابید.

ب) فاصلهٔ بین P و L را پیدا کنید.

۶. نقاط $A(6,4)$، $B(4,-3)$، و $C(-2,3)$ را روی شکل

مشخص کنید.

الف) آیا ABC یك مثلث قائم‌الزاویه است؟ توضیح دهید.

ب) آیا ABC یك‌مثلث متساوی‌الساقین است؟ توضیح‌دهید.

پ) آیا مبدأ در درون، در بیرون، یا برمرز مثلث واقع است؟ توضیح دهید.

ت) به‌جای‌نقطهٔ C نقطه‌ای مانند $C'(-۲,y)$ قرار می‌گیرد به‌طوری که زاویهٔ $C'BA$ قائمه است. y را پیدا کنید.

۷. مطلوب است معادلات خطهایی کـه از مبدأ می‌گذرند و بر دایرهٔ به‌شعاع ۲ و به‌مرکز $(۲,۱)$ مماس‌اند.

۸. مطلوب است مختصات نقطهٔ‌وسط پاره‌خطی که نقاط $P_1(x_1,y_1)$ و $P_2(x_2,y_2)$ را به‌هم وصل می‌کند.

۹. مطلوب است (الف) شیب، (ب) عرض ازمبدأ، و (پ) طول ازمبدأخط $L:Ax+By=C$؛ (ت) معادلهٔ خطی که ازمبدأ‌می‌گذرد و عمود بر L است.

۱۰. فرمول کلی فاصلهٔ بین یك نقطه و یك خط در صفحه. نشان دهید که فاصلهٔ بین‌یك‌نقطهٔ $P_1(x_1,y_1)$ و یك خط $Ax+By=C$ برابر است با

$$\frac{|Ax_1+By_1-C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

وقتی $P_1:Ax_1+By_1=C$ روی L است.

وقتی $P_1:Ax_1+By_1>C$ دریك طرف L است.

وقتی $P_1:Ax_1+By_1<C$ درطرف دیگر L است.

(در مجلهٔ ماهنامهٔ ریاضی آمریکا (مانتلی) جلد ۵۹ (۱۹۵۲) صفحه‌های ۲۴۲ و ۲۴۸، برای این مسأله راه‌حلهای جالبی ذکر شده‌است).

۱۱. فرض کنید طـول عمود ON که از مبدأ بر یك خط L رسم می‌شود، p است و ON یك‌زاویهٔ α باقسمت‌مثبت‌محور x می‌سازد. نشان دهید کـه $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ یـك معادلهٔ L است. (یـادآوری: وقتـی $A^2+B^2\neq ۰$، معادلـهٔ کلـی خط یعنـی $Ax+By=C$ رامی‌توان به‌صورت $x\cos\alpha+y\sin\alpha=P$ نوشت که در آن، $\cos\alpha=A/\sqrt{A^2+B^2}$، $\sin\alpha=B/\sqrt{A^2+B^2}$، و $p=C/\sqrt{A^2+B^2}$.)

۱۲. اگر A، B، C، و C' ثابت باشند، و A و B هردوصفر نباشند، نشان دهید که (الف) خطوط

$$Ax+By=C \qquad \text{و} \qquad Ax+By=C'$$

یا برهم منطبق‌اند یا باهم موازی‌اند و (ب) خطوط

$$Ax+By=C \qquad \text{و} \qquad Bx-Ay=C'$$

برهم عمودند.

۱۳. چند دایره در صفحه برهرسه خط زیر مماس‌اند؟

$$L_1:x+y=۱ \qquad L_2:y=x+۱ \qquad L_3:x-۳y=۱$$

مرکز و شعاع یکی از این دایره‌هـا را به‌دست‌آورید. می‌توانید از فرمول مسألهٔ ۱۰ استفاده کنید.

۱۴. فاصلهٔ بین خطهای $y=mx+b$ و $y=mx+b'$ را پیدا کنید. جواب خود را برحسب b، b'، و m بیان کنید.

۱۵. فرض‌کنید L_1 و L_2 خطهایی بامعادلات زیرند

$$L_1:a_1x+b_1y+c_1=۰ \qquad L_2:a_2x+b_2y+c_2=۰$$

و k یك مقدار ثابت است. مجموعهٔ نقاطی را کـه مختصات آنها در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند، مشخص کنید.

$$(a_1x+b_1y+c_1)+k(a_2x+b_2y+c_2)=۰.$$

۱۶. مختصات نقطه‌ای از خط $y=۳x+۱$ را که از $(۰,۰)$ و $(-۳,۴)$ به یك فاصله است، بیابید.

۱۷. مطلوب است معادلهٔ خطی که عمود بر $۵x-y=۱$ است به طوری که مساحت مثلثی که از محور x، محور y، و این خط راست تشکیل می‌شود برابر با ۵ است. چندتا از این گونه خطها وجود دارد؟

۱۸. فـرض‌کنید $y=(x^2+۲)/(x^2-۱)$. x را برحسب y بیان کنید و مقادیری از y را که به‌ازای آنها x یك عدد حقیقی است، بیابید.

۱۹. مساحت A و محیط Cی یك دایره را بـه‌صورت توابعی از شعاع r بیان کنید. و نیز A را به صورت تابعی از C بنویسید.

۲۰. اگر $f(x)=x-(۱/x)$، نشان دهید که

$$f(۱/x)=-f(x)=f(-x).$$

دامنه و برد هریك از توابع مذکور درمسائل ۲۱-۲۴ را بیابید.

۲۱. $y=\dfrac{۱}{۱+x}$

۲۲. $y=\dfrac{۱}{۱+x^2}$

۲۳. $y=\dfrac{۱}{۱+\sqrt{x}}$

۲۴. $y=\dfrac{۱}{\sqrt{۳-x}}$

۲۵. فرض کنید $f(x)=ax+b$ و $g(x)=cx+d$. ثابتهای a، b، c، و d در چه شرطی باید صدق کنند تا $f(g(x))$ و $g(f(x))$ یکی باشند؟

۲۶. فرض کنید $f(x)=(ax+b)/(cx+d)$. اگر $d=-a$، نشان دهید که به ازای همهٔ مقادیر x، $x=f(f(x))$.

۲۷. اگر $f(x)=x/(x-۱)$، مطلوب است

الف) $f(۱/x)$

ب) $f(-x)$

پ) $f(f(x))$

ت) $f(۱/f(x))$

۲۸. بدون استفاده از علامت قدر مطلق، مجموعهٔ مقادیر xای را که به ازای آنها $۴ > |۱+x|$، مشخص کنید.

۲۹. نمودار معادلهٔ $|x|+|y|=۱$ را رسم کنید. (راهنمایی: در هر ربع جداگانه عمل کنید و به جای این معادله، در هر ربع معادلهٔ هم‌ارز آن را که فاقد علامت قدر مطلق است، در نظر بگیرید.)

۳۰. نمودار تابع $y=|x+۲|+x$ را به‌ازای $-۵\leqslant x\leqslant ۲$ رسم کنید. دامنهٔ تابع را بیابید.

۳۱. نشان دهید که عبارت

$$\max(a,b)=\frac{(a+b)}{۲}+\frac{|a-b|}{۲}$$

وقتی $a\geqslant b$ برابر با a است و وقتی $b\geqslant a$ برابر با b است. به عبارت دیگر، $\max(a,b)$ بزرگترین عدد از دوعدد a و b را به دست می‌دهد. عبارت مشابهی برای $\min(a,b)$ پیدا کنید که از بین دوعدد، عدد کوچکتر را به دست دهد.

۳۲. برای‌هریك ازعبارات $f(x)$ زیر، ابتدا نمودار $y=f(x)$، سپس نمودار $y=|f(x)|$، و بعد نمودار

$$y=f(x)/۲+|f(x)|/۲$$

را رسم کنید.

الف) $f(x)=(x-۲)(x+۱)$

ب) $f(x)=x^۲$

پ) $f(x)=-x^۲$

ت) $f(x)=۴-x^۲$

۳۳. $y=[x]$ را به‌عنوان بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از x در نظر بگیرید. نمودارهای زیر را رسم کنید.

الف) $y=[x]$

ب) $y=[x]-[x]$

۳۴. الف) نمودار تابع $y=|۴-x^۲|$ را به ازای

$$-۳\leqslant x\leqslant ۳$$

رسم کنید.

ب) مقادیر ماکسیمم و مینیمم y براین‌بازه را بیابید. این مقادیر را y به ازای چه مقادیری از x اختیار می‌کند؟

۳۵. مطلوب‌است محاسبهٔ $f'(x)$ بااستفاده ازتعریف مشتق، هرگاه $f(x)$ برابر باشد با

الف) $(x-۱)/(x+۱)$

ب) $x^{۳/۲}$

پ) $x^{۱/۳}$.

۳۶. با استفاده از تعریف مشتق، هریك از موارد زیر را محاسبه کنید.

الف) $f'(x)$ اگر $f(x)=x^۲-۳x-۴$

ب) $\frac{dy}{dx}$ اگر $y=\frac{۱}{۳x}+۲x$

پ) $f'(t)$ اگر $f(t)=\sqrt{t-۴}$

۳۷. الف) شیب خم $y=۲x^۳+۲$ در نقطهٔ $(۱,۴)$ را بااستفاده از روش Δ بیابید.

ب) درچه‌نقطه‌ای ازخم قسمت (الف)، مماس برخم‌موازی با محور x است؟ نمودار خم را رسم کنید.

۳۸. اگر $f(x)=۲x/(x-۱)$، مطلوب است محاسبهٔ

الف) $f(۰),\ f(-۱),\ f(۱/x)$

ب) $\Delta f(x)/\Delta x$

پ) $f'(x)$، با استفاده از نتیجهٔ (ب).

۳۹. شیب خم $y=۱۸۰x-۱۶x^۲$ در نقطهٔ $(x_۱,y_۱)$ را باروش بخش ۶.۱ پیدا کنید. نمودار خم را رسم کنید. این خم در چه نقطه‌ای دارای مماس افقی است؟

۴۰. اگرموضع یك ذره درزمان t به‌صورت $s=۱۸۰t-۱۶t^۲$ باشد، سرعت $v=ds/dt$ را بیابید. چه‌وقتی سرعت صفرمی‌شود؟

۴۱. اگر توپی در امتداد قائم باسرعت ۳۲ft/sec به‌سمت بالا پرتاب‌شود، ارتفاع آن پس از t ثانیه ازمعادلهٔ $s=۳۲t-۱۶t^۲$ به دست می‌آید. توپ در چه لحظه‌ای به‌بالاترین نقطهٔ حرکتش می‌رسد، و تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

۴۲. اگر فشار P و حجم Vی یك گاز بافرمول $P=۱/V$ باهم

مربوط باشند، مطلوب است (الف) آهنگ متوسط تغییر P نسبت به V؛ (ب) آهنگ تغییر P نسبت به V در لحظه‌ای که $V=2$.

در مسائل ۴۳–۵۸، حد را محاسبه کنید، یا نشان دهید که حد وجود ندارد.

۴۳. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

۴۴. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{2x+5}$

۴۵. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\sin x}{x}$

۴۶. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4}{x^3-8}$

۴۷. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan 3x}$

۴۸. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\sin x}{x+\sin x}$

۴۹. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{x-a}$

۵۰. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{x+a}$

۵۱. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$

۵۲. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

۵۳. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1/(x+\Delta x)-1/x}{\Delta x}$

۵۴. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}$

۵۵. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

۵۶. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x-3)(\sqrt{x}-1)}{2x^2+x-3}$

۵۷. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-x\cos x)$

۵۸. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{x^2-x}$

در مسائل ۵۹–۶۶، حد را محاسبه کنید.

۵۹. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}$

۶۰. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}$

۶۱. $\lim\limits_{x\to 4^-}([x]-x)$

۶۲. $\lim\limits_{x\to 4^+}([x]-x)$

۶۳. $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{[x]^2-9}{x^2-9}$

۶۴. $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{[x]^2-9}{x^2-9}$

۶۵. $\lim\limits_{x\to 0}x[x]$

۶۶. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{4+\sqrt{x}}-2}$

۶۷. با فرض اینکه $f(x)=(x-1)/(2x^2-7x+5)$، مطلوب است (الف) حد $f(x)$ وقتی $x\to\infty$؛ (ب) حد $f(x)$ وقتی $x\to 1$؛ (پ) $f(-1/x)$، $f(0)$، $1/f(x)$.

۶۸. مختصات نقطهٔ تقاطع خطهای راست

$$3x+5y=1 \qquad \text{و} \qquad (2+c)x+5c^2y=1$$

را بیابید و موضع حدی این نقطه را وقتی c به ۱ می‌گراید، تعیین کنید.

۶۹. مطلوب است محاسبهٔ

الف) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)$

ب) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$.

۷۰. $\epsilon>0$ مفروض است. $\delta>0$ را به‌قسمی بیابید که به‌ازای هر t،

$$0<|t-1|<\delta\Rightarrow\sqrt{t^2-1}<\epsilon.$$

۷۱. $\epsilon>0$ مفروض است. M را به قسمی بیابید که

به‌ازای هر $t>M$، $\left|\dfrac{t^2+t}{t^2-1}-1\right|<\epsilon$.

۷۲. فرض کنید که $f(x)=x^3-3x^2-4x+12$ و

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x-۳} & x\neq ۳\\ k & x=۳ .\end{cases}$$

الف) همهٔ صفرهای f را پیدا کنید.
ب) مقداری برای k پیدا کنید که h در $x=۳$ پیوسته شود
پ) با استفاده از مقداری که در قسمت (ب) برای k پیدا شد، معلوم کنید که h یك تابع زوج است یا نه.

۷۳. فرض کنید F تابعی است که مقادیرش همگی نابیشتر از ثابتی چون M هستند: $F(t)\leqslant M$. ثابت کنید که: اگر $\lim_{t\to c} F(t)=L$، آنگاه $L\leqslant M$. (پیشنهاد: می‌توان با استفاده از اثبات غیرمستقیمی نشان داد که $L>M$ نادرست است. اگر $L>M$، می‌توانیم $۱/۲(L-M)$ را به عنوان یك عدد مثبت ϵ در نظر بگیریم، تعریف حد را به کار بریم، و به تناقض برسیم.)

۷۴. تابعی چون f که دامنه‌اش مجموعهٔ همهٔ مقادیر حقیقی است، دارای این ویژگی است که به ازای همهٔ xها و hها،

$$f(x+h)=f(x)\cdot f(h)\text{؛ و } f(۰)\neq ۰ .$$

الف) نشان دهید که $f(۰)=۱$. (راهنمایی: فرض کنید $h=x=۰$.)
ب) اگر f در ۰ مشتق داشته باشد، نشان دهید که f در هرعدد حقیقی x مشتق دارد و

$$f'(x)=f(x)\cdot f'(۰) .$$

۷۵. آیا می‌توان $f(۴)$ را طوری تعریف کرد که گسترش $f(x)=(x^۲-۱۶)/|x-۴|$ در $x=۴$ پیوسته باشد؟ اگر چنین است، $f(۴)$ چه مقداری باید داشته باشد؟ اگر چنین نیست، چرا؟ (راهنمایی: حدهای راست و چپ f در $x=۴$ را محاسبه کنید.)

۷۶. آیا می‌توان $f(۰)$ را چنان تعریف کرد که گسترش $f(x)=\sin(۱/x)$ در $x=۰$ پیوسته باشد؟ اگر می‌توان، $f(۰)$ چه مقداری باید داشته باشد؟ اگر نمی‌توان، چرا؟

۷۷. تابع $y=۱/[x]$ در چه نقاطی ناپیوسته است؟

۷۸. نشان دهید که هرچند جمله‌ای از درجهٔ فرد، دست‌کم یك صفر حقیقی دارد.

۷۹. تابع $f(x)=|x|$ در $x=۰$ پیوسته است. اگر یك عدد مثبت ϵ مفروض باشد، δ باید چقدر کوچك باشد تا از $|x-۰|<\delta$ نتیجه شود $|f(x)-۰|<\epsilon$؟

۸۰. الف) نمودار تابع $y=f(x)$ را که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، رسم کنید

$$f(x)=\begin{cases}x\sin(۱/x) & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰ .\end{cases}$$

(راهنمایی: نمودار f در ناحیه‌ای از صفحه قرار دارد که محدود به خطهای $y=x$ و $y=-x$، و شامل محور x است. شکل ۸۶.۱ را ببینید و نمودار $y=\sin(۱/x)$ را در آن ملاحظه کنید.)
ب) نشان دهید که تابع $y=f(x)$ قسمت (الف) در $x=۰$ پیوسته است. (راهنمایی: ابتدا نشان دهید که به‌ازای هر x، $|x\sin(۱/x)|\leqslant|x|$. سپس به‌این‌سؤال پاسخ دهید: $|x-۰|$ چقدر باید کوچك باشد تا $|x\sin(۱/x)-۰|$ کوچکتر از ϵ باشد؟)

۸۱. فرض کنید f تابعی پیوسته، و $f(c)$ مثبت باشد. نشان دهید که بازه‌ای حول c، مثلاً $c-\delta<x<c+\delta$، وجود دارد که در سراسر آن، $f(x)$ مثبت است. با رسم نمودار، توضیح دهید. (راهنمایی: ϵ را برابر $f(c)/۲$ بگیرید.)

۸۲. ویژگیهای نابرابریها. اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند، می‌گوییم a کوچکتر از b است و می‌نویسیم $a<b$ اگر (و تنها اگر) $b-a$ مثبت باشد. اگر $a<b$، می‌گوییم b بزرگتر از a است ($b>a$). ثابت کنید که نابرابریها ویژگیهای زیر را دارند:
الف) اگر $a<b$، آنگاه به ازای هرعدد حقیقی c،

$$a+c<b+c \text{ و } a-c<b-c .$$

ب) اگر $a<b$ و $c<d$، آنگاه $a+c<b+d$. آیا این‌هم درست است که $a-c<b-d$؟ اگر چنین است، آن را ثابت کنید؛ اگر چنین نیست، مثال ناقضی ارائه دهید.
پ) اگر a و b هردومثبت (یا هردو منفی) باشند و $a<b$، آنگاه $۱/b<۱/a$.
ت) اگر $a<۰<b$، آنگاه $۱/a<۰<۱/b$.
ث) اگر $a<b$ و $c>۰$، آنگاه $ac<bc$.
ج) اگر $a<b$ و $c<۰$، آنگاه $bc<ac$.

۸۳. ویژگیهای قدر مطلق.
الف) ثابت کنید که $|a|<|b|$ اگر وتنها اگر $a^۲<b^۲$.
ب) ثابت کنید که $|a+b|\leqslant|a|+|b|$.
پ) ثابت کنید که $|a-b|\geqslant||a|-|b||$.
ت) با استقرای ریاضی ثابت کنید که

$$|a_۱+a_۲+\cdots+a_n|\leqslant|a_۱|+|a_۲|+\cdots+|a_n| .$$

(در پیوست ۲ موضوع استقرای ریاضی مرور می‌شود.)

ث) با استفاده از نتیجهٔ حاصل از (ت)، ثابت کنید که

$$|a_۱+a_۲+\cdots+a_n| \geqslant |a_۱|-|a_۲|-\cdots-|a_n|.$$

۸۴. یك نتیجهٔ غیر منتظره. فرض‌کنید توابع f و g در سراسر بازهٔ بازی که شامل نقطهٔ $x_۰$ است تعریف می‌شوند، و نیز f در $x_۰$ مشتقپذیر است، و به‌علاوه $f(x_۰)=۰$، و g در $x_۰$ پیوسته است. نشان دهید که حاصلضرب fg در $x_۰$ مشتقپذیر است. از اینجا، مثلاً، ثابت می‌شود که در حالی که $|x|$ در $x=۰$ مشتقپذیر نیست، حاصلضرب $x|x|$ در $x=۰$ مشتقپذیر است. همین‌طور، در حالی که $x\sin(۱/x)$ در $x=۰$ مشتقپذیر نیست (مسألهٔ ۸۰)، حاصلضرب $x^۲\sin(۱/x)$ در $x=۰$ مشتقپذیر است. (راهنمایی: خارج‌قسمت تفاضلها را برای حاصلضرب fg بنویسید و ببینید که حد آن چه باید باشد.)

۸۵. فرمول درونیابی لاگرانژ. فرض‌کنید $(x_۱,y_۱)$، $(x_۲,y_۲)$، ...، (x_n, y_n)، n نقطه در صفحه باشند که هیچ دوتای آنها مختص x یکسانی نداشته باشند. یك چند جمله‌ای $f(x)$ از درجهٔ $(n-۱)$ بیابید که مقدار $y_۱$ را در $x_۱$، $y_۲$ را در $x_۲$، ...، y_n را در x_n اختیار کند؛ یعنی $f(x_i)=y_i(i=۱,۲,\ldots,n)$. (راهنمایی:

$$f(x)=y_۱\phi_۱(x)+y_۲\phi_۲(x)+\cdots+y_n\phi_n(x)$$

که در آن، $\phi_k(x)$ یك چند جمله‌ای است که در x_i $(i\neq k)$ صفر است و $\phi_k(x_k)=۱$.)

۲

مشتق

چشم‌انداز

درفصل ۱ دیدیم که چگونه شیب یك خم به‌عنوان حد شیبهای خطوط قاطع تعریف می‌شود، وچگونه‌این حد، که مشتق نام‌دارد، دانشمندان قرن هفدهم را قادر ساخت تا تعاریف دقیق و کارایی از مفاهیم مماس و آهنگ لحظه‌ای تغییر به‌دست دهند.

با وجود این معلوم شده‌است که کارایی تعریف

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

صرفاً به‌این‌معناست که اگر فرصت‌کافی دراختیار باشد، این‌عبارت را می‌توان محاسبه‌کرد. اما با توجه به مطالعاتی که در زمینهٔ حد کرده‌ایم، درحال حاضر آن‌قدر مطلب دربارهٔ مشتق می‌دانیم که بتوانیم آن را به‌سرعت محاسبه کنیم. هدف اصلی این فصل نیز همین است که شیوهٔ محاسبهٔ سریع مشتق را بیاموزد.

نخست قواعدی به دست می‌آوریم که مشتق ترکیبات جبری (نظیر مجموع، حاصلضرب، خارج قسمت، و توان) توابعی را که مشتقشان را می‌دانیم دراختیارمان بگذارند. این‌قواعد شبیه‌قضایای ترکیب‌حدها دربخش۱.۹ هستند. خواهیدیدکه این‌تشابه‌تصادفی نیست. سپس نشان می‌دهیم که مشتق حاصل ترکیب دوتابع، برابر است با حاصلضرب مشتقات آن دوتابع (قاعدهٔ زنجیری)؛ ونشان خواهیم داد که چگونه می‌توان با استفاده از مشتق، تغییر را (با دیفرانسیل) براورد کرد، و به‌جای توابع پیچیده تابعهای ساده‌تری را قرار دادکه بازهم دقت مورد نظر ما را تأمین‌کنند. سپس برای مواردی‌که فرمول شامل y است و نمی‌توان آن را مستقیماً نسبت به y حل‌کرد، برای محاسبهٔ dy/dx راه ساده‌ای ارائه می‌دهیم، و از آن برای‌محاسبهٔ مشتق یك تابع به‌توان یك عددکسری استفاده می‌کنیم. این‌فصل با معادلات پارامتری (که برای‌توصیف حرکت مناسب‌اند)، و با روش نیوتن، روش شگفت‌آوری که درآن از مشتق برای حل معادلات استفاده می‌شود، پایان می‌پذیرد.

۱.۲ تابعهای چندجمله‌ای و مشتق آنها

وقتی‌که مشتق تابعی را با فرایند Δی فرما یا با فرمول متداولی محاسبه کنیم، می‌گوییم‌که از تابع مشتق گرفته‌ایم. درفصل ۱ از چندجمله‌ایهایی نظیر $y=mx+b$، $y=x^2$، و مشتق گرفتیم و به‌ترتیب $dy/dx=m$، و $dy/dx=2x$ را به‌دست آوردیم. در این بخش روشی سریع برای مشتقگیری از هرچندجمله‌ای دلخواه به‌دست می‌آوریم.

جمله‌ای منفرد به‌صورت cx^n را که درآن c ثابت دلخواه و n عدد صحیح نامنفی‌است، یك **تك‌جمله‌ای** برحسب x می‌نامند. مجموع تعدادی متناهی تك جمله‌ای برحسب x یك **چندجمله‌ای** برحسب x نام‌دارد. روش ما برای‌مشتقگیری‌ازچندجمله‌ایها عبارت است از پیدا کردن فرمولی برای مشتقگیری از تك‌جمله‌ایها، و یافتن قاعده‌ای برای محاسبهٔ مشتق چندجمله‌ای موردنظر با استفاده از مشتقات تك‌جمله‌ایهای موجود درچندجمله‌ای.

تعریف

مشتق

فرض‌کنید $y=f(x)$ تابعی از x باشد. اگرحد

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \qquad (۱ \text{ الف})$$

موجود، و متناهی باشد، این حد را **مشتق** f در x می‌نامیم و می‌گوییم f در x **مشتق‌پذیر** است.

برای صرفه‌جویی در وقت، به‌جای نمو $f(x+\Delta x)-f(x)$ از Δy استفاده می‌کنیم. به‌این ترتیب حد موجود در معادلهٔ (۱ الف) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (۱ \text{ ب})$$

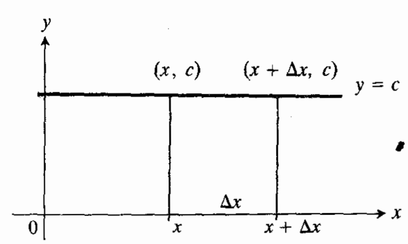
قاعدهٔ ۱

مشتق عدد ثابت، صفر است.

قاعدهٔ ۱ حاکی است که اگر $y=f(x)$ دارای مقدار ثابت c باشد، آنگاه $dy/dx=0$. دلیل درستی این قاعده، محاسبهٔ زیر است

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} 0=0.$$

به‌شکل ۱.۲ رجوع کنید.



۱.۲ شیب نمودار ثابت $y=$، صفر است.

قاعدهٔ ۲

قاعدهٔ توان برای توانهای صحیح و مثبت x

اگر n یك عدد صحیح مثبت باشد، آنگاه

$$\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}. \qquad (۲)$$

روش استفاده از قاعدهٔ توان این است که، از توان اولیه (n) یك را می‌کاهیم و حاصل را در n ضرب می‌کنیم.

مثال ۱

$$\frac{d}{dx}(x)=\frac{d}{dx}(x^1)=1\cdot x^0=1$$

$$\frac{d}{dx}(x^2)=2x^1=2x$$

$$\frac{d}{dx}(x^3)=3x^2$$

$$\frac{d}{dx}(x^4)=4x^3$$

$$\frac{d}{dx}(x^5)=5x^4. \qquad ■$$

اثبات قاعدهٔ ۲ برای اثبات قاعدهٔ ۲، فرض می‌کنیم $y=f(x)=x^n$. آنگاه

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}. \qquad (۳)$$

چون n یك عدد صحیح مثبت است، می‌توانیم عبارت $(x+\Delta x)^n-x^n$ درطرف راست معادلهٔ (۳) را به کمك

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

به ازای $a=x+\Delta x$، $b=x$، و $a-b=\Delta x$ بسط دهیم. از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}\\&=\frac{(\Delta x)[(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}x+\dots+}{\Delta x}\\&\quad\frac{(x+\Delta x)x^{n-2}+x^{n-1}]}{\Delta x} \qquad (۴)\\&=\underbrace{[(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}x+\dots+(x+\Delta x)x^{n-2}+x^{n-1}]}_{\Delta x\to 0 \text{ جمله، هر جمله با حد } x^{n-1} \text{ وقتی } n}.\end{aligned}$$

حال Δx را به صفر میل می‌دهیم و می‌بینیم که

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\&=\underbrace{[(x+0)^{n-1}+(x+0)^{n-2}x+\dots+(x+0)x^{n-2}+x^{n-1}]}_{n \text{ جمله}} \qquad (۵)\\&=\underbrace{[x^{n-1}+x^{n-1}+\dots+x^{n-1}+x^{n-1}]}_{x^{n-1} \text{ بار } n}\\&=nx^{n-1}.\end{aligned}$$

به‌طور خلاصه،

$$\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}.$$

دوقاعدهٔ بعد، درمورد هر تابع مشتقپذیری به‌کارمی‌روند.

قاعدهٔ ۳
قاعدهٔ ضریب (ثابت)

اگر u تابع مشتقپذیری از x، و c عدد ثابتی باشد، آنگاه

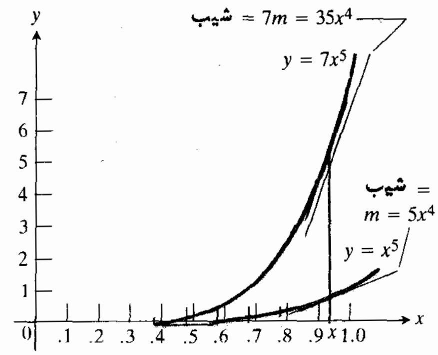
$$\frac{d}{dx}(cu)=c\frac{du}{dx}. \qquad (۶)$$

قاعدهٔ ۳ حاکی است که مشتق حاصلضرب یك عدد در یك تابع برابر است با حاصلضرب آن عدد درمشتق آن تابع.

مثال ۲ مشتق

$$\frac{d}{dx}(7x^5)=7\cdot 5x^4=35x^4$$

حاکی است که اگر نمودار $y=x^5$ را، با ضرب کردن هرمختص y در ۷، در امتداد محور y بالا بکشانیم، مانند آن است که هر ضریب زاویه‌ای را هم در ۷ ضرب کنیم (شکل ۲.۲).



۲.۲ نمودارهای $y=x^5$ و خم بالاکشیده شدهٔ $y=7x^5$. با ضرب کردن مختص y در ۷، شیب در ۷ ضرب می‌شود.

اثبات قاعدهٔ ۳ این‌قاعده مستقیماً از این امر نتیجه می‌شود که مشتق $u=f(x)$ برابر است با

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}cu&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{cf(x+\Delta x)-cf(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}c\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\&=c\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\&=c\frac{du}{dx}.\end{aligned} \qquad (۷)$$

اگر c عددی ثابت و n عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه از ترکیب قاعده‌های ۲ و ۳ نتیجه می‌شود که

$$\frac{d}{dx}(cx^n)=cnx^{n-1}. \qquad (۸)$$

مثال ۳ خط $y=3x+b$ برخم $y=2x^2$ مماس است. مقدار b، و نقطهٔ تماس را بیابید.

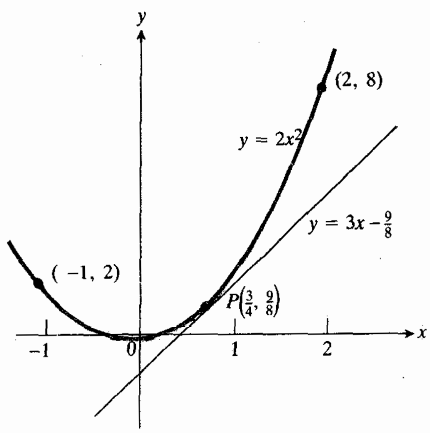
حل: شیب خط $y=3x+b$، عدد ۳ است. شیب خم در هر نقطه‌ای چون $P(x,y)$ برابر است با $dy/dx=4x$. اگر P نقطهٔ تماس هم باشد، شیب خم در P با شیب خط برابراست. پس $4x=3$ یا $x=3/4$. دراین‌صورت مختص y نقطهٔ P باید

$$y=2\left(\frac{3}{4}\right)^2=2\left(\frac{9}{16}\right)=\frac{9}{8}$$

باشد. بنا براین نقطهٔ تماس $(3/4, 9/8)$ است.
از آنجا که خط $y=3x+b$ از $(3/4, 9/8)$ می‌گذرد،

$$\frac{9}{8}=3\left(\frac{3}{4}\right)+b \quad \text{و} \quad b=\frac{9}{8}-\frac{9}{4}=-\frac{9}{8}.$$

شکل ۳.۲ را ببینید.



۳.۲ خط $y=3x-9/8$ در نقطهٔ $P(3/4, 9/8)$ برخم $y=2x^2$ مماس است.

قاعدهٔ ۴
قاعدهٔ مجموع

اگر u و v تابعهای مشتقپذیری از x باشند، آنگاه مجموع آنها، $u+v$، نیز تابع مشتقپذیری از x است و بـرای هر مقداری از x که به‌ازای آن مشتق u و مشتق v هردو وجود داشته باشند، داریم

$$\frac{d}{dx}(u+v)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}. \qquad (۹)$$

به‌همین ترتیب، مشتق مجموع هر تعداد متناهی تابع مشتقپذیر، برابر

است با مجموع مشتقات آن تابعها.

نکته این است که اگر u و v هردو در x مشتق داشته باشند، آنگاه، مجموعشان نیز در x مشتق دارد و مقدار آن برابر است با مجموع مشتقهای u و v در x.

اثبات قاعدهٔ ۴ برای اثبات بخش اول قاعدهٔ ۴ فرض کنید

$$y=u+v$$

مجموع دوتابع مشتقپذیر از x باشد. اگر x به‌اندازهٔ Δx تغییر کند، و درنتیجه u به اندازهٔ Δu و v به اندازهٔ Δv تغییر یابد، تغییرحاصل در y چنین است

$$\Delta y=\Delta u+\Delta v\,.$$

لذا

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

و

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}\,.$$

پس

$$\frac{d(u+v)}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}\,.$$

این معادله حاکی است که مشتق مجموع دوجمله، برابر با مجموع مشتقات آن دوجمله است.

حال از استقرای ریاضی (پیوست ۲) استفاده می‌کنیم و همین مطلب را درمورد مجموع هر تعداد متناهی ازجملات اثبات می‌کنیم. مثلاً، اگر

$$y=u_۱+u_۲+u_۳$$

مجموع سه تابع مشتقپذیر از x باشد، آنگاه می‌توانیم فرض کنیم که

$$u=u_۱+u_۲,\quad v=u_۳$$

و نتیجه‌ای را که در مورد مجموع دوجمله به‌دست آوردیم به‌کار ببریم تا

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(u_۱+u_۲)}{dx}+\frac{du_۳}{dx}$$

به‌دست آید. چون جملهٔ اول خود مجموع دوجمله است، داریم

$$\frac{d(u_۱+u_۲)}{dx}=\frac{du_۱}{dx}+\frac{du_۲}{dx}$$

و لذا

$$\frac{d(u_۱+u_۲+u_۳)}{dx}=\frac{du_۱}{dx}+\frac{du_۲}{dx}+\frac{du_۳}{dx}\,.$$

بالاخره اگر به‌ازای عددی صحیح چون n ثابت شده باشد که

$$\frac{d(u_۱+u_۲+\cdots+u_n)}{dx}=\frac{du_۱}{dx}+\frac{du_۲}{dx}+\cdots+\frac{du_n}{dx}$$

و اگر فرض کنیم

$$y=u+v$$

و داشته باشیم

$$u=u_۱+u_۲+\cdots+u_n,\quad v=u_{n+۱}$$

آنگاه به‌همان روش فوق داریم

$$\frac{d(u_۱+u_۲+\cdots+u_{n+۱})}{dx}=\frac{du_۱}{dx}+\frac{du_۲}{dx}+\cdots+\frac{du_{n+۱}}{dx}$$

از اینجا می‌توانیم نتیجه بگیریم که اگر قاعدهٔ ۴ برای مجموع n جمله درست باشد، آنگاه درمورد مجموع $(n+۱)$ جمله‌هم درست است. چون قاعدهٔ ۴ درمورد مجموع دوجمله اثبات شد، اصل استقرای ریاضی تضمین می‌کند که این قاعده برای مجموع هر تعداد متناهی جمله درست است.

مثال ۴ اگر $y=x^۳+۷x^۲-۵x+۴$، dy/dx را بیابید.

حل: مشتق هریك از جملات را محاسبه، و نتایج حاصل را باهم جمع می‌کنیم

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(x^۳)}{dx}+\frac{d(۷x^۲)}{dx}+\frac{d(-۵x)}{dx}+\frac{d(۴)}{dx}$$

$$=۳x^۲+۱۴x-۵x^۰+۰$$

$$=۳x^۲+۱۴x-۵\,.\quad\blacksquare$$

مشتقهای دوم

مشتق

$$y'=\frac{dy}{dx}$$

مشتق اول y نسبت به x است. مشتق اول خود تابعی از x است و ممکن است مشتقپذیر باشد. اگرچنین باشد، مشتق آن، یعنی

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

را **مشتق دوم** y نسبت به x می‌نامند.

عمل دوبار مشتقگیری متوالی از یك تابع را با

$$\frac{d^۲}{dx^۲}(\cdots) \quad \text{یا} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\cdots\right)$$

نمایش می‌دهند. با این‌نماد، مشتق دوم y نسبت به x را به‌صورت

$$\frac{d^۲y}{dx^۲}$$

می‌نویسند. در حالت کلی، نتیجهٔ n بار مشتقگیری متوالی از تابعی چون $y=f(x)$ را با $y^{(n)}$ ، $f^{(n)}(x)$ ، یا d^ny/dx^n نمایش می‌دهند.

مثال ۵ اگر $y=x^۳-۳x^۲+۲$، آنگاه

$$y'=\frac{dy}{dx}=۳x^۲-۶x, \qquad y'''=\frac{d^۳y}{dx^۳}=۶$$

$$y''=\frac{d^۲y}{dx^۲}=۶x-۶, \qquad y^{(۴)}=\frac{d^۴y}{dx^۴}=۰ .$$

■

سرعت و شتاب

هنگام مطالعهٔ حرکت جسمی‌روی یك‌خط، معمولاً فرض می کنیم که موضع [مکان] جسم، $s=f(t)$ ، تابعی از زمان است که می‌توان از آن دوبـار مشتق گرفت. مشتق اول، ds/dt ، سرعت جسم را به‌صورت تابعی از زمان به‌دست می‌دهد، و مشتق‌دوم، $d^۲s/dt^۲$ ، شتاب جسم است. پس، سرعت آهنگ تغییرمکان، و شتاب آهنگ تغییرسرعت را نشان می‌دهد (شتاب آهنگ‌کم یا زیادشدن سرعت را می‌نمایاند).

مثال ۶ مکان جسم متحرکی از معادلهٔ $s=۱۶۰t-۱۶t^۲$ به‌دست می‌آید‌که درآن s برحسب فوت و t برحسب ثانیه است. سرعت وشتاب جسم را در زمان t بیابید.

حل: سرعت برابر است با

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{d}{dt}(۱۶۰t-۱۶t^۲)$$

$$=۱۶۰-(۲)(۱۶)t$$

$$=۱۶۰-۳۲t \text{ ft/sec} .$$

شتاب برابر است با

$$\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(۱۶۰-۳۲t)$$

$$=۰-۳۲$$

$$=-۳۲ \text{ ft/sec}^۲.$$

■

مثال ۷ سنگ بزرگی با سرعت ۱۶۰ فوت برثانیه (حدود ۱۰۹ مایل درساعت) در امتداد قائم به‌طرف بالا پرتاب می‌شود، و پس از t ثانیه به‌ارتفاع $s=۱۶۰t-۱۶t^۲$ فوت می‌رسد.

الف) سنگ چقدر بالا می‌رود؟

ب) سرعت سنگ را در ارتفاع ۲۵۶ فوتی از سطح زمین در دوحالت بالارفتن و پایین‌آمدن بیابید.

حل:

الف) برای اینکه ببینیم سنگ چقدر بالا می‌رود، مقدار s را وقتی‌که سرعت سنگ صفرمی‌شود محاسبه‌می‌کنیم (شکل ۴۰۲). بنا به‌مثال ۶ ، سرعت چنین است

$$v=\frac{ds}{dt}=۱۶۰-۳۲t \text{ ft/sec} .$$

سرعت وقتی صفر است‌که

$۱۶۰-۳۲t=۰$ یا $t=۵$ ثانیه باشد.

ارتفاع سنگ در $t=۵$ ثانیه برابر است با

$$s_{\max}=s(۵)=۱۶۰(۵)-۱۶(۵)^۲=۸۰۰-۴۰۰$$

$$=۴۰۰ \text{ ft} .$$

ب) بـرای محاسبهٔ سرعت سنگ در ۲۵۶ فـوتی، هنگام بالارفتن و هنگام پایین‌آمدن، دومقدار برای t می‌یابیم به طوری که به‌ازای آنها داشته‌باشیم

$$s(t)=۱۶۰t-۱۶t^۲=۲۵۶ . \qquad (۱۰)$$

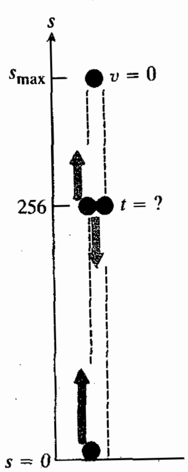
برای حل معادلهٔ (۱۰) چنین می‌نویسیم

$$۱۶t^۲-۱۶۰t+۲۵۶=۰$$

$$۱۶(t^۲-۱۰t+۱۶)=۰$$

$$۱۶(t-۲)(t-۸)=۰$$

$$t=۲ \text{ sec}, \quad t=۸ \text{ sec} .$$



۴۰۲ پرتاب سنگ درمثال ۷.

سنگ پس از ۲ ثانیه، و بار دیگر پس از ۸ ثانیه از آغاز حرکت به ۲۵۶ فوتی زمین می‌رسد. در این دوزمان سرعت سنگ چنین است

$$v(۲)=۱۶۰-۳۲(۲)=۱۶۰-۶۴=۹۶\ \mathrm{ft/sec}$$

$$v(۸)=۱۶۰-۳۲(۸)=۱۶۰-۲۵۶=-۹۶\ \mathrm{ft/sec}\,.$$

سرعت رو به پایین منفی است زیرا وقتی که $t=۸$، s درحال نزول است. ■

مسأله‌ها

درمسأله‌های ۱-۱۰، dy/dx و $d^۲y/dx^۲$ را بیابید. بکوشید بدون نوشتن هیچ چیزی پاسخ دهید.

۱. $y=x$

۲. $y=-x$

۳. $y=x^۲$

۴. $y=-۱۰x^۲$

۵. $y=-x^۲+۳$

۶. $y=\dfrac{x^۳}{۳}-x$

۷. $y=۲x+۱$

۸. $y=x^۲+x+۱$

۹. $y=\dfrac{x^۳}{۳}+\dfrac{x^۲}{۲}+x$

۱۰. $y=۱-x+x^۲-x^۳$

درمسأله‌های ۱۱-۱۵، s جای جسم متحرکی را برحسب فوت نشان می‌دهد، و t برحسب ثانیه است. سرعت و شتاب جسم را بیابید.

۱۱. $s=۱۶t^۲+۳$

۱۲. $s=۸۳۲t-۱۶t^۲$

۱۳. $s=۱۶t^۲-۶۰t$

۱۴. $s=۶+۵۰t-۱۶t^۲$

۱۵. $s=\dfrac{gt^۲}{۲}+v_۰t+s_۰$ (g، $v_۰$، و $s_۰$ ثابت‌اند)

درمسأله‌های ۱۶-۲۵، $y'=dy/dx$ و $y''=d^۲y/dx^۲$ را بیابید.

۱۶. $y=x^۴-۷x^۳+۲x^۲+۱۵$

۱۷. $y=۵x^۳-۳x^۵$

۱۸. $y=۴x^۲-۸x+۱$

۱۹. $y=\dfrac{x^۴}{۴}-\dfrac{x^۳}{۳}+\dfrac{x^۲}{۲}-x+۳$

۲۰. $y=۲x^۴-۴x^۲-۸$

۲۱. $۱۲y=۶x^۴-۱۸x^۲-۱۲x$

۲۲. $y=۳x^۷-۷x^۳+۲۱x^۲$

۲۳. $y=x^۲(x^۳-۱)$

۲۴. $y=(x-۲)(x+۳)$

۲۵. $y=(۳x-۱)(۲x+۵)$

۲۶. مماس برهرخم را درنقطهٔ داده شده بیابید.

الف) $y=x^۳$ در $(۲,۸)$

ب) $y=۲x^۲+۴x-۳$ در $(۱,۳)$

پ) $y=x^۳-۶x^۲+۵x$ در مبدأ

۲۷. کدام یك از اعداد زیر، شیب خط مماس برخم $y=x^۲+۵x$ در $x=۳$ است؟

الف) ۲۴

ب) $-۵/۲$

پ) ۱۱

ت) ۸

۲۸. کدام یك از اعداد زیر، شیب خط $۳x-۲y+۱۲=۰$ است؟

الف) ۶

ب) ۳

پ) ۳/۲

ت) ۲/۳

۲۹. معادلهٔ خط عمود برمماس برخم $y=x^۳-۳x+۱$ درنقطهٔ $(۲,۳)$ را بیابید.

۳۰. خم $y=x^۲+c$ برخط $y=x$ مماس است. c را بیابید. (راهنمایی: دوشیب را باهم برابر قرار دهید.)

۳۱. خطهای مماس برخم $y=x^۳+x$ را در نقاطی که شیب ۴ است بیابید. کوچکترین شیب خم چیست؟ به‌ازای چه مقدار x شیب خم کوچکترین مقدار را دارد؟

۳۲. نقاطی از خم $y=2x^3-3x^2-12x+20$ را به‌دست آورید که درآن نقاط، مماس برخم موازی با محور x باشد.

۳۳. طول و عرض از مبدأ خطی را که برخم $y=x^3$ درنقطهٔ $(-2,-8)$ مماس است بیابید.

۳۴. درنقطهٔ $(-1,0)$ خطی برخم $y=x^3-x$ مماس می‌کنیم. این خط درچه نقطهٔ دیگری خم را قطع می‌کند؟

۳۵. خم $y=ax^2+bx+c$ از نقطهٔ $(1,2)$ می‌گذرد و در مبدأ برخط $y=x$ مماس است. a، b، و c را بیابید.

۳۶. خمهای $y=x^2+ax+b$ و $y=cx-x^2$ درنقطهٔ $(1,0)$ برهم مماس‌اند. مطلوب است تعیین a، b، و c.

۳۷. معادلات سقوط آزاد برسطح مریخ و مشتری به‌ترتیب عبارت‌اند از: $s=1.86t^2$ و $s=11.44t^2$ (s برحسب متر، و t برحسب ثانیه). اگر سنگی از حالت سکون برهریك از این دوسیاره سقوط کند، پس‌از چه‌مدت سرعت آن به ۱۶٫۶ متر برثانیه می‌رسد؟ (توجه: ۱۶٫۶ متر برثانیه حدود ۱۰۰ کیلومتر برساعت است.)

۳۸. سنگی‌که ازسطح ماه با سرعت ۲۴ متر برثانیه (حدود ۸۶ کیلومتر برساعت) در امتداد قائم به‌طرف بالا پرتاب‌شود، پس‌از t ثانیه به‌ارتفاع $s=24t-0.8t^2$ متر می‌رسد.

الف) سرعت و شتاب سنگ را بیابید. (شتاب دراین‌مورد شتاب گرانش ماه است.)

ب) پس از چه مدت سنگ به‌بالاترین نقطهٔ حرکت خود می‌رسد؟

پ) سنگ تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

ت) چقدر طول می‌کشد تا سنگ به‌نصف ماکسیمم ارتفاع خود برسد؟

ث) کلاً سنگ چه مدت در راه است؟

۳۹. سنگ مفروض در مسألهٔ ۳۸ روی کرهٔ زمین و در غیاب هوا در t ثانیه به ارتفاع $s=24t-4.9t^2$ متری می‌رسد. سنگ تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

۴۰. یك فشنگ کالیبر ۴۵ ازسطح ماه به‌بالاشلیك می‌شود و پس‌از t ثانیه به ارتفاع $s=832t-2.6t^2$ فوتی‌می‌رسد. همین‌سنگ روی‌زمین‌ودرغیاب‌هوا، پس‌از t ثانیه‌به‌ارتفاع $s=832t-16t^2$ فوتی می‌رسد. در هرمورد، پس‌از چه‌مدت فشنگ به‌جای اول‌خود باز می‌گردد؟

۴۱. مکان جسمی در زمان t، $s=t^3-4t^2-3t$ است. شتاب جسم را وقتی‌که سرعت صفر باشد، بیابید.

۴۲. برنمودار $y=x^2$ نقطهٔ $P(x,x^2)$ را درنظربگیرید. برای رسم مماس برنمودار در P، نقطهٔ $T(x/2,0)$ برمحور x را مشخص، و خط ماربر T و P را رسم کنید. نشان دهید این عمل صحیح است.

۴۳. مماس برخم $y=x^n$ در $P(x_1,y_1)$ محور x را در $T(t,0)$ قطع می‌کند. t را برحسب x_1 و n بیابید. سپس نشان دهیدکه چگونه می‌توان این‌نتیجه را به‌کار برد و درهرنقطهٔ دلخواه مماس برخم را رسم‌کرد.

TOOLKIT PROGRAMS
Derivative Grapher

۲.۲ حاصلضرب، توان، و خارج‌قسمت

در بخش ۹.۱ هنگام بحث دربارهٔ چگونگی‌محاسبهٔ حد، ابتدا چند حد را مستقیماً براساس تعریف به‌دست‌آوردیم و سپس با استفاده ازقضایای ترکیب‌حدها، سایرحدهارا محاسبه‌کردیم. برای‌محاسبهٔ مشتق نیز روش مشابهی درپیش می‌گیریم. ابتدا چندمشتق را مستقیماً براساس تعریف به‌دست می‌آوریم، و سپس برای محاسبهٔ سایر مشتقها از قضایای ترکیب استفاده می‌کنیم. دربخش ۱.۲ قواعدی برای محاسبهٔ مشتقهای مضارب ثابت، و مجموع تابعهای مشتق‌پذیر به دست آوردیم. در این بخش فرمولهایی برای محاسبهٔ مشتق حاصلضرب، توانهای صحیح، و خارج قسمت توابع مشتق‌پذیر به‌دست می‌آوریم.

حاصلضربها

قاعدهٔ ۵

قاعدهٔ حاصلضرب

حاصلضرب دوتابع مشتق‌پذیر u و v، مشتق‌پذیر است و داریم

$$\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}. \qquad (1)$$

نظیر قاعدهٔ مجموع مذکور دربخش ۱.۲، قاعدهٔ حاصلضرب درمعادلهٔ (۱) صرفاً برای مقادیری از x برقرار است‌که درآنها مشتق u و مشتق v هردو وجود داشته باشند. این قاعده حاکی است که به‌ازای چنین xهایی مشتق حاصلضرب uv برابر است با u ضربدر مشتق v، به‌علاوهٔ v ضربدر مشتق u.

اثبات قاعدهٔ ۵ برای‌اثبات قاعدهٔ ۵، فرض‌کنید $y=uv$ که درآن u و v توابع مشتق‌پذیری از x هستند. نیز فرض‌کنید Δx نموی از x باشد، و Δu و Δv تغییرهای متناظر u و v را نشان دهند. تغییرحاصل در y عبارت است از

$$\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv$$
$$=uv+u\Delta v+v\Delta u+\Delta u\Delta v-uv \qquad (۲)$$
$$=u\Delta v+v\Delta u+\Delta u\Delta v$$

(شکل ۵.۲ را ببینید). پس

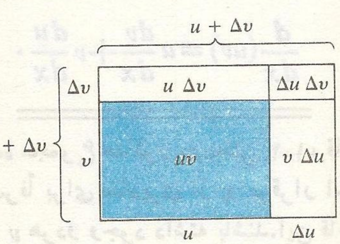
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=u\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\frac{\Delta u}{\Delta x}+\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

وقتی Δx به‌صفر میل کند، Δu نیز به‌صفر میل می کند زیرا

$$\lim \Delta u=\lim\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta x\right)=\lim\frac{\Delta u}{\Delta x}\lim \Delta x$$
$$=\frac{du}{dx}\cdot ۰=۰.$$

بنابراین

$$\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\frac{\Delta u}{\Delta x}+\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$$
$$=\lim u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim v\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$=\lim u\lim\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim v\lim\frac{\Delta u}{\Delta x}$$
$$+\lim\Delta u\lim\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}+۰\cdot\frac{dv}{dx}.$$



۵.۲ مساحت مستطیل سایه‌دار، uv است. وقتی u و v نموهایی برابر با Δu و Δv داشته باشند (در اینجا آنها را مثبت اختیار کرده‌ایم)، حاصلضرب $y=uv$ به‌اندازهٔ

$$\Delta y=u\Delta v+v\Delta u+\Delta u\Delta v$$

تغییر می کند.

در نتیجه

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}\cdot$$

که از آن معادلهٔ (۱) نتیجه می‌شود.

مثال ۱ مشتق $y=(x^۲+۱)(x^۳+۳)$ را بیابید.

حل: از قاعدهٔ حاصلضرب با ضوابط

$$u=x^۲+۱,\quad v=x^۳+۳$$

می بینیم که

$$\frac{d}{dx}[(x^۲+۱)(x^۳+۳)]$$
$$=(x^۲+۱)(۳x^۲)+(۲x)(x^۳+۳)$$
$$=۳x^۴+۳x^۲+۲x^۴+۶x$$
$$=۵x^۴+۳x^۲+۶x. \qquad ■$$

این مثال خاص را می‌توان به‌روش دیگری (که شاید بهترهم باشد) نیز حل کرد. ابتدا عاملهای عبارت اصلی را درهم ضرب می کنیم و سپس از چندجمله‌ای حاصل‌مشتق می گیریم. برای امتحان این‌کار را انجام می‌دهیم. از

$$y=(x^۲+۱)(x^۳+۳)=x^۵+x^۳+۳x^۲+۳$$

داریم

$$\frac{dy}{dx}=۵x^۴+۳x^۲+۶x.$$

و این همان نتیجهٔ قبلی است.

اما مثال‌زیر نشان می‌دهد که گاه مجبوریم از قاعده حاصلضرب استفاده کنیم.

مثال ۲ فرض کنید $y=uv$ حاصلضرب توابع u و v باشد، و فرض کنید که $u(۲)=۳$، $u'(۲)=-۴$، $v(۲)=۱$، و $v'(۲)=۲$. $y'(۲)$ را بیابید.

حل: از قاعدهٔ حاصلضرب به‌شکل

$$y'=(uv)'=uv'+vu'$$

داریم

$$y'(۲)=u(۲)v'(۲)+v(۲)u'(۲)$$
$$=(۳)(۲)+(۱)(-۴)=۶-۴=۲. \qquad ■$$

توجه کنید که مشتق حاصلضرب، حاصلضرب مشتقات نیست. بلکه مجموع دوجملهٔ $u(dv/dx)$ و $v(du/dx)$ است. در جملهٔ

اول u را تغییر نمی‌دهیم و مشتق v را محاسبه می‌کنیم، و درجملهٔ دوم، از u مشتق‌می‌گیریم و v را تغییر نمی‌دهیم. با استقرای ریاضی می‌توان این فرمول را تعمیم داد، و دریافت که مشتق حاصلضرب تعدادی متناهی تابع مشتقپذیر چون

$$y=u_1u_2\cdots u_n$$

چنین است

$$\frac{d}{dx}(u_1u_2\cdots u_n) \tag{۳}$$
$$=\frac{du_1}{dx}\cdot u_2\cdots u_n+u_1\frac{du_2}{dx}\cdots u_n$$
$$+\cdots+u_1u_2\cdots u_{n-1}\frac{du_n}{dx}\cdot$$

که در آن، طرف راست معادله مجموع n جمله است که هریك، از ضرب‌کردن مشتق یکی از عاملها در $(n-1)$ عامل دیگر به دست می‌آید.

توانهای صحیح مثبت

قاعدهٔ ۶

توانهای صحیح مثبت يك تابع مشتقپذیر

اگر u تابع مشتقپذیری از x، و n عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه u^n مشتقپذیر است و

$$\frac{d}{dx}(u^n)=nu^{n-1}\frac{du}{dx}\cdot \tag{۴}$$

اثبات قاعدهٔ ۶ برای $n=1$، معادلهٔ (۴) به‌صورت

$$\frac{d}{dx}(u)=u^0\frac{du}{dx}=\frac{du}{dx} \tag{۵}$$

در می‌آید که مسلماً اگر $u\neq 0$، درست است. اگر $u=0$، 0^0 به‌دست می‌آید که عبارت مبهمی است، ولی در اینجا برای‌سازگاری آن را ۱ می‌گیریم.

برای $n=2$ قاعدهٔ حاصلضرب‌را درمورد تابع $y=u\cdot u$ به‌کار می‌بریم و

$$\frac{d}{dx}(u^2)=\frac{d}{dx}(u\cdot u)=u\frac{du}{dx}+u\frac{du}{dx}=2u\frac{du}{dx} \tag{۶}$$

را به‌دست می‌آوریم.

حال‌که ثابت شد قاعدهٔ توان‌برای $n=2$ برقرار است، از استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم وآن را برای تمام مقادیرصحیح و مثبت n اثبات می‌کنیم.

فرض‌کنید که این قاعده برای عدد صحیح و مثبتی چون k برقرار است و لذا داریم

$$\frac{d}{dx}(u^k)=ku^{k-1}\frac{du}{dx}\cdot \tag{۷}$$

حال نشان می‌دهیم که این‌قاعده برای عدد صحیح بعدی، $k+1$، هم برقرار است. فرض می‌کنیم $y=u^{k+1}$ و y را به‌صورت حاصلضرب

$$y=u\cdot u^k$$

می‌نویسیم. حال‌قاعدهٔ حاصلضرب‌را باضابطهٔ $v=u^k$ به‌کارمی‌بریم و مشتق y را محاسبه می‌کنیم

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(u\cdot u^k)=u\frac{d}{dx}(u^k)+u^k\frac{du}{dx}$$

$$=u\left(ku^{k-1}\frac{du}{dx}\right)+u^k\frac{du}{dx}\quad \text{(بنا به‌معادلهٔ ۷)} \tag{۸}$$

$$=ku^k\frac{du}{dx}+u^k\frac{du}{dx}=(k+1)u^k\frac{du}{dx}\cdot$$

از اینجا می‌توانیم نتیجه بگیریم که اگر قاعدهٔ ۶ برای‌نمای $n=k$ برقرار باشد، برای $n=k+1$ هم برقرار است. چون قاعدهٔ ۶ برای $n=1$ و $n=2$ ثابت‌شده، اصل‌استقرای‌ریاضی به‌ما اطمینان می‌دهد که این قاعده برای هر عدد صحیح و مثبت n برقرار است.

توجه‌کنید که قاعدهٔ ۲

$$\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1} \tag{۹}$$

حالت خاصی از قاعدهٔ توان

$$\frac{d}{dx}(u^n)=nu^{n-1}\frac{du}{dx} \tag{۱۰}$$

است‌که با فرض $u=x$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}\frac{dx}{dx}=nx^{n-1}\cdot 1=nx^{n-1}. \tag{۱۱}$$

چون $dx/dx=1$، dx/dx را به عنوان بخشی از معادلهٔ (۹) ننوشتیم. برای اینکه ببینید چرا du/dx یکی از عاملهای موجود درمعادلهٔ (۱۰) است، ملاحظه‌کنید که هنگام استفاده از قاعدهٔ حاصلضرب در معادلات (۶) و (۸) این عامل چگونه ظاهرمی‌شود.

مثال ۳ مشتق تابع زیر را بیابید

$$y=(x^۲-۳x+۱)^۵.$$

حل: قاعدهٔ توان برای توان پنجم یك تابع حاکی‌است‌که

$$\frac{d}{dx}u^۵=۵u^۴\frac{du}{dx}.$$

با $u=x^۲-۳x+۱$، داریم

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x^۲-۳x+۱)^۵$$

$$=۵(x^۲-۳x+۱)^۴\cdot\frac{d}{dx}(x^۲-۳x+۱)$$

$$=۵(x^۲-۳x+۱)^۴\cdot(۲x-۳)$$

$$=۵(۲x-۳)(x^۲-۳x+۱)^۴. \quad ■$$

هشدار: درمعادلهٔ (۴) جمله du/dx را فراموش نکنید؛ بدون آن مشتقگیریِ صحیح نیست. مثلا درمثال ۳، مشتقگیری بدون عامل

$$\frac{d}{dx}(x^۲-۳x+۱)=(۲x-۳)$$

صحیح نیست.

مثال ۴ اگر $y=(x^۲+۱)^۳(x-۱)^۲$، dy/dx را بیابید.

حل: البته در اینجا می‌توانیم همهٔ عوامل را بسط دهیم و y را به صورت یك چندجمله‌ای برحسب x بنویسیم، ولی این‌کار لازم نیست. به‌جای‌آن، ابتدا از قاعدهٔ حاصلضرب، با ضوابط $u=(x^۲+۱)^۳$، و $v=(x-۱)^۲$، استفاده می‌کنیم

$$\frac{dy}{dx}=(x^۲+۱)^۳\frac{d}{dx}(x-۱)^۲+(x-۱)^۲\frac{d}{dx}(x^۲+۱)^۳.$$

سپس با قاعدهٔ توان بقیهٔ مشتقها را به‌دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dx}(x-۱)^۲=۲(x-۱)\frac{d}{dx}(x-۱)$$

$$=۲(x-۱)(۱)$$

$$=۲(x-۱)$$

$$\frac{d}{dx}(x^۲+۱)^۳=۳(x^۲+۱)^۲\frac{d}{dx}(x^۲+۱)$$

$$=۳(x^۲+۱)^۲(۲x)$$

$$=۶x(x^۲+۱)^۲.$$

حال این مشتقها را درمعادلهٔ مربوط به dy/dx قرارمی‌دهیم

$$\frac{dy}{dx}=(x^۲+۱)^۳۲(x-۱)+(x-۱)^۲۶x(x^۲+۱)^۲$$

$$=۲(x^۲+۱)^۲(x-۱)[(x^۲+۱)+۳x(x-۱)]$$

$$=۲(x^۲+۱)^۲(x-۱)(۴x^۲-۳x+۱). \quad ■$$

خارج‌قسمت

نسبت یا خارج قسمت (u/v) دوچند جمله‌ای برحسب x، غالباً یك چندجمله‌ای نیست. چنین نسبتی را یك **تابع گویا** از x می‌نامند. توابع گویا نقش‌مهمی درمحاسبات‌دارند، زیرا پیچیده‌ترین توابعی هستند که کامپیوترهای رقمی می‌توانند آنها را مستقیماً محاسبه کنند. قاعدهٔ مشتقگیری بعدی را نه تنها درمورد توابع گویا بلکه درمورد خارج‌قسمت هر دو تابع‌مشتقپذیر می‌توان به‌کاربرد.

قاعدهٔ ۷

قاعدهٔ خارج‌قسمت

خارج‌قسمت $y=u/v$ ازدوتابع مشتقپذیر درنقطه‌ای‌که $v\neq ۰$، مشتقپذیر است و داریم

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\dfrac{du}{dx}-u\dfrac{dv}{dx}}{v^۲}. \qquad (۱۲)$$

مانند قواعد مشتقگیری‌مجموع وحاصلضرب توابع‌مشتقپذیر، معادلهٔ (۱۲) در قاعدهٔ خارج‌قسمت، صرفاً به‌ازای آن مقادیر x برقرار است‌که درآنها هم u و هم v مشتقپذیر باشند.

اثبات قاعدهٔ ۷ برای اثبات معادلهٔ (۱۲) نقطه‌ای چون x را درنظر می‌گیریم که در آن $v\neq ۰$، و u و v مشتقپذیرباشند. به x نموی چون Δx می‌دهیم و فرض می‌کنیم نموهای متناظر برای y، u، و v به‌ترتیب Δy، Δu، و Δv باشند. دراین‌صورت وقتی $\Delta x\to ۰$،

$$\lim(v+\Delta v)=\lim v+\lim\Delta v$$

حال آنکه

$$\lim\Delta v=\lim\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot\Delta x=\frac{dv}{dx}\cdot ۰=۰.$$

پس، وقتی که Δx نزدیك صفراست، $v+\Delta v$ نزدیك مقدار v است. دراین‌حالت خاص‌چون درx، $v\neq ۰$، نتیجه می‌گیریم که‌وقتی Δx نزدیك صفراست، فرضاً وقتی $۰<|\Delta x|<h$، $v+\Delta v\neq ۰$. فرض کنیم Δx دارای‌این‌محدودیت باشد، آنگاه $v+\Delta v\neq ۰$، و

$$y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}.$$

از این رابطه $y=u/v$ را کم می‌کنیم و چنین به‌دست می‌آوریم

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{(vu+v\,\Delta u)-(uv+u\,\Delta v)}{v(v+\Delta v)}$$

$$=\frac{v\,\Delta u-u\,\Delta v}{v(v+\Delta v)}.$$

حال نتیجه را بر Δx تقسیم می‌کنیم؛ داریم

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}.$$

وقتی Δx به‌صفر میل کند

$$\lim\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{du}{dx},\qquad \lim\frac{\Delta v}{\Delta x}=\frac{dv}{dx}$$

و

$$\lim v(v+\Delta v)=\lim v\lim(v+\Delta v)=v^2\neq 0.$$

بنابراین

$$\frac{dy}{dx}=\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\frac{\lim\left(v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\right)}{\lim v(v+\Delta v)}=\frac{v\dfrac{du}{dx}-u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

که همان معادلهٔ (۱۲) است.

مثال ۵ مطلوب است مشتق

$$y=\frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

حل: قاعدهٔ خارج‌قسمت (معادلهٔ ۱۲) را به‌کار می‌بریم

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^2-1)\cdot 2x-(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{-4x}{(x^2-1)^2}.\ \blacksquare$$

توانهای صحیح منفی

اگر به‌جای u^{-m} بنویسیم $1/u^m$، می‌توانیم قاعدهٔ خارج‌قسمت را به‌کار بریم و نشان دهیم که قاعدهٔ مشتقگیری از توانهای صحیح مثبت برای توانهای صحیح منفی هم برقرار است.

قاعدهٔ ۸

توانهای صحیح منفی یك تابع مشتقپذیر

در نقطه‌ای که u مشتقپذیر باشد، و صفر نباشد، مشتق

$$y=u^n$$

وقتی که n یك عدد صحیح منفی باشد از

$$\frac{d(u^n)}{dx}=nu^{n-1}\frac{du}{dx} \tag{13}$$

به‌دست می‌آید.

اثبات قاعدهٔ ۸ برای اثبات قاعدهٔ ۸، معادلات (۱۲) و (۴) را باهم تلفیق می‌کنیم. فرض می‌کنیم

$$y=u^{-m}=\frac{1}{u^m}$$

که در آن $-m$ یك عدد صحیح منفی و لذا m یك عدد صحیح مثبت است. آنگاه با استفاده از معادلهٔ (۱۲) که برای مشتق خارج‌قسمت است، در هر نقطه‌ای که u مشتقپذیر باشد ولی صفر نباشد، داریم

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(\frac{1}{u^m}\right)}{dx}=\frac{u^m\dfrac{d(1)}{dx}-1\dfrac{d(u^m)}{dx}}{(u^m)^2}. \tag{14}$$

حال، با فرمولهایی که قبلاً اثبات کرده‌ایم می‌توانیم مشتقهای مختلف موجود درسمت راست معادلهٔ (۱۴) را محاسبه کنیم

$$\frac{d(1)}{dx}=0$$

زیرا ۱ ثابت است، و

$$\frac{d(u^m)}{dx}=mu^{m-1}\frac{du}{dx}$$

زیرا m یك عدد صحیح مثبت است. پس

$$\frac{dy}{dx}=\frac{u^m\cdot 0-1\cdot mu^{m-1}\dfrac{du}{dx}}{u^{2m}}=-mu^{-m-1}\frac{du}{dx}.$$

اگر به‌جای $-m$ مقدار معادلش را که n است قرار دهیم، این معادله همان معادلهٔ (۱۳) می‌شود.

مثال ۶ مطلوب است مشتق

$$y=x^2+\frac{1}{x^2}.$$

حل: می‌نویسیم $y=x^2+x^{-2}$. آنگاه

$$\frac{dy}{dx}=2x^{2-1}\frac{dx}{dx}+(-2)x^{-2-1}\frac{dx}{dx}=2x-2x^{-3}.$$ ■

توصیه

درموقع مشتقگیری غالباً بهتر است که

$$\frac{1}{[u(x)]^n}$$

را به عنوان تابعی که به توانی می‌رسد تلقی‌کنیم و نه به عنوان خارج‌قسمت.

مثال ۷ مناسبترین راه محاسبهٔ مشتق

$$y=\frac{1}{(x^2-1)^5}$$

این است که بنویسیم $y=(x^2-1)^{-5}$ و

$$y'=-5(x^2-1)^{-6}\cdot\frac{d}{dx}(x^2-1)$$

$$=\frac{-5}{(x^2-1)^6}\cdot(2x)=\frac{-10x}{(x^2-1)^6}$$

را به‌دست آوریم. اگر با

$$y=\frac{1}{(x^2-1)^5}$$

به‌صورت یك خارج‌قسمت، با فرض $u=1$ و $v=(x^2-1)^5$، رفتار شود، نخستین گام محاسبهٔ y' عبارت است از

$$y'=\frac{(x^2-1)^5\cdot\frac{d}{dx}(1)-1\cdot\frac{d}{dx}(x^2-1)^5}{[(x^2-1)^5]^2}$$

که صحیح، ولی پرزحمت است. ■

همان‌گونه که درمثال ۷ دیده‌می‌شود، درمشتقگیری، انتخاب قاعدهٔ مناسب، از لحاظ میزان عملیاتی که باید انجام‌شود، مهم‌است. به‌دومثال دیگرهم توجه‌کنید.

مثال ۸ اگر

$$y=\left(\frac{2x-1}{x+7}\right)^3$$

ساده‌ترین راه محاسبهٔ y' این است که نخست از قاعدهٔ توان، و پس‌از آن از قاعدهٔ خارج‌قسمت استفاده‌کنید. بهتراست محاسبه‌را با

$$y'=3\cdot\left(\frac{2x-1}{x+7}\right)^2\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{2x-1}{x+7}\right)$$

آغاز کنید. اگر با

$$y=(2x-1)^3(x+7)^{-3}$$

$$y'=(2x-1)^3\cdot\frac{d}{dx}(x+7)^{-3}$$

$$+(x+7)^{-3}\cdot\frac{d}{dx}(2x-1)^3$$

شروع‌کنید عملیات بیشتری باید انجام بدهید. ■

مثال ۹ برای محاسبهٔ مشتق

$$y=\frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4}$$

ازقاعدهٔ خارج‌قسمت استفاده نکنید. به‌جای آن، صورت را بسط دهید و حاصل را بر x^4 تقسیم‌کنید

$$y=\frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4}=\frac{x^3-3x^2+2x}{x^4}$$

$$=x^{-1}-3x^{-2}+2x^{-3}.$$

حال قواعد مجموع و توان را به‌کارگیرید:

$$\frac{dy}{dx}=-x^{-2}-3(-2)x^{-3}+2(-3)x^{-4}$$

$$=-\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x^3}-\frac{6}{x^4}.$$ ■

مسأله‌ها

درمسأله‌های ۱-۲۴، dy/dx را بیابید.

۱. $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-1$

۲. $y=(x-1)^3(x+2)^4$

۳. $y=(x^2+1)^5$

۴. $y=(x^3-3x)^4$

۵. $y=(x+1)^2(x^2+1)^{-3}$

۶. $y=\frac{2x+1}{x^2-1}$

۷. $y=\frac{۲x+۵}{۳x-۲}$

۸. $y=\left(\frac{x+۱}{x-۱}\right)^۲$

۹. $y=(۱-x)(۱+x^۲)^{-۱}$

۱۰. $y=(x+۱)^۲(x^۲+۲x)^{-۲}$

۱۱. $y=\frac{۵}{(۲x-۳)^۴}$

۱۲. $y=(x-۱)^۳(x+۲)$

۱۳. $y=(۵-x)(۴-۲x)$

۱۴. $y=[(۵-x)(۴-۲x)]^۲$

۱۵. $y=(۲x-۱)^۳(x+۷)^{-۳}$

۱۶. $y=\frac{x^۳+۷}{x}$

۱۷. $y=(۲x^۳-۳x^۲+۶x)^{-۵}$

۱۸. $y=\frac{x^۲}{(x-۱)^۲}$

۱۹. $y=\frac{(x-۱)^۲}{x^۲}$

۲۰. $y=\frac{-۱}{۱۵(۵x-۱)^۳}$

۲۱. $y=\frac{۱۲}{x}-\frac{۴}{x^۳}+\frac{۳}{x^۴}$

۲۲. $y=\frac{(x-۱)(x^۲+x+۱)}{x^۳}$

۲۳. $y=\frac{(x^۲-۱)}{x^۲+x-۲}$

۲۴. $y=\frac{(x^۲+x)(x^۲-x+۱)}{x^۴}$

درمسأله‌های ۲۵–۳۲، ds/dt را بیابید.

۲۵. $s=\frac{t}{t^۲+۱}$

۲۶. $s=(۲t+۳)^۳$

۲۷. $s=(t^۲-t)^{-۲}$

۲۸. $s=t^۲(t+۱)^{-۱}$

۲۹. $s=\frac{۲t}{۳t^۲+۱}$

۳۰. $s=(t+t^{-۱})^۲$

۳۱. $s=(t^۲+۳t)^۳$

۳۲. $s=\frac{(t^۲-۷t)(۵-۲t^۳+t^۴)}{t^۳}$

۳۳. دوتابع مفروض u و v از x در $x=۰$ مشتقپذیرند و داریم

$$u(۰)=۵,\quad u'(۰)=-۳,\quad v(۰)=-۱,\quad v'(۰)=۲.$$

مقدار مشتقات زیر را در $x=۰$ بیابید

الف) $\frac{d}{dx}(uv)$

ب) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)$

پ) $\frac{d}{dx}\left(\frac{v}{u}\right)$

ت) $\frac{d}{dx}(۷v-۲u)$

ث) $\frac{d}{dx}(u^۲)$

ج) $\frac{d}{dx}(۵v^{-۳})$

۳۴. معادله‌ای برای‌مماس برخم $y=x/(x^۲+۱)$ در مبدأ بیابید.

۳۵. معادله‌ای بـرای مماس برخم $y=x+(۱/x)$ در $x=۲$ بیابید.

۳۶. مطلوب است مشتقات اول و دوم

$$f(x)=(x^۲+۳x+۱)^۳.$$

۳۷. اگر $y=(۳-۲x)^{-۱}$، $d^۲y/dx^۲$ را بیابید.

۳۸. از $x=۵y/(y+۱)$ نسبت به y مشتق بگیرید.

بـرای مشاهدهٔ عملکرد معادلهٔ (۳)، مشتقات تـوابع مفروض در مسأله‌های ۳۹–۴۲ را از دو راه حساب کنید: (الف) بـا کاربرد مستقیم‌معادلهٔ (۳)، و (ب) با ضرب کردن عاملها و به‌دست‌آوردن یك چندجمله‌ای و سپس گـرفتن مشتق. در این مسأله‌هـا راه (ب) معمولا سریعتر به‌نتیجه می‌رسد، اما همواره چنین نیست.

۳۹. $y=x(x-۱)(x+۱)$

۴۰. $y=(x-1)(x+1)(x^2+1)$

۴۱. $y=(1-x)(x+1)(3-x^2)$

۴۲. $y=x^2(x-1)(x^2+x+1)$

۴۳. تولید صنعتی. اقتصاددانان اغلب از عبارت «آهنگ رشد» به‌مفهوم نسبی، و نه به‌مفهوم مطلق آن استفاده می‌کنند. به‌عنوان مثال، فرض کنید در کارخانهٔ مفروضی، تعداد کارگران در زمان t به‌صورت $u=f(t)$ باشد. (هرچند این تابع یك تابع پله‌ای با مقادیر صحیح است، فرض می‌شود که مشتقپذیر باشد. یك تابع پله‌ای را با یك خم هموار تقریب می‌زنیم.)

فرض کنید $v=g(t)$ متوسط تولید هر کارگر در زمان t باشد. بنابراین کل تولید $y=uv$ است. اگر نیروی کار با آهنگ ۴ درصد درسال رشد کند $(du/dt=0.04u)$ و میزان تولید هر کارگر با آهنگ ۵ درصد درسال افزایش یابد $(dv/dt=0.05v)$، آهنگ رشد کل تولید، y، را بیابید.

۴۴. فرض کنید نیروی کار درمسألهٔ ۴۳ با آهنگ ۲ درصد درسال تقلیل یابد، حال آنکه میزان تولید هر کارگر با آهنگ ۳ درصد درسال افزوده شود. آیا کل تولید زیاد می‌شود یا کم؟ با چه آهنگی؟

۴۵. آهنگ واکنش شیمیایی. وقتی دوجسم شیمیایی A و B باهم ترکیب می‌شوند، و جسمی به‌مقدار p تشکیل می‌شود، آهنگ dp/dt تشکیل جسم را **آهنگ واکنش** می‌نامند. در بسیاری از واکنشها، یك ملکول از جسم تشکیل شده، از یك ملکول A و یك ملکول B به‌دست می‌آید. فرض کنید که جرم مولی اولیهٔ A و B برابر، و مساوی a باشد. در این شرایط، مقدار جسم به‌دست‌آمده درهر لحظهٔ tی پس از ترکیب دوجسم از تابع

$$p(t)=\frac{a^2kt}{(akt+1)}$$

به‌دست می‌آید. در این معادله k میل ترکیب دوجسم شیمیایی را نمایش می‌دهد، و یك ثابت مثبت تناسب درقانون شیمیایی کنش جرم است.

الف) dp/dt را بیابید.

ب) زمانی را بیابید که آهنگ واکنش حداکثر مقدار را دارد؛ دراین زمان مقدار dp/dt را هم بیابید.

۴۶. فرض کنید c یك مقدار ثابت، و u تابع مشتقپذیری از x باشد. نشان دهید قاعدهٔ ۳ یعنی

$$\frac{d}{dx}(cu)=c\frac{du}{dx}$$

حالت خاصی است از قاعدهٔ حاصلضرب.

۴۷. نشان دهید قاعدهٔ ۶ یعنی

$$\frac{d}{dx}(u^n)=nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

حالت خاصی است از قاعدهٔ حاصلضرب متناهی درمعادلهٔ (۳).

TOOLKIT PROGRAMS

Derivative Grapher

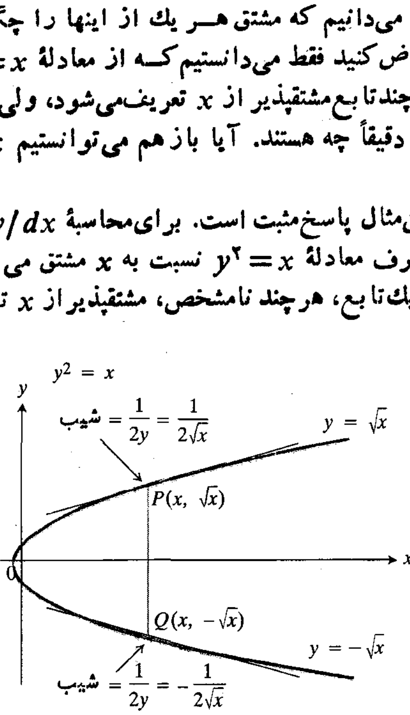
۳.۲ مشتقگیری ضمنی و توانهای کسری

وقتی معادله‌ای برحسب x و y، y را به‌عنوان تابعی مشتقپذیر از x تعریف کند، حتی درمواردی که نتوان y را از معادله به‌دست آورد، اغلب می‌توان با استفاده ازقواعد مشتقگیری dy/dx را محاسبه کرد. دراین بخش، نحوهٔ این عمل را نشان می‌دهیم و به‌اختصار به ایدهٔ نهفته در پس این روش اشاره می‌کنیم. سپس از این روش استفاده می‌کنیم و نشان می‌دهیم که قاعدهٔ توان علاوه برنماهای صحیح برای نماهای کسری هم برقرار است.

مثال ۱ اگر $y^2=x$، dy/dx را بیابید.

حل: معادلهٔ $y^2=x$ دوتابع مشتقپذیر از x تعریف می‌کند؛ یکی $y=\sqrt{x}$ و دیگری $y=-\sqrt{x}$ (شکل ۶.۲). بنابر مثال ۵ بخش ۷.۱، می‌دانیم که مشتق هر یك از اینها را چگونه محاسبه کنیم. اما فرض کنید فقط می‌دانستیم که از معادلهٔ $y^2=x$، y به عنوان یك یا چند تابع مشتقپذیر از x تعریف می‌شود، ولی نمی‌دانستیم این توابع دقیقاً چه هستند. آیا باز هم می‌توانستیم dy/dx را بیابیم؟

دراین مثال پاسخ مثبت است. برای محاسبهٔ dy/dx، به‌طور ساده از دوطرف معادلهٔ $x=y^2$ نسبت به x مشتق می‌گیریم، و y را به‌عنوان یك تابع، هرچند نامشخص، مشتقپذیر از x تلقی می‌کنیم.



۶.۲ شیب سهمی $x=y^2$ درنقاطی از خم که مستقیماً بالا و پایین x هستند، از فرمول $m=1/(2y)$ به‌دست می‌آید.

با انجام‌دادن این عمل داریم

$$y^2=x$$

$$2y\frac{dy}{dx}=1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}\,.$$

این نتیجه، با نتیجهٔ حاصل از حل $x=y^2$ نسبت به y و سپس محاسبهٔ مشتق چگونه مقایسه می‌شود؟

درمورد $y=-\sqrt{x}$	درمورد $y=\sqrt{x}$
$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$=\frac{1}{2(-\sqrt{x})}=\frac{1}{2y}$	$=\frac{1}{2y}$

در هر دومورد، مشتق از فرمولی‌که بدون حل معادله نسبت به y به‌دست می‌آید حاصل می‌شود، و لذا دو روش یکی هستند. ■

مثال ۲ اگر $x^5+4xy^3-y^5=2$، dy/dx را بیابید.

حل: فرض می‌کنیم که این معادله y را به‌صورت یك یا چندتابع مشتق‌پذیر از x تعریف کند. حال y^3 و y^5 را به‌عنوان توانهای یك‌تابع مشتق‌پذیر از x، و $4xy^3$ را به‌عنوان حاصلضرب یك ثابت در x . y^3 تلقی می‌کنیم، و از دوطرف معادله نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$\frac{d}{dx}(x^5)+\frac{d}{dx}(4xy^3)-\frac{d}{dx}(y^5)=\frac{d}{dx}(2)$$

$$5x^4+4\left(x\frac{d(y^3)}{dx}+y^3\frac{dx}{dx}\right)-5y^4\frac{dy}{dx}=0$$

$$5x^4+4\left(3xy^2\frac{dy}{dx}+y^3\right)-5y^4\frac{dy}{dx}=0$$

$$(12xy^2-5y^4)\frac{dy}{dx}=-(5x^4+4y^3)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5x^4+4y^3}{5y^4-12xy^2}$$

■

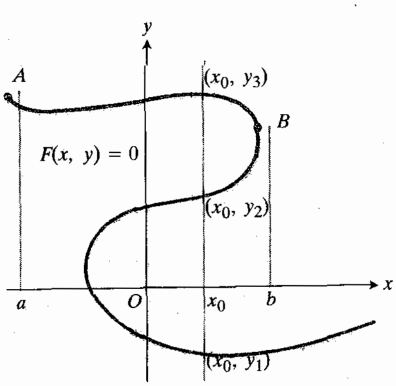
تفاوت مثال ۲ با مثال ۱ در این است که نمی‌توان y را از معادلهٔ مثال ۲ به‌دست‌آورد و نشان‌داد که حقیقتاً تابعی‌مشتق‌پذیر از x است. بررسی این مطلب موضوعی است که باید به‌کتابهای پیشرفته‌تری واگذار شود. با وجود این‌ذیلاً نشان خواهیم داد که این ایده معقول به‌نظرمی‌رسد.

مشتقگیری ضمنی

بیشتر توابعی که بررسی کردیم، معادلاتی داشتند که y را به‌طور صریح برحسب x بیان می‌کردند. اما، غالباً به‌معادلاتی نظیر $y^2-x=0$ و $x^2+y^2-1=0$ برمی‌خوریم که y را به‌طور صریح برحسب x به‌دست نمی‌دهند. درعین‌حال، هر یك از این معادلات رابطه‌ای بین x و y تعریف می‌کنند. وقتی عدد معینی از دامنهٔ مناسبی به‌جای x قرار گیرد، معادلهٔ حاصل یك یا چند مقدار برای y به‌دست می‌دهد. می‌توان جفتهای x و y حاصل را در صفحه مشخص، و نمودار معادله را رسم کرد.

نمودار معادلهٔ دلخواهی چون $F(x,y)=0$ برحسب x **و y ممکن‌است نمودار تابعی مانند $y=f(x)$ نباشد، زیرا شاید برخی ازخطوط قائم‌آن را بیش از یك‌بار قطع‌کنند. مثلاً** درشکل ۷٫۲، اعداد y_1، y_2، و y_3 همه متناظر با مقدار $x=x_0$ هستند. جفتهای (x_0,y_1)، (x_0,y_2)، و (x_0,y_3) همه در معادلهٔ $F(x,y)=0$ صدق‌می‌کنند و نقاط متناظر برنمودار $F(x,y)=0$ قرار می‌گیرند.

با وجود این، بخشهای مختلفی از خم $F(x,y)=0$ می‌توانند نمودار توابعی‌از x باشند. مثلاً قسمت AB ازخم موجود در شکل ۷٫۲ نمودار تابعی چون $y=f(x)$ است که در $f(x_0)=y_3$ صدق‌می‌کند و بربازهٔ باز (a,b) که شامل x_0 است تعریف‌می‌شود. اگر x نقطهٔ دلخواهی‌از (a,b) باشد، آنگاه جفت $(x,y)=(x,f(x))$ در معادلهٔ اصلی $F(x,y)=0$ صدق می‌کند. می‌گوییم که معادلهٔ $F(x,y)=0$ **به‌طور ضمنی f** را بر (a,b) تعریف می‌کند، هر چند از روی آن f به‌طور صریح به‌صورت y برحسب x به‌دست نیاید.



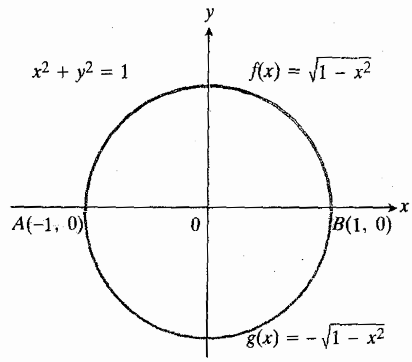
۷٫۲ نمودار معادله‌ای برحسب x و y که به صورت $F(x,y)=0$ باشد، ممکن‌است نمودار تابعی‌از x نباشد. برخی‌ازخطوط قائم ممکن است آن را بیش از یك‌بار قطع‌کنند. اما، بخشهایی از نمودار، نظیرقوس از A تا B، را می‌توان به‌عنوان نمودارتابعی‌از x درنظر گرفت.

مثال ۳ نمودار $F(x, y)=x^۲+y^۲-۱=۰$ دایرهٔ

$$x^۲+y^۲=۱$$

است. کل این دایره نمودار هیچ تابعی از x نیست (شکل ۸.۲). به‌ازای هر x واقع‌دربازهٔ $(-۱, ۱)$، دو مقدار y به‌دست‌می‌آید: $y=\sqrt{۱-x^۲}$ و $y=-\sqrt{۱-x^۲}$. باوجوداین، نیمدایره‌های بالایی و پایینی نمودار توابع $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ و $g(x)=-\sqrt{۱-x^۲}$ هستند. هرگاه $-۱<x<۱$، جفتهای $(x, y)=(x, \sqrt{۱-x^۲})$ و $(x, y)=(x, -\sqrt{۱-x^۲})$ درمعادلهٔ $x^۲+y^۲-۱=۰$ صدق می‌کنند.

در مثال ۷ خواهیم دید که توابع f و g به‌ازای $-۱<x<۱$ مشتق‌پذیر نیز هستند. چون نمودارهای آنها در $x=\pm۱$ مماس قائم دارند، این توابع دراین نقاط مشتق‌پذیر نیستند.



۸.۲ نمودارمعادلهٔ $F(x,y)=x^۲+y^۲-۱=۰$ کل دایرهٔ $x^۲+y^۲=۱$ است. نیمدایرهٔ بالایی AB نمودارتابع $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ و نیمدایرهٔ پایینی AB نمودار $g(x)=-\sqrt{۱-x^۲}$ است. ■

چه‌موقع‌می‌توان انتظارداشت‌که توابع‌مختلف $y=f(x)$ی که با رابطهٔ $F(x, y)=۰$ تعریف‌می‌شوند مشتق‌پذیر باشند؟ پاسخ این است: هنگامی که نمودار رابطه به اندازهٔ کافی هموار باشد تا درهرنقطهٔ آن خطی مماس وجود داشته باشد. ازجملهٔ این‌موارد وقتی است‌که فرمول F ترکیبی جبری از توانهای x و y باشد. برای‌محاسبهٔ مشتق توابعی که به‌طورضمنی‌تعریف می‌شوند، درست نظیر مثالهای ۱ و ۲ عمل می‌کنیم ــ y را به‌عنوان تابعی، هر چند ناشناخته، مشتق‌پذیر از x درنظر می‌گیریم و از هر دوطرف معادله نسبت به x مشتق می‌گیریم. این‌روش‌را **مشتقگیری ضمنی** می‌نامند. بهتر است بار دیگر مثالهای ۱ و ۲ و نحوهٔ استفاده از این روش را ببینید.

مشتقهای از مراتب بالاتر

مشتقگیری ضمنی، مشتقات از مراتب بالاتر را هم به‌دست می‌دهد. این مطلب را با مثال روشن می‌کنیم.

مثال ۴ اگر $۲x^۳-۳y^۲=۷$، $d^۲y/dx^۲$ را بیابید.

حل: درآغاز، ازدوطرف معادله نسبت به x مشتق‌می‌گیریم تا $y'=dy/dx$ را بیابیم

$$۲x^۳-۳y^۲=۷$$

$$\frac{d}{dx}(۲x^۳)-\frac{d}{dx}(۳y^۲)=\frac{d}{dx}(۷)$$

$$۶x^۲-۶yy'=۰ \qquad (۱)$$

$$x^۲-yy'=۰$$

$$y'=\frac{x^۲}{y} \quad (y\neq ۰ \text{ وقتی‌که })$$

حال برای محاسبهٔ y''، از قاعدهٔ خارج‌قسمت استفاده می‌کنیم

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^۲}{y}\right)=\frac{۲xy-x^۲y'}{y^۲}=\frac{۲x}{y}-\frac{x^۲}{y^۲}y'. \qquad (۲)$$

سرانجام به‌جای y'، $x^۲/y$ را قرار می‌دهیم تا y'' برحسب x و y به‌دست آید

$$y''=\frac{۲x}{y}-\frac{x^۲}{y^۲}\left(\frac{x^۲}{y}\right)=\frac{۲x}{y}-\frac{x^۴}{y^۳}. \qquad (۳)$$

مشتق دوم در $y=۰$ تعریف نمی‌شود، اما وقتی‌که $y\neq ۰$، این مشتق ازمعادلهٔ (۳) به‌دست می‌آید. ■

خطهای مماس

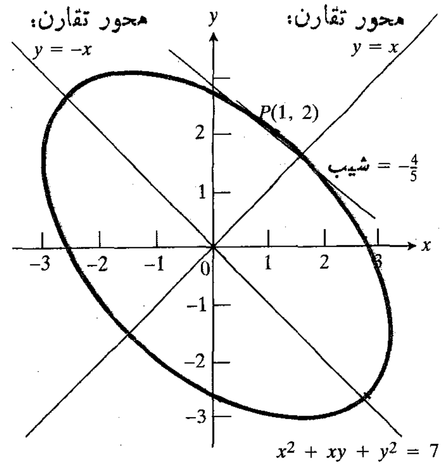
همان‌گونه که قبلاً دیدیم، مشتقگیری ضمنی معمولاً dy/dx را برحسب هم x وهم y بیان می‌کند. دراین گونه‌موارد برای‌محاسبهٔ شیب خم در نقطهٔ معلومی چون $(x_۱, y_۱)$، باید در عبارت نهایی dy/dx مقادیر $x_۱$ و $y_۱$ را قرار دهیم.

مثال ۵ شیب‌خم $x^۲+xy+y^۲=۷$ درنقطهٔ $(۱, ۲)$ را بیابید. (شکل ۹.۲ را ببینید.)

حل: از دوطرف معادله نسبت به x مشتق می‌گیریم؛ xy را به‌عنوان حاصلضرب دوتابع مشتق‌پذیر، و $y^۲$ را به‌عنوان تابع مشتق‌پذیری که به‌توانی رسیده است، تلقی می‌کنیم. پس

$$\frac{d}{dx}(x^۲)+\frac{d}{dx}(xy)+\frac{d}{dx}(y^۲)=\frac{d}{dx}(۷)$$

$$۲x+\left(x\frac{dy}{dx}+y\frac{dx}{dx}\right)+۲y\frac{dy}{dx}=۰$$



۹.۲ نمودار $x^2+xy+y^2=7$. شیب خم در نقطهٔ $P(1,2)$ عبارت است از $(dy/dx)_{(1,2)}=-4/5$.

$$(x+2y)\frac{dy}{dx}=-(2x+y).$$

و لذا اگر $x+2y\neq 0$، داریم

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+y}{x+2y}.$$

مقدار مشتق درنقطهٔ (۱، ۲) برابر است با

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,2)}=-\frac{2(1)+2}{1+2(2)}=-\frac{4}{5}. \qquad (4)$$

عبارت سمت چپ معادلهٔ (۴) را بدین‌صورت می‌خوانیم «مقدار dy/dx درنقطهٔ (۱، ۲)». نماد معمول دیگر برای این مقدار

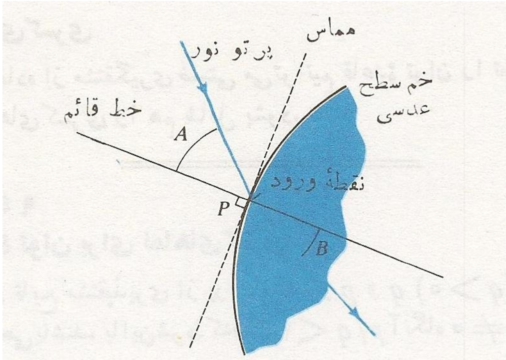
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,2)}$$

است که به همان‌صورت فوق خوانده می‌شود.

درنقاطی که $2x+y=0$، شیب خم ۰ است و مماس افقی است. درجاهایی که $x+2y=0$، مماس قائم است. دراین نقاط نمی‌توانیم dy/dx را محاسبه کنیم. ■

خطهای قائم برخم

درقانونی که چگونگی تغییرجهت نوری را که ازسطح یك عدسی می‌گذرد توصیف می‌کند، زاویه‌های مهم زوایایی هستند که نور در نقطهٔ ورود با خط عمود برسطح می‌سازد (زوایای A و B در شکل ۱۰.۲). این‌خط را خط قائم برسطح درنقطهٔ ورود می‌نامند. درمقطع عمودی یك عدسی نظیرشکل ۱۰.۲، خط قائم، خط عمود



۱۰.۲ شکل‌مقطع یا برش یك عدسی، که خم‌شدن (شکست) پرتو نوری را نشان‌می‌دهد که از سطح عدسی می‌گذرد.

برمماس برخم مقطع درنقطهٔ ورود است.

درحساب‌دیفرانسیل و انتگرال، بنا به‌تعریف، خط‌قائم بر یك‌خم مشتق‌پذیر درنقطه‌ای چون P صرفنظر از اینکه خم، نمایش سطح چه چیزی باشد، خط عمود برمماس برخم در P است.

مثال ۶ خطوط مماس و قائم برخم

$$y^2-6x^2+4y+19=0$$

درنقطهٔ (۲، ۱) را بیابید.

حل: از دو طرف معادله نسبت به x مشتق می‌گیریم و dy/dx را پیدا می‌کنیم.

$$2y\frac{dy}{dx}-12x+4\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}(2y+4)=12x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6x}{y+2}.$$

حال مشتق را در $x=2$ و $y=1$ محاسبه می‌کنیم و

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,1)}=\left.\frac{6x}{y+2}\right|_{(2,1)}=\frac{12}{3}=4$$

را به دست می‌آوریم. پس، مماس برخم درنقطهٔ (۲، ۱) عبارت است از

$$y-1=4(x-2).$$

شیب قائم $-1/4$ است، و معادله‌اش

$$y-1=-\frac{1}{4}(x-2).$$

■

توانهای کسری

با استفاده از مشتقگیری ضمنی می‌توانیم قاعدهٔ توان را تعمیم‌دهیم تا نماهای کسری را هم شامل بشود.

قاعدهٔ ۹

قاعدهٔ توان برای نماهای کسری

اگر u تابع مشتقپذیری از x باشد، و p و q ($q>0$) اعداد صحیحی باشند، با این شرط که‌وقتی $p/q<1$ آنگاه $u\neq 0$، داریم

$$\frac{d}{dx}u^{p/q}=\frac{p}{q}u^{(p/q)-1}\frac{du}{dx}. \qquad (5)$$

این همان قاعدهٔ آشنا برای محاسبهٔ مشتق u^n است که تعمیم داده‌شد تا n بتواند هرعددگویایی مانند p/q باشد. مانند قواعد قبلی، معادلهٔ (۵) تنها برای مقادیری از x برقرار است که به‌ازای آنها $u^{p/q}$، $u^{(p/q)-1}$، و du/dx اعدادی حقیقی‌باشند. لذا قاعدهٔ ۹ حاکی است که با محاسبهٔ طرف راست معادلهٔ (۵) در x، می‌توانیم مقدار مشتق $u^{p/q}$ را در x به‌دست آوریم.

با مثال بعد، معادلهٔ (۵) و نیز محدودیتهایی که باید برای دامنهٔ مقادیر x قائل شویم تا معادله برقرار باشد، روشن‌می‌شود.

مثال ۷

الف) $\frac{d}{dx}(x^{1/2})=\frac{1}{2}x^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ به‌ازای $x>0$

ب) $\frac{d}{dx}(x^{1/5})=\frac{1}{5}x^{-4/5}$ به‌ازای $x\neq 0$

پ) $\frac{d}{dx}(x^{-4/3})=-\frac{4}{3}x^{-7/3}$ به‌ازای $x\neq 0$

ت) $\frac{d}{dx}(1-x^2)^{1/2}=\frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x)$

$=\frac{-x}{(1-x^2)^{1/2}}$ به‌ازای $|x|<1$ ■

اثبات قاعدهٔ ۹ برای اثبات قاعدهٔ ۹، فرض کنید $y=u^{p/q}$، یعنی فرض کنید

$$y^q=u^p.$$

چون p و q اعدادی صحیح هستند، می‌توانیم از دوطرف معادله مشتق ضمنی بگیریم

$$qy^{q-1}\frac{dy}{dx}=pu^{p-1}\frac{du}{dx}.$$

پس، اگر $y\neq 0$، داریم

$$\frac{dy}{dx}=\frac{pu^{p-1}}{qy^{q-1}}\frac{du}{dx}. \qquad (6)$$

اما، $y^{q-1}=(u^{p/q})^{q-1}=u^{p-(p/q)}$؛ و لذا

$$\frac{dy}{dx}=\frac{p}{q}\frac{u^{p-1}}{u^{p-(p/q)}}\frac{du}{dx}$$

$$=\frac{p}{q}u^{(p/q)-1}\frac{du}{dx}.$$

بنابراین، معادلهٔ (۵) اثبات می‌شود.

محدودیت $y\neq 0$ درمعادلهٔ (۶) همان محدودیت $u\neq 0$ است، اما این‌محدودیت بدون توجه به‌اینکه p/q کمتر از ۱ هست یا نیست وضع‌شد. اگر $p/q=1$، این محدودیت‌لازم نیست زیرا دراین صورت داریم $y=u$ و $dy/dx=du/dx$.

معادلهٔ $y=x^{3/2}$ نمونهٔ خوبی است برای مواردی‌که $p/q>1$. درمثال بعد، مشتق آن را محاسبه می‌کنیم.

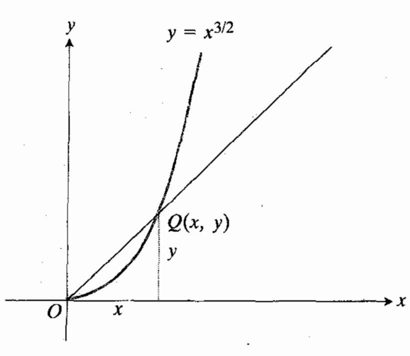
مثال ۸ مشتق $y=x^{3/2}$ در $x=0$ را بیابید.

حل: وقتی نمودار تابعی ناگهان درنقطه‌ای ختم می‌شود، نظیر نمودار $y=x^{3/2}$ در $x=0$ (شکل ۱۱۰۲)، مشتق آن را به‌صورت حد یکطرفه محاسبه می‌کنیم. قاعدهٔ توان بازهم کاربرد دارد و دراین‌مورد داریم

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\frac{3}{2}x^{1/2}\Big|_{x=0}=0.$$

بانگاهی به‌شکل خم می‌توان دیدکه چرا این معادله برقراراست. شیب یك‌قاطع دلخواه ماربرمبدأ و نقطه‌ای چون $Q(x, y)$ برخم عبارت است از

$$m_{OQ}=\frac{y-0}{x-0}=\frac{x^{3/2}}{x}=x^{1/2}.$$



۱۱۰۲ نمودار $y=x^{3/2}$. شیب‌خم در $x=0$ عبارت است از $\lim\limits_{Q\to O} m_{OQ}=0$.

وقتی Q از سمت راست به مبدأ نزدیك می‌شود، m_{OQ} به‌صفر میل می‌کند که با نتیجهٔ حاصل از قاعدهٔ توان سازگار است. ■

مشتقپذیری در یك نقطهٔ انتهایی

حد راستی که درمثال ۸ محاسبه‌کردیم حالت خاصی است ازحد

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

که درصورت وجود، **مشتق‌راست** f در x نامیده می‌شود. به‌همین ترتیب، حد

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

درصورت وجود، **مشتق چپ** f در x نام دارد.

این دوتعریف، مفهوم مشتقپذیـری را به نقاط انتهایی دامنهٔ یك تابع تعمیم‌می‌دهند. می‌گوییم تابعی چون f که بربازهٔ بسته‌ای مـانند $[a, b]$ تعریف می‌شود، در a مشتقپذیر است هرگاه مشتق راست آن در a وجود داشته باشد، و در b مشتقپذیر است هرگاه مشتق چپ آن در b وجود داشته باشد. امـا، بـرای اینکه f در هرنقطهٔ بین a و b مشتقپذیر بـاشد باید طبق معمول مشتق عـادی «دوطرفهٔ»

$$f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

وجود داشته باشد.

مسأله‌ها

در مسأله‌های ۱-۲۹، dy/dx را بیابید.

۱. $x^2+y^2=1$

۲. $y^2=\dfrac{x-1}{x+1}$

۳. $x^2-xy=2$

۴. $x^2y+xy^2=6$

۵. $y^2=x^3$

۶. $x^{2/3}+y^{2/3}=1$

۷. $x^{1/2}+y^{1/2}=1$

۸. $x^3-xy+y^3=1$

۹. $x^2=\dfrac{x-y}{x+y}$

۱۰. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

۱۱. $y=x\sqrt{x^2+1}$

۱۲. $y^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}$

۱۳. $2xy+y^2=x+y$

۱۴. $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}$

۱۵. $y^2=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

۱۶. $(x+y)^3+(x-y)^3=x^4+y^4$

۱۷. $(3x+7)^5=2y^3$

۱۸. $y=(x+5)^4(x^2-2)^3$

۱۹. $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}=1$

۲۰. $y=(x^2+5x)^3$

۲۱. $y^2=x^2-x$

۲۲. $x^2y^2=x^2+y^2$

۲۳. $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2+3}}{x}$

۲۴. $y=x^2\sqrt{1-x^2}$

۲۵. $x^3+y^3=18xy$

۲۶. $y=(3x^2+5x+1)^{3/2}$

۲۷. $y=(2x+5)^{-1/5}$

۲۸. $y=3(2x^{-1/2}+1)^{-1/3}$

۲۹. $y=\sqrt{1-\sqrt{x}}$

۳۰. اگر $T^2=4\pi^2L/g$، dT/dL را بیابید. (این‌معادله دورهٔ تناوب Tی یك آونگ ساده را برحسب‌طول L آن و شتاب گرانش g به‌دست می‌دهد.)

۳۱. مطلوب است طول از مبدأ و عرض ازمبدأ خط مماس برخم $y=x^{1/2}$ در $x=4$.

۳۲. اگر $f''(x)=x^{-1/3}$، کدام یك از موارد زیر درست است؟

الف) $f(x)=\frac{3}{2}x^{2/3}-3$

ب) $f(x)=\frac{9}{10}x^{5/3}-7$

پ) $f'''(x)=-\frac{1}{3}x^{-4/3}$

ت) $f'(x)=\frac{3}{2}x^{2/3}+6$

۳۳. اگر $b=a^{2/3}$، db/da را بیابید. برای اینکه مشتق وجود داشته باشد، چه محدودیتهایی (درصورت لزوم) باید برای دامنهٔ a قائل شویم؟

۳۴. الف) با مشتقگیری ضمنی از معادلهٔ $x^2-y^2=1$، نشان دهید که $dy/dx=x/y$.
ب) از دوطرف معادلهٔ $dy/dx=x/y$ مشتق بگیرید و نشان دهید که

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-1}{y^3}.$$

درمسألههای ۳۵-۴۲ ابتدا dy/dx و سپس d^2y/dx^2 را با مشتقگیری ضمنی بیابید.

۳۵. $x^2+y^2=1$

۳۶. $x^3+y^3=1$

۳۷. $x^{2/3}+y^{2/3}=1$

۳۸. $y^2=x^2+2x$

۳۹. $y^2+2y=2x+1$

۴۰. $y^2=1-\frac{2}{x}$

۴۱. $y+2\sqrt{y}=x$

۴۲. $xy+y^2=1$

درمسألههای ۴۳-۴۸، (الف) مماس، و (ب) قائم برخم در نقطهٔ داده شده را بیابید.

۴۳. $x^2+xy-y^2=1,\quad P(2,3)$

۴۴. $x^2+y^2=25,\quad P(3,-4)$

۴۵. $x^2y^2=9,\quad P(-1,3)$

۴۶. $\frac{x-y}{x-2y}=2,\quad P(3,1)$

۴۷. $y^2-2x-4y-1=0,\quad P(-2,1)$

۴۸. $xy+2x-5y=2,\quad P(3,2)$

۴۹. خطهای قائم برخم $xy+2x-y=0$ را که با خط $2x+y=0$ موازی هستند بیابید.

۵۰. اگر از نقطهٔ $A(a,0)$ بتوان سه قائم برخم $y^2=x$ رسم کرد، نشان دهید که a باید بزرگتر از $1/2$ باشد. یك‌قائم همواره محور x است. مقدار a چه باشد تا دوقائم دیگر برهم عمود باشند؟

۵۱. خط قائم برخم $y=x^2+2x-3$ در $(1,0)$ آن را در چه نقاط دیگری قطع می‌کند؟

۵۲. نشان دهید که قائم بردایرهٔ $x^2+y^2=a^2$ در هر نقطهٔ (x_1,y_1) از مرکز می‌گذرد.

۵۳. دونقطه‌ای را که محل تقاطع خم $x^2+xy+y^2=7$ و محور x است بیابید و نشان دهید که خطهای مماس برخم در این نقاط، متوازی‌اند. شیب یکسان این مماسها را تعیین کنید.

۵۴. درچه نقاطی‌از خم $x^2+xy+y^2=7$ (الف) مماس‌موازی با محور x است، (ب) مماس موازی با محور y است؟ (درمورد اخیر، dy/dx تعریف نمی‌شود، اما، dx/dy تعریف می‌شود. دراین نقاط مقدار dx/dy چیست؟)

۵۵. ذره‌ای روی یك محور حرکت می‌کند و موضع آن را تابع $s(t)=\sqrt{1+4t}$ که درآن s برحسب متر، و t برحسب ثانیه است به دست می‌دهد. وقتی که $t=6$ ثانیه، سرعت و شتاب ذره چقدر است؟

۵۶. کدام خط افقی خم $y=\sqrt{x}$ را با زاویه $45°$ قطع‌می‌کند؟

۵۷. خمهای متعامد. دوخم دریك نقطهٔ تقاطعشان متعامدند هرگاه مماسهایشان درآن نقطه برهم عمود باشند. نشان دهیدکه خمهای $2x^2+3y^2=5$ و $y^2=x^3$ در $(1,1)$ و $(1,-1)$ متعامدند.

۵۸. ذره‌ای به‌جرم m در امتداد محور x حرکت می‌کند. سرعت ذره، $v=dx/dt$، و موضع آن، x، درمعادلهٔ

$$m(v^2-v_0^2)=k(x_0^2-x^2)$$

صدق می‌کنند؛ k، v_0، و x_0 ثابت‌اند. از دوطرف این معادله نسبت به t مشتق بگیرید و نشان دهیدکه هرگاه $v\neq 0$ داریم

$$m\frac{dv}{dt}=-kx.$$

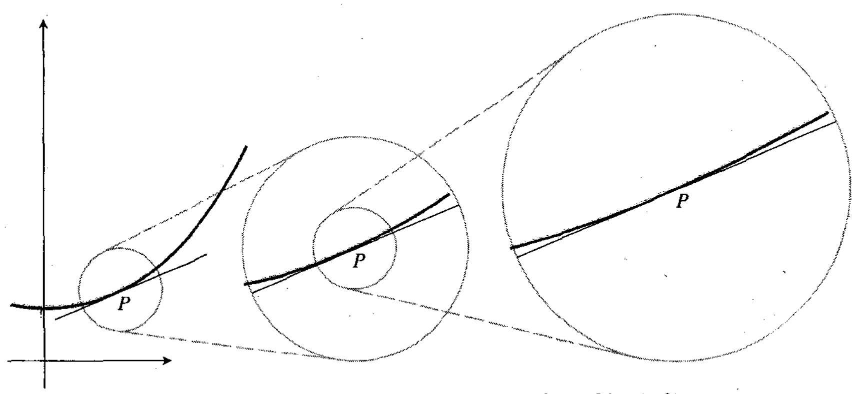
TOOLKIT PROGRAMS
Derivative Grapher

۴.۲ تقریب خطی و دیفرانسیل

درعلوم و مهندسی گاه می‌توانیم تابعهای پیچیده را با توابع‌ساده‌ای تقریب بزنیم که دقت موردنظر را تأمین کنند ودرعین‌حال، کارکردن بـا آنها دشوار نباشد. اطلاع از روش تقریب‌زدن مهم است. در این بخش به مطالعهٔ ساده‌ترین تقریب زدنهای مفید می‌پـردازیم، و بـرای نمو متغیر x، نماد جدید dx را هم معرفی می‌کنیم. این نمادکه دیفرانسیل x نام دارد، درعلوم فیزیکی بیش از Δx به‌کار می‌رود و خواهیم دیدکه در ریاضیات هم مفید است.

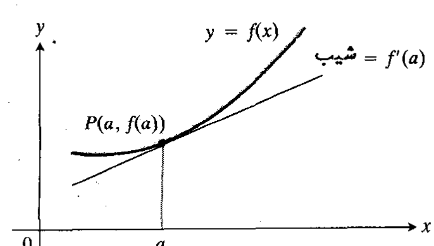
خطی‌سازی

همان‌گونه‌کـه درشکل ۱۲.۲ دیـده می‌شود، مماس برخمی چون $y=f(x)$ درحوالی نقطهٔ تماس نزدیك خم قرار می‌گیرد، و در بازهٔ کوچکی که در هر دوطرف نقطه امتداد دارد، مقادیر y روی خط مماس تقریبهای خوبی برای مقادیر y خم هستند. لذا پیشنهاد ما این‌است‌که روی این بازه به‌جای‌فرمول f، فرمول خط مماسش را قرار دهیم.



۱۲.۲ بزرگ‌کردنهای متوالی، نزدیك بودن خم و خط مماسش را نشان‌می‌دهد.

بنابـرنمادهـای شکل۱۳.۲، مماس از نقطهٔ $P(a, f(a))$ می‌گذرد وشیب‌آن $f'(a)$ است. لذا معادلهٔ نقطه-شیب آن



۱۳.۲ معادلهٔ خط مماس، $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ است.

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

یا

$$y=f(a)+f'(a)(x-a) \qquad (۱)$$

است. پس خط مماس، نمودار تابع

$$L(x)=f(a)+f'(a)(x-a) \qquad (۲)$$

است. درمکانهایی که این‌خط نزدیك‌نمودار f باشد، $L(x)$ تقریب خوبی از $f(x)$ است. در پـایان فصل ۳ دربارهٔ درجهٔ دقت این تقریب صحبت خواهیم‌کرد.

تابع $L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$ را صورت خطی شده [یا بـه اختصار، صورت خطی] f در a می‌نـامیم. تقریب $f(x) \approx L(x)$، تقریب خطی متداول f در a است.

تعریف

صورت خطی و تقریب خطی متداول

اگر $y=f(x)$ در $x=a$ مشتقپذیر باشد، آنگاه

$$L(x)=f(a)+f'(a)(x-a) \qquad (۳)$$

را **صورت خطی شده** [یـا به اختصـار، **صورت خطی**] f در a می‌نامند. تقریب

$$f(x) \approx L(x)$$

تقریب خطی متداول f در a نام دارد.

مثال ۱ صورت خطی $f(x)=\sqrt{۱+x}$ در $x=۰$ را بیابید و ازآن برای تقریب‌زدن $\sqrt{۱٫۲}$، $\sqrt{۱٫۰۵}$، و $\sqrt{۱٫۰۰۰۵}$ استفاده کنید.

حل: معادلهٔ (۳) را به‌ازای $f(x)=\sqrt{۱+x}$ و $a=۰$ تشکیل می‌دهیم.

مشتق f عبارت است از

$$f'(x)=\frac{۱}{۲}(۱+x)^{-۱/۲}=\frac{۱}{۲\sqrt{۱+x}}.$$

مقدار این مشتق در $x=۰$، $۱/۲$ است. درمعادلهٔ (۳) این مقدار و مقادیر $a=۰$، و $f(۰)=۱$ را قرار می‌دهیم

$$L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$

$$=۱+\frac{۱}{۲}(x-۰)$$

$$=۱+\frac{x}{۲}\cdot$$

صورت خطی $\sqrt{۱+x}$ در $x=۰$، $L(x)=۱+(x/۲)$ است. شکل ۱۴۰۲ را ببینید.

تقریب

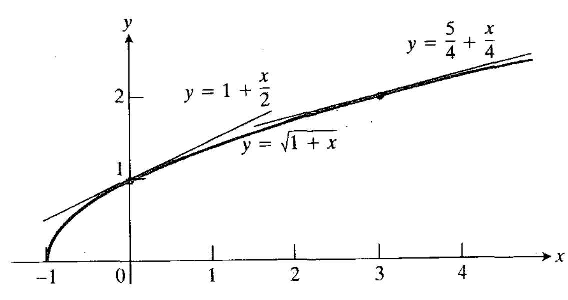
$$\sqrt{۱+x}\approx ۱+\frac{x}{۲}$$

تاچه اندازه دقت‌دارد؟ وقتی x برابر ۰٫۲، ۰٫۰۵، و۰٫۰۰۵ است داریم

$$\sqrt{۱٫۲}\approx ۱+\frac{۰٫۲}{۲}=۱٫۱۰ \qquad \text{(دقت تا ۲ رقم اعشار)}$$

$$\sqrt{۱٫۰۵}\approx ۱+\frac{۰٫۰۵}{۲}=۱٫۰۲۵ \qquad \text{(دقت تا ۳ رقم اعشار)}$$

$$\sqrt{۱٫۰۰۵}\approx ۱+\frac{۰٫۰۰۵}{۲}=۱٫۰۰۲۵۰\,. \qquad \text{(دقت تا ۵ رقم اعشار)}$$



۱۴۰۲ نمودار $y=\sqrt{۱+x}$ و صورت خطی آن در $x=۰$ و $x=۳$.

■

مثال ۲ صورت خطی $f(x)=\sqrt{۱+x}$ در $x=۳$ را بیابید و ازآن بـرای تقریب‌زدن $\sqrt{۴٫۲}$ استفاده‌کنید. مـاشین‌حساب چه مقداری‌برای $\sqrt{۴٫۲}$ به‌دست می‌دهد؟

حل: برای $f(x)=\sqrt{۱+x}$، $f'(x)=\dfrac{۱}{۲\sqrt{۱+x}}$ و $a=۳$، معادلهٔ (۲) را تشکیل می‌دهیم. به‌ازای

$$f(۳)=۲,\quad f'(۳)=\frac{۱}{۲\sqrt{۱+۳}}=\frac{۱}{۴}$$

از معادلهٔ (۲) نتیجه می‌شود که

$$L(x)=۲+\frac{۱}{۴}(x-۳)=۲+\frac{x}{۴}-\frac{۳}{۴}=\frac{۵}{۴}+\frac{x}{۴}\cdot$$

پس، نزدیك $x=۳$ داریم

$$\sqrt{۱+x}\approx\frac{۵}{۴}+\frac{x}{۴}\cdot$$

شکل ۱۴۰۲ را ببینید.

$\sqrt{۴٫۲}$ را تقریب می‌زنیم:

$$\sqrt{۴٫۲}=\sqrt{۱+۳٫۲}\approx\frac{۵}{۴}+\frac{۳٫۲}{۴}$$

$$=۱٫۲۵+۰٫۸=۲٫۰۵۰\,.$$

ازماشین‌حساب مقدار $\sqrt{۴٫۲}$ تا۵رقم‌اعشاری‌برابر با ۲٫۰۴۹۳۹ به‌دست می‌آیدکه اختلاف آن با ۲٫۰۵ کمتر از یك‌هزارم است. ■

فایدهٔ تقریبهایی که درمثالهای ۱ و۲ آمد، درمحاسبهٔ ریشه‌های دوم خاص نیست؛ در این موارد مـاشین حساب بهترعمل می‌کند. سودمندی آن در پیدا کردن فرمولهایی خطی است‌که می‌توانند با دقت‌کافی روی کل بازهٔ معینی جای $\sqrt{۱+x}$ را بگیرند.

مثال ۳ تقریب زیر به‌وفور در فیزیك و مهندسی به‌کارمی‌رود

$$(۱+x)^k\approx ۱+kx\,،\quad \text{به‌ازای هرعدد } k\,. \qquad (۴)$$

(مسألهٔ ۵۴* را ببینید.) این تقریب بـرای مقادیر x نـزدیك صفر خوب است. مثلاً وقتی‌که x کوچك باشد،

$$\sqrt{۱+x}\approx ۱+\frac{x}{۲}$$

$$\frac{۱}{۱-x}=(۱-x)^{-۱}\approx ۱+(-۱)(-x)=۱+x$$

(۵)

$$\sqrt[۳]{۱+۵x^۴}=(۱+۵x^۴)^{۱/۳}\approx ۱+\frac{۱}{۳}(۵x^۴)=۱+\frac{۵}{۳}x^۴$$

$$\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}=(۱-x^۲)^{-۱/۲}\approx ۱+\left(-\frac{۱}{۲}\right)(-x^۲)$$

$$=۱+\frac{۱}{۲}x^۲\cdot$$

■

براورد تغییر

فرض کنید مقدار تابع مشتق‌پذیری چون $f(x)$ در نقطهٔ مشخصی مانند x_0 معلوم است، و می‌خواهیم دربارهٔ تفاوتش با مقدار تابع در نقطهٔ مجاور x_0+h نظر دهیم. اگر h کوچك باشد، f و صورت خطی آن L در x_0 حدوداً به یك اندازه تغییر خواهند کرد. چون محاسبهٔ مقادیر L همیشه ساده است، محاسبهٔ تغییر L راهی عملی برای براورد تغییر f است.

تغییر f برحسب نمادهای شکل ۱۵۰۲ برابر است با

$$\Delta f = f(x_0+h)-f(x_0).$$

تغییر متناظر L عبارت است از

$$\begin{aligned}\Delta L &= L(x_0+h)-L(x_0)\\ &= f(x_0)+f'(x_0)[(x_0+h)-x_0]-f(x_0) \qquad (۶)\\ &= f'(x_0)h.\end{aligned}$$

معمولاً کارکردن با فرمول Δf مثل کارکردن با فرمول f دشوار است. اما کارکردن با فرمول ΔL همیشه ساده است. همان‌گونه که دیده می‌شود، تغییر L صرفاً حاصلضرب عددی ثابت در h است.

تغییر $\Delta L=f'(x_0)h$ را معمولاً با نماد سودمندتر

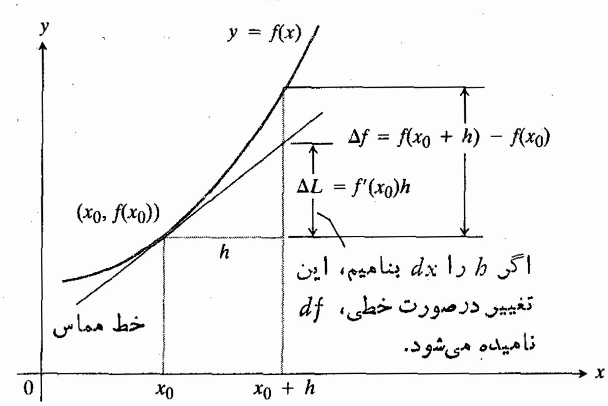
$$df = f'(x_0)\,dx \qquad (۷)$$

توصیف می‌کنند که در آن، df تغییر صورت خطی f را که از تغییر x، یعنی dx، حاصل می‌شود نمایش می‌دهد. dx را **دیفرانسیل** x و df را **دیفرانسیل** متناظر f می‌نامیم.

اگر دوطرف معادلهٔ $df=f'(x)dx$ را بر dx تقسیم کنیم، معادلهٔ آشنای

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

به دست می‌آید. بدین ترتیب این معادله حاکی است که می‌توان مشتق dy/dx را به‌عنوان خارج قسمت دو دیفرانسیل تلقی کرد. در بخش بعد خواهیم دید که این طرز تلقی در بسیاری از محاسبات کار را ساده می‌کند.



۱۵۰۲ اگر h کوچك باشد، تغییر صورت خطی f حدوداً به اندازهٔ تغییر f است.

از دیدگاه ریاضی صرف، معادلهٔ $df=f'(x_0)\,dx$ چیزی نیست جز معادله‌ای که متغیر وابستهٔ df را به‌صورت تابعی از دومتغیر مستقل x_0 و dx تعریف می‌کند. اما، هنگامی که بخواهیم این معادله را به کار ببریم، معمولاً مایلیم دامنه‌های متغیرهای مستقل چنان باشند که اطمینان داشته باشیم مجموع آنها، x_0+dx، در دامنهٔ f قرار می‌گیرد. اگر این نقطهٔ جدید در دامنهٔ f قرار نگیرد، محاسبهٔ تغییر صورت خطی f، یعنی df، چندان مفید نخواهد بود.

مثال ۴ شعاع دایره‌ای در آغاز $r_0=۱۰$ است و به اندازهٔ $dr=۰٫۱$ افزایش می‌یابد. با محاسبهٔ dA، افزایش متناظر مساحت دایره، $A=\pi r^۲$، را براورد کنید. dA را با تغییر واقعی ΔA مقایسه کنید.

حل: برای محاسبهٔ dA، معادلهٔ (۷) را در مورد تابع $A=\pi r^۲$ به‌کار می‌گیریم

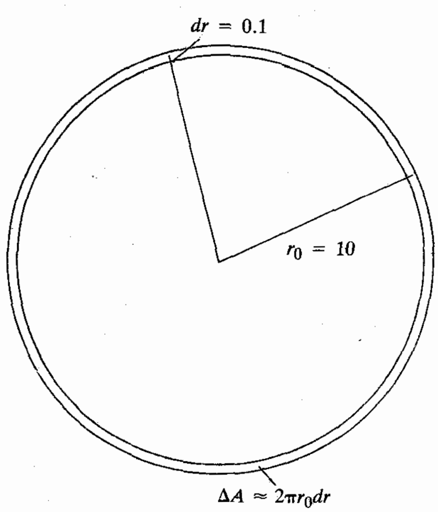
$$dA = A'(r_0)dr = ۲\pi r_0 dr.$$

مقادیر $r_0=۱۰$ و $dr=۰٫۱$ را در آن قرار می‌دهیم

$$dA=۲\pi(۱۰)(۰٫۱)=۲\pi.$$

تغییر براورد شده برابر است با ۲π واحد مربع.

از محاسبهٔ مستقیم ΔA نتیجه می‌شود که



۱۶۰۲ وقتی dr در مقایسه با r_0 کوچك باشد، که درمورد $dr=۰٫۱$ و $r_0=۱۰$ چنین است، دیفرانسیل $dA=۲\pi r_0 dr$ براورد خوبی از ΔA است. مثال ۴ را ببینید.

$$\Delta A=\pi(10.1)^2-\pi(10)^2$$
$$=(102.01-100)\pi$$
$$=\underbrace{2\pi}_{dA}+\underbrace{0.01\pi}_{\text{خطا}}.$$

خطا در براورد dA، 0.01π واحد مربع است. ازمحاسبهٔ زیر پیداست که این خطا درصد کوچکی از مساحت دایرهٔ اولیه است

$$\frac{\text{خطا}}{\text{مساحت اولیه}}=\frac{0.01\pi}{100\pi}=\%0.01.$$

شکل ۱۶.۲ را ببینید. ■

تغییرمطلق ونسبی، و درصد تغییر

وقتی از x_0 به‌نقطه‌ای درهمان حوالی برویم، تغییرمتناظر مقدار تابعی چون f را می‌توان به‌سه‌طریق توصیف کرد:

	واقعی	براوردی
تغییرمطلق	Δf	df
تغییر نسبی	$\dfrac{\Delta f}{f(x_0)}$	$\dfrac{df}{f(x_0)}$
درصدتغییر	$\dfrac{\Delta f}{f(x_0)}\times 100$	$\dfrac{df}{f(x_0)}\times 100$

مثال ۵ مطلوب است براورد درصد تغییر در مساحت دایره‌ای که شعاعش از $r_0=10$ واحد به ۱۰٫۱ واحد افزایش می‌یابد.

حل: ازجدول بالا داریم

$$\text{درصد تغییر براوردشده}=\frac{dA}{A(r_0)}\times 100.$$

بنا به‌مثال ۴، $dA=2\pi$ و $A(r_0)=100\pi$. ازفرمول اخیر نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{dA}{A(r_0)}\times 100=\frac{2\pi}{100\pi}\times 100=\%2.$$ ■

مثال ۶ اندازهٔ یال‌مکعبی با احتمال خطای اندازه‌گیری ۰٫۰۵±، برابربا ۶ اینچ است. اگرقدرمطلق‌خطا دراندازه‌گیری یال‌حداکثر ۰٫۰۵ اینچ باشد، درصد خطایی‌را که درمحاسبهٔ حجم رخ می‌دهد براورد کنید.

حل: اگر x طول یال مکعب را نشان دهد، حجم آن $V=x^3$ است. اندازهٔ x برابر با شش اینچ وخطای اندازه‌گیری dx است که قدرمطلق آن از ۰٫۰۵ تجاوز نمی‌کند.

$$|dx|\leqslant 0.05\ \text{in}.$$

برای اینکه تغییر در V را که از نمو dx ناشی می‌شود براورد کنیم از معادلهٔ (۷) استفاده می‌کنیم

$$dV=\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=6}\cdot dx=(3x^2)_{x=6}\cdot dx=108\,dx.$$

چون $|dx|\leqslant 0.05$، داریم

$$|dV|=108|dx|\leqslant(108)(0.05)=5.4\ \text{in}^3.$$

حجم‌محاسبه‌شده به‌ازای $x=6$ ممکن‌است ازحجم واقعی حداکثر ۵٫۴ اینچ‌مکعب بیشتر یا کمتر باشد. براورد ما از درصد خطادر محاسبهٔ حجم برابر است با

$$\frac{dV}{V\ \text{محاسبه‌شده}}=\frac{5.4}{6^3}=\frac{5.4}{216}=0.025=\%2.5.$$ ■

مثال ۷ فرض کنید زمین به‌شکل کرهٔ کامل باشد و شعاع آن برابر ۰٫۱ ± ۳۹۵۹ مایل تعیین‌شده باشد. خطای ۰٫۱ ± بر براورد مساحت سطح زمین چه اثری دارد؟

حل: مساحت رویهٔ کره‌ای با شعاع r، $S=4\pi r^2$ است. در محاسبهٔ S، عدم یقین ناشی از اندازه‌گیری r با خطای dr مایل حدوداً

$$dS=\left(\frac{dS}{dr}\right)dr=8\pi r\,dr$$

است. با $r=3959$ و $dr=0.1$ و با تقریب یک مایل، داریم

$$dS=8\pi(3959)(0.1)=9950\ \text{مایل مربع}$$

که‌حدوداً برابراست بامساحت ایالت مریلندآمریکا. این‌خطا ممکن است به‌طور مطلق خیلی بزرگ جلوه کند، ولی ۹۹۵۰ مایل مربع وقتی با مساحت محاسبه شدهٔ سطح زمین مقایسه شود خطای نسبتاً کوچکی است

$$\frac{dS}{S\ \text{محاسبه شده}}=\frac{9950}{4\pi(3959)^2}\approx\frac{9950}{196961284}$$
$$\approx\%0.005.$$ ■

مثال ۸ شعاع r کره‌ای را حدوداً با چه دقتی اندازه بگیریم تا مساحت رویه‌اش، $S=4\pi r^2$، با حداکثر ۱٪ خطا نسبت به‌مقدار واقعی محاسبه شود؟

حل: می‌خواهیم بیدقتی ما در اندازه‌گیری به اندازه‌ای کم باشد که نمو متناظر ΔS در مساحت رویه در نابرابری زیر صدق کند

$$|\Delta S| \leqslant \frac{۱}{۱۰۰} S = \frac{۴\pi r^۲}{۱۰۰}. \qquad (۸)$$

دراین نابرابری به‌جای ΔS می‌نویسیم

$$dS = \left(\frac{dS}{dr}\right) dr = ۸\pi r\, dr.$$

درنتیجه داریم

$$|۸\pi r\, dr| \leqslant \frac{۴\pi r^۲}{۱۰۰}$$

و

$$|dr| \leqslant \frac{۱}{۸\pi r} \cdot \frac{۴\pi r^۲}{۱۰۰} = \frac{۱}{۲}\, \frac{r}{۱۰۰}.$$

پس باید شعاع را با خطایی چون dr اندازه بگیریم که بیش‌از ۰ر۵٪ مقدار واقعی نباشد. ■

خطا درتقریب $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$

کمیت $f'(a)\Delta x$ نمو واقعی $\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a)$ را با چه دقتی براورد می‌کند؟ خطا را با کم کردن یکی از دیگری اندازه می‌گیریم

$$\begin{aligned} \text{خطای تقریب} &= \Delta y - f'(a)\Delta x \\ &= f(a+\Delta x) - f(a) - f'(a)\Delta x \\ &= \underbrace{\left(\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} - f'(a)\right)}_{\text{این مقدار را } \epsilon \text{ می‌نامیم}} \Delta x \qquad (۹) \\ &= \epsilon \,.\, \Delta x. \end{aligned}$$

وقتی $\Delta x \to ۰$، خارج‌قسمت تفاضلها

$$\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

به $f'(a)$ میل می‌کند (تعریف $f'(a)$ را به یادآورید)، و لذا کمیت داخل پرانتز فوق عدد بسیار کوچکی‌می‌شود (و به‌همین‌سبب هم آن را ϵ نامیدیم). در واقع

وقتی $\Delta x \to ۰$، $\epsilon \to ۰$.

پس، وقتی Δx کوچك باشد، خطای تقریب، $\epsilon\Delta x$، از آن هم کوچکتر است.

$$\underbrace{\Delta y}_{\text{تغییرواقعی}} = \underbrace{f'(a)\Delta x}_{\text{تغییربراوردشده}} + \underbrace{\epsilon\Delta x}_{\text{خطا}} \qquad (۱۰)$$

هرچند نمی‌دانیم خطا دقیقاً تا چه اندازه کوچك است، و تا اواخر فصل ۳ قادر نخواهیم بود به‌پیشرفتی دراین زمینه نائل‌شویم، ولی دراینجا نکته‌ای هست که سزاوار توجه است و آن صورت معادله فوق است.

اگر $y = f(x)$ در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد، و x از a به $a+\Delta x$ تغییرکند، تغییر Δy در f از معادله‌ای به‌صورت

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + \epsilon\Delta x \qquad (۱۱)$$

به‌دست می‌آید که در آن وقتی $\Delta x \to ۰$، $\epsilon \to ۰$.

در بخش بعد که فرمولی برای محاسبهٔ مشتق ترکیب دوتابع مشتق‌پذیر به‌دست می‌آوریم خواهیم دید که صرف اطلاع از صورت معادلهٔ (۱۱) هم می‌تواند سودمند باشد.

□ تبدیل جرم به‌انرژی

در اینجا مثالی ارائه می‌کنیم که چگونگی استفاده از تقریب

$$\frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}} \approx ۱ + \frac{۱}{۲} x^۲ \qquad (۱۲)$$

ازمثال ۳ را درمسأله‌ای کاربردی نشان می‌دهد.

با این فرض که جرم ثابت باشد، قانون دوم نیوتن حاکی است که

$$F = \frac{d}{dt}(mv) = m\frac{dv}{dt} = ma.$$

اما می‌دانیم که این مطلب دقیقاً درست نیست زیرا جرم جسم با افزایش سرعت زیاد می‌شود. در فرمول اصلاح شدهٔ اینشتین، مقدار جرم

$$m = \frac{m_۰}{\sqrt{۱ - v^۲/c^۲}} \qquad (۱۳)$$

است‌که در آن «جرم ساکن» $m_۰$ جرم‌جسمی است که ساکن‌است، و c سرعت نور و حدوداً ۳۰۰۰۰۰ کیلومتر در ثانیه است. وقتی v درمقایسه با c خیلی کوچك باشد، $v^۲/c^۲$ به‌صفر نزدیك است و با اطمینان می‌توان ازتقریب

$$\frac{۱}{\sqrt{۱ - v^۲/c^۲}} \approx ۱ + \frac{۱}{۲}\left(\frac{v^۲}{c^۲}\right)$$

(که همان معادلهٔ (۱۲) با $x = v/c$ است) استفاده‌کرد و چنین نوشت

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=m_0\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right]$$
$$=m_0+\frac{1}{2}m_0v^2\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

یا

$$m=m_0+\frac{1}{2}m_0v^2\left(\frac{1}{c^2}\right). \qquad (۱۴)$$

معادلهٔ (۱۴) افزایش جرم ناشی از سرعت v را بیان می‌کند.

در فیزیك نیوتنی انرژی جنبشی (KE) جسم، $(1/2)m_0v^2$ است و اگر معادلهٔ (۱۴) را به‌صورت

$$(m-m_0)c^2=\frac{1}{2}m_0v^2$$

بنویسیم داریم

$$(m-m_0)c^2=\frac{1}{2}m_0v^2=\frac{1}{2}m_0v^2-\frac{1}{2}m_0(0)^2=\Delta(\text{KE})$$

یا

$$(\Delta m)c^2=\Delta(\text{KE}).$$

به‌عبارت دیگر، تغییر در انرژی جنبشی $\Delta(\text{KE})$ حاصل از تغییر سرعت از ۰ تا v، برابر با $(\Delta m)c^2$ است.

چنین تغییراتی در انرژی معمولاً نشانگر تغییرات فوق‌العاده کوچکی در جرم است. مثلاً انرژیی که یك بمب اتمی ۲۰ کیلوتنی آزاد می‌کند، نتیجهٔ تبدیل تنها یك گرم جرم به انرژی است. وزن مواد پس از انفجار تنها یك گرم از وزن ماده‌ای که منفجر می‌شود کمتر است. برای اینکه به مطلب پی ببرید توجه کنید که یك سکهٔ دوسنتی حدوداً سه گرم وزن دارد.

یك تقریب خطی با کاربرد فراوان

برای x نزدیك صفر و به‌ازای هرعدد k:

$$(1+x)^k\approx 1+kx. \qquad (۱۵)$$

مسأله‌ها

در مسأله‌های ۱–۱۲، $L(x)$، صورت خطی تابع مفروض را در نقطهٔ a به‌دست آورید. سپس با استفاده از L مقدار تابع داده شده را براورد کنید. اگر ماشین‌حساب در اختیار دارید، براورد خود را با مقداری که ماشین‌حساب به‌دست می‌دهد، مقایسه کنید.

۱. $f(x)=x^4,\quad a=1,\quad f(1.01)$

۲. $f(x)=x^2+2x,\quad a=0,\quad f(0.1)$

۳. $f(x)=x^{-1},\quad a=2,\quad f(2.1)$

۴. $f(x)=x^{-1},\quad a=0.5,\quad f(0.6)$

۵. $f(x)=x^3-x,\quad a=1,\quad f(1.1)$

۶. $f(x)=2x^2+4x-3,\quad a=-1,\quad f(-0.9)$

۷. $f(x)=x^3-2x+3,\quad a=2,\quad f(1.9)$

۸. $f(x)=\sqrt{1+x},\quad a=8,\quad f(8.1)$

۹. $f(x)=\sqrt{x},\quad a=4,\quad f(4.1)$

۱۰. $f(x)=\sqrt[3]{x},\quad a=8,\quad f(8.5)$

۱۱. $f(x)=\sqrt{x^2+9},\quad a=-4,\quad f(-4.2)$

۱۲. $f(x)=\dfrac{x}{x+1},\quad a=1,\quad f(1.3)$

تقریب خطی توابع مفروض درمسائل ۱۳–۲۲ را برای مقادیر x نزدیك صفر به‌کمك فرمول $(1+x)^k\approx 1+kx$ تعیین کنید.

۱۳. $(1+x)^2$

۱۴. $(1+x)^3$

۱۵. $\dfrac{1}{(1+x)^5}$

۱۶. $\dfrac{4}{(1+x)^2}$

۱۷. $\dfrac{2}{(1-x)^4}$

۱۸. $(1-x)^6$

۱۹. $2\sqrt{1+x}$

۲۰. $3(1+x)^{1/3}$

۲۱. $\dfrac{1}{1+x}$

۲۲. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

۲۳. برای براورد

الف) $(1.0002)^{100}$

ب) $\sqrt[3]{1.009}$

پ) $1/(0{,}999)$

از تقریب $(1+x)^k \approx 1+kx$ استفاده کنید.

۲۴. **ماشین‌حساب** برای اینکه تقریب $\sqrt{1+x} \approx 1+x/2$ برایتان روشن شود ۱٫۱ را وارد ماشین خود کنید. سپس دکمهٔ ریشهٔ دوم را به‌کرات فشار دهید، و بین آنها مکث کنید و نتیجه را بخوانید. با هر فشار دکمه درخواهید یافت که قسمت اعشاری نتیجه تقریباً نصف می‌شود.

در مسأله‌های ۲۵–۳۰ مقدار هر تابع $y=f(x)$ وقتی x از a به $a+\Delta x$ تغییر کند، تغییر می‌کند. در هر مورد مطلوب است: (الف) تغییر $\Delta y=f(a+\Delta x)-f(a)$؛ (ب) مقدار براورد $f'(a)\Delta x$؛ و (پ) خطای $\Delta y-f'(a)\Delta x$.

۲۵. $f(x)=x^2+2x, \quad a=0, \quad \Delta x=0{,}1$

۲۶. $f(x)=2x^2+4x-3, \quad a=-1, \quad \Delta x=0{,}1$

۲۷. $f(x)=x^3-x, \quad a=1, \quad \Delta x=0{,}1$

۲۸. $f(x)=x^4, \quad a=1, \quad \Delta x=0{,}1$

۲۹. $f(x)=x^{-1}, \quad a=0{,}5, \quad \Delta x=0{,}1$

۳۰. $f(x)=x^3-2x+3, \quad a=2, \quad \Delta x=0{,}1$

درمسأله‌های ۳۱–۳۸ فرمولی بنویسید که تغییرمفروض درحجم یا مساحت رویه را براورد کند. فرمولهای حجم و مساحت رویه در پیوست ۳ آمده‌است.

۳۱. تغییر درحجم کره‌ای که شعاعش به‌اندازهٔ dr تغییرمی‌کند.

۳۲. تغییر در مساحت رویهٔ کره‌ای که شعاعش به‌اندازهٔ dr تغییر می‌کند.

۳۳. تغییر درحجم مکعبی که طول همهٔ یالهایش به‌اندازهٔ dx تغییر می‌کند.

۳۴. تغییر درمساحت رویهٔ مکعبی که طول همهٔ یالهایش به اندازهٔ dx تغییرمی‌کند.

۳۵. تغییر در حجم استوانهٔ مستدیر قائمی که شعاعش به‌اندازهٔ dr تغییر می‌کند و ارتفاعش ثابت می‌ماند.

۳۶. تغییر درمساحت‌سطح جانبی‌استوانهٔ مستدیر قائمی که ارتفاعش به‌اندازهٔ dh تغییرمی‌کند و شعاع قاعده‌اش ثابت می‌ماند.

۳۷. تغییر درحجم‌مخروط مستدیر قائمی که شعاع‌قاعده‌اش به‌اندازهٔ dr تغییرمی‌کند و ارتفاعش ثابت می‌ماند.

۳۸. تغییر درمساحت سطح جانبی‌مخروطی که ارتفاع‌آن به‌اندازهٔ dh تغییرمی‌کند و شعاع قاعده‌اش ثابت می‌ماند.

۳۹. شعاع دایره‌ای را از ۲٫۰۰ به ۲٫۰۲ متر می‌رسانیم.
الف) تغییرحاصل درمساحت را براورد کنید.
ب) براورد قسمت (الف) را به‌صورت درصدی از مساحت اولیه دایره بیان کنید.

۴۰. قطردرختی ۱۰ اینچ بوده‌است. درطول سال بعد به‌محیط آن ۲ اینچ اضافه شد. قطر درخت حدوداً چقدر افزایش یافته است؟ مساحت مقطع عرضی درخت چقدر؟

۴۱. یال مکعبی با خطای احتمالی اندازه‌گیری ۱٪ برابر با $10\,\text{cm}$ است. می‌خواهیم حجم مکعب را با استفاده از این‌اندازه محاسبه‌کنیم. درصد خطا درمحاسبهٔ حجم را براوردکنید.

۴۲. اندازهٔ قطر کره‌ای $100 \pm 1\,\text{cm}$ است، و حجم آن با استفاده از این اندازه محاسبه می‌شود. درصد خطا درمحاسبهٔ حجم را براوردکنید.

۴۳. اندازهٔ ضلع مربعی را با چه دقتی تعیین‌کنیم تا مطمئن باشیم که مساحت با حداکثر ۲٪ خطا نسبت به مقدار واقعی‌اش محاسبه می‌شود؟

۴۴. الف) با چه دقتی یال مکعبی را اندازه بگیریم تا به‌طور معقولی‌مطمئن‌باشیم که مساحت‌رویهٔ مکعب با خطای‌حداکثر ۲٪ محاسبه می‌شود؟
ب) فرض‌کنید یال را با دقت مطلوب در (الف) اندازه گرفته‌ایم. با این اندازه‌گیری، حدوداً با چه دقتی حجم‌مکعب را می‌توان محاسبه کرد؟ برای یافتن پاسخ، درصد خطای محاسبهٔ حجم، ناشی از این اندازه‌گیری، را براوردکنید.

۴۵. ارتفاع و شعاع مخروط مستدیر قائمی باهم برابرند، و لذا حجم‌مخروط $V=(1/3)\pi h^3$ است. قراراست با دردست داشتن اندازهٔ h حجم را با خطایی که بیش از ۱٪ مقدار واقعی‌آن نباشد به‌دست آوریم. حداکثر خطای قابل قبول در اندازه‌گیری h را به‌طور تقریبی و به‌صورت درصدی از h تعیین‌کنید.

۴۶. محیط خط‌استوای کره‌ای با خطای احتمالی اندازه‌گیری $0{,}4\,\text{cm}$ برابر با $10\,\text{cm}$ است. با استفاده از این اندازه‌گیری شعاع را محاسبه می‌کنیم. سپس با استفاده از این شعاع مساحت رویه و حجم کره را به‌دست می‌آوریم. مطلوب‌است براورد درصد خطاهای مقادیر محاسبه شدهٔ (الف) شعاع، (ب) مساحت رویه، و (پ) حجم.

۴۷. اگر بخواهیم‌حجم کره‌ای با خطای کمتر از ۳٪ مقدارواقعی‌اش محاسبه شود، درصد خطای مجاز در اندازه‌گیری قطر d را براوردکنید.

۴۸. الف) اگر بخواهیم حجم مخزن استوانه‌ای‌شکلی که ۱۰ متر ارتفاع دارد با خطای‌نابیشتر از ۱٪ مقدار واقعی‌اش‌محاسبه

شود، قطر داخلی آن حدوداً با چه دقتی باید اندازه‌گیری شود؟

ب) اگر بخواهیم اطراف مخزن استوانه‌ای‌شکلی را که ۱۰ متر ارتفاع دارد رنگ بزنیم و بخواهیم مقدار رنگ لازم با خطای نابیشتر از ۵٪ مقدار واقعی‌اش محاسبه شود، قطر خارجی آن حدوداً با چه دقتی باید اندازه‌گیری شود؟

۴۹. کارخانه‌ای برای ضرب سکه با دولت قرارداد می‌بندد. اگر قرار باشد که وزن سکه خطایی نابیشتر از ۱/۱۰۰۰ وزن ایده‌آل آن داشته باشد، چه مقدار تغییر در شعاع سکه، dr، قابل قبول است؟ فرض کنید که ضخامت تغییر نکند.

۵۰. دورهٔ تناوب آونگ ساعت. دورهٔ تناوب Tی آونگ ساعت (زمان رفت و برگشت کامل) از فرمول $T^2 = 4\pi^2 L/g$ به‌دست می‌آید. دراین فرمول T برحسب ثانیه، $g = 32.2\ \text{ft/sec}^2$، و L، طول آونگ، برحسب فوت است. به‌طور تقریبی

الف) طول یك آونگ ساعت را بیابید که دورهٔ تناوبش $T = 1\ \text{sec}$ باشد؛

ب) با این فرض که به طول آونگ مفروض در (الف) ۰٫۰۱ فوت اضافه شود، تغییر T، dT، را بیابید؛

پ) مقدارجلو یا عقب‌رفتن‌ساعت درنتیجهٔ تغییردورهٔ تناوب به‌اندازهٔ dT که در (ب) به‌دست آمد، چقدر است؟

۵۱. طول یال‌مکعبی x وحجم آن $y = x^3$ است. اگر x به‌اندازهٔ Δx افزایش یابد، حجم به اندازهٔ Δy زیاد می‌شود. با رسم شکل نشان دهید که Δy را می‌توان به‌طور هندسی به‌صورت مجموع حجمهای زیر نمایش داد

الف) سه ورقه به ابعاد x در x در Δx

ب) سه میله به ابعاد x در Δx در Δx

پ) مکعبی به ابعاد Δx در Δx در Δx.

۵۲. فرض کنید $g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1+x} - 4$.

الف) تحقیق کنید که $g(3) < 0$ و $g(4) > 0$ و به‌این ترتیب نشان‌دهید (با توجه به‌قضیهٔ مقدار میانی بخش ۱۱٫۱) که معادلهٔ $g(x) = 0$ جوابی بین $x = 3$ و $x = 4$ دارد.

ب) برای‌اینکه جواب $g(x) = 0$ را براوردکنید، به‌جای ریشه‌های دوم، صورتهای خطی آنها در $x = 3$ را قرار دهید و معادلهٔ خطی حاصل را حل کنید.

پ) ماشین‌حساب درستی براورد خود را با قراردادن آن درمعادلهٔ اصلی بررسی کنید.

۵۳. فرض کنید

$$f(x) = \frac{2}{1-x} + \sqrt{1+x} - 3.1 .$$

الف) تحقیق کنید که $f(0) < 0$ و $f(0.5) > 0$ و به‌این ترتیب (با استفاده از قضیهٔ مقدار میانی، بخش ۱۱٫۱) نشان دهید معادلهٔ $f(x) = 0$ بین $x = 0$ و $x = 0.5$ ریشه دارد.

ب) برای‌اینکه جواب $f(x) = 0$ را براوردکنید، به‌جای $2/(1-x)$ و $\sqrt{1+x}$ صورتهای‌خطی آنها در $x = 0$ را قراردهید و معادلهٔ خطی حاصل را حل کنید.

پ) **ماشین‌حساب** درستی براورد خود را با قراردادن آن درمعادلهٔ اصلی بررسی کنید.

۵۴. می‌دانیم که قاعدهٔ توان

$$\frac{d}{dx}(1+x)^k = k(1+x)^{k-1}$$

برای هرعددگویای k برقرار است. در فصل ۶ نشان خواهیم داد که این قاعده برای هرعددگنگ k نیز برقرار است. با قبول این موضوع، نشان‌دهید که صورت‌خطی $f(x) = (1+x)^k$ در $a = 0$ برابر است با $L(x) = 1 + kx$ و درستی معادلهٔ (۴) را نتیجه بگیرید.

۵۵. جسم ساکنی تا چه سرعت نسبیی شتاب بگیرد تا به‌جرم آن به‌اندازه ۱٪ افزوده شود؟

۵٫۲ قاعدهٔ زنجیری

قاعدهٔ محاسبهٔ مشتق ترکیب دو تابع مشتق‌پذیر، به‌اجمال این‌است‌که مشتق این ترکیب برابر است با حاصلضرب مشتقات دو تابع. این قاعده را قاعدهٔ زنجیری می‌نامند. چون اغلب توابعی‌که درعمل به‌کارمی‌روند ترکیب توابع‌دیگرند، شاید قاعدهٔ زنجیری بیش‌از سایر قواعد درمشتق‌گیری به‌کار رود. قبلاً یکی ازحالات خاصش، قاعده توانی $du^n/dx = u^{n-1}(du/dx)$، را دیدیدکه دوباره در مثال ۸ این بخش ارائه خواهد شد. در این بخش علت کارا بودن این قاعده، و چگونگی استفاده ازآن در محاسبهٔ مشتقها را توضیح می‌دهیم.

مثال ۱ تابع $y = 6t - 10 = 2(3t - 5)$ ازترکیب $y = 2x$، و $x = 3t - 5$ به‌دست می‌آید. چه ارتباطی بین مشتقهای این سه تابع وجود دارد؟

حل: داریم

$$\frac{dy}{dt} = 6, \quad \frac{dy}{dx} = 2, \quad \frac{dx}{dt} = 3.$$

چون $3 \times 2 = 6$، پس

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt}.$$

■

مثال ۲ ذره‌ای روی خط $y = 5x - 2$ طوری حرکت می‌کند که مختص x آن در زمان t برابر است با $x = 3t$. مطلوب است dy/dt.

حل: y به‌صورت تابعی از t چنین است

$$y = 5x - 2 = 5(3t) - 2 = 15t - 2 .$$

پس

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(15t - 2) = 15 .$$

توجه کنید که $dy/dx = 5$، $dx/dt = 3$، و

$$\frac{dy}{dt} = 3 \times 5 = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} .$$

■

مثال ۳ تابع $y = (5t+1)^2$ حاصل ترکیب $y = x^2$ و $x = 5t + 1$ است. از قاعدهٔ مشتقگیری توانها نتیجه می‌شود که

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(5t+1)^2 = 2(5t+1) \cdot \frac{d}{dt}(5t+1) = 2(5t+1) \cdot 5 .$$

عبارت سمت راست، حاصلضرب

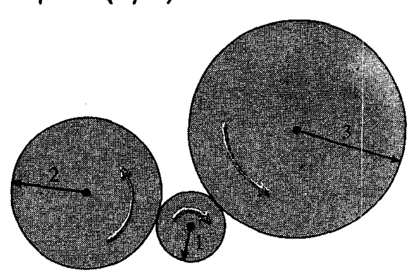
$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(5t+1) = 5 \quad \text{و} \quad \frac{dy}{dx} = 2x = 2(5t+1)$$

است. پس بازهم

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} .$$

■

مثال ۴ درچرخ‌دندهٔ نشان داده‌شده درشکل ۱۷۰۲ نسبت شعاعهای چرخ دنده‌های A، B، و C برابر است با ۲ : ۱ : ۳. اگر A، t دور بچرخد، B، $x = 3t$ دور و C، $(3/2)t = x/2$ دور می‌چرخد.



A: t دور می چرخد B: x دور می چرخد C: y دور می چرخد

۱۷۰۲ وقتی چرخ A، t دور بچرخد، چرخ B، x دور، و چرخ C، y دور می‌چرخد. با مقایسهٔ محیطها می‌بینیم که $dy/dx = 1/2$ و $dx/dt = 3$. dy/dt چیست؟

این موضوع برحسب مشتق چنین بیان می‌شود

$$\frac{dx}{dt} = 3 .$$

(سرعت B سه برابر سرعت A است، یعنی هردوری که A بچرخد B سه‌دور می‌چرخد).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} .$$

(سرعت C، نصف سرعت B است، یعنی هردوری که B بچرخد، C نیم دور می‌چرخد)، و

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} .$$

(سرعت C سه‌دوم سرعت A است؛ یعنی به‌ازای هردور چرخش A، C سه‌دوم دور می‌چرخد). برای محاسبهٔ dy/dt می‌توان dy/dx و dx/dt را درهم ضرب کرد. ■

قاعدهٔ زنجیری

در مثالهای قبل مشاهده کردیم که مشتق تابع مرکب $g \circ f$ متشکل از دو تابع مشتقپذیر، عبارت است از حاصلضرب مشتقهای آن دو تابع. می‌خواهیم این مشاهده را به‌طور رسمی به‌صورت قاعدهٔ زنجیری بیان کنیم. مانند بخش ۴۰۱، نماد $g \circ f$، ترکیب توابع f و g را که g بعد از f می‌آید نمایش می‌دهد، لذا مقدار $g \circ f$ در نقطه‌ای چون t عبارت است از $(g \circ f)(t) = g(f(t))$.

قاعدهٔ زنجیری (صورت اول)

فرض کنید $h = g \circ f$ ترکیب تابعهای مشتقپذیر $y = g(x)$، و $x = f(t)$ را نمایش دهد. آنگاه h تابع مشتقپذیری از t است که مشتقش به‌ازای هرمقدار t برابر است با

$$(g \circ f)'_{t\,\text{در}} = g'_{x\,\text{در}\,=f(t)} \cdot f'_{t\,\text{در}} . \qquad (1)$$

به‌طور خلاصه، به‌ازای هرمقدار t

$$h'(t) = g'(f(t)) \cdot f'(t) . \qquad (2)$$

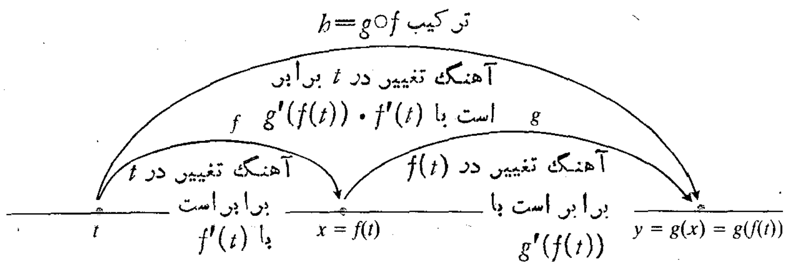
شکل ۱۸۰۲ را ببینید.

معادلات (۱) و (۲) بیان می‌کنند که هرمشتق را چگونه محاسبه کنیم، اما وقتی این مطلب را دانستیم می‌توانیم مشتق را از معادلهٔ زیر نیز به‌دست آوریم

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} . \qquad (3)$$

معمولاً این فرمول کافی است که به‌یاد ما بیاورد اگر y تابع مشتقپذیری

۱۸۰۲ آهنگهای تغییر درهم‌ضرب می‌شوند: مشتق $h=g\circ f$ در t برابر است با مشتق f در t ضرب در مشتق g در $f(t)$.



از x، و x تابع مشتقپذیری از t باشد، آنگاه y تابع مشتقپذیری از t است و مشتق آن از معادلهٔ (۱) به‌دست می‌آید.

قاعدهٔ زنجیری (صورت خلاصه)

اگر y تابع مشتقپذیری از x، و x تابع مشتقپذیری از t باشد، آنگاه y تابع مشتقپذیری از t است و داریم

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt}. \qquad (۴)$$

معادلهٔ (۴) به‌راحتی در حافظه می‌ماند، زیرا، اگر مشتقهای طرف‌راست را به‌صورت خارج‌قسمتهای دیفرانسیلها درنظربگیریم، dxها حذف می‌شوند و کسر طرف چپ حاصل می‌شود.

اینك دو فرمولبندی از قاعدهٔ زنجیری دردست است، و مانند ابزارهای خاص موجود دریك تعمیرگاه، هریك کاری را اندکی آسانتر انجام می‌دهد. درمثالهای زیر از هردو استفاده خواهیم کرد. اما، به‌خاطر داشته‌باشید که هر دو یك قاعده را بیان می‌کنند: مشتق ترکیب چند تابع مشتقپذیر برابر است با حاصلضرب مشتقات آن توابع.

اثبات قاعده زنجیری ایدهٔ نهفته درقاعدهٔ زنجیری این‌است که اگر $x=f(t)$ در t_0 مشتقپذیر باشد، آنگاه نمو Δt نمو Δx را به‌وجود می‌آورد به‌قسمی که

$$\Delta x=f'(t_0)\Delta t+\epsilon_1\Delta t=[f'(t_0)+\epsilon_1]\,\Delta t \qquad (۵\ الف)$$

و اگر $y=g(x)$ در $x_0=f(t_0)$ مشتقپذیر باشد، آنگاه نمو Δx نمو Δy را تولید می‌کند به‌قسمی که

$$\Delta y=g'(x_0)\Delta x+\epsilon_2\Delta x=[g'(x_0)+\epsilon_2]\,\Delta x \qquad (۵\ ب)$$

معادلات (۵ الف) و (۵ ب) صورتهای دیگری از معادلهٔ (۱۱) بخش ۴.۲ هستند که نموهای Δx و Δy را به‌تقریبهای خط مماسشان مربوط می‌کنند. دراین‌معادلات وقتی $\Delta t\to 0$، $\epsilon_1\to 0$، و وقتی $\Delta x\to 0$، $\epsilon_2\to 0$.

از ترکیب معادلات (۵ الف) و (۵ ب) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\Delta y&=[g'(x_0)+\epsilon_2]\,\Delta x\\&=[g'(x_0)+\epsilon_2][f'(t_0)+\epsilon_1]\,\Delta t. \qquad (۶)\end{aligned}$$

دوطرف را بر Δt تقسیم می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta t}&=[g'(x_0)+\epsilon_2][f'(t_0)+\epsilon_1] \qquad (۷)\\&=g'(x_0)f'(t_0)+\epsilon_2 f'(t_0)+\epsilon_1 g'(x_0)+\epsilon_1\epsilon_2.\end{aligned}$$

وقتی که Δt به‌صفرمیل کند، Δx، ϵ_1، و ϵ_2 به‌صفر میل می‌کنند، و داریم

$$\lim\frac{\Delta y}{\Delta t}=g'(x_0)f'(t_0)$$

که همان

$$\frac{dy}{dt}(t_0)=g'(f(t_0))f'(t_0) \qquad (۸)$$

است.

مثال ۵ اگر $y=x^3+5x-4$ و $x=t^2-1$، dy/dt را در $t=-1$ بیابید.

حل: وقتی $t=-1$، $x=0$. پس

$$\begin{aligned}\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=-1}&=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}\cdot\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=-1}\\&=(3x^2+5)_{x=0}\cdot(2t)_{t=-1}\\&=5\times-2=-10.\end{aligned}$$

■

مثال ۶ اگر $y=x^3-3$ و $x=t^2-1$، dy/dt را برحسب t بیان کنید.

حل: از قاعدهٔ زنجیری نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt}&=\frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt}\\&=3x^2\cdot 2t\\&=3(t^2-1)^2\cdot 2t\end{aligned}$$

(dy/dx را در $x=t^2-1$ محاسبه‌کرده‌ایم)

$$=6t(t^2-1)^2.$$

■

مثال ۷ اگر $g(x)=\sqrt{x+۲}$ و $x=f(t)=t^{۳}-۱$، $(d/dt)(g\circ f)$ را به‌ازای $t=۲$ بیابید.

حل: بنا به‌معادلهٔ (۱) قاعدهٔ زنجیری

$$(g\circ f)'_{t=۲ \text{ در}}=g'_{x=f(۲) \text{ در}}\cdot f'_{t=۲ \text{ در}}$$

$$=\frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}}\bigg|_{x=۷}\cdot ۳t^{۲}\bigg|_{t=۲}$$

$$=\frac{۱}{۲\sqrt{۹}}\times ۱۲$$

$$=۲ .$$ ■

مثال ۸ قاعدهٔ آشنای مشتقگیری از توانهای توابع، حالت خاصی از قاعدهٔ زنجیری‌است. اگر u تابع‌مشتقپذیری از x باشد و $y=u^{n}$، آنگاه از قاعدهٔ زنجیری به‌صورت

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{du}(u^{n})\cdot\frac{du}{dx}=nu^{n-۱}\frac{du}{dx}.$$ ■

وقتی از قاعدهٔ زنجیری استفاده می‌کنیم، گاه مفید است که چنین بیندیشیم: اگر $y=g(f(x))$، آنگاه

$$y'=g'(f(x))\cdot f'(x)$$

حاکی‌است که از g مشتق می‌گیریم و همهٔ چیزهای «داخل پرانتز» (یعنی $f(x)$) را دست‌نخورده باقی‌می‌گذاریم وحاصل را درمشتق «داخل‌پرانتز» ضرب می‌کنیم. درعمل، مثلاً، داریم

$$y=\underbrace{(x^{۳}+x^{۲})}_{\text{«داخل پرانتز»}}{}^{۱۳}$$

$$y'=۱۳\overbrace{(x^{۳}+x^{۲})}^{\text{تغییر داده نمی‌شود}}{}^{۱۲}\cdot\underbrace{(۳x^{۲}+۲x)}_{\text{مشتق «داخل پرانتز»}}.$$

□ **مثال ۹** آب‌شدن گلولهٔ برفی. چقدر طول می‌کشد تا یك گلولهٔ برفی آب شود؟

بحث با یك مدل ریاضی آغاز می‌کنیم. فرض می‌کنیم گلولهٔ برفی، تقریباً، کره‌ای به شعاع r و حجم $V=(۴/۳)\pi r^{۳}$

■ ■ ■

وضع قاعدهٔ زنجیری در اوایل پیدایش آن

لایب نیتس قبل از اینکه برداشت‌خودش از حساب دیفرانسیل و انتگرال را در ۱۶۸۴ منتشر کند، چند مقاله دراین زمینه تهیه کرده بود که تا آن زمان منتشر نشده بود. او در دستنوشتهٔ مورخ ۱۶۷۶ خود، اساس قاعدهٔ زنجیری را بیان کرد. وی در توضیح نحوهٔ مشتقگیری از عبارت $\sqrt{a+bz+cz^{۲}}$ نوشت: فرض کنید $x=a+bz+cz^{۲}$، وسپس‌از $\sqrt{x}$ مشتق بگیرید و آن را در dx/dz ضرب کنید. در تمام قرن هیجدهم از این قاعده استفاده شد ولی چنانکه باید، توجیه درستی از آن ارائه نشد. صورتهای مختلف قاعدهٔ زنجیری که در این کتاب می‌آیند، نظیرحالت توابع چندمتغیره، به‌نظر ریاضیدانان قرون هیجدهم و نوزدهم همه تعمیم طبیعی نکتهٔ اساسیی هستندکه لایب‌نیتس برای اولین‌بار بیان‌کرد.

باشد. (البته، گلولهٔ برفی یک کرهٔ کامل نیست، اما می‌توانیم ریاضیات را صرفاً درمورد مدل ریاضی این وضعیت به‌کاربریم و لذا مدلی را انتخاب می‌کنیم که مناسب باشد و چندان پیچیده نباشد.) به‌همین ترتیب، دربارهٔ آهنگ تغییر حجم گلولهٔ برفی نیز چنین فرضی را برمی‌گزینیم. یک مدل این است که فرض کنیم حجم با آهنگی متناسب با مساحت رویه تقلیل می‌یابد. پس به‌زبان ریاضی می‌توان نوشت

$$\frac{dV}{dt}=-k(۴\pi r^۲)\,.$$

فرض می‌کنیم که ضریب تناسب k ثابت است. (این ضریب احتمالاً به‌چیزهایی نظیر رطوبت نسبی هوای اطراف، دمای هوا، بودن یا نبودن آفتاب بستگی دارد.) بالاخره، دست‌کم به‌یک اطلاع دیگرهم نیاز داریم: چقدر طول می‌کشد تا درصد مشخصی از گلولهٔ برفی آب شود؟ چیزی که دراین زمینه ما را راهنمایی کند در اختیار نداریم، مگر اینکه یک یا چند مشاهده داشته باشیم؛ لذا فرض می‌کنیم در شرایط خاصی مثلاً ۱/۴ حجم گلولهٔ برفی در دوساعت آب شود. (به‌جای این اعداد خاص می‌توانستیم ازحروف هم استفاده کنیم: مثلاً، n درصد در h ساعت. آنگاه جواب برحسب n و h به‌دست می‌آید.) حال به‌کار می‌پردازیم. از نظر ریاضی مسأله به‌صورت زیر است

فرض: $V=\frac{۴}{۳}\pi r^۳$ و $\frac{dV}{dt}=-k(۴\pi r^۲)$،

وقتی $t=۰$، $V=V_۰$، و وقتی t برابر با ۲ ساعت است، $V=(۳/۴)V_۰$.

خواستهٔ مسأله: وقتی $V=۰$، t چیست؟

برای اینکه از $V=(۴/۳)\pi r^۳$ نسبت به t مشتق بگیریم از قاعدهٔ زنجیری استفاده می‌کنیم

$$\frac{dV}{dt}=\frac{۴}{۳}\pi(۳r^۲)\frac{dr}{dt}=۴\pi r^۲\frac{dr}{dt}\,.$$

حاصل را برابر با آهنگ داده‌شده، $-k(۴\pi r^۲)$ می‌گیریم و دوطرف را بر $۴\pi r^۲$ تقسیم می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم

$$\frac{dr}{dt}=-k\,.$$

شعاع با آهنگ ثابت k واحد شعاع درساعت تقلیل می‌یابد. پس، شعاع در ۲ ساعت به‌اندازهٔ $۲k$ سانتیمتر، اینچ، یا هرواحد دیگری، کم می‌شود. اگرشعاع دربدو امر $r_۰$ باشد، پس از دوساعت برابر با $r_۲=r_۰-۲k$ می‌شود. از این معادله مقدار k به‌دست می‌آید

$$r_۲=r_۰-۲k$$
$$۲k=r_۰-r_۲$$
$$k=\frac{r_۰-r_۲}{۲}\,.$$

زمان آب‌شدن، مقداری از t است که به‌ازای آن، $r=۰$ یا $kt=r_۰$.

$$\text{زمان آب‌شدن}=\frac{r_۰}{k}=\frac{۲r_۰}{r_۰-r_۲}=\frac{۲}{۱-(r_۲/r_۰)}\,.$$

اما

$$\frac{r_۲}{r_۰}=\frac{\left(\frac{۳}{۴\pi}V_۲\right)^{۱/۳}}{\left(\frac{۳}{۴\pi}V_۰\right)^{۱/۳}}=\left(\frac{V_۲}{V_۰}\right)^{۱/۳}=\left(\frac{\frac{۳}{۴}V_۰}{V_۰}\right)^{۱/۳}$$
$$=\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۱/۳}\approx ۰{,}۹۱\,.$$

بنابراین

$$\text{زمان آب‌شدن}\approx\frac{۲}{۱-۰{,}۹۱}\approx ۲۲\,\mathrm{hr}\,.$$

اگر ۱/۴ گلولهٔ برفی در ۲ ساعت آب شود، تقریباً ۲۰ ساعت طول می‌کشد تا بقیهٔ آن‌هم آب شود.

نکته اگر فیزیکدان بودیم و می‌خواستیم مدلمان را امتحان کنیم، می‌توانستیم داده‌هایی جمع‌آوری کنیم و آنها را با نتایج به‌دست آمده از ریاضیات مقایسه کنیم. یکی از کاربردهای عملی این مسأله، تحلیل این پروژه است که قطعات بزرگی از یخهای قطبی را به‌سواحل کشور بیاوریم تا از آب شیرین آن استفاده کنیم. درتقریب اول می‌توان فرض کرد که این قطعات به‌شکل مکعب، هرم یا کره باشند.

مسأله‌ها

درمسأله‌های ۱ــ۱۰، با استفاده از قاعدهٔ زنجیری، dy/dt را بیابید و نتیجه را برحسب t بیان کنید.

۱. $y=x^۲,\quad x=۲t-۵$

۲. $y=x^۴,\quad x=\sqrt[۳]{t}$

۳. $y=۸-\frac{x}{۳},\quad x=t^۳$

۴. $y+۴x^۲=۷,\quad x+\frac{۵}{۴}t=۳$

۵. $۲x-۳y=۹,\quad ۲x+\frac{t}{۳}=۱$

۶. $y=x^{-۱},\quad x=t^۲-۳t+۸$

۷. $y=\sqrt{x+2},\quad x=\frac{2}{t},\quad t>0$

۸. $y=\frac{x^2}{x^2+1},\quad x=\sqrt{2t+1}$

۹. $y=x^2+3x-7,\quad x=2t+1$

۱۰. $y=x^{2/3},\quad x=t^2+1$

۱۱. اگر $z=w^2-w^{-1}$، $w=3x$، dz/dx را بیابید.

۱۲. اگر $y=2v^3+2v^{-3}$ و $v=(3x+2)^{2/3}$، dy/dx را بیابید.

۱۳. اگر $r=(s+1)^{1/2}$ و $s=16t^2-20t$، dr/dt را بیابید.

۱۴. اگر $a=7r^3-2$ و $r=1-1/b$، da/db را بیابید.

۱۵. اگر $u=t+1/t$ و $t=1-1/v$، du/dv را بیابید.

۱۶. اگر $y=u^5$ و $u=3x^2-7x+5$، dy/dx را بیابید.

درمسألههای ۱۷–۲۰، از قاعدهٔ زنجیری استفاده کنید و dy/dt را برحسب t بیان کنید. سپس، y را برحسب t بیان کنید و با محاسبهٔ مشتق نسبت به t، پاسخ اول خود را بیازمایید.

۱۷. $y=3x^{2/3},\quad x=8t^3$

۱۸. $y=x^2-1,\quad x=\sqrt{t+1}$

۱۹. $y=\frac{1}{x^2+1},\quad x=\sqrt{4t-1}$

۲۰. $y=1-\frac{1}{x},\quad x=\frac{1}{1-t}$

درمسألههای ۲۱–۲۶ مقدار $(d/dt)(g\circ f)$ را بهازای tی داده شده بیابید.

۲۱. $g(x)=x^2+1,\quad x=f(t)=\sqrt{t+1},\quad t=0$

۲۲. $g(x)=\sqrt{x+5},\quad x=f(t)=10\sqrt{t},\quad t=4$

۲۳. $g(x)=\sqrt{1+x^3},\quad x=f(t)=t^{1/3},\quad t=1$

۲۴. $g(x)=1-\frac{1}{x},\quad x=f(t)=\frac{1}{1-t},\quad t=-1$

۲۵. $g(x)=\frac{2x}{x^2+1},\quad x=f(t)=10t^2+t+1,\quad t=0$

۲۶. $g(x)=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2,\quad x=f(t)=\frac{1}{t^2}-1,\quad t=-1$

۲۷. جسمی درحالسقوط است. درلحظهای که جسم s متر از نقطهٔ آغاز فاصله دارد، سرعتآن $k\sqrt{s}$ متر (k ثابت) در ثانیه است. نشان دهید که شتاب جسم ثابت است.

۲۸. فرض کنید $f(x)=x^2$ و $g(x)=|x|$. نشاندهید هرچند g در $x=0$ مشتق ندارد، ولی $f\circ g$ و $g\circ f$ هر دو در $x=0$ مشتق دارند. آیا اینامر قاعدهٔ زنجیری را نقض میکند؟ توضیح دهید.

۲۹. آونگ ساده و تغییر دما. برای نوسانهای با دامنهٔ کوچک، رابطهٔ بین دورهٔ تناوب T و طول L یک آونگ ساده را میتوان با معادلهٔ زیر تقریب زد

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\,.$$

که درآن g (برابر با ۹۸۰ سانتیمتر برمجذور ثانیه) شتاب گرانش است. وقتی دمای θ تغییر کند، طول L با آهنگی که متناسب با L است، یعنی بهصورت

$$\frac{dL}{d\theta}=kL$$

زیاد و یا کم میشود. (k ثابت تناسب است.) آهنگ تغییر دورهٔ تناوب نسبت بهدما چیست؟

۳۰. اندازهگیری شتاب گرانش. وقتی طول L آونگ ساعت با کنترل دما ثابت بماند، دورهٔ تناوب T به شتاب گرانش g بستگی خواهدداشت. لذا، وقتی ساعترا روی سطح زمین ازمحلی بهمحل دیگر ببریم، بسته بهتغییر g، دورهٔ تناوب بهطورمختصر تغییرمیکند. با دانستن ΔT، از معادلهٔ $T=2\pi(L/g)^{1/2}$ که T، g، و L را بههم ربط میدهد، میتوان تغییر g را براورد کرد.

الف) L را ثابت بگیرید، g را به عنوان متغیرمستقل فرض کنید، و dT را محاسبه کنید؛ وسپس از آن برای پاسخدادن بهپرسشهای (ب) و (پ) استفاده کنید.

ب) اگر g زیاد شود، آیا T زیاد میشود یا کم میشود؟ اگر g زیاد شود، آونگ ساعت تندترکار میکند یا کندتر؟

پ) ساعتی را که طول آونگ آن ۱۰۰ سانتیمتر است از محلی که درآن g برابر با ۹۸۰ سانتیمتر برمجذور ثانیهاست بهمحل جدیدی میبریم. بهاین ترتیب، دورهٔ تناوب بهاندازهٔ $dT=0.001$ sec زیاد میشود. dg را بیابید، و مقدار g را درمحل جدید براورد کنید.

TOOLKIT PROGRAMS

Parametric Equations   Super * Grapher

۶.۲ مرور مختصری برمثلثات

بسیاری از پدیده‌های طبیعی متناوب‌اند؛ به این‌معنا که بعد از دورهٔ معینی از زمان تکرار می‌شوند. چنین پدیده‌هایی را می‌توان به‌آسانی با توابع مثلثاتی، به‌ویژه با توابع سینوسی و کسینوسی بررسی کرد. در این بخش و بخش بعدی هدف ما این است که عملیات حساب دیفرانسیل و انتگرال را درمورد این توابع به‌کار ببریم؛ اما قبل‌از انجام‌دادن این کار، بعضی از ویژگیهایشان را مرور می‌کنیم.

وقتی زاویه‌ای به‌اندازهٔ θ مانند شکل ۱۹.۲ درمرکز دایره‌ای به‌شعاع r در وضع متداول قرارگیرد، توابع مثلثاتی θ با معادلات زیر تعریف می‌شوند

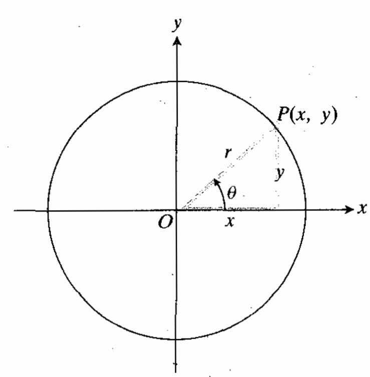
$$\sin\theta=\frac{y}{r},\quad \cos\theta=\frac{x}{r},\quad \tan\theta=\frac{y}{x}$$
$$\csc\theta=\frac{r}{y},\quad \sec\theta=\frac{r}{x},\quad \cot\theta=\frac{x}{y}\,. \qquad (1)$$

مشاهده‌کنید که $\tan\theta$ و $\sec\theta$ برای مقادیری از θ که به‌ازای آنها $x=0$، تعریف نمی‌شوند. این بدان معنی است که $\ldots,-3\pi/2,-\pi/2,\ldots,\pi/2,3\pi/2$ (برحسب رادیان) از دامنهٔ توابع تانژانتی و سکانتی حذف می‌شوند. به‌همین ترتیب، $\cot\theta$ و $\csc\theta$ برای مقادیر θی متناظر با $y=0$، یعنی، برای $\ldots,-2\pi,-\pi,\ldots,0,\pi,2\pi$ تعریف نمی‌شوند. برای مقادیری از θ که این توابع تعریف می‌شوند، بنابرمعادلات (۱) داریم

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\quad \csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$$
$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta},\quad \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}\,.$$

چون $r^2=x^2+y^2$، بنابرقضیهٔ فیثاغورس، داریم

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=\frac{x^2+y^2}{r^2}=1\,. \qquad (2)$$



۱۹.۲ زاویهٔ θ در وضع متداول.

بی‌فایده نیست که مختصات $P(x,y)$ را هم برحسب r و θ بیان کنیم

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta\,. \qquad (3)$$

از شکل ۱۹.۲ برمی‌آید که‌وقتی $\theta=0$، داریم $y=0$ و $x=r$؛ درنتیجه، بنابرتعریفهای (۱) نتیجه می‌گیریم که

$$\sin 0=0,\quad \cos 0=1\,.$$

به‌همین ترتیب، درمورد زاویهٔ قائمه، $\theta=\pi/2$، داریم $x=0$، و $y=r$؛ لذا

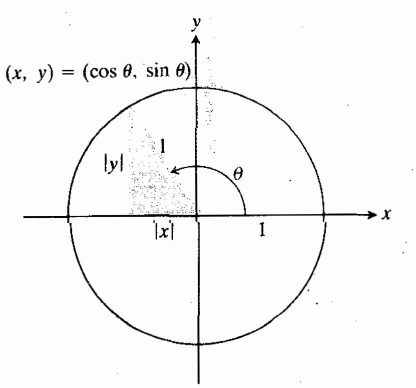
$$\sin\frac{\pi}{2}=1,\quad \cos\frac{\pi}{2}=0\,.$$

محاسبهٔ سینوس و کسینوس

اگر (x,y) نقطه‌ای روی دایره‌ای به‌شعاع $r=1$ واحد باشد، آنگاه معادلات (۳) به‌صورت

$$x=\cos\theta,\quad y=\sin\theta$$

درمی‌آیند. بنابراین، کسینوس و سینوس هرزاویه‌ای را می‌توان از مثلث حادهٔ مرجع محاسبه‌کرد. این مثلث طبق شکل ۲۰.۲ با رسم خطی عمود برمحور x، تشکیل می‌شود. نسبتها از مثلث به دست می‌آیند، و علامتها به ربعی که زاویه در آن قرار می‌گیرد بستگی دارند.



۲۰.۲ مثلث‌حادهٔ مرجع برای‌زاویه‌ای‌چون θ.

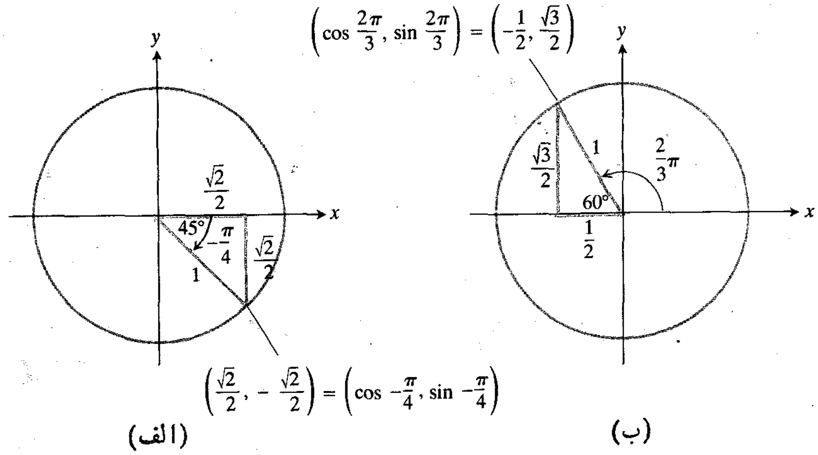
مثال ۱

الف) بنا به‌شکل ۲۱.۲ (الف)

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

ب) بنا به‌شکل ۲۱.۲ (ب)

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2},\quad \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\,. \qquad \blacksquare$$



۲۱۰۲ محاسبهٔ سینوس و کسینوس (الف) $-\pi/4$ رادیان و (ب) $2\pi/3$ رادیان.

اندازهٔ رادیانی

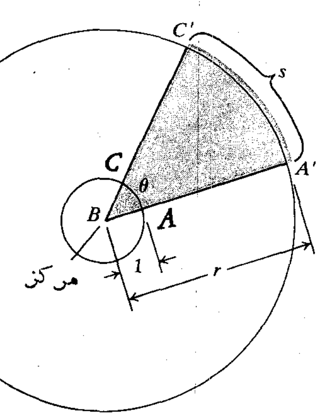
اندازهٔ رادیانی زاویهٔ ABC که رأس آن، B، مرکز دایرهٔ واحد شکل ۲۲۰۲ است، بنا به‌تعریف عبارت است از θ، یعنی‌طول‌قوس مستدیر AC. اگر این زاویه از دایرهٔ دیگری به‌مرکز B قوس $A'C'$ را جداکند، آنگاه قطاعهای مستدیر $A'B'C'$ و ABC باهم متشابه‌اند. درنتیجه، نسبت طول قوس به شعاع یکی از آن دو، با نسبت نظیرش از دیگری مساوی است. بنا به‌نمادهای شکل ۲۲۰۲ این بدین‌معناست که

$$\frac{\text{طول قوس } A'C'}{r} = \frac{\text{طول قوس } AC}{1}$$

یا

$$\frac{s}{r} = \frac{\theta}{1} = \theta \,. \qquad (\text{۴ الف})$$

این رابطه صرفنظر از بزرگی یا کوچکی شعاع دایرهٔ دوم درست است. پس درمورد هردایره‌ای که مرکزش B باشد، نسبت طول قوس جدا شده به‌شعاع دایره، s/r، همواره اندازهٔ رادیانی‌زاویه



۲۲۰۲ اندازهٔ رادیانی زاویه‌ای به‌مرکز B عبارت است از $s/r = \theta/1 = \theta$.

را به‌دست می‌دهد.

معادلات (۴ الف) را گاه به‌صورت

$$s = r\theta \qquad (\text{۴ ب})$$

هم می‌نویسند. این‌صورت معادله برای محاسبهٔ طول قوس s وقتی که شعاع r و اندازهٔ رادیانی زاویه معلوم باشند مناسب است.

اگر درمعادلهٔ (۴ ب)، $r = 1$ باشد، تعبیرمفیدی از اندازهٔ رادیانی به‌دست می‌آید. زاویهٔ مرکزی θ، برحسب‌رادیان، برابر با قوس s روبه‌رو به θ است. اگر روی محیط دایره مقیاسی در نظرگرفته شود، از روی آن می‌توانیم اندازهٔ θ را بخوانیم. فرض‌کنید خط مدرجی، نظیرمحور y یک واحد به‌راست انتقال یابد و به‌دور دایره پیچانده شود. واحد این‌خط مدرج به‌اندازهٔ شعاع واحد دایره‌است. صفرخط مدرج‌را همان جایی‌قرارمی‌دهیم که محور x دایره را قطع می‌کند. قسمت منفی‌خط مدرج درجهت حرکت عقربه ساعت، و قسمت مثبت آن درجهت مخالف (شکل ۲۳۰۲ را ببینید) به‌دور دایره می‌پیچد. دراین‌صورت می‌توانیم θ را از روی این‌محور خمیده، یعنی «محور s» بخوانیم.

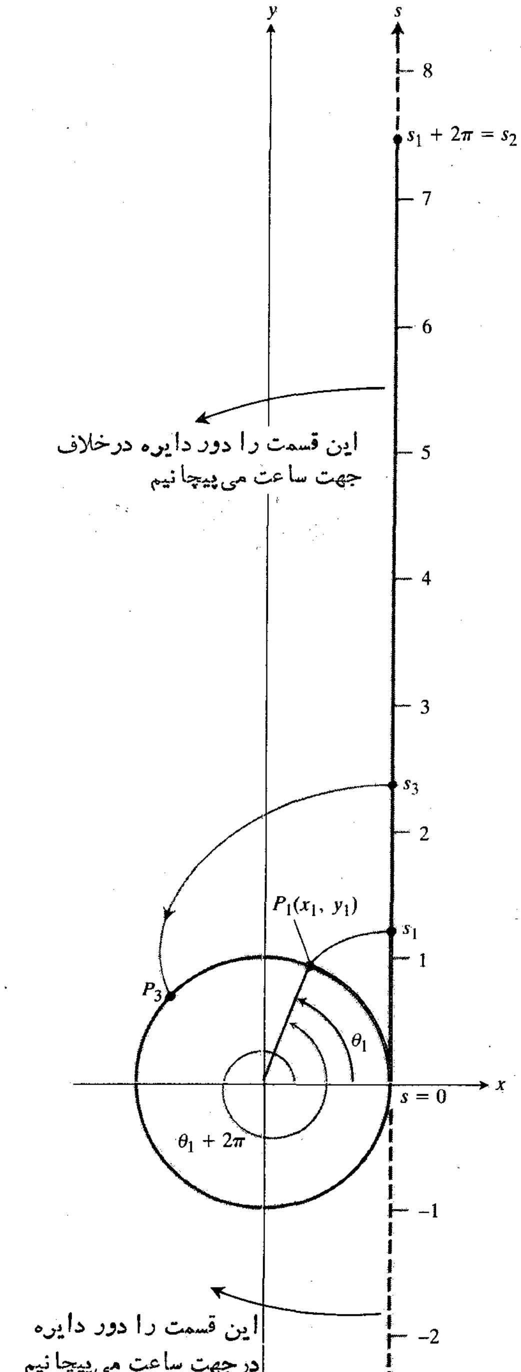
وقتی‌عمل پیچاندن خط به‌دور دایره انجام شد، دو نقطهٔ واقع برمحور s که دقیقاً 2π واحدفاصله داشته‌باشند برتنها یك‌نقطهٔ دایرهٔ واحد قرارمی‌گیرند. مثلاً اگر $P_1(x_1, y_1)$ نقطه‌ای‌باشد که قوس به‌طول s_1 به‌آن منتهی شود، آنگاه قوسهای به‌طول $s_1 + 2\pi$، $s_1 + 4\pi$، وغیره هم وقتی یك یا دو یا چندبار به‌طورکامل به‌دور دایره بپیچند، دقیقاً به‌همان نقطه منتهی می‌شوند. به همین‌ترتیب، P_1 تصویرنقاط $s_1 - 2\pi$، $s_1 - 4\pi$، و غیره واقع برطرف‌منفی محور s هم هست. پس، با ملاحظهٔ محور s پیچیده به دور دایره می‌توانیم ببینیم که

$$\theta_1 = s_1$$

یا

$$\theta_1 + 2\pi, \quad \theta_1 + 4\pi, \ldots, \quad \theta_1 - 2\pi, \quad \theta_1 - 4\pi, \ldots .$$

یك واحد از طول قوس s که برابراست با طول یك‌شعاع،



۲۳۰۲ محور s را به‌دور دایرهٔ واحد می‌پیچانیم.

روبه‌روی زاویهٔ مرکزی (تقریباً) ′۵۷°۱۸ قراردارد. لذا

(۵) $\qquad$ ۱ رادیان ≈ ′۵۷°۱۸.

این رابطه و سایر روابط بین‌اندازه برحسب درجه و اندازه برحسب رادیان را می‌توان با استفاده از این مطلب به‌دست آورد که طول قوس کل محیط دایره $s = ۲\pi r$، و زاویهٔ مرکزی آن °۳۶۰ است. پس

(۶ الف) $\qquad$ ۳۶۰° = ۲π رادیان

(۶ ب) $\qquad$ ۱۸۰° = π رادیان = ۳٫۱۴۱۵۹۰۰۰ رادیان

(۶ پ) $\qquad$ $\left(\frac{۱۸۰}{\pi}\right)^{\circ}$ = ۱ رادیان ≈ ″۵۷°۱۷′۴۴٫۸

(۶ ت) $\qquad$ $۱^{\circ} = \frac{۲\pi}{۳۶۰} = \frac{\pi}{۱۸۰}$ ≈ ۰٫۰۱۷۴۵ رادیان

اما باید تأکید شود که اندازهٔ رادیانی زاویه، بی‌بعد است زیرا r و s موجود درمعادلات (۴ الف) و (۴ ب) هردوطولهایی‌را نشان می‌دهند که با یك واحد یکسان،مثلاً فوت، اینچ، سانتیمتر، یا سال نوری اندازه گیری‌می‌شوند. پس $\theta =$ ۲٫۷ به‌عنوان یك عدد مطلق درنظر گرفته‌می‌شود. سینوس وکسینوس ۲٫۷ به‌ترتیب عرض وطول نقطهٔ $P(x, y)$ واقع بردایرهٔ به‌شعاع rاندکه درانتهای‌قوسی به‌طول ۲٫۷ برابر شعاع قرار دارد. درعمل می‌توانیم ۲٫۷ رادیان را به ۲٫۷(۱۸۰/π) درجه برگردانیم و بگوییم که

$$\sin ۲٫۷ = \sin\left[۲٫۷\left(\frac{۱۸۰}{\pi}\right)^{\circ}\right]$$
$$\approx \sin(۱۵۴^{\circ}۴۱'۵۵'')$$
$$\approx ۰٫۴۲۷۳۸\ .$$

جدول ۱.۲ مقادیرتوابع سینوسی،کسینوسی، و تانژانتی‌را به‌ازای برخی از مقادیر θ به‌دست می‌دهد.

تناوبی بودن

نگاشتی از اعداد حقیقی s برنقاط $P(x, y)$ واقع بردایرهٔ واحد که به‌روش فوق، و طبق شکل ۲۳.۲ به‌دست می‌آید، مختصات را به‌صورت توابعی از s تعریف می‌کند، زیرا با استفاده از معادلات (۱) به‌ازای $\theta = s$، و $r = ۱$ می‌توان نوشت

$$x = \cos\theta = \cos s,\quad y = \sin\theta = \sin s\ .$$

چون $s + ۲\pi$ به‌همان نقطه می‌رودکه s، نتیجه می‌گیریم که

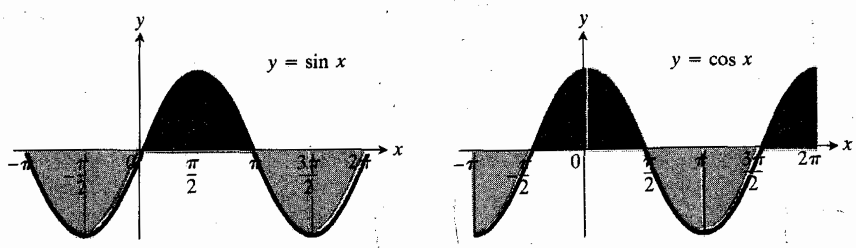
$$\cos(\theta + ۲\pi) = \cos\theta,\quad \sin(\theta + ۲\pi) = \sin\theta\ . \qquad (۷)$$

معادلات (۷) **اتحادند**؛ یعنی، به‌ازای‌همهٔ اعداد حقیقی θ برقرارند. این اتحادها به‌ازای $\theta' = \theta + ۲\pi$ هم برقرارند

$$\sin\theta' = \sin(\theta' - ۲\pi) \qquad \text{و}$$
$$\cos\theta' = \cos(\theta' - ۲\pi)\ . \qquad (۸)$$

جدول ۱۰۲ مقادیر $\sin\theta$، $\cos\theta$، و $\tan\theta$ به‌ازای برخی از مقادیر θ

درجه	۱۸۰	۱۳۵	۹۰	۴۵	۰	−۴۵	−۹۰	−۱۳۵	−۱۸۰
θ رادیان	π	$۳\pi/۴$	$\pi/۲$	$\pi/۴$	۰	$-\pi/۴$	$-\pi/۲$	$-۳\pi/۴$	$-\pi$
$\sin\theta$	۰	$\sqrt{۲}/۲$	۱	$\sqrt{۲}/۲$	۰	$-\sqrt{۲}/۲$	−۱	$-\sqrt{۲}/۲$	۰
$\cos\theta$	−۱	$-\sqrt{۲}/۲$	۰	$\sqrt{۲}/۲$	۱	$\sqrt{۲}/۲$	۰	$-\sqrt{۲}/۲$	−۱
$\tan\theta$	۰	−۱		۱	۰	−۱		۱	۰



۲۴۰۲ مقدار سینوس در x همان مقدار کسینوس در $(x-\pi/۲)$ است؛ یعنی $\sin x=\cos(x-\pi/۲)$.

بنا به‌معادلات (۷) و (۸)، می‌توانیم ۲π را به‌متغیرمربوط به‌دامنهٔ توابع سینوسی و کسینوسی بیفزاییم یا ازآن کم کنیم بدون اینکه درمقادیر تابع تغییری حاصل شود. این‌روند را می‌توان هرچندبار که لازم باشد تکرار کرد. درنتیجه

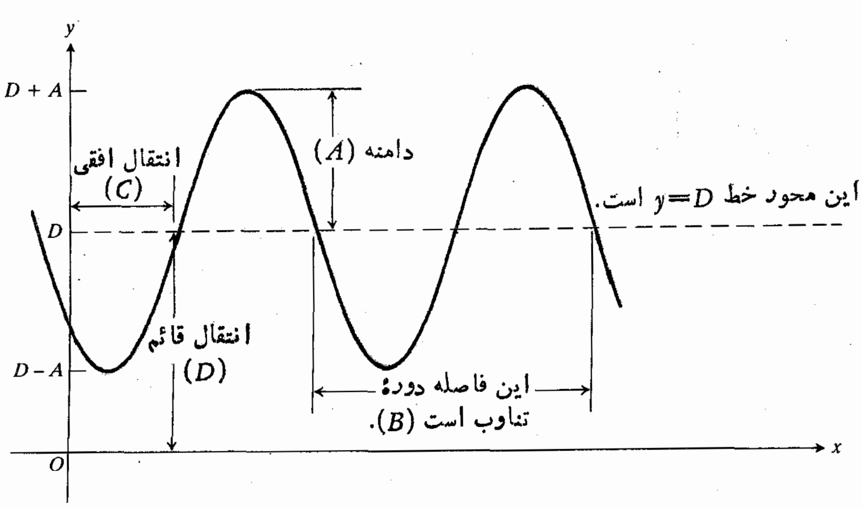
$$\cos(\theta+۲n\pi)=\cos\theta$$
$$\sin(\theta+۲n\pi)=\sin\theta \qquad (۹)$$
$$n=۰,\ \pm۱,\ \pm۲,\ \cdots\ .$$

شکل ۲۴.۲ نمودارهای‌خمهای $y=\sin x$ و $y=\cos x$ را نشان می‌دهد. بخشی از هرخم‌که بین ۰ و ۲π واقع است بینهایت‌بار در دوطرف چپ و راست تکرار می‌شود. همچنین باید بدانیم که خم کسینوسی همان خم سینوسی است که به اندازهٔ $\pi/۲$ به‌چپ انتقال یافته است.

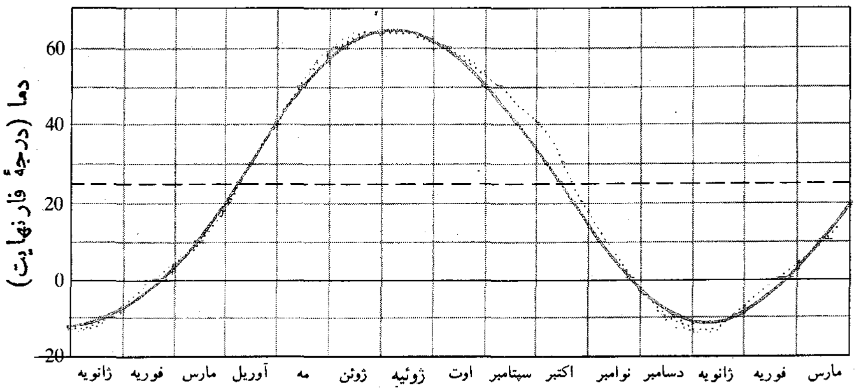
مثال ۲ پیمانکاران خط لولهٔ سراسری آلاسکا برای جلوگیری از تبادل گرما بین نفت گرم داخل لوله‌ها و خاك دائماً یخ‌زدهٔ زیرآن از بالشتکهای عایق استفاده کرده‌اند. برای طراحی بالشتکها لازم بودکه تغییر دمای هوا در طول سال مورد توجه قرارگیرد. این تغییر درمحاسبات با یك تابع سینوسی عام به‌صورت

$$f(x)=A\sin\left[\frac{۲\pi}{B}(x-C)\right]+D$$

که در آن $|A|$ دامنه، $|B|$ دورهٔ تناوب، C انتقال افقی، و D انتقال قائم است، نشان داده می‌شد (شکل ۲۵۰۲).



۲۵۰۲ نمودار خم سینوسی عام $y=A\sin[(۲\pi/B)(x-C)]+D$ به‌ازای A، B، C، و D مثبت.



۲۶.۲ میانگین نرمال دمای هوا در فربانکز آلاسکا که براساس داده‌ها به‌صورت نقطه نقطه رسم شده است، تابع سینوسی تقریب‌زننده عبارت است از

$$f(x)=۳۷\sin\left[\frac{۲\pi}{۳۶۵}(x-۱۰۱)\right]+۲۵\,.$$

شکل ۲۶.۲ نشان می‌دهد که چنین تابعی‌را چگونه می‌توان برای نمایش داده‌های‌مربوط به‌دما به‌کار برد. در این شکل نقاط نشان‌دهنده داده‌هایی هستند که میانگین دمای هوای فربانکز آلاسکا را مشخص می‌کنند؛ این ارقام مربوط به‌سالهای ۱۹۴۱ تا ۱۹۷۰ است و ازسازمان ملی هواشناسی آمریکا گرفته شده‌است. ازنمودار تابع سینوسی زیر، که در آن f دما برحسب درجهٔ فارنهایت، و x تعداد روزهای سپری شده ازآغاز سال است، برای تقریب‌زدن نمودار داده‌ها استفاده‌شده‌است که تقریب‌فوق‌العاده‌خوبی‌نیزهست.

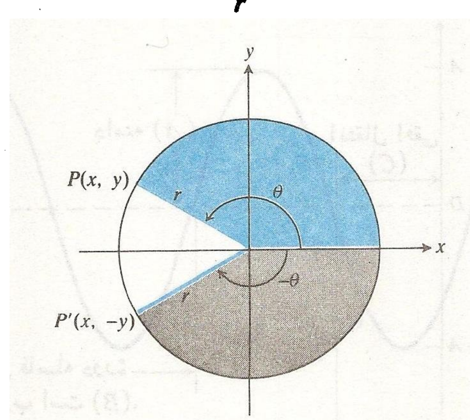
$$f(x)=۳۷\sin\left[\frac{۲\pi}{۳۶۵}(x-۱۰۱)\right]+۲۵\,. \qquad \blacksquare$$

فرمولهای مجموع

شکل ۲۷.۲ دوزاویه را نشان می‌دهدکه اندازهٔ برابردارند ولی علامتشان مختلف است. بنابه‌تقارن، دونقطهٔ محل تقاطع دایره با دوضلع انتهایی‌این‌دو زاویه، مختص‌x برابردارند، و مختصهای y آنها قرینه‌اند. پس

$$\sin(-\theta)=-\frac{y}{r}=-\sin\theta \qquad (۱۰\ \text{الف})$$

$$\cos(-\theta)=\frac{x}{r}=\cos\theta\,. \qquad (۱۰\ \text{ب})$$



۲۷.۲ زوایای با علامات مخالف.

مثلاً[۴]

$$\sin\left(-\frac{\pi}{۲}\right)=-\sin\frac{\pi}{۲}=-۱$$

و

$$\cos\left(-\frac{\pi}{۲}\right)=\cos\frac{\pi}{۲}=۰\,.$$

به دلایلی که به‌زودی روشن می‌شود، یادآوری فرمولهای زیرسودمند است.

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B \qquad (۱۱\ \text{الف})$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B \qquad (۱۱\ \text{ب})$$

این فرمولها را درپیوست ۴ به‌دست می‌آوریم.

اگر به‌فرمولهای مربوط به‌سینوس‌وکسینوس تفاضل‌دو زاویه نیاز داشته‌باشیم می‌توانیم در معادلات (۱۱ الف) و (۱۱ ب)، به‌جای B، $-B$ قراردهیم. چون

$$\sin(-B)=-\sin B \quad \text{و} \quad \cos(-B)=\cos B$$

داریم

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B \qquad (۱۱\ \text{پ})$$

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B \qquad (۱۱\ \text{ت})$$

فرمولهای دوبرابرزاویه و یک حد مفید

اگر در معادلات (۱۱ الف) و (۱۱ب) داشته‌باشیم $A=B=\theta$، آنگاه

$$\sin ۲\theta=۲\sin\theta\cos\theta \qquad (۱۲\ \text{الف})$$

$$\cos ۲\theta=\cos^۲\theta-\sin^۲\theta\,. \qquad (۱۲\ \text{ب})$$

حال معادلات زیر را درنظر بگیرید

$$\cos^۲\theta+\sin^۲\theta=۱,\quad \cos^۲\theta-\sin^۲\theta=\cos ۲\theta\,.$$

با جمع کردن دومعادله داریم

$$2\cos^2\theta = 1+\cos 2\theta\ .$$

و با تفریق یکی از دیگری به‌دست می‌آوریم

$$2\sin^2\theta = 1-\cos 2\theta\ .$$

ازتقسیم دوطرف معادلات حاصل بر ۲ داریم

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \tag{۱۳الف}$$

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}\ . \tag{۱۳ ب}$$

جای دوطرف معادلهٔ آخر را عوض وآنها را بر θ تقسیم می‌کنیم

$$\frac{1-\cos 2\theta}{2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\theta}\ . \tag{۱۴}$$

پس

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos 2\theta}{2\theta} &= \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta}{\theta}\\ &= \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\sin\theta\right)\\ &= \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\cdot\lim_{\theta\to 0}\sin\theta\\ &= 1\times 0 = 0\ .\end{aligned}$$

جانشانی $h=2\theta$ عبارت ساده‌تر زیر را به‌دست می‌دهد

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h} = 0\ . \tag{۱۵}$$

دربخش ۷.۲ بـرای محاسبهٔ مشتق $y=\sin x$ از این‌حد استفاده خواهیم‌کرد.

---

۰۱. چند تعریف و چند اتحاد اصلی

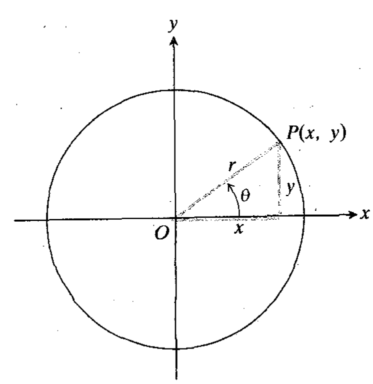
$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\csc\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sec\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{\cot\theta}$$

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$



$$\sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$$

$$\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$$

$$\csc^2\theta = 1+\cot^2\theta\ .$$

۰۲. فرمولهای دوبرابر زاویه

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta,\quad \cos 2\theta = \cos^2\theta-\sin^2\theta$$

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2},\quad \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}\ .$$

۰۳. فرمولهای مجموع

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B-\sin A\sin B\ .$$

۰۴. فرمولهای انتقال

$$\sin\left(A-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos A,\quad \cos\left(A-\frac{\pi}{2}\right) = \sin A$$

$$\sin\left(A+\frac{\pi}{2}\right) = \cos A,\quad \cos\left(A+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin A\ .$$

فهرست جامعتری از فرمولهای مثلثاتی درپیوست ۳ آمده‌است.

مسأله‌ها

راهنمایی برای رسم نمودار توابع سینوسی وکسینوسی:

i) دامنه، دورهٔ تناوب، و انتقال را بیابید.

ii) خم را به‌طور تقریبی رسم کنید.

iii) محورها را رسم، وآنها را مقیاس‌گذاری کنید؛ سپس خم را کامل کنید.

به‌یاد داشته‌باشید که زاویه برحسب رادیان است.

درمسأله‌های ۱ـ۲۰ نمودار معادلات را رسم کنید.

۰۱. $y=2\sin x$

۰۲. $y=5\sin 2x$

۰۳. $y=\sin(-x)$

۰۴. $y=\sin 2\pi x$

۰۵. $y=2\cos 3x$

۰۶. $y=\tan(x/3)$

۰۷. $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{۲}\right)$

۰۸. $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{۲}\right)$

۰۹. $y=|\cos x|$

۰۱۰. $y=\frac{۱}{۲}(|\cos x|+\cos x)$

۰۱۱. $y=\frac{۱}{۲}(|\sin x|-\sin x)$

۰۱۲. $y=\sin^۲ x$

۰۱۳. $y=\cos^۲ x$

۰۱۴. $y=\sin x+\cos x$

۰۱۵. $y=\sin x-\cos x$

۰۱۶. $y=\cos ۲\pi(x+۱)$

۰۱۷. $y=۲\cos(۴x-۲\pi),\quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi$

۰۱۸. $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{۴}\right),\quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi$

۰۱۹. $y=\sec x$، و $y=\cos x$ باهم، $-۲\pi\leqslant x\leqslant ۲\pi$

۰۲۰. $y=\sin x$، $y=\cos x$، و $y=\tan x$ دریك نمودار، $-۲\pi\leqslant x\leqslant ۲\pi$

۰۲۱. مطلوب است (الف) دامنه، (ب) دورهٔ تناوب، (پ) انتقال افقی، و (ت) انتقال قائم تابع سینوسی عام

$$f(x)=۳۷\sin\left[\frac{۲\pi}{۳۶۵}(x-۱۰۱)\right]+۲۵\,.$$

۰۲۲. با استفاده از رابطهٔ مسألهٔ ۲۱ جواب سؤالهای زیر را که در مورد دماهای فربانکز آلاسکا، شکل ۲۶.۲، هستند تقریب بزنید. فرض‌کنید سال ۳۶۵ روز است.

الف) بالاترین میانگین دمای روزانه چقدراست؟

ب) پایینترین میانگین دمای روزانه چقدراست؟

پ) متوسط بالاترین میانگین و پایینترین میانگین دمای روزانه چقدراست؟ چرا این‌مقدارمتوسط، برابرانتقال قائم تابع است؟

درمسألههای ۲۳ـ۲۶ حدها را بیابید.

۰۲۳. $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{(\sin h)(۱-\cos h)}{h^۲}$

۰۲۴. $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{x^۲}$

۰۲۵. $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{\sin x}$ (راهنمایی: صورت و مخرج را بر x تقسیم کنید.)

۰۲۶. $\lim\limits_{x\to ۰} x\cot x$

۰۲۷. درمعادلهٔ (۱۱ ت) فرض‌کنید $A=B$. آیا این‌نتیجه با آنچه می‌دانید سازگار است؟

۰۲۸. توابع فرد و زوج. تابعی چون $f(\theta)$ تابعی زوج از θ است هرگاه به‌ازای همهٔ θها، $f(-\theta)=f(\theta)$، و این‌تابع تابعی فرد از θ است هرگاه به‌ازای‌همهٔ θها، $f(-\theta)=-f(\theta)$. ازشش تابع اصلی مثلثاتی کدام فرد وکدام زوج‌اند؟

برای اینکه اتحادهای موجود در مسأله‌های ۲۹ـ۳۴ را به‌دست آورید از فرمولهای $\sin(A+B)$ و $\cos(A+B)$ استفاده کنید.

۰۲۹. $\sin\left(x-\frac{\pi}{۲}\right)=-\cos x$

۰۳۰. $\sin\left(x+\frac{\pi}{۲}\right)=\cos x$

۰۳۱. $\cos\left(x-\frac{\pi}{۲}\right)=\sin x$

۰۳۲. $\cos\left(x+\frac{\pi}{۲}\right)=-\sin x$

۰۳۳. $\sin(\pi-x)=\sin x$

۰۳۴. $\cos(\pi-x)=-\cos x$

۰۳۵. فرمولهای تانژانت. فرمول متداول برای تانژانت مجموع دو زاویه عبارت است از

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{۱-\tan A\tan B}\,.$$

الف) برای یافتن این‌فرمول، $\tan(A+B)$ را به‌صورت $\sin(A+B)/\cos(A+B)$ بنویسید و فرمولهای (۱۱ الف) و (۱۱ ب) را به‌کار ببرید.

ب) فرمول‌متناظر برای $\tan(A-B)$ چیست؟ (راهنمایی: $\tan(-B)=-\tan B$.)

TOOLKIT PROGRAMS

Function Evaluator — Name That Function

Limit Problems — Super * Grapher

۷.۲ مشتق تابعهای مثلثاتی

دراین بخش مشتقهای توابع مثلثاتی را به‌دست می‌آوریم. ابتدا با کاربرد مستقیم تعریف مشتق از $\sin x$ مشتق می‌گیریم. سپس از قواعد مشتقگیری متداول و اتحادهای مثلثاتی استفاده می‌کنیم و مشتقهای سایر توابع مثلثاتی را به‌دست می‌آوریم.

مشتق سینوس

بنا بر تعریف مشتق می‌دانیم که مشتق $y=\sin x$ نسبت به x عبارت است از حد

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\cdot$$

برای محاسبهٔ این حد، سه نتیجه از بحثهای قبلی خودمان را به‌کار می‌بریم

۱. $\sin(x+h)=\sin x\cos h+\cos x\sin h$

(بخش ۶.۲، معادلهٔ ۱۱ الف)

۲. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h}=1$ (بخش ۹.۱، معادلهٔ ۱۳)

۳. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos h-1}{h}=0$ (بخش ۶.۲، معادلهٔ ۱۵)

حال حدها را وقتی $h\to 0$ محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\lim\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\&=\lim\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}\\&=\lim\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h}\\&=\lim\left(\sin x\frac{\cos h-1}{h}\right)+\lim\left(\cos x\frac{\sin h}{h}\right)\\&=\sin x\lim\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\lim\frac{\sin h}{h}\\&=\sin x\cdot 0+\cos x\cdot 1\\&=\cos x\cdot\end{aligned}$$

مشتق $y=\sin x$ نسبت به x عبارت است از

$$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x\cdot \tag{1}$$

اگر u تابع مشتقپذیری از x باشد، می‌توانیم قاعدهٔ زنجیری

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

را درمورد $y=\sin u$ به‌کار ببریم و نتیجه بگیریم که

$$\frac{d}{dx}\sin u=\cos u\frac{du}{dx}\cdot \tag{2}$$

مثال ۱

الف) $$\frac{d}{dx}\sin 2x=\cos 2x\frac{d}{dx}(2x)=2\cos 2x$$

ب) $$\frac{d}{dx}\sin x^5=\cos x^5\frac{d}{dx}(x^5)=5x^4\cos x^5$$

پ) $$\frac{d}{dx}\sin^5 x=5\sin^4 x\frac{d}{dx}(\sin x)=5\sin^4 x\cos x\cdot$$ ■

پاسخ به‌پرسش «چرا درحساب دیفرانسیل و انتگرال از اندازهٔ رادیانی استفاده می‌کنیم» در استدلال مربوط به این حکم نهفته است که مشتق سینوس، کسینوس است. این استدلال ایجاب می‌کند که

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1\cdot$$

این حد ۱ است تنها اگر اندازهٔ h برحسب رادیان باشد.

مثال ۲ اگر

$$xy+\sin y=0$$

dy/dx را با مشتقگیری ضمنی بیابید.

حل: از دوطرف معادله مشتق می‌گیریم، و y را به‌عنوان تابع مشتقپذیری از x تلقی می‌کنیم

$$x\frac{dy}{dx}+y+\cos y\frac{dy}{dx}=0$$

$$(x+\cos y)\frac{dy}{dx}+y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x+\cos y}\cdot$$ ■

مشتق کسینوس

به‌منظور به‌دست‌آوردن فرمولی برای مشتق $\cos u$، از اتحادهای

$$\cos u=\sin\left(\frac{\pi}{۲}-u\right), \quad \sin u=\cos\left(\frac{\pi}{۲}-u\right)$$

به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم

$$\frac{d}{dx}\cos u=\frac{d}{dx}\sin\left(\frac{\pi}{۲}-u\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{۲}-u\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{۲}-u\right)$$

$$=\sin u\left(-\frac{du}{dx}\right).$$

بنابراین

$$\frac{d}{dx}(\cos u)=-\sin u\frac{du}{dx}. \qquad (۳)$$

مشتق کسینوس تابعی مشتق‌پذیر برابر است با منهای سینوس تابع ضربدر مشتق تابع.

مثال ۳

الف)

$$\frac{d}{dx}\cos ۳x=-\sin ۳x\frac{d}{dx}(۳x)=-۳\sin ۳x$$

ب)

$$\frac{d}{dx}\cos^۲ ۳x=۲\cos ۳x\frac{d}{dx}\cos ۳x$$

$$=۲\cos ۳x(-۳\sin ۳x)$$

$$=-۶\sin ۳x\cos ۳x. \qquad ■$$

توجه: درمثال ۳ (ب) پاسخ را می‌توان به‌صورتهای‌دیگری نیز نوشت. مثلاً می‌توانیم از اتحاد

$$۲\sin\theta\cos\theta=\sin ۲\theta$$

و $\theta=۳x$ استفاده‌کنیم و پاسخ را به‌صورت زیر بنویسیم

$$-۶\sin ۳x\cos ۳x=-۳\sin ۶x.$$

اگر دریك مسألهٔ مشتقگیری درمثلثات به‌جوابی برسیدکه با جواب شخص دیگری تفاوت داشته‌باشد ممکن است هردو جواب درست باشد.

مشتق تابعهای مثلثاتی دیگر

چون $\sin x$ و $\cos x$ توابع مشتق‌پذیری از xاند، توابع

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$$
$$\sec x=\frac{۱}{\cos x}, \quad \csc x=\frac{۱}{\sin x} \qquad (۴)$$

به‌ازای هرمقداری از x که تعریف بشوند،مشتق‌پذیرند. مشتق این توابع را می‌توان از قاعدهٔ خارج‌قسمت محاسبه‌کرد.

مثال ۴

الف) اگر $y=\tan x$، dy/dx را بیابید.
ب) اگر $y=\tan u$، و u تابع مشتق‌پذیری از x باشد، dy/dx را بیابید.

حل:

الف)

$$\frac{d}{dx}\tan x=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$=\frac{\cos x\frac{d}{dx}(\sin x)-\sin x\frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^۲ x}$$

$$=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^۲ x}$$

$$=\frac{\cos^۲ x+\sin^۲ x}{\cos^۲ x}=\frac{۱}{\cos^۲ x}$$

$$=\sec^۲ x.$$

پس

$$\frac{d}{dx}\tan x=\sec^۲ x. \qquad (۵)$$

ب) اگر u تابع‌مشتق‌پذیری از x باشد، آنگاه می‌توانیم از قاعدهٔ زنجیری

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

درمورد $y=\tan u$ استفاده‌کنیم و به‌دست‌آوریم

$$\frac{d}{dx}\tan u=\sec^۲ u\frac{du}{dx}. \qquad (۶) \qquad ■$$

اگر u تابع‌مشتق‌پذیری از x باشد، قواعد مشتقگیری سه‌تابع دیگر موجود در برابریهای (۴) را می‌توان تقریباً با همان روشی به‌دست‌آورد که درمثال ۴ درمورد مشتق‌تانژانت به‌کار رفت. نتایج عبارت‌اند از

$$\frac{d}{dx}\sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx} \quad (۷)$$

$$\frac{d}{dx}\csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx} \quad (۸)$$

$$\frac{d}{dx}\cot u = -\csc^{2} u \frac{du}{dx}. \quad (۹)$$

درمسألههای مربوط بهمشتقگیری درمثلثات همیشه یك راه این است که قبل از محاسبهٔ مشتق تمام توابع مثلثاتی را به توابع سینوسی وکسینوسی تبدیل کنیم.

مثال ۵ اگر $y=\sec^{2}5x=(\cos 5x)^{-2}$، dy/dx را بهدست آورید.

حل: روش ۱. قاعدهٔ توان

$$\frac{d(u^{n})}{dx}=nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

را بهازای $u=\cos 5x$ و $n=-2$ بهکارمی گیریم

$$\frac{dy}{dx}=-2(\cos 5x)^{-3}\frac{d(\cos 5x)}{dx}$$

$$=(-2\sec^{3}5x)\left(-\sin 5x\frac{d(5x)}{dx}\right)$$

$$=10\sec^{3}5x\sin 5x. \quad (۱۰)$$

روش ۲. ازمعادلهٔ (۷) و قاعدهٔ توان استفاده میکنیم ونتیجهٔ زیر را بهدست میآوریم.

$$\frac{d}{dx}\sec^{2}5x=2(\sec 5x)^{1}\cdot\frac{d}{dx}(\sec 5x) \quad (۱۱)$$

$$=2\sec 5x\cdot\sec 5x\tan 5x\cdot\frac{d}{dx}(5x) \quad (۱۲)$$

$$=10\sec^{2}5x\tan 5x. \quad (۱۳) \blacksquare$$

چرا پاسخهای موجود درمعادلات (۱۰) و (۱۳) تفاوت دارند؟ این نیز نمونهٔ دیگریاست که درآن پاسخها ظاهراً متفاوت، اما هردو درستاند. اگر $\tan 5x$ درمعادلهٔ (۱۳) را بهصورت

$$\tan 5x=\frac{\sin 5x}{\cos 5x}$$

بنویسیم درمییابیم که

$$10\sec^{2}5x\tan 5x=10\sec^{2}5x\frac{\sin 5x}{\cos 5x}$$

$$=10\sec^{2}5x\cdot\frac{1}{\cos 5x}\cdot\sin 5x$$

$$=10\sec^{2}5x\cdot\sec 5x\cdot\sin 5x$$

$$=10\sec^{3}5x\sin 5x$$

که همان پاسخ موجود درمعادلهٔ (۱۰) است.

مثال ۶ اگر $y=\tan\sqrt{3x}$، dy/dx را بیابید.

حل:

$$\frac{dy}{dx}=\sec^{2}\sqrt{3x}\cdot\frac{d}{dx}(\sqrt{3x}) \quad \text{(قاعدهٔ زنجیری)}$$

$$=\sec^{2}\sqrt{3x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3x}}\frac{d}{dx}(3x) \quad \text{(بازهم قاعدهٔ زنجیری)}$$

$$=\sec^{2}\sqrt{3x}\frac{1}{2\sqrt{3x}}\cdot 3$$

$$=\frac{3\sec^{2}\sqrt{3x}}{2\sqrt{3x}}. \blacksquare$$

پیوستگی

چون هر شش تابع اصلی مثلثاتی مشتقپذیرند، بنابرقضیهٔ ۵ بخش ۱۰۱ همه خود بهخود پیوستهاند؛ بهاینمعنا کهبرایهریك ازتوابع اصلی مثلثاتی $f(x)$ وقتی $f(a)$ تعریف بشود داریم

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

لذا وقتی $x\to a$، میتوانیم حد بیشتر ترکیبات توابع مثلثاتیرا با محاسبهٔ آنها در $x=a$ بهدستآوریم.

خطیسازی

صورتهای خطی معمولی توابع مثلثاتی از معادلهٔ (۳) بخش ۴.۲ یعنی از

$$L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$

بهدست میآیند.

مثال ۷ صورت خطی $f(x)=\tan x$ را در $x=0$ بیابید.

حل: ازمعادلهٔ

$$L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$

به‌ازای $f(x)=\tan x$ و $a=0$ استفاده می‌کنیم. چون

$$f(0)=\tan(0)=0,\quad f'(0)=\sec^2(0)=1$$

داریم $L(x)=0+1(x-0)=x$. بنابراین نزدیك $x=0$ داریم

$$\tan x\approx x. \quad ■$$

مثال ۸ صورت خطی $f(x)=\cos x$ در $x=\pi/2$ را بیابید.

حل: از معادلهٔ

$$L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$

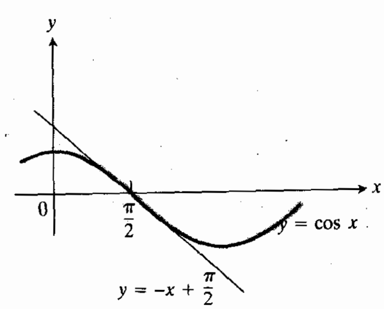
به‌ازای $f(x)=\cos x$ و $a=\pi/2$ استفاده می‌کنیم. چون

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$$

صورت‌خطی عبارت است از

$$L(x)=0-1\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-x+\frac{\pi}{2}.$$

شکل ۲۸.۲ را ببینید.



۲۸.۲ نمودار $y=\cos x$ و صورت‌خطی آن در $x=\pi/2$. نزدیك $x=\pi/2$ داریم، $\cos x\approx -x+(\pi/2)$. ■

درمسألهٔ ۵۴ ازشما خواسته می‌شود که صورت‌خطی $\sin x$ و $\cos x$ را در $x=0$ بیابید.

صورتهای خطی در $x=0$

تابع $f(x)$	صورت‌خطی $L(x)$
$\sin x$	x
$\cos x$	1
$\tan x$	x

مشتق توابع اصلی مثلثاتی

اگر u تابع مشتقپذیری از x باشد، آنگاه

۱. $\frac{d}{dx}\sin u=\cos u\frac{du}{dx}$

۲. $\frac{d}{dx}\cos u=-\sin u\frac{du}{dx}$

۳. $\frac{d}{dx}\tan u=\sec^2 u\frac{du}{dx}$

۴. $\frac{d}{dx}\sec u=\sec u\tan u\frac{du}{dx}$

۵. $\frac{d}{dx}\csc u=-\csc u\cot u\frac{du}{dx}$

۶. $\frac{d}{dx}\cot u=-\csc^2 u\frac{du}{dx}$.

مسأله‌ها

درمسأله‌های ۱-۳۶، dy/dx را بیابید.

۱. $y=\sin(x+1)$

۲. $y=-\cos x$

۳. $y=\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

۴. $y=\sin(-x)$

۵. $y=\cos 5x$

۶. $y=\cos(-x)$

۷. $y=\cos(-2x)$

۸. $y=\sin 7x$

۹. $y=\sin(3x+4)$

۱۰. $y=\cos(2-x)$

۱۱. $y=x\sin x$

۱۲. $y=\sin 5(x-1)$

۱۳. $y=x\sin x+\cos x$

۱۴. $y=\frac{1}{\sin x}$

۱۵. $y=\frac{1}{\cos x}$

۱۶. $y=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

۱۷. $y=\sec(x-1)$

۱۸. $y=\cot(-x)$

۱۹. $y=\sec(1-x)$

۲۰. $y=\dfrac{2}{\cos 3x}$

۲۱. $y=\tan 2x$

۲۲. $y=\cos(ax+b)$

۲۳. $y=\sin^2 x$

۲۴. $y=\sin^2 x+\cos^2 x$

۲۵. $y=\cos^2 5x$

۲۶. $y=\cot^3 x$

۲۷. $y=\tan(5x-1)$

۲۸. $y=\sin x-x\cos x$

۲۹. $y=2\sin x\cos x$

۳۰. $y=\sec(x^2+1)$

۳۱. $y=\sqrt{2+\cos 2x}$

۳۲. $y=\sin(1-x^2)$

۳۳. $y=\cos\sqrt{x}$

۳۴. $y=\sec^2 x-\tan^2 x$

۳۵. $y=\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{2}}$ (راهنمایی: ابتدا از فرمول نصف زاویه استفاده کنید.)

۳۶. $y=\sin^2 x^2$

فرض کنید که هریك از معادلات مذکور درمسأله‌های ۳۷ـ۴۱، y را به‌عنوان تابع مشتقپذیری از x تعریف می‌کند. dy/dx را با مشتقگیری ضمنی بیابید.

۳۷. $x=\tan y$

۳۸. $x=\sin y$

۳۹. $y^2=\sin^4 2x+\cos^4 2x$

۴۰. $x+\sin y=xy$

۴۱. $x+\tan(xy)=0$

۴۲. فرض کنید که‌معادلهٔ $2xy+\pi\sin y=2\pi$، y را به‌عنوان تابع مشتقپذیری از x تعریف می‌کند. وقتی $x=1$ و $y=\pi/2$، dy/dx را بیابید.

۴۳. معادله‌ای‌برای‌مماس برخم $x\sin 2y=y\cos 2x$ درنقطهٔ $(\pi/4, \pi/2)$ بیابید.

درمسأله‌های ۴۴ـ۵۱ حدها را بیابید.

۴۴. $\lim\limits_{x\to 2}\sin\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\right)$

۴۵. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin x}{\cos x}$

۴۶. $\lim\limits_{x\to -\pi}\cos^2 x$

۴۷. $\lim\limits_{x\to\pi}\sec(1+\cos x)$

۴۸. $\lim\limits_{x\to 0}(\sec x+\tan x)$

۴۹. $\lim\limits_{x\to 0}x\csc x$

۵۰. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(a+h)-\sin a}{h}$

۵۱. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos(a+h)+\cos a}{h}$

۵۲. معادله‌ای برای‌مماس‌برخم $y=\sin mx$ در $x=0$ بیابید.

۵۳. نمودار $y=\tan x$ و نمودار صورت خطی $y=x$ آن را دربازهٔ $-\pi/4\leqslant x\leqslant\pi/4$ رسم کنید.

۵۴. برای هـر تابع $f(x)$، صورت خطی‌آن، $L(x)$، را درنقطهٔ مفروض بیابید. مطلب را با رسم شکل روشن کنید.

الف) $f(x)=\sin x$ در $x=0$

ب) $f(x)=\sin x$ در $x=\pi$

پ) $f(x)=\cos x$ در $x=0$

ت) $f(x)=\cos x$ در $x=-\pi/2$

ث) $f(x)=\tan x$ در $x=\pi/4$

ج) $f(x)=\sec x$ در $x=\pi/4$

چ) $f(x)=\tan x$ در $x=-\pi/4$

ح) $f(x)=\sec x$ در $x=-\pi/4$

۵۵. آیا می‌توان مقداری برای b یافت که تابع زیر در $x=0$

پیوسته باشد؟ اگر چنین است، آن را بیابید. درغیر اینصورت علت را ذکر کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x+b & x<0 \\ \cos x & x\geqslant 0 \end{cases}.$$

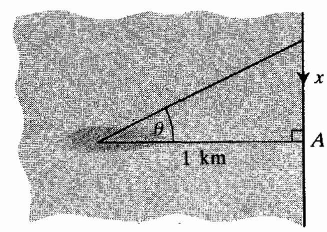
۵۶. شکل ۲۹.۲ قایقی را نشان می‌دهد که ۱ کیلومتر با ساحل فاصله دارد، و با نورافکنی ساحل را مراقبت می‌کند. نورافکن با آهنگ ثابت (سرعت‌زاویه‌ای) $d\theta/dt=-3/5$ رادیان درثانیه می‌چرخد.

الف) x را برحسب θ بیان کنید (شکل ۲۹.۲ را ببینید).

ب) از دوطرف معادلهٔ حاصل از (الف) نسبت به t مشتق بگیرید. به‌جای $d\theta/dt$، $-3/5$ قرار دهید. با این کار dx/dt به‌صورت تابعی از θ در خواهد آمد. (dx/dt آهنگ حرکت نور در امتداد ساحل است.)

پ) وقتی نور به نقطهٔ A می‌رسد، با چه‌سرعتی در امتداد ساحل حرکت می‌کند؟

ت) 0.6 رادیان درثانیه چند دور دردقیقه است؟



۲۹.۲ قایق درمسألهٔ ۵۶.

۵۷. صورت خطی $f(x)=\sqrt{1+x}+\sin x$ را در $x=0$ بیابید. این صورت خطی با هریك از صورتهای خطی جداگانهٔ $\sqrt{1+x}$ و $\sin x$ چه ارتباطی دارد؟

۵۸. جواب $2\cos x=\sqrt{1+x}$ را با انجام‌دادن عملیات زیر براورد کنید.

الف) فرض کنید $f(x)=2\cos x-\sqrt{1+x}$. نشان دهید $f(0)>0$ و $f(\pi/2)<0$ و لذا $f(x)$ بین 0 و $\pi/2$ ریشه دارد.

ب) صورتهای خطی $\cos x$ را در $x=\pi/4$ و $\sqrt{1+x}$ را در $x=0.69$ بیابید.

پ) **ماشین‌حساب** برای اینکه جواب معادلهٔ اصلی را براورد کنید، به‌جای $\cos x$ و $\sqrt{1+x}$ صورتهای خطی آنها را که در (ب) به‌دست آوردید قرار دهید و از معادلهٔ خطی حاصل x را بیابید. براورد را در معادلهٔ اصلی قرار دهید و درستی آن را بیازمایید.

۵۹. معادلهٔ (۷) را به‌کمك $\sec u=1/\cos u$ و مشتقگیری از آن نسبت به x به‌دست آورید.

۶۰. معادلهٔ (۸) را به‌کمك $\csc u=1/\sin u$ و مشتقگیری از آن نسبت به x به‌دست آورید.

۶۱. معادلهٔ (۹) را به‌کمك $\cot u=\cos u/\sin u$ و مشتقگیری از آن نسبت به x به‌دست آورید.

TOOLKIT PROGRAMS
Derivative Grapher   Super * Grapher
Function Evaluator

۸.۲ معادله‌های پارامتری

وقتی مسیرحرکت ذرهٔ متحرکی درصفحه نمودار یك تابع نباشد، نمی‌توانیم با بیان مستقیم y برحسب x، مسیر را توصیف کنیم. برای اجتناب از این مشکل، مختصات ذره را با دومعادله مانند معادلات زیر به‌صورت توابعی از یك‌متغیر سوم می‌نویسیم

$$x=f(t),\quad y=g(t). \tag{1}$$

این نوع معادلات را **معادلات پارامتری** x و y، و متغیر t را **پارامتر**می‌نامند. پارامتر t دربیشتر کاربردها زمان‌را نمایش‌می‌دهد، اما می‌تواند نمایشگر زاویه (چنانکه دربرخی از مثالهای زیردیده می‌شود) یا فاصله‌ای که ذره درامتداد مسیرش ازآغازمی‌پیماید نیز باشد. (مورد اخیرگاه درفصل ۱۴ هنگام‌مطالعهٔ مجدد حرکت پیش خواهدآمد.)

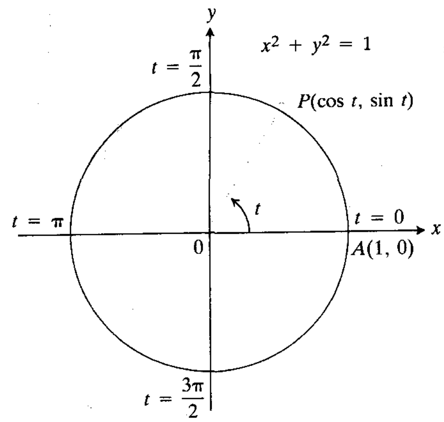
در این بخش چند خم را که با معادلات پارامتری توصیف می‌شوند مشخص می‌کنیم و ارتباط بین شیب این خمها و مشتقات توابعی را که x و y را تعریف می‌کنند به‌دست‌می‌آوریم. معرفی معادلات پارامتری دراینجا دو دلیل عملی‌دارد. اول اینکه، معادلاتی که درعمل به‌کارمی‌روند، غالباً شامل توابع مثلثاتی‌اند. دوم اینکه، برای‌محاسبهٔ dy/dx و d^2y/dx^2 بااستفاده‌ازنمایشهای‌پارامتری x و y، به‌قاعدهٔ زنجیری نیاز داریم.

مثال ۱ معادلات

$$x=\cos t\quad y=\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

موضع $P(x,y)$ ذره‌ای را که با افزایش t حول دایرهٔ واحد $x^2+y^2=1$ درخلاف جهت ساعت می‌چرخد، نشان می‌دهند (شکل ۳۰.۲).

بحث چون به‌ازای‌هرمقدار t، $\cos^2 t+\sin^2 t=1$، نقطهٔ $P(x,y)=(\cos t,\sin t)$ بردایرهٔ $x^2+y^2=1$ قرار دارد. پارامتر t اندازهٔ رادیانی زاویه‌ای است که شعاع OP با قسمت مثبت محور x می‌سازد. ذره حرکت خود را از $A(1,0)$ آغاز می‌کند؛ وقتی t به $\pi/2$ میل می‌کند، ذره به بالا وچپ می‌رود، و



۳۰٫۲ معادلات $x=\cos t$ و $y=\sin t$ حرکت بردایرهٔ واحد $x^۲+y^۲=۱$ را توصیف‌می‌کنند. پیکان، جهت افزایش t را نشان می‌دهد.

به حرکت خود حول دایره ادامه می‌دهد تا وقتی‌که در $t=۲\pi$ دوباره به $A(۱, ۰)$ برسد و درآنجا متوقف شود.

اگر به‌جای بازهٔ $۰ \leqslant t \leqslant ۲\pi$ بازهٔ دلخواه $t_۰ \leqslant t \leqslant t_۰+۲\pi$ به‌طول ۲π را در نظر گیریم، ذره از $(\cos t_۰, \sin t_۰)$ حرکت را آغاز می‌کند، یك دور درخلاف جهت‌ساعت به‌دوردایره‌می‌چرخد و مجدداً در

$$(\cos(t_۰+۲\pi), \sin(t_۰+۲\pi))=(\cos t_۰, \sin t_۰)$$

متوقف می‌ایستد. ■

مثال ۲ معادلات

$$x=\cos t, \quad y=\sin t, \quad ۰ \leqslant t \leqslant \pi$$

موضع $P(x, y)$ ذره‌ای را که نیمهٔ بالایی دایرهٔ واحد را از $A(۱, ۰)$ تا $B(-۱, ۰)$ درخلاف جهت ساعت می‌پیماید نشان می‌دهند. آغاز حرکت نظیر مثال ۱ است، اما ذره پس از نیمدور متوقف می‌شود. ■

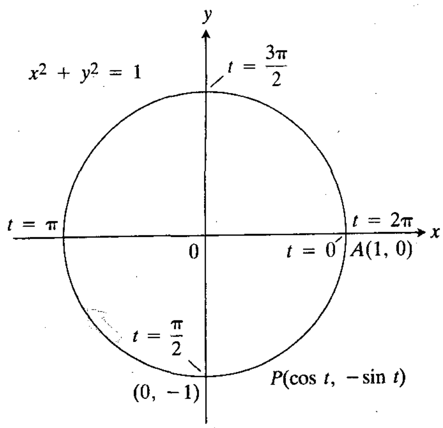
مثال ۳ معادلات

$$x=\cos t, \quad y=-\sin t, \quad ۰ \leqslant t \leqslant ۲\pi$$

موضع $P(x, y)$ ذره‌ای را که درجهت ساعت حول دایرهٔ $x^۲+y^۲=۱$ حرکت می‌کند، نمایش می‌دهند. حرکت ذره از $A(۱, ۰)$ آغاز می‌شود، اما ابتدا وقتی t زیاد می‌شود، y تقلیل می‌یابد. مثلاً وقتی $t=\pi/۲$، داریم

$$P(x, y)=\left(\cos\frac{\pi}{۲}, -\sin\frac{\pi}{۲}\right)=(۰, -۱).$$

شکل ۳۱٫۲ را ببینید.

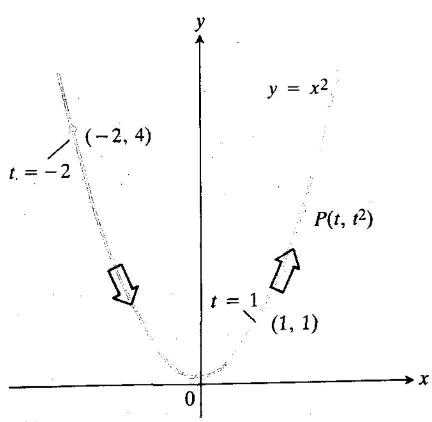


۳۱٫۲ وقتی t افزایش می‌یابد، نقطهٔ $P(\cos t, -\sin t)$ درجهت ساعت حرکت می‌کند. ■

مثال ۴ معادلات

$$x=t, \quad y=t^۲, \quad -\infty < t < \infty$$

موضع $P(x, y)$ ذره‌ای برسهمی $y=x^۲$ را مشخص‌می‌کنند. اگر بین‌معادلات x و y، t را حذف کنیم، داریم $y=x^۲$. پس، مختصات P درهرزمان t، درمعادلهٔ دکارتی $y=x^۲$ صدق می‌کنند. وقتی t از مقادیرمنفی به‌مقادیرمثبت برود، ذره درسمت چپ پایین‌می‌آید، ازمبدأ می‌گذرد، و سپس درسمت راست بالا می‌رود. شکل ۳۲٫۲ را ببینید.



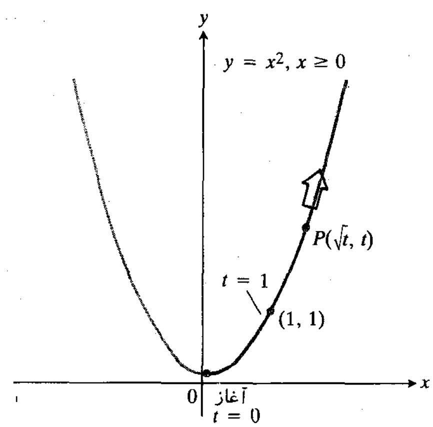
۳۲٫۲ پیکانها چگونگی حرکت P هنگام افزایش t را نشان می‌دهند. ■

همان‌گونه که مثال ۴ نشان می‌دهد، نمودار هر تابعی چون $y=f(x)$ صورت پارامتری $x=x$، $y=f(x)$ را دارد. این صورت پارامتری چنان ساده است که معمولاً مورد استفاده قرار نمی‌گیرد؛ اما، گاه به‌فهم مطلب کمك می‌کند.

مثال ۵ معادلات

$$x=\sqrt{t},\quad y=t,\quad t\geqslant ۰$$

حرکت ذره‌ای را برروی نیمهٔ راست سهمی $y=x^۲$ مشخص می‌کنند. اگر با درآمیختن معادلات x و y، t را حذف کنیم، داریم $y=t=(\sqrt{t})^۲=x^۲$. پس، به‌ازای هر $t\geqslant ۰$، نقطهٔ $P(\sqrt{t},t)$ برسهمی $y=x^۲$ قراردارد. اما، مختص x ذره، $x=\sqrt{t}$، هرگز منفی نیست، پس ذره صرفاً قسمت راست سهمی را طی می‌کند. حرکت ذره از مبدأ آغاز می‌شود، و حین افزایش t، حرکت در ربع اول ادامه می‌یابد. شکل ۳۳.۲ را ببینید.



۳۳.۲ معادلات $x=\sqrt{t}$، $y=t$ حرکت ذره‌ای را نشان‌می‌دهند که برنیمهٔ راست‌سهمی $y=x^۲$ حرکت می‌کند. ■

فرمول پارامتری dy/dx

فرض کنید $x=f(t)$ و $y=g(t)$ توابع مشتق‌پذیری از t باشند و dx/dt در بازهٔ مربوط به مقادیر t هرگز صفرنشود. آنگاه به‌دلایلی که مختصراً در بخش ۱.۶ ذکر خواهد شد، می‌توان معادلهٔ $x=f(t)$ را، که x را به‌عنوان تابع مشتق‌پذیری از t تعریف می‌کند، به‌صورتی درآورد که t را به‌عنوان تابع مشتق‌پذیری از x تعریف کند. موقتاً این تابع را $t=h(x)$ می‌گیریم. چون t تابع مشتق‌پذیری از x، و y تابع مشتق‌پذیری از t است، ترکیب $y=g\circ h$ تابع مشتق‌پذیری از x خواهد بود و به‌ازای هر مقدار خاص x، داریم $y=g(h(x))$.

مشتقات این توابع چه ارتباطی باهم دارند؟ بنابرقاعدهٔ زنجیری داریم

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt}. \qquad (۲)$$

چون $dx/dt\neq ۰$، دوطرف را بر dx/dt تقسیم، و dy/dx را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}. \qquad (۳)$$

وقتی x و y به‌صورت پارامتری‌داده شده‌باشند، از این‌معادله‌برای محاسبهٔ dy/dx استفاده می‌کنیم و برای این‌منظور dy/dt را بر dx/dt تقسیم می‌کنیم. معادلهٔ (۳) خود به‌خود dy/dx را برحسب t بیان‌می‌کند؛ لذا شیب مسیرحرکت‌هرذرهٔ متحرك به‌ازای هرمقدار t را می‌توان یافت.

مثال ۶ اگر

$$x=۲t+۳,\quad y=t^۲-۱$$

مطلوب است مقدار dy/dx در $t=۶$. همچنین، dy/dx را به‌عنوان تابعی از x بیابید.

حل: معادلهٔ (۳)، dy/dx را به‌عنوان تابعی از t به‌دست می‌دهد

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{۲t}{۲}=t=\frac{x-۳}{۲}.$$

وقتی $t=۶$ داریم $dy/dx=۶$. ■

مثال ۷ اگر a ثابت‌مثبتی باشد، و $x=a\cos t$، $y=a\sin t$، آنگاه

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{a\cos t}{-a\sin t}=-\frac{x}{y}.$$

برای آزمودن این‌نتیجه، معادلات $x=a\cos t$ و $y=a\sin t$ را درهم ادغام می‌کنیم و معادلهٔ دکارتی زیر را که x و y در آن صدق می‌کنند به‌دست می‌آوریم

$$x^۲+y^۲=a^۲\cos^۲ t+a^۲\sin^۲ t$$
$$=a^۲(\cos^۲ t+\sin^۲ t)=a^۲$$

و سپس نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$x^۲+y^۲=a^۲$$

$$۲x+۲y\frac{dy}{dx}=۰$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

■

فرمول پارامتری $d^۲y/dx^۲$

مشتق دوم y نسبت به x با دومرتبه مشتق‌گرفتن از y نسبت به x به‌دست می‌آید:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}(y)\right].$$

اگر معادلات پارامتری

$$x=f(t),\quad y=g(t)=g(h(x))$$

y را به‌عنوان تابعی از x تعریف کنند که دومرتبه مشتق‌پذیر باشد، آنگاه می‌توانیم از معادلهٔ (۳)

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{dy/dt}{dx/dt}$$

و ازمعادلهٔ زیر d^2y/dx^2 را محاسبه کنیم

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'/dt}{dx/dt}. \qquad (4)$$

معادلهٔ اخیر ازمعادلهٔ (۳) با قراردادن y' به‌جای y به‌دست می‌آید. معادلهٔ (۴) حاکی است که برای محاسبهٔ مشتق دوم y نسبت به x، باید عملیات زیر را انجام دهیم:

۱. $y'=dy/dx$ را برحسب t به‌دست آوریم.
۲. از y' نسبت به t مشتق بگیریم.
۳. نتیجه را بر dx/dt تقسیم کنیم.

مثال ۸ اگر $x=t-t^2$ و $y=t-t^3$، d^2y/dx^2 را بیابید.

حل:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{1-3t^2}{1-2t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'/dt}{dx/dt}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{1-3t^2}{1-2t}\right)}{(1-2t)}$$

$$=\frac{(1-2t)\cdot(-6t)-(1-3t^2)\cdot(-2)}{(1-2t)^3}$$

$$=\frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)^3}. \qquad \blacksquare$$

مسأله‌ها

درمسأله‌های ۱–۸، معادلات پارامتری، موضع $P(x,y)$ ذره متحرکی را درصفحه به‌دست می‌دهند. مسیرحرکت ذره را مشخص کنید. تعیین کنید حرکت ذره ازکجا آغاز می‌شود، و درکجا پایان می‌یابد و وقتی t افزایش می‌یابد، جهت حرکت چیست.

۱. $x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$

۲. $x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant \pi$

۳. $x=\cos 2\pi t,\quad y=\sin 2\pi t,\quad 0\leqslant t\leqslant 1$

۴. $x=\cos(\pi-t),\quad y=\sin(\pi-t),\quad 0\leqslant t\leqslant \pi$

۵. $x=3\cos t,\quad y=3\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$

۶. $x=\cos t,\quad y=-\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$

۷. $x=\cos^2 t,\quad y=\sin^2 t,\quad 0\leqslant t\leqslant \pi/2$

۸. $x=\tan^2 t,\quad y=\sec^2 t,\quad -\pi/3\leqslant t\leqslant \pi/3$

۹. معادلات پارامتری حرکت ذره‌ای را مشخص کنید که يك بار دایرهٔ $x^2+y^2=4$ را (الف) درجهت ساعت، و (ب) درخلاف جهت ساعت، می‌پیماید. درهرمورد، بازهٔ پارامتر $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ است.

۱۰. مسألهٔ ۹ را درمورد بازه‌های زیر حل کنید.

الف) $0\leqslant t\leqslant \pi$
ب) $0\leqslant t\leqslant 1$.

درمسأله‌های ۱۱–۲۰، معادلات پارامتری، موضع $P(x,y)$ يك ذرهٔ متحرك را درصفحه به دست می‌دهند. بین دومعادله t را حذف کنید، و معادله‌ای به‌صورت $y=f(x)$ بیابید که مختصات P در آن صدق کنند. سپس نمودار خم حاصل از حرکت ذره را (که ممکن است تنها بخشی از نمودار $y=f(x)$ باشد) رسم کنید. جهت حرکت ذره را، وقتی که t افزایش می‌یابد، مشخص کنید.

۱۱. $x=2t-5,\quad y=4t-7$

۱۲. $x=1-t,\quad y=1+t$

۱۳. $x=3t,\quad y=9t^2$

۱۴. $x=t,\quad y=\sqrt{1-t^2},\quad -1\leqslant t\leqslant 1$

۱۵. $x=t,\quad y=\sqrt{1-t^2},\quad 0\leqslant t\leqslant 1$

۱۶. $x=-\sqrt{t},\quad y=t,\quad t\geqslant 0$

۱۷. $x=t,\quad y=\sqrt{t},\quad t\geqslant 0$

۱۸. $x=t,\quad y=1-t,\quad 0\leqslant t\leqslant 1$

۱۹. $x=3t,\quad y=2-2t,\quad 0\leqslant t\leqslant 1$

۲۰. $x=\sqrt{t},\quad y=\sqrt{t},\quad t\geqslant 0$

درمسأله‌های ۲۱–۲۸ معادلات پارامتری، موضع $P(x,y)$ ذره‌ای درصفحه و درزمان t را به‌دست می‌دهند. درهرمورد t را ازدومعادله حذف کنید، ويك معادلهٔ مختصات دکارتی به‌دست آورید که مختصات

P درآن صدق کنند. سپس dy/dx ، dy/dt ، و dx/dt را محاسبه کنید و نشان‌دهید که درقاعدهٔ زنجیری یعنی‌معادلهٔ (۳) صدق می‌کنند.

۲۱. $x=2t, \quad y=1+t$

۲۲. $x=3t+1, \quad y=t^2$

۲۳. $x=5\cos t, \quad y=5\sin t$

۲۴. $x=t, \quad y=1/t$

۲۵. $x=t^2-\pi/2, \quad y=\sin(t^2)$

۲۶. $x=t^2, \quad y=t^3$

۲۷. $x=\cos t, \quad y=1+\sin t$

۲۸. $x=\cos t, \quad y=1-\sin^2 t$

۲۹. اگر $x=4t-5$ و $y=t^2$، مقدار dy/dx در $t=2$ کدام‌یك ازمقادیر زیر است؟

الف) ۲

ب) ۴

پ) ۱

ت) ۱/۲

۳۰. اگر $x=3t^2+2$ و $y=2t^4-1$، مقدار dy/dx در $t=1$ کدام یك از مقادیر زیر است؟

الف) ۸

ب) ۴/۳

پ) ۶

ت) ۳/۴

درمسأله‌های ۳۱-۳۵، هریك ازمعادلات پارامتری، خمی ازصفحه را توصیف می‌کند. مطلوب است (الف) شیب‌خم درنقطهٔ (x, y) در لحظهٔ $t=2$، و (ب) مماس برخم دراین نقطه.

۳۱. $x=t+1/t, \quad y=t-1/t$

۳۲. $x=\sqrt{2t^2+1}, \quad y=(2t+1)^2$

۳۳. $x=t\sqrt{2t+5}, \quad y=(4t)^{1/3}$

۳۴. $x=\dfrac{t-1}{t+1}, \quad y=\dfrac{t+1}{t-1}$

۳۵. $x=t^{-2}, \quad y=\sqrt{t^2+12}$

۳۶. معادلهٔ مماس برخم

$$x=\frac{1}{t}+t^2, \quad y=t^2-t+1$$

را درنقطهٔ (۱ ,۲) بیابید.

۳۷. بنا به‌فرض، $x=80t$ و $y=64t-16t^2$. مقدار t چه باشد تا $dy/dx=0$؟

۳۸. ذره‌ای چون P روی خم $x^2y^3=27$ حرکت می‌کند. در زمانی که P به (۳ ,۱) می‌رسد، $dy/dt=10$. دراین زمان dx/dt چقدر است؟

۳۹. اگرنقطه‌ای روی دایرهٔ $x^2+y^2=25$ حرکت کند، در لحظه‌ای که نقطه به (۴ ,۳) می‌رسد، $dx/dt=4$. در این لحظه dy/dt چقدر است؟

درمسأله‌های ۴۰-۴۹، به‌کمك‌معادلهٔ (۴)، d^2y/dx^2 را درمورد هریك ازمعادلات پارامتری بیابید.

۴۰. مسألهٔ ۷

۴۱. مسألهٔ ۱۱

۴۲. مسألهٔ ۱۳

۴۳. مسألهٔ ۱۷

۴۴. مسألهٔ ۲۳

۴۵. مسألهٔ ۲۴

۴۶. مسألهٔ ۲۵

۴۷. مسألهٔ ۲۷

۴۸. مسألهٔ ۲۸

۴۹. مسألهٔ ۳۷

۵۰. اگر y تابع‌مشتق‌پذیری‌از t باشد، $dy/dx=\sqrt{4-\sin^2 t}$، و $x=\cos 2t$ ، d^2y/dx^2 را بیابید.

۵۱. فرض‌کنید x و y توابع‌مشتق‌پذیری‌از t باشند و داشته‌باشیم

$$\frac{d^2y}{dx^2}=t^2+1, \quad \frac{dy}{dx}=t^3+3t$$

مطلوب است dx/dt.

۵۲. **رسام کامپیوتری** اگر بـه‌رسام معادلات پـارامتری دسترسی دارید، از رسم

$$x=6\cos t+5\cos 3t, \quad y=6\sin t-5\sin 3t$$

به‌ازای $-\pi\leqslant t\leqslant\pi$ لذت خواهید برد.

TOOLKIT PROGRAMS	
Parametric Equations	Super * Grapher

۹.۲ روش نیوتن برای تقریب‌زدن جواب معادله‌ها

وقتی فرمول دقیقی برای حل معادله‌ای چون $f(x)=0$ وجود ندارد، برای تقریب‌زدن جوابهای مطلوب به‌روشهای عددی روی می‌آوریم. یکی از این روشها، روش نیوتن، یا به‌زبان دقیقتر، روش نیوتن-رافسون نام دارد که دراین بخش بررسی می‌شود. این روش مبتنی بر این فکر است که درنزدیکی نقاطی که f صفر می‌شود، برای تقریب‌زدن نمودار $y=f(x)$ از خطوط مماس استفاده کنیم. بازهم می‌بینیم که خطی‌سازی کلید حل یك مسألهٔ عملی است. اگر دسترسی به کامپیوتر یا ماشین‌حساب برنامه‌پذیر دارید، به راحتی می‌توانید برنامه‌ای بنویسید که محاسبات را انجام دهد. درغیراین‌صورت، بازهم می‌توانید به‌چگونگی انجام‌دادن این کار پی ببرید. دستورالعمل به‌شرح زیر است.

دستورالعمل روش نیوتن

۱. برای ریشه‌ای از معادلهٔ $f(x)=0$، اولین تقریب را حدس بزنید. نمودار $y=f(x)$ می‌تواند به‌شما کمك کند.

۲. از اولین تقریب برای به‌دست آوردن دومین، از دومین برای به‌دست آوردن سومین وغیره استفاده کنید. برای اینکه ازتقریب nام، x_n، تقریب بعدی، x_{n+1}، را به‌دست آورید از فرمول

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (1)$$

که در آن $f'(x_n)$ مشتق f در x_n است استفاده کنید.

ابتدا نحوهٔ اجرای این روش را نشان می‌دهیم وسپس به‌نظریهٔ مؤید آن می‌پردازیم.

در مثال اول، تقریبهای اعشاری $\sqrt{2}$ را با براورد کردن ریشهٔ مثبت معادلهٔ $f(x)=x^2-2=0$ به‌دست می‌آوریم.

مثال ۱ ریشهٔ مثبت معادلهٔ $f(x)=x^2-2=0$ را بیابید.

حل: معادلهٔ (۱) به‌ازای $f(x)=x^2-2$ و $f'(x)=2x$ به‌صورت

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-2}{2x_n} \qquad (2)$$

درمی‌آید. برای اینکه به‌طور مؤثر از ماشین‌حساب استفاده کنیم، معادلهٔ (۲) را به‌صورتی می‌نویسیم که عملیات ریاضی کمتری لازم باشد

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-2}{2x_n}=\frac{x_n^2+2}{2x_n}=\frac{x_n}{2}+\frac{1}{x_n}. \qquad (3)$$

معادلهٔ

$$x_{n+1}=\frac{x_n}{2}+\frac{1}{x_n} \qquad (4)$$

به‌ما این امکان را می‌دهد که با طی مراحل زیر ازهر تقریب به‌تقریب بعدی برویم

مثال	نتیجه	عمل	
۱٫۵	x	x را وارد کنید	$\boxed{x}$
۰٫۶۶۶۶۷	$\frac{1}{x}$	عکس آن را به حافظه بسپارید	$\boxed{\frac{1}{x}}$ $\boxed{\text{STO}}$
۱٫۵	x	نتیجه را بازهم عکس کنید	$\boxed{\frac{1}{x}}$
۰٫۷۵	$\frac{x}{2}$	بردو تقسیم کنید	$\boxed{\div}$ $\boxed{2}$
۱٫۴۱۶۶۷	$\frac{x}{2}+\frac{1}{x}$	محتوای حافظه را به‌نتیجه بیفزایید	$\boxed{+}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{=}$

نتایجی که با مقدار آغازی $x_0=1$ به‌دست می‌آید درستون سمت چپ جدول زیر مشخص شده است. (تا پنج رقم اعشار داریم $\sqrt{2}=1.41421$.)

	خطا	تعداد ارقام درست
$x_0=1$	−۰٫۴۱۴۲۱	۱
$x_1=1.5$	+۰٫۰۸۵۷۹	۱
$x_2=1.41667$	۰٫۰۰۲۴۵	۳
$x_3=1.41422$	۰٫۰۰۰۰۱	۵

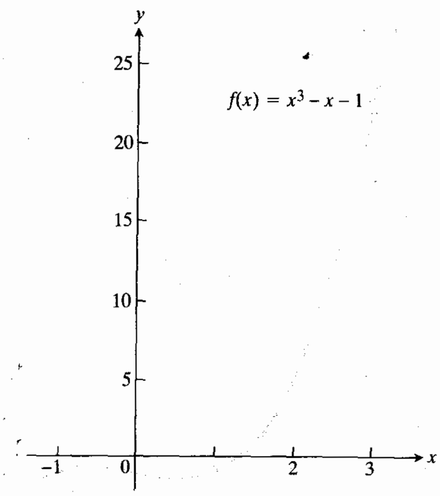
بیشتر ماشین‌حسابها برای محاسبهٔ ریشه، روش نیوتن را به‌کار می‌برند زیرا همگرایی بسیار سریعی دارد[1]. اگر عملیات مذکور درجدول،

۱. براورد خطا در روش نیوتن که ازمشتق دوم محاسبه می‌شود دربسیاری از کتابهای آنالیزعددی مورد بحث قرار می‌گیرد.

به‌جای ۵ رقم، تا ۱۳ رقم اعشار انجام می‌شد آنگاه با برداشتن گامی اضافی و رفتن به x_4، می‌توانستیم $\sqrt{2}$ را با بیش‌از ۱۰ رقم اعشار به‌دست آوریم. ■

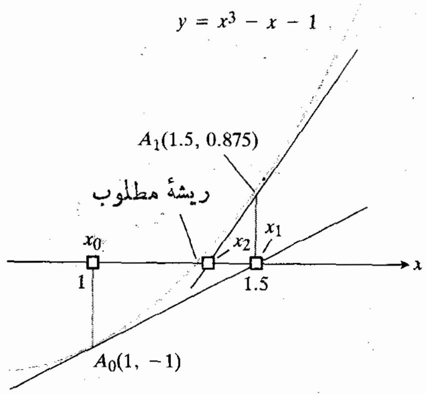
مثال ۲ مختص x محل تقاطع خط افقی $y=1$ و خم $y=x^3-x$ را بیابید.

حل: خم وقتی خط را قطع می‌کند که $x^3-x=1$ یا $x^3-x-1=0$. چه موقع $f(x)=x^3-x-1$ برابر باصفر است؟ نمودار f (شکل ۳۴۰۲) نشان می‌دهد که یکی از ریشه‌ها بین $x=1$ و $x=2$ واقع است. روش نیوتن را درمورد f با مقدار آغازی $x_0=1$ به‌کارمی‌گیریم. نتیجه درجدول ۲۰۲ وشکل ۳۵۰۲ دیده می‌شود.



۳۴۰۲ نمودار $f(x)=x^3-x-1$ محور xها را تنها یك‌بار، در نقطه‌ای بین $x=1$ و $x=2$ قطع می‌کند.

در $n=5$ داریم $x_5=x_4=1٫324717957$. وقتی $x_{n+1}=x_n$، معادلهٔ (۱) نشان‌می‌دهدکه $f(x_n)=0$. پس به‌نظر می‌رسدکه جوابی با ۹ رقم اعشار برای $f(x)=0$ یافته‌ایم. (ماشین‌حساب ما تنها ده‌رقم را نشان می‌دهد، و نمی‌توانیم دقت نهمین رقم اعشار را، علیرغم اعتقاد به درستی‌اش، تضمین کنیم.)



۳۵۰۲ سه‌مقدار اول x موجود درجدول ۲۰۲. ■

نظریهٔ مؤید این روش چیست؟ پاسخ: در نزدیکی نقطهٔ $P(x_n, y_n)$ که در آنجا $y_n=f(x_n)$ کوچك‌است، برای تقریب‌زدن $y=f(x)$ ازمماس استفاده‌می‌کنیم وفرض‌می‌کنیم x_{n+1} مقداری از x باشد که به‌ازای آن خط مماس محور x را قطع می‌کند. (فرض‌می‌کنیم که شیب $f'(x_n)$ مماس، صفرنباشد.) معادلهٔ مماس

$$y-y_n=f'(x_n)(x-x_n)\,. \qquad (5)$$

است. $y_n=f(x_n)$ و $y=0$ را در معادلهٔ (۵) قرارمی‌دهیم و آن را نسبت به x حل می‌کنیم

جدول ۲۰۲ نتایج حاصل از به‌کارگرفتن روش نیوتن درمورد $f(x)=x^3-x-1$ با $x_0=1$

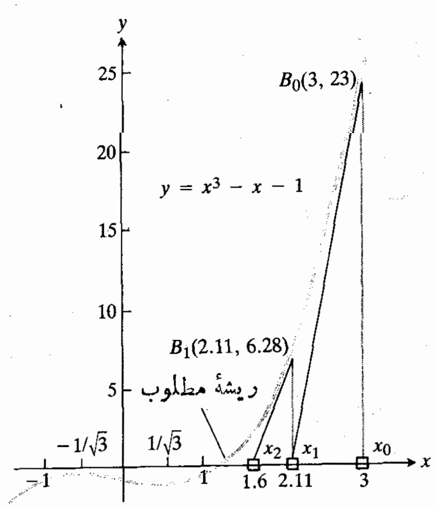
n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
۰	۱	−۱	۲	۱٫۵
۱	۱٫۵	۰٫۸۷۵	۵٫۷۵	۱٫۳۴۷۸۲۶۰۸۷
۲	۱٫۳۴۷۸۲۶۰۸۷	۰٫۱۰۰۶۸۲۱۷۴	۴٫۴۴۹۹۰۵۴۸۲	۱٫۳۲۵۲۰۰۳۹۹
۳	۱٫۳۲۵۲۰۰۳۹۹	۰٫۰۰۲۰۵۸۳۶۳	۴٫۲۶۸۴۶۸۲۹۳	۱٫۳۲۴۷۱۸۱۷۴
۴	۱٫۳۲۴۷۱۸۱۷۴	۰٫۰۰۰۰۰۰۹۲۵	۴٫۲۶۴۶۳۴۷۲۲	۱٫۳۲۴۷۱۷۹۵۷
۵	۱٫۳۲۴۷۱۷۹۵۷	-5×10^{-10}	۴٫۲۶۴۶۳۲۹۹۷	۱٫۳۲۴۷۱۷۹۵۷

$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

نکتهٔ ۱ اگر $f'(x_n)=0$ این روش کارا نیست. در این حالت، نقطهٔ آغازی تازه‌ای را برمی‌گزینیم. البته، ممکن است $f(x)=0$ و $f'(x)=0$ ریشهٔ مشترکی داشته باشند. برای تشخیص این مطلب، ابتدا جوابهای $f'(x)=0$ را می‌یابیم و سپس این جوابها را در $f(x)$ قرار می‌دهیم.

نکتهٔ ۲ شکل ۳۶.۲ نشان می‌دهد که کار را با نقطهٔ $B_0(3, 23)$ روی خم، با $x_0=3$، آغاز کرده‌ایم. نقطهٔ B_0 از محور x خیلی فاصله دارد، اما مماس در B_0، محور x را حدوداً در $C(2.11, 0)$ قطع می‌کند، لذا x_1 نسبت به x_0 بهتر است. اگر مثل گذشته، مکرراً از معادلهٔ (۱)، یا $f(x)=x^3-x-1$، و $f'(x)=3x^2-1$، استفاده کنیم، جواب با نه رقم اعشار، $x_6=x_5=1.324717957$، درشش گام تأیید می‌شود.

خم شکل ۳۶.۲ در $x=-1/\sqrt{3}$ نقطهٔ بازگشت بلند، و در $x=+1/\sqrt{3}$ نقطهٔ بازگشت گود دارد. اگر x_0 را بین این دو نقطه می‌گرفتیم نباید انتظار می‌داشتیم که از روش نیوتن نتیجهٔ خوبی حاصل شود، اما می‌توانیم از هرجایی درسمت راست $x=1/\sqrt{3}$ آغاز کنیم و به‌پاسخ دست یابیم. حتی می‌توانستیم با فاصلهٔ زیادی از B_0، مثلاً با $x_0=10$، هم آغاز کنیم، هرچند این کار چندان عاقلانه نیست. با این انتخاب وقت بیشتری لازم است، اما بازهم همان پاسخ قبل به‌دست می‌آید.

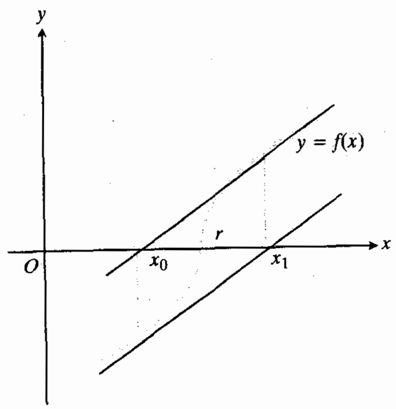


۳۶.۲ هر مقدار آغازی x_0 واقع درسمت راست $x=1/\sqrt{3}$ به‌ریشه منجر می‌شود.

نکتهٔ ۳ روش نیوتن همیشه همگرا نیست. مثلاً، اگر داشته باشیم

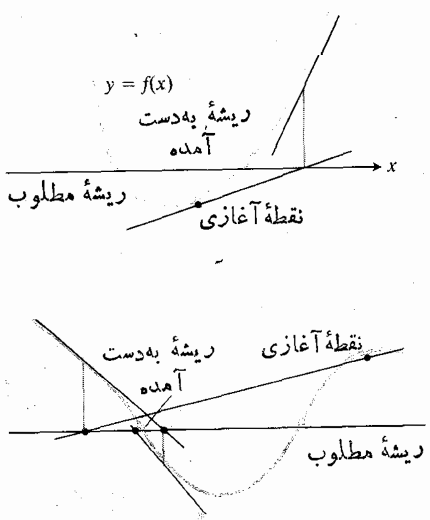
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-r} & x\geqslant r\\ -\sqrt{r-x} & x\leqslant r\end{cases} \qquad (۶)$$

نمودار شبیه نمودار شکل ۳۷.۲ خواهد بود. اگر از $x_0=r-h$ شروع کنیم، $x_1=r+h$ به دست می‌آید، و با تقریب‌زدنهای متوالی همین دو مقدار به‌دست می‌آید. هرچه این عمل تکرار شود، باز نمی‌توان بیشتر از نخستین حدس به‌ریشهٔ r نزدیکتر شد.



۳۷.۲ نمودار تابعی که درمورد آن روش نیوتن همگرا نیست.

نکتهٔ ۴ اگر روش نیوتن همگرا باشد، یکی از ریشه‌های $f(x)$ را تقریب می‌زند؛ اما، اگر مقدار آغازی به‌اندازهٔ کافی نزدیک ریشهٔ مورد نظر نباشد، ممکن است ریشه‌ای را به‌دست دهد که انتظارش را نداریم. شکل ۳۸.۲ دو نمونه از این حالت را نشان می‌دهد.



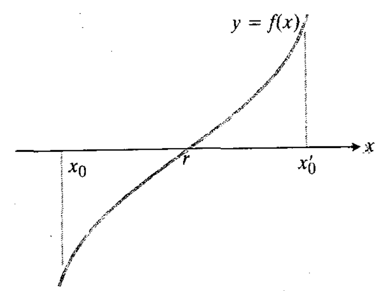
۳۸.۲ اگر از خیلی دورتر از ریشهٔ مطلوب آغاز کنیم، ممکن است روش نیوتن این ریشه را به‌دست ندهد.

نکتهٔ ۵ چه‌موقع روش نیوتن همگراست؟ پاسخ این است که اگر به‌ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای شامل ریشهٔ r از f نابرابری

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^{۲}}\right| < ۱ \qquad (۷)$$

برقرار باشد، آنگاه به‌ازای هرمقدار آغازی $x_{۰}$ متعلق به‌این بازه، روش همگراست. این شرطی است کافی، و نه لازم. در بعضی از مواردکه نتوان هیچ بازهٔ شامل r یافت که درمورد آن نابرابری (۷) برقرار باشد، این‌روش می‌تواند همگرا باشد (و همگرا هم هست.)

ریموند موراثیل (۱۷۶۸) و بعداً ژوزف فوریه (۱۸۳۰-۱۷۶۸) مستقلاً کشف کردند که اگر خم $y=f(x)$ در بازهٔ بین $x_{۰}$ و ریشهٔ مورد نظر به طرف محور تحدب (شکم) داشته باشد، آنگاه روش نیوتن همواره قابل استفاده است. شکل ۳۹۰۲ را ببینید.



۳۹۰۲ بین $x_{۰}$ و r و نیز بین $x'_{۰}$ و r، خم $y=f(x)$ به‌طرف محور تحدب دارد. از هر یك ازاین دو نقطه که آغاز کنیم، روش نیوتن همگرا خواهد شد.

مسأله‌ها

در مسأله‌های ۱-۶ در بازهٔ $a\leqslant x\leqslant b$، هر تابع داده شده دقیقاً یك ریشه دارد. دراین بازه نمودار تابع‌را بکشید. سپس ازروش نیوتن برای یافتن ریشه استفاده کنید. وقتی از درستی نخستین سه‌رقم اعشار مطمئن شدید عملیات را متوقف کنید.

۱. $f(x)=x^{۲}+x-۱,\quad a=۰,\quad b=۱$

۲. $f(x)=x^{۳}+x-۱,\quad a=۰,\quad b=۱$

۳. $f(x)=x^{۴}+x-۳,\quad a=۱,\quad b=۲$

۴. $f(x)=x^{۴}-۲,\quad a=۱,\quad b=۲$

۵. $f(x)=۲-x^{۴},\quad a=-۲,\quad b=-۱$

۶. $f(x)=\sqrt{۲x+۱}-\sqrt{x+۴},\quad a=۲,\quad b=۴$

۷. فرض کنید در نخستین حدس شانس بیاورید، و $x_{۰}$ ریشهٔ $f(x)=۰$ باشد. $x_{۱}$ و تقریبهای بعدی چه‌خواهد شد؟

۸. اگر قصدتان این باشدکه با حل معادلهٔ $\cos x=۰$ به‌روش نیوتن $\pi/۲$ را تا پنج رقم اعشار براورد کنید، آیا مهم است که مقدار آغازی چه باشد؟ توضیح دهید.

۹. **ماشین‌حساب** نشان دهید که $f(x)=x^{۳}+۲x-۴$ ریشه‌ای بین $x=۱$ و $x=۲$ دارد. ریشه را تا پنج رقم اعشار بیابید.

۱۰. **ماشین‌حساب** نشان‌دهیدکه $f(x)=x^{۴}-x^{۳}-۷۵$ ریشه‌ای بین $x=۳$ و $x=۴$ دارد. ریشه را تا پنج رقم اعشار بیابید.

۱۱. الف) توضیح دهید که چرا مطلوب چهارجملهٔ زیر یك‌چیز است.

i) ریشه‌های $f(x)=x^{۳}-۳x-۱$ را بیابید.

ii) مختصهای x نقاط تقاطع خم $y=x^{۳}$ با خط $y=۳x+۱$ را بیابید.

iii) مختصهای x نقاط تقاطع خم $y=x^{۳}-۳x$ با خط افقی $y=۱$ را بیابید.

iv) به‌ازای چه مقادیری از x مشتق

$$g(x)=(۱/۴)x^{۴}-(۳/۲)x^{۲}-x+۵$$

برابر با صفر است؟

ب) در بازهٔ $-۲\leqslant x\leqslant ۲$ نمودار $f(x)=x^{۳}-۳x-۱$ را رسم کنید.

پ) **ماشین‌حساب** ریشهٔ مثبت $f(x)=x^{۳}-۳x-۱$ را تا پنج رقم اعشار بیابید.

ت) **ماشین‌حساب** دو ریشهٔ منفی $f(x)=x^{۳}-۳x-۱$ را تا پنج رقم اعشار بیابید.

۱۲. **ماشین‌حساب** با استفاده از روش نیوتن در مورد معادلهٔ $\tan x=۰$، با $x_{۰}=۳$، π را تا پنج رقم‌اعشار براورد کنید. به‌یاد داشته باشید که از رادیان استفاده کنید.

۱۳. **ماشین‌حساب** نقطهٔ تقاطع خم $y=\cos x$ وخط $y=x$ را تا پنج رقم اعشار بیابید.

۱۴. **ماشین‌حساب** رسم $f(x)=x-۱-۰٫۵\sin x$ نشان می‌دهد که این تابع ریشه‌ای نزدیك $x=۱٫۵$ دارد. یك‌بار روش نیوتن‌را به‌کار ببرید و این‌براورد را بهتر کنید. یعنی، با $x_{۰}=۱٫۵$ آغاز و $x_{۱}$ را بیابید. (مقدار ریشه تا پنج رقم اعشار، ۱٫۴۹۸۷۰ است.) استفاده از رادیان فراموش نشود.

۱۵. **ماشین‌حساب برنامه‌پذیر** دو ریشهٔ حقیقی معادلهٔ

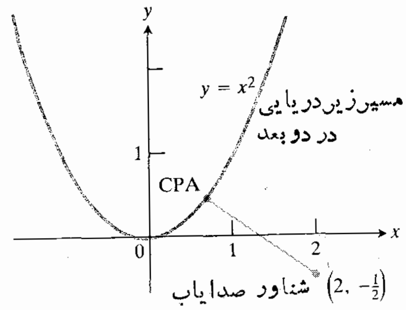
$$x^{۴}-۲x^{۳}-x^{۲}-۲x+۲=۰$$

را تا شش رقم اعشار بیابید.

۱۶. ماشین‌حساب (ویژگی برنامه‌پذیر بودن مفیداست ولی الزامی نیست.) مسألهٔ شناورصدایاب. درمسائل‌مربوط به‌محل زیردریاییها، غالباً لازم است نزدیکترین فاصلهٔ زیردریایی تا شناور صدایاب را بیابیم. فرض کنید که مسیر زیردریایی سهمی $y=x^{۲}$ باشد و طبق شکل ۴۰.۲ شناور صدایاب درنقطهٔ (۲ر۱ — ,۲) باشد. همان‌گونه که درفصل ۳ (بخش ۵.۳، مسألهٔ ۲۵) خواهیم دید مقدار xی که فاصلهٔ بین نقطهٔ $(x, x^{۲})$ ونقطهٔ (۲ر۱ — ,۲) را مینیمم می‌کند، جوابی از معادلهٔ

$$\frac{۱}{x^{۲}+۱}=x$$

است. این معادله را با روش نیوتن‌حل کنید و نزدیکترین‌فاصله را تا پنج رقم اعشار محاسبه کنید.



۴۰.۲ نمودار مربوط به‌مسألهٔ ۱۶. CPA نزدیکترین‌فاصلهٔ زیردریایی تا شناور است.

۱۷. نشان دهیدکه اگرروش نیوتن را درمورد $f(x)$ درمعادلهٔ (۶) به‌کار ببریم نتیجه می‌شود که اگر $x_{۰}=r-h$، آنگاه $x_{۱}=r+h$، و اگر $x_{۰}=r+h$، آنگاه $x_{۱}=r-h$ که درآنها $h>۰$. تعبیرهندسی این نتیجه چیست؟

۱۸. (نکتهٔ ۳ را ببینید.) آیا ممکن‌است‌که تقریبات متوالی عملاً «بدتر» شوند، به‌این‌معنا که $x_{n+۱}$ دورتر از x_n به r باشد؟ (راهنمایی: درمعادلهٔ (۶) به‌جای ریشهٔ دوم، ریشهٔ سوم‌را آزمایش کنید.)

TOOLKIT PROGRAMS	
Function Evaluator	Sequences and Series
Root Finder	Super * Grapher

۱۰.۲ فرمولهای مشتق با نماد دیفرانسیل

فرمولهای‌مشتق به‌دست آمده در این‌فصل به‌صورت‌فرمولهای ۱—۱۲ درجدول صفحهٔ بعد آمده است، باضرب هریك در dx فرمولهای دیفرانسیل نظیر به‌دست می‌آید.

وقتی‌که y تابع مشتق‌پذیری از x باشد، برای یافتن dy می‌توانیم یا

الف) dy/dx را بیابیم ونتیجه را در dx ضرب کنیم، یا

ب) یکی یا چند تا از فرمولهای ′۱—′۱۲ را به‌کار بگیریم.

مثال ۱

الف) $d(۳x^{۲}-۶)=۶x\,dx$

ب)

$$d(\cos ۳x)=-\sin ۳x\, d(۳x)=-۳\sin ۳x\, dx$$

پ)

$$d\frac{x}{x+۱}=\frac{(x+۱)\,dx-x\,d(x+۱)}{(x+۱)^{۲}}$$

$$=\frac{x dx+dx-x dx}{(x+۱)^{۲}}$$

$$=\frac{dx}{(x+۱)^{۲}} \quad \blacksquare$$

شایان توجه است‌که اگر در یك طرف معادله‌ای دیفرانسیل باشد، الزاماً درطرف دیگرهم باید دیفرانسیل باشد. مثلاً $dy=۳x^{۲}$ بی‌معناست، ولی $dy=۳x^{۲}dx$ معنا دارد.

مسأله‌ها

درمسأله‌های ۱—۱۲، dy را بیابید.

۱. $y=x^{۳}-۳x$

۲. $y=x\sqrt{۱-x^{۲}}$

۳. $y=۲x/(۱+x^{۲})$

۴. $y=(۳x^{۲}-۱)^{۳/۲}$

۵. $y+xy-x=۰$

۶. $xy^{۲}+x^{۲}y-۴=۰$

۷. $y=\sin(۵x)$

۸. $y=\cos(x^{۲})$

۹. $y=۴\tan(x/۲)$

۱۰. $y=\sec(x^{۲}-۱)$

۱۱. $y=۳\csc(۱-(x/۳))$

۱۲. $y=۲\cot\sqrt{x}$

فرمولهای دیفرانسیل		فرمولهای مشتق	
$dc=0$	۱′.	$\frac{dc}{dx}=0$	۱.
$d(cu)=c\,du$	۲′.	$\frac{d(cu)}{dx}=c\frac{du}{dx}$	۲.
$d(u+v)=du+dv$	۳′.	$\frac{d(u+v)}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$	۳.
$d(uv)=u\,dv+v\,du$	۴′.	$\frac{d(uv)}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$	۴.
$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}$	۵′.	$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx}=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$	۵.
$d(u^n)=nu^{n-1}\,du$	۶′.	$\frac{du^n}{dx}=nu^{n-1}\frac{du}{dx}$	۶.
$d(cx^n)=cnx^{n-1}\,dx$	۶′الف.	$\frac{dcx^n}{dx}=cnx^{n-1}$	۶الف.
$d(\sin u)=\cos u\,du$	۷′.	$\frac{d\sin u}{dx}=\cos u\frac{du}{dx}$	۷.
$d(\cos u)=-\sin u\,du$	۸′.	$\frac{d\cos u}{dx}=-\sin u\frac{du}{dx}$	۸.
$d(\tan u)=\sec^2 u\,du$	۹′.	$\frac{d\tan u}{dx}=\sec^2 u\frac{du}{dx}$	۹.
$d(\cot u)=-\csc^2 u\,du$	۱۰′.	$\frac{d\cot u}{dx}=-\csc^2 u\frac{du}{dx}$	۱۰.
$d(\sec u)=\sec u\tan u\,du$	۱۱′.	$\frac{d\sec u}{dx}=\sec u\tan u\frac{du}{dx}$	۱۱.
$d(\csc u)=-\csc u\cot u\,du$	۱۲′.	$\frac{d\csc u}{dx}=-\csc u\cot u\frac{du}{dx}$	۱۲.

درمسألههای ۱۳–۱۶، dx و dy را برحسب t و dt بیابید. سپس dy/dx را پیدا کنید.

۱۳. $x=t+1,\quad y=t+t^2/2$

۱۴. $x=1+1/t,\quad y=t-1/t$

۱۵. $x=\cos t,\quad y=1+\sin t$

۱۶. $x=t-\sin t,\quad y=1-\cos t$

پرسشها و تمرینهای مروری

۱. از تعریف مشتق استفاده کنید و فرمول مشتق حاصلضرب (uv) دوتابع مشتقپذیر u و v را بیابید.

۲. درفرمول مشتق uv بهجای v، u را قراردهید تا فرمولی برای مشتق u^2 بهدستآید. اینعمل را با $v=u^2$ تکرارکنید تا فرمولی برای مشتق u^3 حاصلشود. نتیجه را با استقرای ریاضی تعمیم دهید تا فرمولی برای مشتق u^n، بهازای هرعدد صحیح و مثبت n بهدستآید.

۳. توضیح دهید که چگونه سه فرمول

الف) $\dfrac{d(x^n)}{dx}=nx^{n-1}$

ب) $\dfrac{d(cu)}{dx}=c\dfrac{du}{dx}$

پ) $\dfrac{d(u+v)}{dx}=\dfrac{du}{dx}+\dfrac{dv}{dx}$

مشتقگیری از هرچندجمله‌ای دلخواهی را ممکن می‌سازند.

۴. به‌علاوهٔ سه فرمول مذکور در تمرین ۳ به‌چه فرمول دیگری نیاز داریم تا بتوانیم از توابع گویا مشتق بگیریم؟

۵. آیا یك تابع چندجمله‌ای در هر نقطه از دامنه‌اش مشتق دارد؟ بزرگترین دامنهٔ این تابع چیست؟ آیا یك تابع گویا به‌ازای هر نقطه‌ای از دامنه‌اش مشتق دارد؟ کدام عدد یا اعداد حقیقی را باید از دامنهٔ یك تابع گویا حذف کرد؟

۶. اگر

$$y^۳-xy^۲+\frac{۱}{x^۲}-۱=۰$$

برای محاسبهٔ dy/dx از کدام یك از روشهای مذکور در این فصل می‌توان استفاده کرد؟ دربارهٔ y چه فرضی لازم است؟ dy/dx را بیابید.

۷. تابع $y=x^{۲/۳}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف می‌شود؟ به‌ازای چه‌نقاطی پیوسته است؟ به‌ازای چه‌نقاطی مشتقپذیر است؟

۸. مشتق تابع زیر را بیابید.

$$f(x)=x\sqrt{۳x^۲+۱}+\frac{۵x^{۴/۳}}{۳x+۲},\quad x\neq-\frac{۲}{۳}$$

برای محاسبهٔ مشتق توابعی نظیر این تابع، کدام یك از فرمولهای این فصل به‌کار می‌روند؟

۹. فرض‌کنید $y=f(x)$ در $x=a$ مشتق‌دارد و x را به‌اندازهٔ dx تغییرمی‌دهیم. چگونه‌می‌توان تغییرحاصل‌در y را براورد کرد؟

۱۰. درنقطه‌ای‌که تابع $y=f(x)$ مشتق دارد، صورت‌خطی‌شدهٔ این تابع‌چیست؟ مثال بیاورید. از صورت‌خطی چه استفاده‌هایی می‌شود؟

۱۱. قاعدهٔ زنجیری برای‌مشتق‌را بیان‌کنید. بدون‌استفاده ازکتاب آن را اثبات‌کنید.

۱۲. $\sin(A+B)$ و $\cos(A+B)$ را بسط دهید.

۱۳. رابطهٔ زیر تحت چه‌شرطی درست است؟

$$\lim_{h\to ۰}\frac{\sin h}{h}=۱$$

۱۴. فرمولهای دوبرابر زاویه را بیان‌کنید. با استفاده ازیکی از آنها ثابت‌کنید که

$$\lim_{h\to ۰}\frac{۱-\cos h}{h}=۰$$

در اثبات

$$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$$

این حد چگونه به‌کارمی‌رود؟

۱۵. فرض‌کنید A_n مساحت nضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع r باشد. نشان دهید که

$$A_n=\left(\frac{n}{۲}\right)r^۲\sin\left(\frac{۲\pi}{n}\right).$$

وقتی $n\to\infty$، $\lim A_n$ را بیابید. آیا این نتیجه با مساحت دایره یکی است؟

۱۶. معادلات پارامتری

$$x=۴\cos t,\quad y=۴\sin t,\quad -\pi\leqslant t\leqslant ۰$$

موضع $P(x,y)$ ذره‌ای را که در صفحه حرکت می‌کند نشان می‌دهند. ذره ازکجا حرکت‌خود راآغازمی‌کند و درکجا به‌پایان می‌برد؟ مسیر حرکت ذره را مشخص‌کنید. درحین حرکت، ارتباط dy/dx با dy/dt و dx/dt چیست؟

۱۷. توابع x و y نسبت به t دوبار مشتقپذیرند، y نسبت به x دوبار مشتقپذیر است، و $dx/dt\neq ۰$. برای محاسبهٔ $d^۲y/dx^۲$ ازچه‌روشی باید استفاده‌کرد؟ مثالی بیاورید.

۱۸. روش‌نیوتن برای حل‌معادلات را شرح دهید. مثالی بیاورید. نظریهٔ مؤید این روش چیست؟ وقتی از این روش استفاده می‌کنیم باید مراقب چه‌چیزهایی باشیم؟

مسأله‌های گوناگون

درمسأله‌های ۱–۵۸، dy/dx را بیابید.

۱. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^۲-۴}}$

۲. $x^۲+xy+y^۲-۵x=۲$

۳. $xy+y^2=1$

۴. $x^3+4xy-3y^3=2$

۵. $x^2y+xy^2=10$

۶. $y=(x+1)^2(x^2+2x)^{-2}$

۷. $y=\cos(1-2x)$

۸. $y=\dfrac{\cos x}{\sin x}$

۹. $y=\dfrac{x}{x+1}$

۱۰. $y=\sqrt{2x+1}$

۱۱. $y=x^2\sqrt{x^2-a^2}$

۱۲. $y=\dfrac{2x+1}{2x-1}$

۱۳. $y=\dfrac{x^2}{1-x^2}$

۱۴. $y=(x^2+x+1)^3$

۱۵. $y=\sec^2(5x)$

۱۶. $y^3=\sin^3x+\cos^3x$

۱۷. $y=\dfrac{(2x^2+5x)^{3/2}}{3}$

۱۸. $y=\dfrac{3}{(2x^2+5x)^{3/2}}$

۱۹. $xy^2+\sqrt{xy}=2$

۲۰. $x^2-y^2=xy$

۲۱. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$

۲۲. $x^{1/2}+y^{1/2}=a^{1/2}$

۲۳. $xy=1$

۲۴. $\sqrt{xy}=1$

۲۵. $(x+2y)^2+2xy^2=6$

۲۶. $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$

۲۷. $y^2=\dfrac{x}{x+1}$

۲۸. $x^2y+xy^2=6(x^2+y^2)$

۲۹. $xy+2x+3y=1$

۳۰. $x^2+xy+y^2+x+y+1=0$

۳۱. $x^3-xy+y^3=1$

۳۲. $xy^3+3x^2y^2=7$

۳۳. $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

۳۴. $y=\sqrt{x}+1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

۳۵. $y=(x^3+1)^{1/3}$

۳۶. $y=x^2\sin^5 2x$

۳۷. $y=\cot 2x$

۳۸. $y=\sin^2(1+3x)$

۳۹. $y=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

۴۰. $y=\sin^3 2x$

۴۱. $y=x^2\cos 8x$

۴۲. $y=\sin(\cos^2 x)$

۴۳. $y=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

۴۴. $y=\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$

۴۵. $y=\csc x$

۴۶. $y=\cot x^2$

۴۷. $y=\cos(\sin^2 x)$

۴۸. $y=\dfrac{\sin x}{x}$

۴۹. $y=\sec^2 x$

۵۰. $y=\sec x\sin x$

۵۱. $y=\cos(\sin^2 3x)$

۵۲. $x=u^2+1, \quad y=u^2-1$

۵۳. $t=2x+3, \quad y=\sqrt{2t+t^2}$

۵۴. $y=1+t^2, \quad x=\dfrac{t}{1+t^2}$

۵۵. $y=x^2+t^2, \quad t=\dfrac{x}{1+x^2}$

۵۶. $y=3t^4-t^2, \quad x=t^2-1$

۵۷. $y=t^3-1, \quad x=t^2+t$

۵۸. $y=\sin(t^2+1), \quad x=\cos 3t$

۵۹. شیب $y=x/(x^2+1)$ را در مبدأ بیابید. معادلهٔ خط‌مماس درمبدأ را تعیین کنید.

۶۰. معادلهٔ مماس برخم زیر را در $(2, 2)$ بیابید.

$$x^2-2xy+y^2+2x+y-6=0.$$

۶۱. شیب خم $y=2x^2-6x+3$ درنقطه‌ای از خم که در آن $x=2$ چیست؟ مماس برخم دراین نقطه را بیابید.

۶۲. نقاطی ازخم $y=2x^3-3x^2-12x+20$ را بیابید که مماس درآنها موازی با محور xاند.

۶۳. شعاع قدح نیمکره‌شکلی ۱۰ اینچ و عمق‌آب درآن x اینچ است. حجم آب از $V=\pi[10-(x/3)]x^2$ به‌دست می‌آیـد. آهنگ افزایش حجم را به‌ازای هراینچ افزایش عمق بیابید.

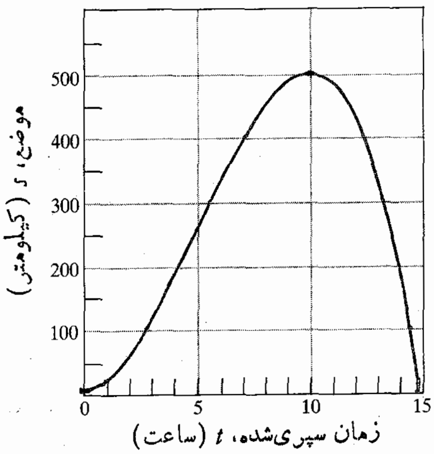
۶۴. ظرفیت اتوبوسی ۶۰ نفر است. x، تعداد افرادی‌که سوار اتوبوس‌می‌شوند، طبق‌ضابطهٔ $p=[3-(x/40)]^2$، به‌بهای بلیط (p دلار) بستگی‌دارد. عبارتی برای کل‌درآمد شرکت اتوبوسرانی در هرسفر، $r(x)$، بنویسید. در هـرسفر، به‌ازای چه تعداد مسافر، درآمد نهایی dr/dx صفرمی‌شود؟ بهای بلیط مربوط چیست؟

۶۵. ذره‌ای با سرعتی برابر با a فوت بر ثانیه در امتداد قائم به‌بالا پرتاب‌می‌شود، و پس‌از t ثانیه به‌ارتفاع $s=at-16t^2$ می‌رسد. سرعت اولیه چه باشد تـا قبل از اینکه ذره برگشت خود را آغاز کند، به‌ارتفاع ۴۹ فوتی برسد؟

۶۶. نمودار شکل ۴۱۰۲ موضع $s(t)$ی‌کامیونی را نشان می‌دهد که در یك بزرگراه در حـرکت است. حرکت کامیون در $t=0$ آغاز می‌شود، و پس از ۱۵ ساعت ($t=15$) برمی‌گردد.

الف) با استفاده از روش‌مذکور درپایان بخش ۷۰۱ نمودار سرعت‌کامیون، $v=ds/dt$، را رسم‌کنید. سپس با تکرار این‌عمل، نمودار شتاب‌کامیون، dv/dt، را رسم‌کنید.

ب) فرض کنید $s(t)=15t^2-t^3$. آنگـاه ds/dt و d^2s/dt^2را بیابید. نمودارهارا رسم، ونتیجه‌هارا بانتایج حاصل‌از (الف) مقایسه‌کنید.



۴۱۰۲ نمودار موضع کامیون برحسب زمان، مربوط به‌مسأله ۶۶.

۶۷. مطلوب است

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[2-3(x+\Delta x)]^2-[2-3x]^2}{\Delta x}.$$

تابعی چون $f(x)$ بیابیدکه مشتقش چنین باشد.

۶۸. اگر $y=x-x^2$، آهنگ تغییر y^2 نسبت به‌x^2 را بیابید. جواب را برحسب x بنویسید. (راهنمایی: فرض‌کنید $u=y^2$ و $v=x^2$. سپس u را به v ربط دهید و du/dv را بیابید.)

۶۹. شیب‌خم $x^2y+xy^2=6$ را درنقطهٔ $(1, 2)$ بیابید.

۷۰. اگر $y=x\sqrt{2x-3}$، d^2y/dx^2 را بیابید.

۷۱. از معادلـهٔ $y^3+y=x$، مقدار d^2y/dx^2 را در نقطـهٔ $(2, 1)$ بیابید.

۷۲. در نقطه‌ای از خـم $y=2/\sqrt{x-1}$ که درآن $x=10$، مماس برخم را بیابید.

۷۳. معادله‌ای برای خط مـار بر $(1, 2)$ و قائم برخم $x^2=4y$ بیابید.

۷۴. بنا به‌فرض، $y=\sqrt{2x+3}$. از تعریف مشتق‌استفاده‌کنید و dy/dx را بیابید. درستی نتیجه را بـا استفاده از قـاعدهٔ توان بررسی‌کنید.

۷۵. مطلوب است d^3y/dx^3 هرگاه

الف) $y=\sqrt{2x-1}$

ب) $y=\frac{۱}{۳x+۲}$

پ) $y=ax^۳+bx^۲+cx+d$

۷۶. به‌ازای چه‌مقداری از c، خم $y=c/(x+۱)$ برخط مار بر نقاط (۰,۳) و (۲ −, ۵) مماس است؟

۷۷. نشان دهیدکه مماس برخم $y=x^۳$ درهرنقطهٔ $(a, a^۳)$، خم را درنقطهٔ دیگری هم قطع می‌کند و شیب درآن نقطه چهار برابرشیب در $(a, a^۳)$ است.

۷۸. خطوط مماس وقائم برخم $(y-x)^۲=۲x+۴$ را درنقطهٔ (۶, ۲) بیابید.

۷۹. دایرهٔ $(x-h)^۲+(y-k)^۲=a^۲$ درنقطهٔ (۱,۲) برخم $y=x^۲+۱$ مماس است.

الف) مواضع ممکن نقطهٔ (h, k) کدام‌اند؟

ب) اگر، علاوه‌براین، مقدار $d^۲y/dx^۲$ در نقطهٔ (۱, ۲) برای هردوخم یکی باشد، h، k، و a را بیابید. خم و دایره را رسم کنید.

۸۰. اگر $f''(x)=x^{۱/۳}$، کدام‌یك از گزاره‌های زیر درست‌اند؟

I. $f(x)=\frac{۹}{۲۸}x^{۷/۳}+۹$

II. $f'(x)=\frac{۹}{۲۸}x^{۷/۳}-۲$

III. $f'(x)=\frac{۳}{۴}x^{۴/۳}+۶$

IV. $f(x)=\frac{۳}{۴}x^{۴/۳}-۴$

الف) فقط I

ب) فقط III

پ) فقط II و IV

ت) فقط I و III

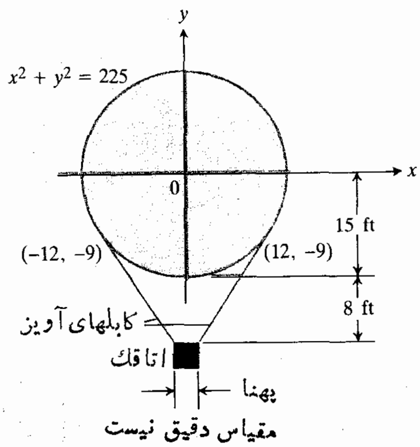
۸۱. خطهای مماس برخم $x^۲y+xy^۲=۶$ را درنقاطی که در آنها $x=۱$، بیابید.

۸۲. مماس برخمهای زیر را درنقطهٔ داده شده بیابید.

الف) $x^۲+۲y^۲=۹$ در (۱, ۲)

ب) $x^۳+y^۲=۲$ در (۱, ۱)

۸۳. قطر یك بالن هوای گرم کروی ۳۰ فوت است (مقطعی ازآن در شکل ۴۲.۲ دیده می‌شود). طراح بالن می‌خواهد اتاقك آن درفاصلهٔ ۸ فوتی زیربالن آویزان باشد وکابلهای آویز هم مماس برسطح بالن باشند. درشکل، دوکابل آویز را می‌بینیدکه از لبه‌های بالایی اتاقك به‌نقاط تماس (۹ −, ۱۲ −) و (۹ −, ۱۲) وصل‌اند. پهنای اتاقك چقدر باید باشد؟

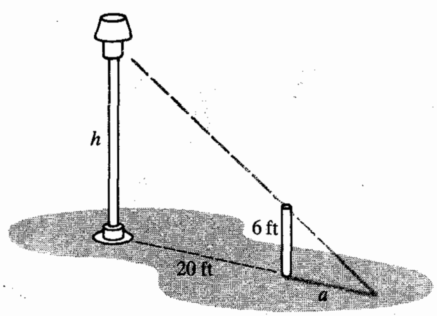


۴۲.۲ بالن مربوط به‌مسأله ۸۳.

۸۴. ارتفاع یك قوطی استوانه‌ای ۶ اینچ، شعاع آن r اینچ، و حجمش $V=۶\pi r^۲$ اینچ مکعب است. وقتی r تغییرکند اختلاف dV و ΔV چقدر است؟ تعبیرهندسی dV چیست؟

۸۵. اگر $y=۲x^۲-۳x+۵$، به‌ازای $x=۳$، و $\Delta x=۰{,}۱$، Δy را بیابید. با محاسبهٔ dy، Δy را تقریب بزنید.

۸۶. برای‌محاسبهٔ ارتفاع h تیرچراغی، طول سایهٔ یك‌میلهٔ ۶ فوتی، a، را اندازه می‌گیریم (شکل ۴۳.۲). فاصلهٔ میله تا تیرچراغ ۲۰ فوت است. اگر $a=۱۵$ فوت، و خطای احتمالی کمتر از ۱ اینچ باشد، ارتفاع تیرچراغ را بیابید، و خطای نتیجه را براورد کنید.



۴۳.۲ تیرچراغ مربوط به‌مسأله ۸۶.

۸۷. فرض‌کنید $y=f(x)$ تابع مشتق‌پذیری از x، و $x=g(t)$ تابع مشتق‌پذیری از t باشد. مقدار dy/dt در $t=۱$ را با توجه به‌شرایط زیر بیابید.

$$g(۱)=۳,\quad g'(۱)=۶,\quad f(۳)=۴,\quad f'(۳)=۵.$$

۸۸. اگر $y=x^2+1$ و $u=\sqrt{x^2+1}$، dy/du را بیابید.

۸۹. اگر $x=y^2+y$، و $u=(x^2+x)^{3/2}$، dy/du را بیابید.

۹۰. اگر $f'(x)=\sqrt{3x^2-1}$ و $y=f(x^2)$، dy/dx را بیابید.

۹۱. اگر $f'(x)=\sin(x^2)$ و $y=f((2x-1)/(x+1))$، dy/dx را بیابید.

۹۲. $y=3\sin 2x$ و $x=u^2+\pi$ داده‌شده‌اند. وقتی $u=0$، مقدار dy/du را بیابید

۹۳. آهنگ تغییر $y=\sqrt{x^2+16}$ نسبت به $t=x/(x-1)$ را در $x=3$ بیابید.

۹۴. فرض کنید $f(x)=x^{2/3}$ و $g(x)=x^3$. نشان دهید که ترکیب این توابع با هر ترتیبی، در $x=0$ مشتقپذیر است، اما f خود در $x=0$ مشتقپذیر نیست. آیا این امر با قاعدهٔ زنجیری در تناقض نیست؟ توضیح دهید.

۹۵. اگر معادلات $z=x\sin y-y^2$ و $\cos y=y\sin z$ تواماً x و y را به‌عنوان توابع مشتقپذیری از z تعریف کنند، dx/dz را بیابید.

۹۶. اگر از اتحاد

$$\sin(x+a)=\sin x\cos a+\cos x\sin a$$

نسبت به x مشتق بگیریم، آیا معادلهٔ حاصل نیز یك اتحاد است؟ آیا این اصل درمورد معادلهٔ $x^2-2x-8=0$ نیز برقرار است؟ توضیح دهید.

۹۷. یك تقریب خطی مفید برای

$$\frac{1}{1+\tan x}$$

از تلفیق تقریبهای

$$\tan x\approx x \quad \text{و} \quad \frac{1}{1+x}\approx 1-x$$

به‌دست می‌آید و

$$\frac{1}{1+\tan x}\approx 1-x$$

را نتیجه می‌دهد. نشان دهید که این رابطه یك تقریب خطی متداول برای $1/(1+\tan x)$ است.

۹۸. فرض کنید $f(x)=\sqrt{1+x}+\sin x-0.5$.

الف) برای اثبات اینکه معادلهٔ $f(x)=0$ ریشه‌ای بین $-\pi/4$ و 0 دارد، نشان دهید که $f(-\pi/4)<0$ و $f(0)>0$.

ب) برای براورد جواب $f(x)=0$، به‌جای $\sqrt{1+x}$ و $\sin x$ صورت‌خطی آنها در $x=0$ را قراردهید و معادلهٔ خطی حاصل را حل کنید.

پ) **ماشین‌حساب** براورد حاصل را در معادلهٔ اصلی قرار دهید و درستی آن را بیازمایید.

۹۹. الف) نشان‌دهید که محیط P_n یك n ضلعی‌منتظم‌محاط دریك دایرهٔ به‌شعاع r عبارت است از $P_n=2nr\sin(\pi/n)$.

ب) وقتی $n\to\infty$، حد P_n را بیابید. آیا پاسخ شما با آنچه‌که دربارهٔ محیط دایره می‌دانید سازگار است؟

۱۰۰. اگر

الف) $x=\cos^2 t,\quad y=\sin^2 t$

ب) $x=\cos^3 t,\quad y=\sin^3 t$

پ) $x=\tan^2 t,\quad y=\sin 2t$

dy/dx را در $t=\pi/4$ بیابید.

۱۰۱. اگر $x=\cos 3t$ و $y=\sin^2 3t$، مطلوب است dy/dx و d^2y/dx^2.

۱۰۲. اگر $x=3t+1$ و $y=t^2+t$، مطلوب است dy/dt، dx/dt و dy/dx. t را حذف کنید تا y به‌عنوان تابعی از x به‌دست آید. سپس مستقیماً dy/dx را محاسبه کنید. آیا دونتیجه باهم تطبیق می‌کنند؟

۱۰۳. اگر $x=t-t^2$ و $y=t-t^3$، مقادیر dy/dx و d^2y/dx^2 را در $t=1$ بیابید.

۱۰۴. **سه‌تاییهای فیثاغورسی.** فرض کنید که مختصات ذرهٔ متحرکی چون $P(x,y)$ درصفحه به‌ازای $-\infty<t<\infty$ عبارت باشند از

$$x(t)=\frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{و} \quad y(t)=\frac{2t}{1+t^2}$$

نشان دهید $x^2+y^2=1$، و درنتیجه حرکت روی دایرهٔ واحد انجام می‌شود. ذره از چه نقطه‌ای از دایره نمی‌گذرد؟ دایره را رسم کنید و جهت حرکت را وقتی t افزایش می‌یابد تعیین کنید. به‌ازای چه مقادیری از t (x,y) برابر است با $(-1,0)$؟ $(1,0)$؟ $(0,1)$؟

از $x^2+y^2=1$ داریم

$$(t^2-1)^2+(2t)^2=(t^2+1)^2$$

این معادله در نظریهٔ اعداد مورد توجه است زیرا سه‌تاییهای فیثاغورسی از اعداد صحیح را به‌دست می‌دهد. وقتی t عددی صحیح و بزرگتر از ۱ باشد، $a=t^2-1$، $b=2t$ و $c=t^2+1$ اعداد صحیح مثبتی هستند که در معادلهٔ $a^2+b^2=c^2$ صدق می‌کنند.

۱۰۵. با استفاده از استقرای ریاضی (پیوست ۲) ثابت کنید که اگر $y=u_1u_2\cdots u_n$ حاصلضرب متناهی از توابع مشتق‌پذیر باشد، آنگاه

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du_1}{dx}\cdot u_2\cdots u_n+u_1\frac{du_2}{dx}\cdots u_n+\cdots+u_1u_2\cdots u_{n-1}\frac{du_n}{dx}.$$

این همان معادلهٔ (۳) در بخش ۲.۲ است.

۱۰۶. اگر $f(x)=(x-a)^n g(x)$، که در آن $g(x)$ یک چندجمله‌ای باشد و $g(a)\neq 0$، نشان دهید که

$$f(a)=0=f'(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)$$

اما $f^{(n)}(a)=n!\,g(a)\neq 0$.

۱۰۷. قاعدهٔ لایب‌نیتس را ثابت کنید

الف) $$\frac{d^2(uv)}{dx^2}=\frac{d^2u}{dx^2}\cdot v+2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+u\frac{d^2v}{dx^2}$$

ب) $$\frac{d^3(uv)}{dx^3}=\frac{d^3u}{dx^3}\cdot v+3\frac{d^2u}{dx^2}\frac{dv}{dx}+3\frac{du}{dx}\frac{d^2v}{dx^2}+u\frac{d^3v}{dx^3}$$

پ) $$\frac{d^n(uv)}{dx^n}=\frac{d^nu}{dx^n}\cdot v+n\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\frac{dv}{dx}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{d^{n-k}u}{dx^{n-k}}\frac{d^kv}{dx^k}+\cdots+u\frac{d^nv}{dx^n}$$

جملات طرف راست این معادله را می‌توان از جملات موجود در بسط دوجمله‌ای $(a+b)^n$ با قرار دادن $(d^{n-k}u/dx^{n-k})\cdot(d^kv/dx^k)$ به‌جای $a^{n-k}b^k$، $k=0,1,2,\ldots,n$، و این تعبیر که d^0u/dx^0 همان u است، به‌دست آورد.

۱۰۸. فرض کنید تابعی چون f به‌ازای همهٔ xها و yها در دو شرط زیر صدق می‌کند

i) $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$

ii) $f(x)=1+xg(x)$ که در آن $\lim_{x\to 0} g(x)=1$.

ثابت کنید که (الف) مشتق $f'(x)$ وجود دارد، و (ب) $f'(x)=f(x)$.

۱۰۹. تمام مقادیر ثابت m و b را بیابید که به‌ازای آنها تابع

$$y=\begin{cases}\sin x & x<\pi\\ mx+b & x\geqslant\pi.\end{cases}$$

(الف) در $x=\pi$ پیوسته باشد؛ (ب) در $x=\pi$ مشتق‌پذیر باشد.

۱۱۰. آیا تابع زیر در $x=0$ مشتق دارد؟ توضیح دهید.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0.\end{cases}$$

۱۱۱. الف) نشان دهید که تابع زیر در $x=0$ مشتق‌پذیر است. (از تعریف مشتق استفاده کنید، اما مسألهٔ ۸۴ از مسأله‌های گوناگون فصل ۱ را هم ببینید.)

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0.\end{cases}$$

ب) به‌ازای $x\neq 0$، $f'(x)$ را بیابید.

پ) آیا f' در $x=0$ پیوسته است؟ توضیح دهید.

۱۱۲. با استفاده از نتیجهٔ مسألهٔ ۸۴ از مسأله‌های گوناگون فصل ۱، نشان دهید که توابع زیر در $x=0$ مشتق‌پذیرند.

الف) $|x|\sin x$

ب) $x^{2/3}\sin x$

پ) $\sqrt[3]{x}\,(1-\cos x)$

۱۱۳. خطی‌سازی، بهترین تقریب خطی را به‌دست می‌دهد. فرض کنید که $y=f(x)$ در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، و

$$g(x)=m(x-a)+c$$

(m و c ثابت‌اند). اگر خطای $e(x)=f(x)-g(x)$ در نزدیکی $x=a$ به‌قدر کافی کوچک باشد، ممکن است به‌فکر بیفتیم به‌جای صورت خطی $L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$ از g به‌عنوان تقریب خطی f استفاده کنیم. نشان دهید که اگر شرایط ۱ و ۲ی زیر را بر g تحمیل کنیم، آنگاه

$$g(x)=f(a)+f'(a)(x-a).$$

۱. $e(a)=0$ (خطای تقریب در $x=a$ صفر است)،

۲. $\lim_{x\to a}\dfrac{e(x)}{x-a}=0$ (خطا در مقایسه با $x-a$ قابل چشم‌پوشی باشد).

پس خطی‌سازی، تنها تقریب خطی را به دست می‌دهد که خطایش‌هم در $x=a$ صفر است و هم در مقایسه با $(x-a)$ قابل چشم‌پوشی است.

۱۱۴. برای محاسبهٔ $x=\sqrt[q]{a}$ روش نیوتن را در مورد $f(x)=x^q-a$ به‌کار بگیرید. فرض کنید که a یك عدد حقیقی مثبت و q یك عدد صحیح مثبت باشد. نشان دهید که x_1 یك «میانگین وزندار» x_0 و a/x_0^{q-1} است. سپس ضرایب m_0 و m_1 را بیابید به‌قسمی که

$$x_1=m_0x_0+m_1\left(\frac{a}{x_0^{q-1}}\right),\quad \begin{matrix} m_0>0,\ m_1>0 \\ m_0+m_1=1 \end{matrix}$$

اگر x_0 و a/x_0^{q-1} برابر بودند به‌چه‌نتیجه‌ای می‌رسیدید؟ دراین صورت مقدار x_1 چه می‌بود؟

۳

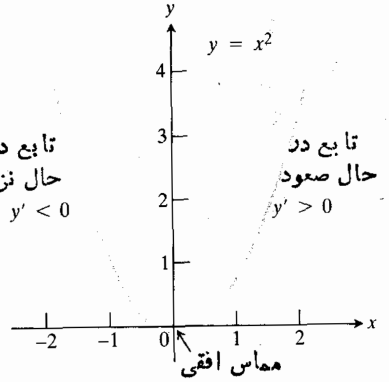
کاربرد مشتق

چشم‌انداز

دراین فصل می‌بینیم کـه مطالعات گذشتهٔ ما در مورد مشتق فواید دیگری هم دارد. برای تعیین شکل نمودار از مشتقهای اول و دوم تابع استفاده می‌کنیم. مشتق اول تعیین می‌کند که نمودار درکجا صعودی و درکجا نزولی است. مشتق دوم ما را مطلع می‌سازد که تقعر نمودارکجا رو بـه‌بالا وکجا رو بـه‌پایین است. بسیاری از نمودارها وقتی x بزرگ شود، یا به‌مقادیر حقیقی‌خاصی میل کند، به‌خط مستقیم میل می‌کنند؛ این پدیده را نیز مطالعه خواهیم کرد. سپس به‌حل مسألهٔ یافتن مقادیر ماکسیمم ومینیمم یك تابع مشتقپذیر می‌پردازیم؛ این مسأله هنوز هم همان‌قدرمطرح‌است که سیصدسال پیش بود و سبب تکامل حساب دیفرانسیل و انتگرال شد. همچنین به‌این مطلب می‌پردازیم که چگونه از رابطهٔ بین دومتغیر می‌توان رابطهٔ بین آهنگهای تغییر آنها را تعیین کرد. با توجه به‌این گونه روابط، می‌توانیم تعیین‌کنیم که دوکشتی با چه سرعتی ازهم دور می‌شوند، یا وقتی حباب صابون باد می‌کند، شعاع آن با چه‌سرعتی زیاد می‌شود. همچنین به بررسی قضیهٔ مقدار میانگین می‌پردازیم، قضیه‌ای که نتایجش کلید حساب انتگرال را دراختیارمان‌می‌گذارند. سپس برای محاسبهٔ حد، با روش استادانه‌ای که ریاضیدان سویسی یوهان برنولی اختراع کرده، ولی به‌نام یك مـارکی[۱] فرانسوی تمام شد، ازمشتق استفاده می‌کنیم. بالاخره، فصل‌را با ذکر کشفی به‌پایان می‌بریم که در اواخر قرن هیجدهم انجام گرفت و منجر بـه ارائهٔ فرمولی ساده برای‌تقریب‌زدن توابع، و براورد خطاها شد. با این فرمول می‌توانیم به طور دقیق درجهٔ دقت صورت خطی شدهٔ تابع را مشخص کنیم. همچنین خواهیم دیدکه چگونه افزودن یك جملهٔ درجهٔ دوم به‌صورت خطی، باعث دقیقترشدن تقریب می‌شود.

۱.۳ رسم خم با استفاده از مشتق اول

وقتی بدانیم که تابعی درهر نقطه ازبازه‌ای مشتق دارد، بنا برقضایای بخش ۱۱.۱ می‌دانیم که تابع در سراسر آن بازه پیوسته است، و نمودارش درآن بازه قطع‌شدگی ندارد. مثلا نمودارهای توابع مشتقپذیر $y=\sin x$ و $y=\cos x$، همانند نمودارهـای چند‌جمله‌ایهـا، هرچه ادامـه بیابند قطع نمی‌شونـد. نمودارهـای $y=\tan x$ و $y=1/x^2$ صرفـاً در نقاطی کـه توابع مربوط تعریف نمی‌شوند قطع می‌شوند. بر هربازه‌ای‌که این نقاط را شامل نباشد، تـوابع مزبور مشتقپذیرنـد؛ و بنابـراین پیوسته‌انـد و نمودارهایشان قطع‌شدگی ندارند.

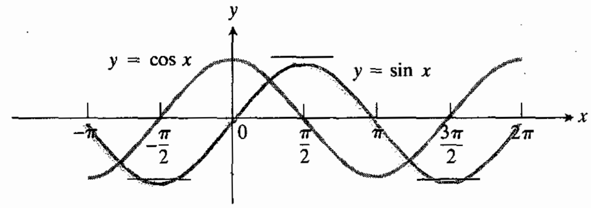


۱.۳ تابع $y=x^2$ بر $(-\infty, 0)$ که در آنجا مشتق $y'=2x$ منفی‌است نزول‌می‌کند، و بر $(0, \infty)$ که درآنجا مشتق مثبت است صعود می‌کند. بین اینها $y'=0$، و مماس بر خم افقی است.

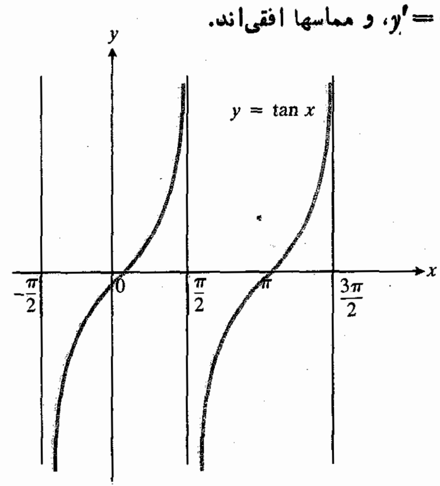
---

۱. یك لقب اشرافی

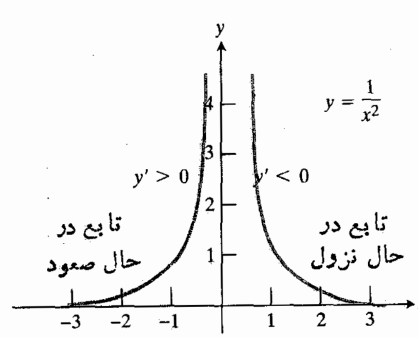
اگر بدانیم که مشتق تابعی کجا مثبت، کجا منفی، یا کجا صفر است، آنگاه می‌توانیم دربارهٔ شکل نمودار آن تابع اطلاعاتی به‌دست آوریم. به‌زودی خواهیم دید با دانستن این مطلب می‌توان مشخص کرد که نمودار در کجا بالا می‌رود، پایین می‌آید، یا مماس افقی دارد. نخست شکلهای ۱۰۳ تا ۵۰۳ را ملاحظه کنید.



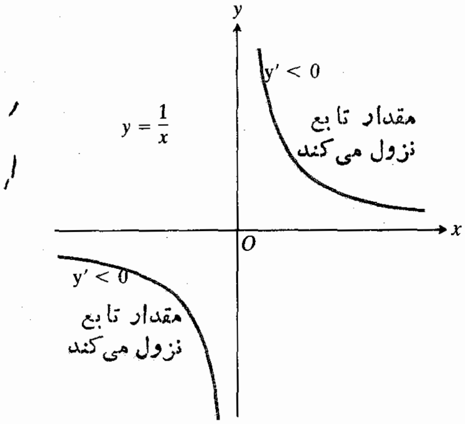
۲۰۳ نمودار $y = \sin x$ بردامنه‌اش بینهایت‌بار بالا و پایین می‌رود. جایی که مشتق $y' = \cos x$ مثبت است بالا می‌رود، وجایی که منفی است پایین می‌آید. درنقاط تحول بین بالارفتن و پایین آمدن، $y' = 0$، و مماسها افقی‌اند.



۳۰۳ نمودار $y = \tan x$ بینهایت تکهٔ مجزا موسوم به «شاخه» دارد. دراینجا دوتا از آنها را می‌بینید. درهر شاخه $y' = \sec^2 x$ مثبت است و y تابعی است صعودی از x.



۴۰۳ نمودار $y = 1/x^2$ بر $(-\infty, 0)$ که درآنجا $y' = -2/x^3$ مثبت است، صعودی است، و بر $(0, \infty)$ که درآنجا $y' = -2/x^3$ منفی است، نزولی است.



۵۰۳ نمودار $y = 1/x$ وقتی x در محدودهٔ بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$ از چپ به راست حرکت می‌کند پایین‌می‌آید. مشتق $y' = -1/x^2$ درسراسر هریك از این بازه‌ها منفی است، اما در $x = 0$ تعریف نمی‌شود.

توابع صعودی و نزولی

تابعی چون $y = f(x)$ را درسراسر یك بازهٔ I صعودی گویند هرگاه با افزایش x، y هم زیاد شود؛ به‌این معنا که وقتی در I، $x_2 > x_1$، داشته باشیم $f(x_2) > f(x_1)$. به همین ترتیب، $y = f(x)$ در سراسر I نزول می‌کند هرگاه با کاهش x، y نیز کم شود. پس وقتی در I، $x_2 > x_1$، داریم $f(x_2) < f(x_1)$. وقتی x در I از چپ به‌راست حرکت می‌کند نمودار یك تابع صعودی خیز می‌گیرد؛ و نمودار یك تابع نزولی افت می‌کند. همان‌گونه که دیده‌ایم، ممکن است تابعی بریك بازه صعود، و بر بازه‌ای دیگر نزول کند.

طبق شکلهای ۱۰۳ تا ۵۰۳، صعود با مشتقهای مثبت همراه است ونزول با مشتقهای منفی. دربخش ۷۰۳ نشان خواهیم دادکه اگر f' درهر نقطه از یك بازهٔ I مثبت باشد، آنگاه f بر I صعود می‌کند و اگر f' درهر نقطه از I منفی باشد، آنگاه f بر I نزول می‌کند. این واقعیتها را فعلا به‌عنوان آزمون مشتق اول برای صعودی و نزولی‌بودن می‌پذیریم.

آزمون مشتق اول برای صعودی و نزولی‌بودن

فرض‌کنید که یك تابع f درهرنقطه چون x از یك بازهٔ I مشتق داشته‌باشد. آنگاه

f بر I صعودی است، هرگاه به‌ازای هر x در I، $f'(x) > 0$،

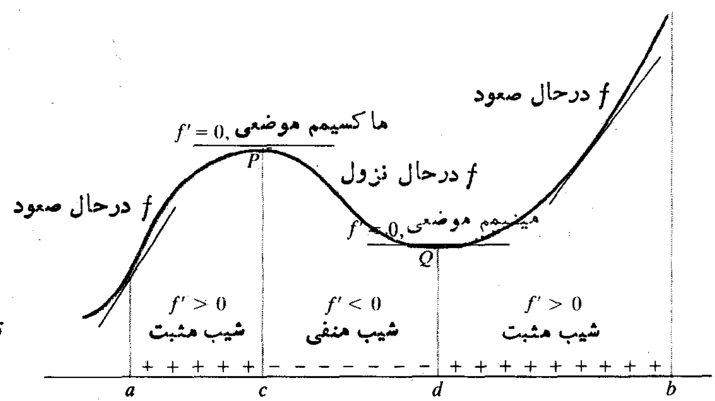
f بر I نزولی است، هرگاه به‌ازای هر x در I، $f'(x) < 0$.

آزمون مشتق اول به‌زبان هندسی حاکی است که توابع مشتق‌پذیر بربازه‌هایی صعود می‌کنند که نمودارشان شیب مثبت داشته باشند، و بر بازه‌هایی نزول می‌کنند که نمودارشان شیب منفی داشته‌باشند.

مماسهای افقی

ازآنجا که مشتقی چون f' درهر بازهٔ Iیی کــه f' تعریف شود دارای ویژگی مقدار میانی است (بخش ۱۱۰۱)، هروقت f' در این بازه تغییرعلامت می‌دهد، باید مقدارش صفرشود. پس هروقت f' دربازهٔ I تغییر علامت می‌دهد، نمودار f بــاید مماس افقی داشته‌باشد.

اگر وقتی x ازچپ به‌راست می‌رود و ازنقطه‌ای چون c می‌گذرد، مقدار f' از مثبت به منفی تبدیل شود، آنگاه مقدار f در c یك مقدار **ماکسیمم موضعی** f است (شکل ۶.۳ را ببینید). یعنی $f(c)$ بزرگترین مقداری است کــه تابع در یــك همسایگی نزدیك $x=c$ دارد. بــه همین تــرتیب، اگــر وقتی x از چپ به راست حرکت می‌کند و از نقطه‌ای چون d می‌گذرد، مقدار f' از منفی بــه مثبت تبدیل شود، آنگــاه مقدار f در d یــك مقدار **مینیمم موضعی** f است. یعنی، $f(d)$ کوچکترین مقداری است که تــابع در یك همسایگی نزدیك $x=d$ دارد. (وقتی در بخش ۴.۳ بــه مطالعهٔ نظریهٔ مقادیر ماکسیمم و مینیمم می‌پردازیم تعاریف رسمیتری ازماکسیمم موضعی، ومینیمم موضعی هم به‌دست می‌دهیم.)



۶.۳ تابع $y=f(x)$ بر (a, c) که درآنجا $f'>0$، صعود می‌کند، بر (c, d) کــه درآنجا $f'<0$ نزول می‌کند، و مجدداً بر (d, b) صعود می‌کند. نقاط تحول با مماسهای افقی مشخص شده‌اند.

رسم نمودار

مثال ۱ نمودار تابع $y=x^3-3x^2+4$ را رسم کنید.

حل: شکل ۷.۳ را ببینید. ابتدا طولها وعرضهای از مبدأ (مختصهای x و y نقاط تقاطع یا تماس نمودار با محورها) را می‌یابیم. عرض ازمبدأ با قراردادن $x=0$ به‌دست می‌آید.

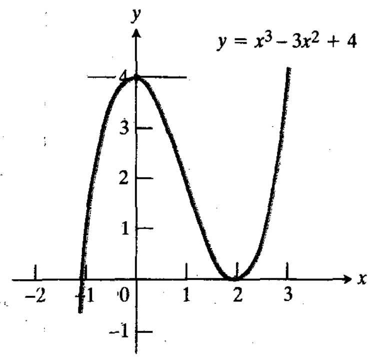
$$y=(0)^3-3(0)^2+4=4 .$$

تجزیهٔ چندجمله‌ای به‌صورت

$$y=x^3-3x^2+4=(x+1)(x-2)^2$$

x	y	y'
-1	۰	۹
۰	۴	۰
۱	۲	-3
۲	۰	۰
۳	۴	۹

(الف)



(ب)

۷.۳ (الف) جــدول شیب. (ب) نمــودار $y=x^3-3x^2+4$ بر $(-\infty, 0)$ تا یك ماکسیمم موضعی به‌مقدار ۴ در $x=0$ صعود می‌کند، و تا یك مینیمم موضعی به مقدار ۰ در $x=2$ نــزول می‌کند، و دوباره بــر $(2, \infty)$ صعود می‌کند.

نشان می‌دهد که طولهای ازمبدأ عبارت‌اند از $x=-1$ و $x=2$.

حال می‌بینیم که مشتق تــابع کجا مثبت، کجا منفی، وکجا صفر است. مشتق عبارت است از

$$y'=3x^2-6x=3x(x-2)$$

که در $x=0$ و $x=2$ صفر است. به‌ازای این مقادیر خم مماس، افقی دارد.

مشتق y' در طــرف چپ $x=0$ کــه x و $x-2$ هردو منفی‌اند، مثبت است، و در طرف راست $x=2$ که x و $x-2$ هر دو مثبت‌اند، نیز مثبت است. بنابراین، این تابع بربازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(2, \infty)$ صعود می‌کند.

بین $x=0$ و $x=2$، مشتق $y'=3x(x-2)$ منفی است زیرا $3x>0$ ولی $x-2<0$. پس تــابع بربــازهٔ $(0, 2)$ نزول می‌کند.

حال جدولی کوچك از مقادیر تابع وشیبها تشکیل می‌دهیم (شکل ۷.۳ الف را ببینید). این جــدول عرض از مبدأ، طولهای از مبدأ ونقاط تحول بین قسمتهای صعودی ونزولی را شامل است.

بالاخره، برای رسم نموداری که در شکل ۷.۳ (ب) نشان داده شده‌است. جای نقاط را تعیین می‌کنیم، و اطلاعات مربوط به‌چگونگی صعود ونزول خم را به‌کار می‌بندیم. در $x=0$، مقدار ماکسیمم موضعی تابع برابر است بـا $y=4$. در $x=2$ مقدار مینیمم موضعی تابع برابر است با $y=0$. ■

مثال ۲ خم زیر را رسم کنید.

$$y=f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+2$$

حل: عرض از مبدأ $y=2$ است؛ اما یافتن حتی یك طول از مبدأ هم آسان نیست زیرا چندجمله‌ای به‌سادگی بـه عاملهای درجهٔ اول تجزیه نمی‌شود. توجه‌کنیدکه چون $f(-1)<0$ و $f(0)=2$ ، ریشه‌ای بین $x=-1$ و $x=0$ وجـود دارد. خوشبختانه، برای رسم خم دانستن طولهای از مبدأ لازم نیست. مشتق اول‌تمام اطلاعات لازم دربارهٔ افت وخیز خم و نقاط دارای مماس افقی را به‌ما می‌دهد.

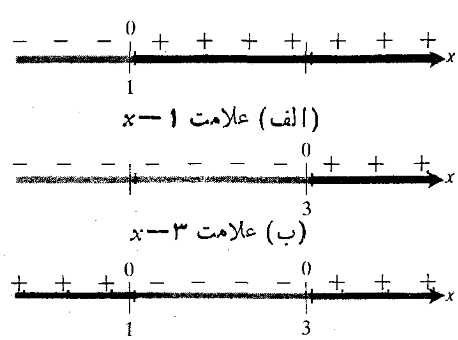
مشتق اول

$$\frac{dy}{dx}=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$$

در $x=1$ یا در $x=3$ صفر است. پس خم در $x=1$ و $x=3$ مماس افقی دارد. علاوه‌براین، بعداً خواهیم دیدکه این مقادیر x محلهای تغییرعلامت شیب راهم نشان می‌دهند.

علامت dy/dx به‌علامت عاملهای $x-1$ و $x-3$ بستگی دارد. چون علامت $x-1$ وقتی x درچپ ۱ است منفی است و وقتی در راست آن است مثبت است، الگوی علامت بـه صورت شکل ۸.۳ (الف) درمی‌آید. به‌همین ترتیب، علامت $x-3$ در قسمت (ب) نشان داده شده‌است، وعلامت حاصلضرب

$$dy/dx=(x-1)(x-3)$$



(الف) علامت $x-1$

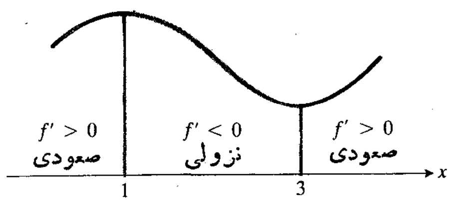
(ب) علامت $x-3$

(پ) علامت $(x-1)(x-3)$

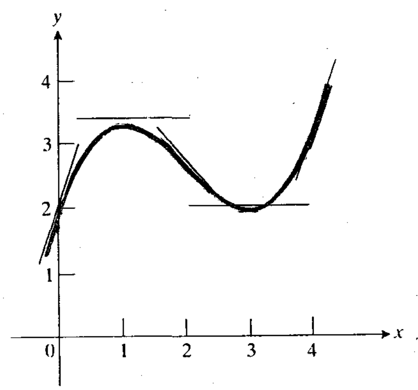
۸.۳ الگوی علامت حاصلضرب $(x-1)(x-3)$.

در شکل ۸.۳ (پ). اگر خمی رسم‌کنیم کـه وقتی $x<1$، خیز بردارد، وقتی $1<x<3$ افت کند، و وقتی $x>3$، مجدداً خیز بردارد، (شکل ۹.۳)، دربارهٔ شکل خم ایده‌ای، هرچند ناقص، به‌دست خواهیم آورد. این تابع در $x=1$ ماکسیمم موضعی، و در $x=3$ مینیمم موضعی دارد.

برای اینکه خم دقیقتری به‌دست آید، باید جدول مقادیری مثلاً از $x=0$ تـا $x=4$ تهیه‌کردکه نقاط تحول بین قسمتهای صعودی و نزولی خم را شامل باشد (شکل ۱۰.۳).



۹.۳ نمودارتابعی که الگوی علامت مشتقش‌طبق شکل ۸.۳ (پ) است، باید چیزی شبیه این‌باشد.



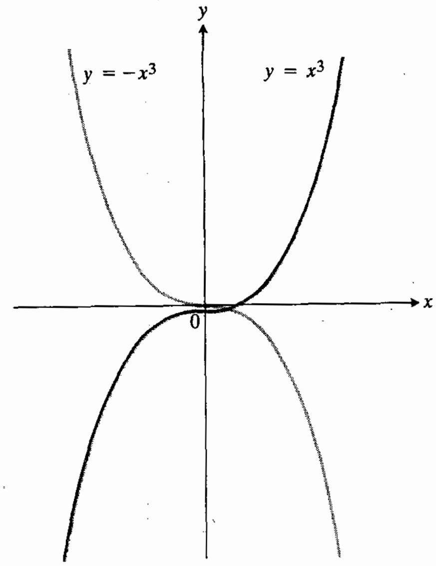
۱۰.۳ نمودار

$$y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+2$$

ازتلفیق‌اطلاعات عمومی دربارهٔ شکل‌نمودار، شکل ۹.۳، وبرگزیده‌ای ازنقاط و شیبهای مشخص‌شده به‌دست می‌آید. ■

وجود مماس افقی بدون وجود ماکسیمم یا مینیمم

نمی‌توان گفت که هر وقت مشتق صفر شود، الـزاماً تغییر علامت انجام می‌شود. مشتق تابع $y=x^3$ یعنی $y'=3x^2$ درمبدأ صفر، و درهر دوطرف آن مثبت است. نمودار $y=x^3$ مماس در $x=0$ را قطع می‌کند، و به صعود خود ادامـه می‌دهد. به‌همین ترتیب، نمودار $y=-x^3$ مماس افقی در $x=0$ را قطع می‌کند، و به نزول خود ادامه می‌دهد. (شکل ۱۱.۳ را ببینید.)

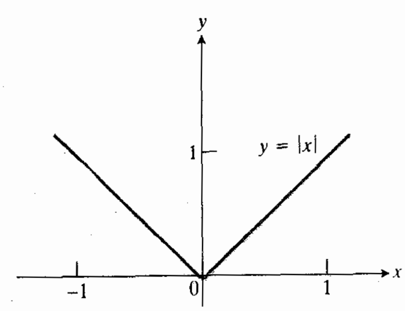


۱۱٫۳ نمودارهای $y=x^3$ و $y=-x^3$ در $x=0$ مماسهایشان را قطع می‌کنند.

وجود ماکسیمم یا مینیمم درغیاب مماس افقی

دیدیم که یك تابع f ممکن است در نقطه‌ای کــه f' صفر است، یك مقدار ماکسیمم یــا مینیمم موضعی داشته‌بـاشد. در عمل، این واقعه چنان به‌وفور رخ می‌دهد که جستجو برای یافتن صفرهای f' را ارزشمند می‌سازد. اما، باید متوجه باشید که ممکن است تابعی درنقطه‌ای که مشتق ندارد، مقدار ماکسیمم یا مینیمم موضعی داشته باشد. پس، جستجو برای یافتن مقادیر اکسترمم باید از حل معادلهٔ $f'=0$ فراتر رود.

مثال ۳ تابع $y=|x|$ در $x=0$ کــه dy/dx وجود ندارد (شکل ۱۲٫۳) مقدار مینیمم خودش را به‌دست می‌آورد.



۱۲٫۳ تابع $y=|x|$ درنقطه‌ای که مشتق وجود ندارد، مقدار مینیمم خودش را به‌دست می‌آورد. ■

مسأله‌ها

درمسأله‌های ۱–۱۸، مطلوب است dy/dx وبازه‌هایی از مقادیر x که برآنها $y=f(x)$ صعودی یا نزولی است. هریك از خمها را رسم کنید، نقاط تحول بین بخشهای صعودی و نزولی را نشان دهید. مقادیر ماکسیمم ومینیمم موضعی ناشی از $y'=0$ را بیابید.

۱. $y=x^2-x+1$

۲. $y=12-12x+2x^2$

۳. $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{3}$

۴. $y=2x^3-3x^2+3$

۵. $y=x^3-27x+36$

۶. $y=x^4-8x^2+16$

۷. $y=3x^2-2x^3$

۸. $y=(x-2)(x-11)(x+13)$

۹. $y=x^4$

۱۰. $y=x^{4/3}$

۱۱. $y=\frac{1}{x^2}$

۱۲. $y=\frac{1}{(x-1)}$

۱۳. $y=\frac{1}{(x+1)^2}$

۱۴. $y=9x-x^3$

۱۵. $y=\cos x$، $\frac{-3\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$

۱۶. $y=\sec x$، $\frac{-\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

۱۷. $y=x|x|$

۱۸. $y=\sin|x|$، $-2\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$

۱۹. نمــودار $y=\cos|x|$ ، $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ را رسم کنیــد. مقادیر ماکسیمم ومینیمم تابع چه هستند وکجا به‌دست می‌آیند؟

۲۰. نمودار $y=(1/2)(|\sin x|+\sin x)$ ، $0\leqslant x\leqslant 2\pi$، را رسم کنید. مقادیر مـاکسیمم و مینیمم تابع چه هستند و کجا به‌دست می‌آیند؟

۲۱. نشان دهید کــه تابع $y=x/(x+1)$ بر هر بـازه‌ای از دامنه‌اش صعود می‌کند.

۲۲. تـابع $y=f(x)$ در $x=c$ مشتق دارد، و $f'(c)=0$.

آیا f باید در $x=c$ یك ماکسیمم موضعی یا مینیمم موضعی داشته باشد؟ توضیح دهید.

۲۳. یك تابع مثال بزنید که به‌ازای همهٔ xها پیوسته باشد، بر $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$ نزول کند، اما در $x=0$ مشتق نداشته باشد. (راهنمایی: دو تابع را به‌هم بچسبانید.)

۲۴. مطلوب است تمام مقادیر ثابتهای m و b به‌طوری‌که تابع

$$f(x)=\begin{cases} mx+b & x<1\\ x^2+1 & x\geqslant 1\end{cases}$$

(الف) پیوسته باشد، (ب) مشتق‌پذیر باشد.

۲۵. فرض کنید $y=x-2\sin x$، $0\leqslant x\leqslant \pi$.

الف) در $[0,\pi]$ کجا $y'<0$، $y'=0$، و $y'>0$؟

ب) مطلوب است نقاط انتهایی خم، و نقاطی که در آن $y'=0$. سپس خم را رسم کنید.

پ) در $[0,\pi]$ معادلهٔ $x-2\sin x=0$ دو جواب دارد که یکی از آنها $x=0$ است. جواب دیگر را تا دو رقم اعشار براورد کنید.

۲۶. فرض کنید n یك عدد صحیح مثبت باشد، و $y=x^n$. اگر (الف) n زوج، (ب) n فرد باشد، تعیین کنید که به ازای چه xهایی y صعودی است و به‌ازای چه xهایی y نزولی است.

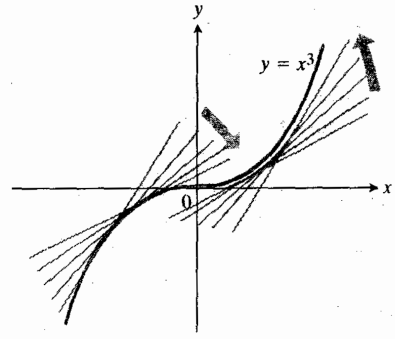
TOOLKIT PROGRAMS

Derivative Grapher Super * Grapher
Function Evaluator

۲.۳ تقعر و نقطهٔ عطف

دراین بخش چگونگی رسم دقیقتر نمودار با استفاده از علامت مشتق دوم تابع را تشریح می‌کنیم.

همان‌طور که در شکل ۱۳.۳ دیده می‌شود، تابع $y=x^3$ همراه باافزایش x، صعودی می‌کند؛ اما، قسمتی ازخم که مربوط به بازهٔ



۱۳.۳ تقعر نمودار $y=x^3$ در سمت چپ رو به‌پایین و درسمت راست رو به‌بالاست.

$(-\infty, 0)$ است و قسمت مربوط به $(0,\infty)$ درجهتهای متفاوتی می‌پیچند. اگر در امتداد خم از سمت چپ به‌طرف مبدأ برویم، پیچش خم به‌سمت راست است. وقتی ازمبدأ دور می‌شویم، خم به‌سمت چپ می‌پیچد. قسمت چپ «به‌پایین خم می‌شود»، و قسمت راست «به‌بالا خم می‌شود».

توصیف پیچش به‌طریق دیگر این است که وقتی نقطهٔ تماس ازسمت چپ به مبدأ میل می‌کند، مماس بر خم در جهت ساعت می‌چرخد. دراین حالت شیب خم تقلیل می‌یابد. وقتی نقطهٔ تماس از مبدأ وارد ربع اول می‌شود، مماس درخلاف جهت ساعت می‌چرخد. دراین حالت شیب خم زیاد می‌شود.

می‌گوییم که تقعر خم $y=x^3$ بر بازهٔ $(-\infty, 0)$ که در آن y' کم می‌شود رو به‌پایین است، و بر بازهٔ $(0,\infty)$ که در آن y' زیاد می‌شود رو به‌بالاست. پس تعریف تقعر نمودار توابع مشتق‌پذیر به‌شرح زیر است.

تعریف

تقعر رو به‌پایین وتقعر رو به‌بالا

نمودار تابع مشتق‌پذیر $y=f(x)$ در بازه‌ای که y' کم می‌شود تقعر رو به‌پایین دارد، و دربازه‌ای که y' زیاد می‌شود تقعر رو به‌بالا دارد.

اگر تابع $y=f(x)$ علاوه برمشتق اول، مشتق دوم هم داشته باشد (بیشتر توابعی که دراین کتاب درنظر می‌گیریم از این نوع‌اند) می‌توانیم آزمون مشتق اول (موضوع بحث بخش ۱.۳) را درمورد تابع $f'=y'$ به‌کار ببریم ونتیجه بگیریم که اگر $y''<0$، y' تقلیل می‌یابد، و اگر $y''>0$، y' زیاد می‌شود. بنابراین، آزمونی داریم که می‌توانیم آن را در مورد فرمول $y=f(x)$ به‌کار ببریم وتقعر نمودارش را تعیین کنیم؛ نام این آزمون، آزمون مشتق دوم برای تقعر است.

آزمون مشتق دوم برای تقعر

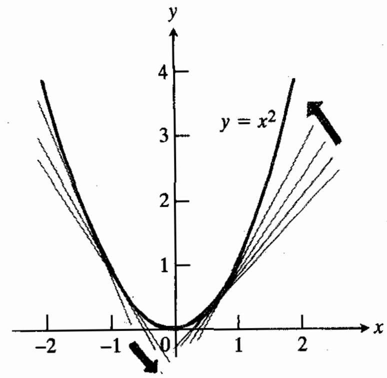
نمودار $y=f(x)$

دربازه‌ای که $y''<0$، تقعر روبه‌پایین دارد

دربازه‌ای که $y''>0$، تقعر روبه‌بالا دارد.

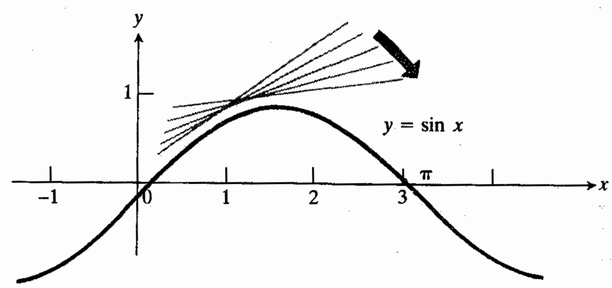
مفهوم این آزمون، این است‌که اگر $y''<0$، آنگاه با افزایش x، y' کاهش می‌یابد و مماس در جهت ساعت می‌چرخد. برعکس، اگر $y''>0$، آنگاه وقتی x زیاد می‌شود، y' افزایش می‌یابد و مماس درخلاف جهت ساعت می‌چرخد.

مثال ۱ شکل ۱۴.۳ را ببینید. برسراسر محور x، خم $y=x^2$ تقعر رو به‌بالا دارد زیرا $y''=2>0$.



۱۴.۳ نمودار $y=x^۲$ تقعر رو به بالا دارد. وقتی x زیاد می‌شود، مماس در خلاف جهت ساعت می‌چرخد؛ y' زیاد می‌شود. ■

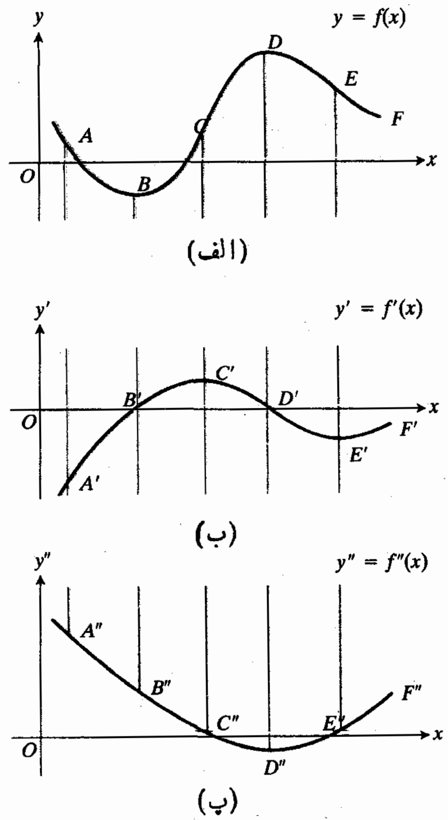
مثال ۲ شکل ۱۵.۳ را ببینید. در $\circ < x < \pi$، خم $y=\sin x$ تقعر رو به پایین دارد زیرا دراین بازه، $y'' = -\sin x < \circ$. ■



۱۵.۳ بین $x=\circ$ و $x=\pi$، نمودار $y=\sin x$ تقعر رو به پایین دارد زیرا درهریك ازاین نقاط، $y''=-\sin x$ منفی است. ■

شکل ۱۶.۳ رابطهٔ متقابل تابعی چون $y=f(x)$ و دو مشتق اولش را نشان می‌دهد. قوس ABC از خم مربوط به y تقعر رو به بالا دارد، CDE تقعر رو به پایین دارد، و تقعر EF هم رو به بالاست. برای بررسی دقیقتر، از قوس ABC قسمتی را در نظر می‌گیریم که نزدیك A است. دراینجا y' منفی است، و شیب خم مربوط به y به سمت پایین و راست است. اما وقتی از A به‌طرف B می‌رویم، می‌بینیم که از منفی‌بودن شیب کم می‌شود؛ یعنی، y' تابعی صعودی از x است. پس، شیب خم مربوط به y'، در A' به‌طرف بالاست. در اینجا شیب y' که y'' است مثبت می‌باشد. در سراسر قوس $A'B'C'$ نیز همین استدلال را می‌توان به‌کار برد: y' تابعی صعودی از x است، و لذا مشتقش یعنی y'' مثبت است. این نکته با قوس $A''B''C''$ از خم مربوط به y'' که دربالای محور x رسم شده مشخص می‌شود.

به‌همین ترتیب، جایی که خم مربوط به y تقعر رو به پایین دارد (درامتداد CDE)، خم y' افت می‌کند، و لذا شیبش یعنی y'' منفی است. درنقطهٔ C که تقعر خم y از رو به بالا بودن به‌رو به‌پایین بودن تغییر می‌کند، y'' صفر است.



۱۶.۳ نمودار تابع f در (الف) را با نمودارهای مشتقات اول و دومش، در (ب) و (پ)، مقایسه کنید.

نقاط عطف

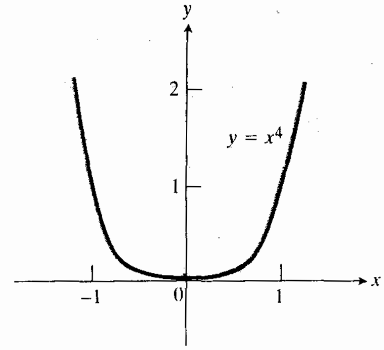
نقطه‌ای از خم که در آن تقعر عوض می‌شود **نقطهٔ عطف** نام دارد. پس نقطهٔ عطف خمی که دوبار مشتق‌پذیر است نقطه‌ای است که y'' در یك طرفش مثبت، و درطرف دیگرش منفی است. درنقطهٔ عطف y'' صفر است زیرا مشتقها دارای ویژگی مقدار میانی هستند.

ممکن است y'' در نقطه‌ای که نقطهٔ عطف نیست صفر باشد، و باید به‌این نکته توجه داشت. درمثال ۴ این مورد را مشاهده خواهیم کرد. همچنین ممکن است چنانکه درمثال ۵ می‌بینیم، نقطهٔ عطف درجایی قرار بگیرد که y'' وجود نداشته‌باشد.

مثال ۳ شکل ۱۳.۳ را ببینید. خم $y=x^۳$ یك نقطهٔ عطف در $x=\circ$ دارد که در آن $y''=۶x$ تغییر علامت می‌دهد. ■

مثال ۴ شکل ۱۷.۳ را ببینید. خم $y=x^۴$ در $x=\circ$ نقطهٔ عطف ندارد. هرچند درآنجا $y''=۱۲x^۲$ صفر می‌شود. مشتق‌دوم در $x=\circ$ تغییرعلامت نمی‌دهد (در واقع y'' هرگزمنفی‌نمی‌شود). خم در تمام محور x تقعر رو به بالا دارد زیرا بر $(-\infty, \infty)$، $y'=۴x^۳$ یك تابع صعودی است.

دراین مثال می‌بینیم که گرچه شرط $y''>\circ$ درآزمون



۱۷.۳ هرچند $y''(۰)=۰$، نمودار $y=x^۴$ درمبدأ نقطهٔ عطف ندارد.

مشتق دوم برای تقعر، شرطی کافی است، اما شرط لازم نیست. خم $y=x^۴$ درمبدأ تقعر روبه‌بالا دارد، اما y'' درمبدأ مثبت نیست. ■

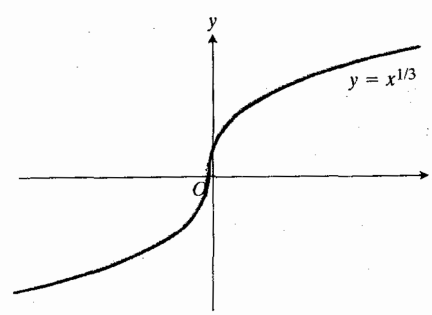
مثال ۵ شکل ۱۸.۳ را ببینید. خم $y=x^{۱/۳}$ در $x=۰$ بااینکه مشتق دوم وجود ندارد، نقطهٔ عطف دارد. برای ملاحظهٔ این نکته y'' را به‌ازای $x\neq ۰$ محاسبه می‌کنیم.

$$y=x^{۱/۳}$$

$$y'=\frac{۱}{۳}x^{-۲/۳}$$

$$y''=-\frac{۲}{۹}x^{-۵/۳}$$

وقتی $x\to ۰$، y'' بینهایت می‌شود. باوجوداین، به‌ازای $x<۰$، خم تقعر رو به‌بالا دارد (دراینجا $y''>۰$ و y' صعودی است) وبرای $x>۰$ (که درآن $y''<۰$ و y' نزولی است) تقعر رو به‌پایین دارد.



۱۸.۳ نمودار $y=x^{۱/۳}$ نشان می‌دهد نقطه‌ای که درآن y'' وجود ندارد، می‌تواند نقطهٔ عطف باشد. ■

کاربرد در رسم نمودار

حال آنچه را که آموخته‌ایم به‌کار می‌گیریم و نمودار یک چندجمله‌ای درجهٔ سه را رسم می‌کنیم. مراحل ۱–۵ که در حل مثال ۶ آمده است دستورالعملی کلی برای رسم نمودار است.

مثال ۶ خم زیر را رسم کنید

$$y=\frac{۱}{۶}(x^۳-۶x^۲+۹x+۶).$$

حل:

۱. y' و y'' را محاسبه می‌کنیم

$$y'=\frac{۱}{۶}(۳x^۲-۱۲x+۹)=\frac{۱}{۲}(x^۲-۴x+۳)$$

$$y''=\frac{۱}{۲}(۲x-۴)=x-۲\,.$$

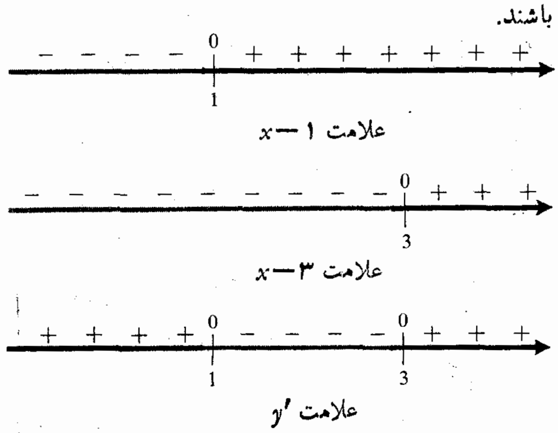
۲. نقاطی راکه درآن $y'=۰$ می‌یابیم وتعیین می‌کنیم که y' کجا مثبت است وکجا منفی. بهاین وسیله می‌توان دریافت که خم درکجا صعود می‌کند و درکجا نزول. نقاطی که درآنها $y'=۰$، ممکن است مقادیر ماکسیمم و مینیمم موضعی را به‌دست دهند.

پس ازتجزیه y' داریم

$$y'=\frac{۱}{۲}(x-۱)(x-۳).$$

پس y' به‌ازای $x=۱$ و $x=۳$ صفر است. طبق شکل ۱۹.۳، y' وقتی $x<۱$ مثبت است، وقتی $۱<x<۳$، منفی است، و وقتی $x>۳$، مجدداً مثبت است. خم در $x=۱$ (که درآن y' از + به − تغییر می‌کند) یک ماکسیمم موضعی، و در $x=۳$ (که درآن y' از − به + تغییر می‌کند) یک مینیمم موضعی دارد.

۳. حال ببینیم y'' کجا صفر است، ونیز جاهایی راکه y'' مثبت ویا منفی است تعیین کنیم. ازاین راه اطلاعاتی درمورد تقعر به‌دست می‌آوریم. نقاطی که درآنها $y''=۰$، ممکن است نقاط عطف باشند.



۱۹.۳ علامت $y'=(x-۱)(x-۳)$.

داریم

$$y''=x-2.$$

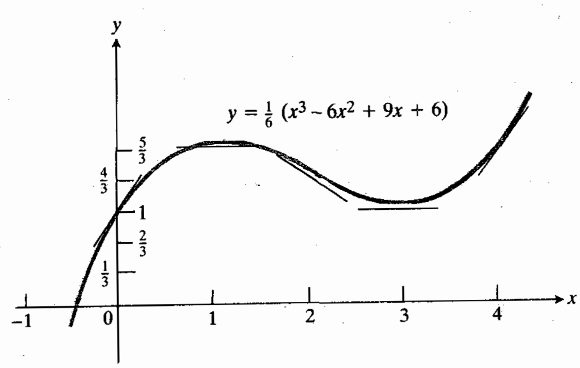
پس y'' به‌ازای $x=2$ صفر، به‌ازای $x<2$ منفی، و به‌ازای $x>2$ مثبت‌است. خم بر $(-\infty,2)$ تقعر روبه‌پایین دارد و بر $(2,\infty)$ تقعر روبه بالا. نقطهٔ $x=2$ نقطهٔ عطف است زیرا y'' در $x=2$ تغییر علامت می‌دهد.

۴. جدول کوچکی ازمقادیر y، y'، و y'' تشکیل می‌دهیم. این جدول اطلاعاتی را که تا به‌حال به‌دست‌آورده‌ایم دربردارد. عرض از مبدأ، و مقادیر y چند نقطهٔ اضافی‌را هم یادداشت‌می‌کنیم تا احساسی‌کلی از شکل خم به‌دست‌آوریم (جدول ۱۰۳).

۵. نقاط موجود درجدول را مشخص می‌کنیم، مماسها را می‌کشیم، و از اطلاعات موجود دربارهٔ صعود، نزول، و تقعر استفاده می‌کنیم و نمودار را رسم می‌کنیم (شکل ۲۰۳)

جدول ۱۰۳

x	y	y'	y''	نتیجه
-1	$-5/3$	$+4$	$-$	صعودی، تقعر روبه‌پایین
0	1	$+3/2$	$-$	صعودی، تقعر روبه‌پایین
1	$5/3$	0	$-$	ماکسیمم موضعی
2	$4/3$	$-1/2$	0	نزولی، نقطهٔ عطف
3	1	0	$+$	مینیمم موضعی
4	$5/3$	$+3/2$	$+$	صعودی، تقعر روبه‌بالا



۲۰۳ نمودار

$$y=\frac{1}{6}(x^3-6x^2+9x+6)$$

که پس از بررسی مقادیر y' و y'' رسم شده‌است. ■

مسأله‌ها

درمسأله‌های ۱–۱۴ بازه‌هایی ازمقادیر x را بیابیدکه برآنها خم (الف) صعودی، (ب) نزولی، (پ) دارای تقعر روبه‌بالا، و (ت) دارای تقعر روبه‌پایین باشد. خم را بکشید و روی‌آن نقاط عطف و نقاطی راکه در آنها تابع یك مقدار ماکسیمم موضعی یا مینیمم موضعی دارد مشخص‌کنید.

۱. $y=x^2-4x+3$

۲. $y=20x-x^2$

۳. $y=x^{5/3}$

۴. $y=x^3-x$

۵. $y=x^3-3x+3$

۶. $y=4+3x-x^3$

۷. $y=x^3-6x^2+9x+1$

۸. $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-6x$

۹. $y=(x-2)^3+1$

۱۰. $y=x^{2/3}$

۱۱. $y=\tan x,\ \frac{-\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

۱۲. $y=\cos x,\ 0\leqslant x\leqslant 2\pi$

۱۳. $y=-x^4$

۱۴. $y=|x^2-1|$

۱۵. یك خم هموار $y=f(x)$ با این ویژگیها بکشید: $f(1)=0$، $f'(x)<0$ به‌ازای $x<1$، و $f'(x)>0$ به‌ازای $x>1$.

۱۶. یك خم هموار $y=f(x)$ با این ویژگیها بکشید: $f(1)=0$، $f''(x)<0$ به‌ازای $x<1$، و $f''(x)>0$ به‌ازای $x>1$.

درمسأله‌های ۱۷–۳۲ خمها را بکشید ونقاط عطف و ماکسیممها و مینیممهای موضعی را مشخص‌کنید.

۱۷. $y=6-2x-x^2$

۱۸. $y=2x^2-4x+3$

۱۹. $y=x(6-2x)^2$

۲۰. $y=(x-1)^2(x+2)$

۲۱. $y=12-12x+x^3$

۲۲. $y=x^3-3x^2+2$

۲۳. $y=x^3+3x^2+3x+2$

۲۴. $y=x^3+3x^2-9x-11$

۲۵. $y=x^3-6x^2-135x$

۲۶. $y=x^3-33x^2+216x$

۲۷. $y=x^4-2x^2+2$

۲۸. $y=x^4-32x+48$

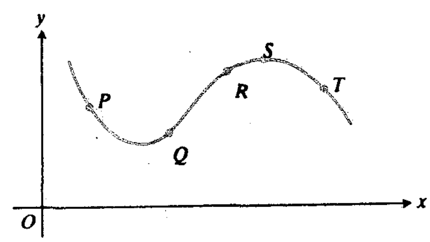
۲۹. $y=3x^4-4x^3$

۳۰. $y=x+\sin 2x$

۳۱. $y=\sin x+\cos x$

۳۲. $y=|x^3-x|$

۳۳. شکل ۲۱.۳ نمودار تابعی چون $y=f(x)$ را نشان می‌دهد. درکدام نقاط از پنج نقطهٔ مشخص شده برنمودار، (الف) $f'(x)$ و $f''(x)$ هر دو منفی‌اند؛ (ب) $f'(x)$ منفی و $f''(x)$ مثبت است؟



۲۱.۳ خم مذکور در مسأله ۳۳.

۳۴. خم پیوسته‌ای چون $y=f(x)$ بکشید که دارای مشخصات زیر باشد

$$f'(2)=f'(-2)=0 \qquad f(-2)=8,$$
$$|x|<2 \quad f'(x)<0 \qquad f(0)=4,$$
$$x<0 \quad f''(x)<0 \qquad f(2)=0,$$
$$x>0. \quad f''(x)>0 \qquad |x|>2, \quad f'(x)>0$$

۳۵. خم پیوسته‌ای چون $y=f(x)$ بکشید که دارای ویژگیهای زیر باشد. درصورت امکان مختصات را مشخص کنید.

خم	y	x
نزولی، تقعر روبه‌بالا		$x<2$
مماس افقی	1	2
صعودی، تقعر روبه‌بالا		$2<x<4$
نقطهٔ عطف	4	4
صعودی، تقعر روبه‌پایین		$4<x<6$
مماس افقی	7	6
نزولی، تقعر روبه‌پایین		$x>6$

۳۶. خم پیوسته‌ای چون $y=f(x)$ بکشید که درآن به‌ازای $x<2$، $f'(x)>0$، به‌ازای $x>2$، $f'(x)<0$ و

الف) $f'(x)$ در $x=2$ پیوسته باشد؛

ب) وقتی $x\to 2^-$، $f'(x)\to 1$ و وقتی $x\to 2^+$، $f'(x)\to -1$؛

پ) به‌ازای تمام $x<2$، $f'(x)=1$ و به‌ازای تمام $x>2$، $f'(x)=-1$.

۳۷. خم پیوسته‌ای چون $y=f(x)$ برای $x>0$ بکشید، هرگاه $f(1)=0$ و به‌ازای هر $x>0$، $f'(x)=1/x$. آیا این خم الزاماً تقعر روبه‌بالا یا تقعر روبه‌پایین دارد؟

۳۸. خم $y=x^3+bx^2+cx+d$ (b، c، و d ثابت‌اند) مفروض است. b کدام یك از مقادیر زیر را داشته‌باشد تا این خم در $x=1$ نقطهٔ عطف داشته باشد؟

الف) 2

ب) -2

پ) 3

ت) -3

۳۹. خم

$$y=2x^3+2x^2-2x-1$$

را پس از تعیین ماکسیمم موضعی، مینیمم موضعی، و نقاط عطف بکشید. سپس با کمك نمودار به‌پرسشهای زیر پاسخ دهید.

الف) این خم چند بار و تقریباً در کجا محور x را قطع می‌کند؟

ب) اگر به‌تمام مقادیر y، $+3$ اضافه شود، این خم چند بار و تقریباً درکجا محور x را قطع می‌کند؟

پ) هرگاه به تمام مقادیر y، -3 اضافه شود، این خم چند بار و تقریباً کجا محور x را قطع می‌کند؟

۴۰. نشان دهید که هرچند خم $y=x+\sin x$ نقاطی دارد که

درآنها $dy/dx=0$، این خم هیچ ماکسیمم یا مینیمم موضعی ندارد. خم را بکشید.

۴۱. تمام نقاط ماکسیمم موضعی، نقاط مینیمم موضعی، و نقاط عطف واقع برخم $y=x^4+8x^3-270x^2$ را بیابید.

۴۲. نمودار تابع $f(x)=x^4-2x^2-4$ شبیه دندان آسیاب است.

الف) نمودارتابع را رسم، و نقاط عطف را مشخص کنید.
ب) ازحدس اولیهٔ $x_0=2$ وبا یك‌بارتکرار روش نیوتن ریشهٔ مثبت معادله را براوردکنید.

۴۳. شیب خم $y=f(x)$ عبارت است از

$$\frac{dy}{dx}=3(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4(x-4).$$

الف) به‌ازای چه مقدار یا مقادیری از x، y یك ماکسیمم موضعی دارد؟
ب) به‌ازای چه مقدار یا مقادیری از x، y یك مینیمم موضعی دارد؟

TOOLKIT PROGRAMS

Derivative Grapher   Super * Grapher
Function Evaluator

۳.۳ مجانبها و تقارن

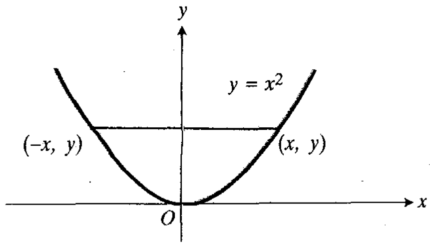
دراین بخش توابع گویا از x رابا درنظرگرفتن رفتارشان، وقتی مخرج به‌صفر نزدیك یا x ازلحاظ عددی بزرگ می‌شود، رسم می‌کنیم. نمودار تابعهای فرد و زوج تقارنهایی دارند که آگاهی ازآنها مهم است، ولذا این مطلب را نیز بررسی می‌کنیم.

تقارن درنمودار تابعهای زوج و فرد

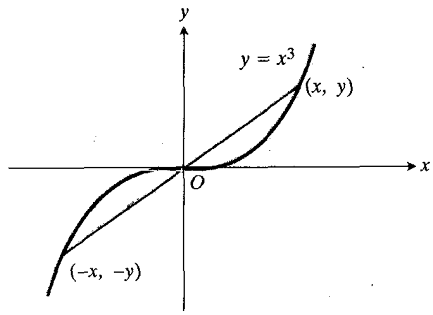
تابع $y=f(x)$ یك تابع **زوج** از x است هرگاه به‌ازای هر x در دامنهٔ تابع، $f(-x)=f(x)$؛ و یك تابع **فرد** است هرگاه به‌ازای هر x در دامنهٔ تابع، $f(-x)=-f(x)$.

زوج بودن تابع $y=f(x)$ معادل است بااینکه نمودارش نسبت به محور y متقارن باشد. چون $f(-x)=f(x)$، نقطهٔ (x, y) برخم واقع است اگر وتنها اگرنقطهٔ $(-x, y)$ هم بر خم واقع باشد (شکل ۲۲.۳ الف).

فرد بودن تابع $y=f(x)$ معادل است با اینکه نمودارش نسبت به‌مبدأ متقارن باشد. چون $f(-x)=-f(x)$، نقطهٔ (x, y) برخم واقع است اگروتنها اگرنقطهٔ $(-x, -y)$ نیز برخم واقع باشد (شکل ۲۲.۳ ب).



(الف) تقارن نسبت به‌محور y



(ب) تقارن نسبت به‌مبدأ

۲۲.۳ آزمونهای مختصات برای تقارن.

نمودارهای معادلاتی‌که صرفاً شامل توانهای زوج x باشند نسبت به محور y متقارن‌اند. اما، قاعدهٔ متناظری برای توانهای فرد وتقارن نسبت به‌مبدأ وجود ندارد.

مثال ۱ نمودارهای

$$y=x^2-\frac{1}{x^2}+1 \quad \text{و} \quad y=\frac{1}{x^2}$$

نسبت به محور y متقارن‌اند، زیرا معادلات آنها صرفاً شامل توانهای زوج x هستند. در هرمورد، $f(-x)=f(x)$:

$$(-x)^2-\frac{1}{(-x)^2}+1=x^2-\frac{1}{x^2}+1 \quad \text{و} \quad \frac{1}{(-x)^2}=\frac{1}{x^2}.$$

■

مثال ۲ نمودارهای

$$y=\frac{x^2+1}{x}=x+\frac{1}{x} \quad \text{و} \quad y=x^3$$

نسبت به‌مبدأ متقارن هستند. در هرمورد $f(-x)=-f(x)$:

$$-x+\frac{1}{-x}=-\left(x+\frac{1}{x}\right) \quad \text{و} \quad (-x)^3=-x^3.$$

■

مثال ۳ توابع

$$y=1+\frac{1}{x} \quad \text{و} \quad y=\frac{1}{x-1}$$

فرد نیستند، هرچند فرمولهای آنها تنها توانهای فرد x را شامل می‌شوند. درمورد اول

$$f(-x)=\frac{1}{-x-1}=-\frac{1}{x+1}\neq -f(x)\cdot$$

درمورد دوم

$$f(-x)=1+\frac{1}{-x}=1-\frac{1}{x}\neq -f(x)\cdot$$

هیچ‌یك از نمودارها نسبت به‌مبدأ متقارن نیست. ■

مجانبهای افقی و قائم

وقتی یك نقطهٔ P روی نمودار تابعی چون $y=f(x)$ رفته رفته ازمبدأ دور می‌شود، ممکن است فاصلهٔ بین P و خطی ثابت به صفر نزدیك شود؛ به‌عبارت دیگر، خم وقتی از مبدأ دور می‌شود، به‌خط «میل کند». در این حالت، خط را **مجانب** نمودار می‌نامند. مثلاً، محور x و محور y، مجانبهای خمهای $y=1/x^2$ و $y=1/x$ هستند (شکلهای ۴.۳ و ۵.۳ را ببینید).

مثال ۴ مجانبهای

$$y=\frac{x}{x-1}$$

عبارت‌اند ازخطهای $y=1$ و $x=1$ (شکل ۲۳.۳). این مطلب با تقسیم x بر $x-1$

$$\begin{array}{l|l} x & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{x-1} & 1 \\ 1 & \end{array}$$

وسپس نوشتن معادله به‌صورت

$$y=1+\frac{1}{x-1}$$

فوراً آشکار می‌شود.

خط $y=1$ ازسمت راست مجانب است زیرا

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)=1\cdot$$

این خط ازسمت چپ نیز مجانب است زیرا وقتی $x\to-\infty$، y بازهم به ۱ میل می‌کند. به‌ازای مقادیر بزرگ x رفتار

$$y=1+\frac{1}{x-1}$$

نظیر رفتار $y=1$ است.

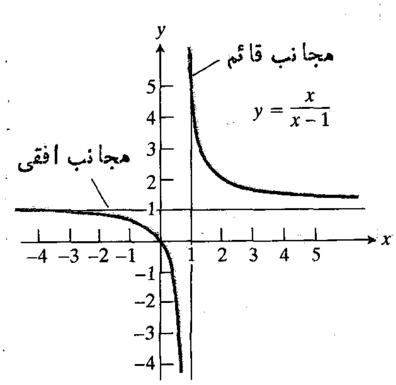
خط $x=1$ مجانب قائم شاخهٔ سمت راست نمودار است زیرا

$$\lim_{x\to1^+}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)=\infty$$

و مجانب قائم شاخهٔ سمت چپ هم هست زیرا

$$\lim_{x\to1^-}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)=-\infty\cdot$$

به‌ازای xهای نزدیك ۱ رفتاراین تابع شبیه رفتار $y=1/(x-1)$ است. ■



۲۳.۳ نمودار $y=x/(x-1)$.

به‌طور کلی، تعریف مجانب افقی ومجانب قائم به‌شرح زیر است.

تعریف

مجانبهای افقی و قائم

خط $y=b$ **مجانب افقی** نمودار تابع $y=f(x)$ است اگر داشته باشیم

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=b \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=b\cdot$$

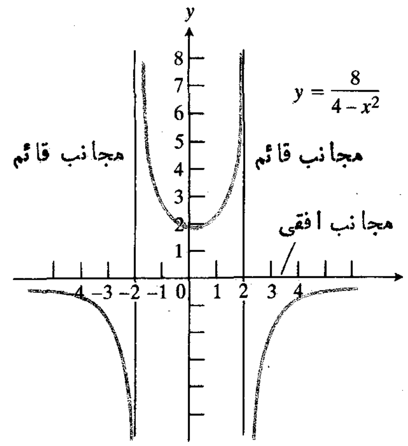
خط $x=a$ **مجانب قائم** نمودار تابع است اگرداشته‌باشیم

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\pm\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to a^-}f(x)=\pm\infty\cdot$$

مثال ۵ شکل ۲۴.۳ نمودار

$$y=\frac{8}{4-x^2}$$

را نشان می‌دهد. خط $y=0$ یك مجانب سمت راست است زیرا



۲۴.۳ نمودار $y=۸/(۴-x^۲)$. توجه کنید که خم تنها از یك سمت به محور x میل می‌کند. مجانب الزاماً دوطرفه نیست.

وقتی $x \to \infty$، $y \to ۰$، و یك مجانب سمت چپ هم هست زیرا وقتی $x \to -\infty$، $y \to ۰$.

خط $x=۲$ یك مجانب قائم است زیرا

$$\lim_{x\to ۲^-} \frac{۸}{۴-x^۲}=\infty$$

و نیز زیرا

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{۸}{۴-x^۲}=-\infty \,.$$

به همین ترتیب خط $x=-۲$ یك مجانب قائم است زیرا وقتی $x \to -۲^+$، $y \to \infty$ و نیز وقتی $x \to -۲^-$، $y \to -\infty$. ■

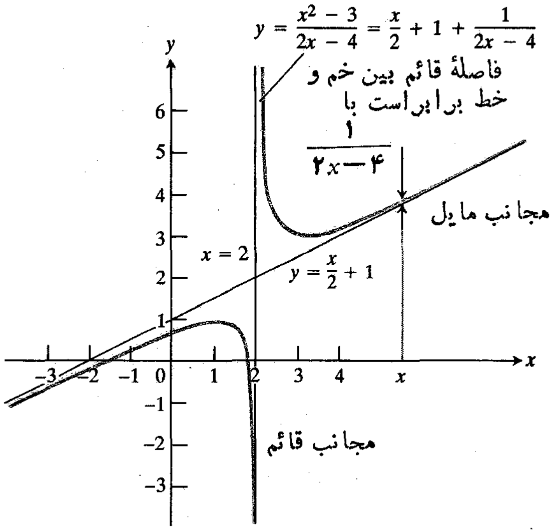
مجانبهای مایل

اگر تابعی گویا خارج قسمت دو چندجمله‌ای باشد که عامل مشترك نداشته باشند، و اگر درجهٔ صورت، یك واحد بیشتر از درجهٔ مخرج باشد، آنگاه نمودار یك **مجانب مایل** دارد. برای مثال تابع

$$y=\frac{x^۲-۳}{۲x-۴}$$

یك مجانب مایل دارد (شکل ۲۵.۳). برای مشاهدهٔ دلیل این امر $x^۲-۳$ را بر $۲x-۴$ تقسیم می‌کنیم

$$\begin{array}{r|l} x^۲-۳ & ۲x-۴ \\ \cline{2-2} x^۲-۲x & \frac{x}{۲}+۱ \\ \cline{1-1} ۲x-۳ & \\ ۲x-۴ & \\ \cline{1-1} ۱ & \end{array}$$



۲۵.۳ نمودار $y=(x^۲-۳)/(۲x-۴)$.

بنابراین، داریم

$$y=\frac{x^۲-۳}{۲x-۴}=\underbrace{\frac{x}{۲}+۱}_{\text{خطی}}+\underbrace{\frac{۱}{۲x-۴}}_{\text{باقیمانده که وقتی } x\to\pm\infty \text{، به ۰ می‌رود}} \,. \qquad (۱)$$

به‌این ترتیب می‌بینیم که

$$y-\left(\frac{x}{۲}+۱\right)=\frac{۱}{۲x-۴}$$

و

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[y-\left(\frac{x}{۲}+۱\right)\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۱}{۲x-۴}=۰\,.$$

پس فاصلهٔ قائم بین خم $y=(x^۲-۳)/(۲x-۴)$ و خط $y=x/۲+۱$ وقتی $x\to\pm\infty$، به‌صفر میل می‌کند. بنابراین، خط

$$y=\frac{x}{۲}+۱$$

مجانب خم است.

توجه کنید که وقتی $x\to\pm\infty$ شیب خم یعنی

$$y'=\frac{۱}{۲}-\frac{۲}{(۲x-۴)^۲}$$

به $۱/۲$ میل می‌کند که شیب خط است.

خم در $x=2$ مجانب قائم نیز دارد.

مثال ۶ نمودار تابع زیر را رسم کنید

$$y=x+\frac{1}{x}.$$

حل: برای رسم نمودار، تقارن، مجانبها، صعود و نزول، تقعر، وجملات چیره را درنظرمی گیریم.

تقارن. این تابع فرد است (مثال ۲)؛ لذا نمودارش نسبت به‌مبداء متقارن است.

مجانبها. اگر x از سمت راست به ۰ میل کند، آنگاه $y\to\infty$. اگر x ازسمت چپ به ۰ میل کند، آنگاه $y\to-\infty$. خط $x=0$ مجانب قائم است.

$$\text{وقتی } x\to\infty،\quad \frac{1}{x}\to 0 \quad \text{و} \quad (y-x)=\frac{1}{x}\to 0$$

بنابراین، خط $y=x$ نیز مجانب نمودار است.

صعود و نزول. مشتق اول،

$$y'=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}=\frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$$

وقتی $x=-1$ و $x=1$، برابر با صفراست، ودر $x=0$ تعریف نمی‌شود. مشتق وقتی $x<-1$ مثبت، وقتی $-1<x<0$ و $0<x<1$ منفی، و وقتی $1<x$، مثبت است (شکل ۲۶.۳ الف) لذا نمودار بر $(-\infty,-1)$ و $(1,\infty)$ صعود می‌کند، و بر $(-1,0)$ و $(0,1)$ نزول می‌کند. این تابع در $x=-1$ یك مقدار ماکسیمم موضعی دارد زیرا دراین نقطه y' از $+$ به $-$ تغییر می‌کند، و در $x=1$ که y' درآنجا از $-$ به $+$ تغییر می‌کند یك مقدار مینیمم موضعی دارد.

تقعر. مشتق دوم،

$$y''=\frac{2}{x^3}$$

وقتی $x<0$ منفی، و وقتی $x>0$ مثبت است. پس وقتی $x<0$ تقعرخم روبه‌پایین، و وقتی $x>0$ تقعر آن روبه‌بالاست.

جمله‌های چیره. وقتی x کوچك باشد، جملهٔ x درمجموع

$$y=x+\frac{1}{x}$$

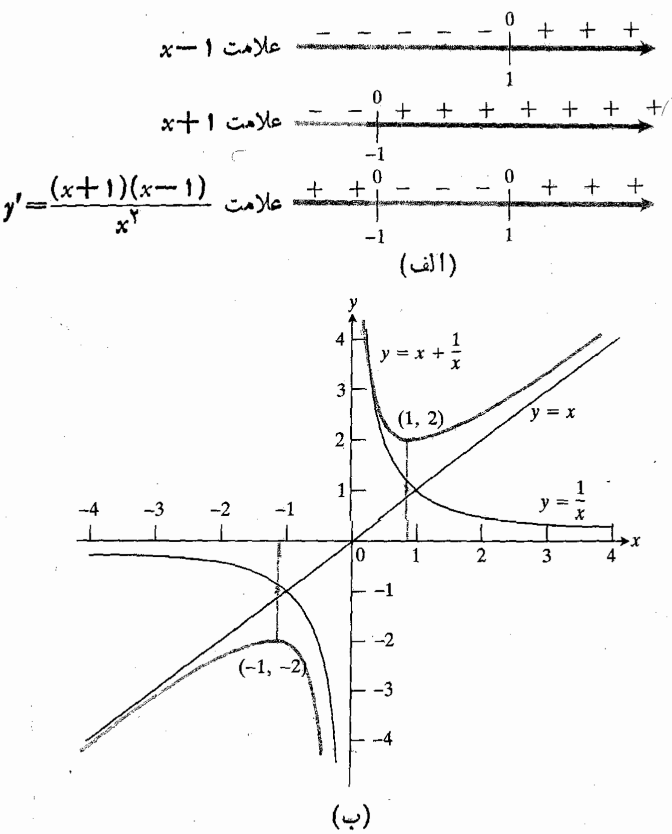
درمقایسه با تأثیرجملهٔ $1/x$، اثرچندانی ندارد. جملهٔ $1/x$ برای مقادیر x نزدیك صفر جملهٔ چیره نام دارد. از طرف دیگر، وقتی x خیلی بزرگ باشد، تأثیر جملهٔ $1/x$ درمقایسه با تأثیرجملهٔ x اندك است. جملهٔ x برای مقادیر بزرگ x جملهٔ چیره است، و به‌ازای این مقادیرانتظار داریم رفتار $y=x+1/x$ نظیر رفتار $y=x$ باشد. (لذا خط $y=x$ مجانب است.)

پس با مشاهدهٔ فرمول $y=x+1/x$ دربارهٔ رفتار y فوراً دو چیز می‌توانیم بگوییم

(۲) وقتی x کوچك است، $y\approx\frac{1}{x}$، و وقتی x بزرگ است، $y\approx x$.

ازمیان اطلاعاتی که می‌توان به سرعت دربارهٔ y به‌دست آورد، این دوشاید مفیدترینشان باشند.

نمودار. برای رسم نمودار $y=x+1/x$، مجانب $y=x$ را می کشیم، خم $y=1/x$ را رسم می‌کنیم، و نقاط ماکسیمم و مینیمم موضعی را هم مشخص می‌کنیم. سپس خمی مناسب وضعیت رسم می‌کنیم که تقارن و دیگر ویژگیهای به‌دست آمده را هم داشته باشد (شکل ۲۶.۳ ب).



۲۶.۳ (الف) الگوهای علامت برای $y'=(x+1)(x-1)/x^2$. (ب) نمودار $y=x+(1/x)$، براساس این الگو، و اطلاعات دیگر در مثال ۶. ■

پیشگویی رفتار تابع براساس جمله‌های چیره

اغلب با استفاده ازجبرمی‌توانیم فرمول مفروضی را چنان بنویسیم که نشان دهد به‌ازای مقادیرمختلف x چه جمله‌هایی چیره‌اند.

مثال ۷ اگر

$$y=\frac{۲}{x}+۶x^{۲}$$

آنگاه

به‌ازای xهای کوچك، $y\approx\frac{۲}{x}$، و

به‌ازای xهای بزرگ، $y=۶x^{۲}$. ■

مثال ۸ ازمعادلهٔ (۱) داریم

$$y=\frac{x^{۲}-۳}{۲x-۴}=\frac{x}{۲}+۱+\frac{۱}{۲x-۴}$$

وقتی $|x|$ بزرگ باشد، $y\approx\frac{x}{۲}+۱$

وقتی x نزدیك ۲ باشد، $y\approx\frac{۱}{۲x-۴}$

(شکل ۲۵۰۳ را ببینید.) ■

مثال ۹ درمورد

$$y=\frac{x+۳}{x+۲}=۱+\frac{۱}{x+۲}$$

داریم

وقتی $|x|$ بزرگ باشد، $y\approx ۱$، و

وقتی x نزدیك ۲ − باشد، $y\approx\frac{۱}{x+۲}$. ■

مثال ۱۰ از مثال ۵ داریم

$$y=\frac{۸}{۴-x^{۲}}=\frac{۸}{(۲-x)(۲+x)}$$

لذا

وقتی x نزدیك ۲ باشد، $y\approx\frac{۸}{(۲-x)(۴)}=\frac{۲}{۲-x}$

وقتی x نزدیك ۲ − باشد، $y\approx\frac{۸}{۴(۲+x)}=\frac{۲}{۲+x}$.

(شکل ۲۴۰۳ را ببینید.) ■

مسأله‌ها

در مسأله‌های ۱ـ۱۲ تعیین کنید که تابع مفروض زوج است، فرد است، یانه فرد است ونه زوج. بکوشید چیزی (جزجواب) ننویسید.

۱. $y=x$

۲. $y=x^{۲}$

۳. $y=x^{۳}$

۴. $y=x^{۴}$

۵. $y=x+۱$

۶. $y=x+x^{۲}$

۷. $y=x^{۲}+۱$

۸. $y=x+x^{۳}$

۹. $y=\frac{۱}{x^{۲}-۱}$

۱۰. $y=\frac{۱}{x-۱}$

۱۱. $y=\frac{x}{x^{۲}-۱}$

۱۲. $y=\frac{x^{۲}}{x^{۲}-۱}$

درمسأله‌های ۱۳ـ۳۸ دامنهٔ تابع را بیابید و درمورد نمودارش این ویژگیها را بررسی کنید: (الف) تقارن، (ب) طول و عرض از مبدأ، (پ) مجانبها، (ت) شیب در نقاط تقاطع با محورها، (ث) صعود و نزول، (ج) تقعر، (چ) جملات چیره. سپس نمودار تابع را رسم کنید.

۱۳. $y=\frac{۱}{۲x-۳}$

۱۴. $y=\frac{۱}{۲x+۴}$

۱۵. $y=x-\frac{۱}{x}$

۱۶. $y=\frac{x}{۲}+\frac{۲}{x}$

۱۷. $y=\frac{x+۳}{x+۲}$ (مثال ۹ را ببینید.)

۱۸. $y=\frac{x}{x+۱}$ (راهنمایی: x را بر $x+۱$ تقسیم کنید.)

۱۹. $y=\frac{x+۱}{x-۱}$ (راهنمایی: $x+۱$ را بر $x-۱$ تقسیم کنید.)

۲۰. $y=\frac{x-4}{x-5}$ (راهنمایی: $x-4$ را بر $x-5$ تقسیم کنید.)

۲۱. $y=\frac{1}{x^2+1}$

۲۲. $y=\frac{1}{x^2-1}$

۲۳. $y=\frac{x}{x^2-1}$

۲۴. $y=\frac{x^2}{x-1}$

۲۵. $y=\frac{x^2}{x^2-1}$

۲۶. $y=\frac{x^2+1}{x-1}$

۲۷. $y=\frac{x^2-4}{x-1}$

۲۸. $y=\frac{x^2-9}{x-5}$

۲۹. $y=\frac{x^2-1}{2x+4}$

۳۰. $y=\frac{x^2+x-2}{x-2}$

۳۱. $y=\frac{2}{x}+6x^2$

۳۲. $y=x^2+\frac{1}{x^2}$

۳۳. $y=\frac{x^2-4}{x^2-1}$

۳۴. $y=\frac{x^2+8}{x^2-4}$

۳۵. $y=\frac{x^2+1}{x^2-4x+3}$

۳۶. $y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$

۳۷. $y=\frac{x-1}{x^2(x-2)}$

۳۸. $y=\frac{x^2+1}{x^3-4x}$

۳۹. نمودار تابع $f(x)=2+(\sin x)/x$، $x>0$ (شکل ۹۴۰۱ را ببینید) هر وقت $\sin x=0$، خط $y=2$ را قطع می‌کند و بنابراین وقتی $x\to\infty$ خط را بینهایت بار قطع می‌کند. نشان دهید که باوجود این وقتی $x\to\infty$، شیب خم به‌شیب خط نزدیک می‌شود.

۴۰. فرض کنید

$$f(x)=\frac{x^3-4x}{x^3-x},\quad x\neq 0.$$

الف) حدهای f را وقتی $x\to 0$ و $x\to\pm\infty$، بیابید.
ب) برای اینکه f در $x=0$ پیوسته باشد، به $f(0)$ چه مقداری نسبت دهیم؟
پ) معادلات مجانبهای افقی و قائم f را بیابید.
ت) تقارن f را توصیف کنید.
ث) نمودار گسترش پیوستهٔ f را بکشید.

زوج یا فرد بودن

در هر یك از مسأله‌های ۴۱-۵۶ بگویید که تابع زوج است، فرد است، یا نه فرد است و نه زوج. این کار را بدون نوشتن چیزی جز پاسخ انجام دهید.

۴۱. $\sin x$

۴۲. $\cos x$

۴۳. $\sec x$

۴۴. $\csc x$

۴۵. $\tan x$

۴۶. $\cot x$

۴۷. $\sin 2x$

۴۸. $\cos 3x$

۴۹. $\sin^2 x$

۵۰. $\cos^3 x$

۵۱. $x\cos x$

۵۲. $x^2\cos x$

۵۳. $x\sin x$

۵۴. $x^2\sin x$

۵۵. $\sin x+\cos x$

۵۶. $\sin x\cos x$

۵۷. تعیین کنید که هر یك از توابع زیر فرد است یا زوج و یا نه فرد و نه زوج.

الف) $y=|x|$، ب) $y=\begin{cases} x^2-9 & x\neq 5 \\ 16 & x=5. \end{cases}$

۵۸. اگر u و v توابعی زوج از x باشند، توابع $u+v$، $u-v$، uv و u/v چه هستند؟

۵۹. اگر u و v توابعی فرد از x باشند، توابع $u+v$، $u-v$، uv و u/v، چه هستند؟

۶۰. اگر u تابعی زوج از x، و v تابعی فرد از x باشد، توابع uv، u/v، و v/u چه هستند؟

۶۱. الف) فرض کنید بدانیم که تابعی فرد بر بازهٔ $[-1, 0]$ صعودی است. رفتارش بر $[0, 1]$ چگونه است؟
ب) فرض کنید بدانیم که تابعی زوج بر بازهٔ $[-1, 0]$ صعودی است. رفتارش بر $[0, 1]$ چگونه است؟
پ) فرض کنید نمودار تابعی فرد بر $[0, 1]$ تقعر رو به بالا دارد. تقعر تابع بر $[-1, 0]$ چگونه است؟
ت) فرض کنید نمودار تابعی زوج بر $[0, 1]$ تقعر رو به پایین دارد. تقعر تابع بر $[-1, 0]$ چگونه است؟

TOOLKIT PROGRAMS
Derivative Grapher — Super * Grapher
Function Evaluator

۴.۳ نظریهٔ ماکسیمم و مینیمم

دراین بخش، نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان با استفاده از مشتق نقاطی را به‌دست آورد که در آن نقاط مقدار تابع مفروض ماکسیمم یا مینیمم باشد. در بخش بعد، نشان می‌دهیم که چگونه با استفاده از نظریه‌ای که در این بخش ارائه می‌شود می‌توان به حل مسائل کاربردی پرداخت.

نسبی در مقابل مطلق

درشکل ۲۷.۳ نقطهٔ $x=c$ دیده می‌شود که در آن تابع $y=f(x)$ یك مقدار مینیمم دارد. از c به‌هرطرف که برویم، خم صعود می‌کند، و مقدار تابع بزرگتر می‌شود. اما، وقتی به‌خم دقیقتر نگاه کنیم، می‌بینیم که مقدار تابع در $x=d$ از آن هم کمتر است. لذا درمی‌یابیم که $f(c)$ مقدار مینیمم مطلق f بر $[a, b]$ نیست، اما یك مینیمم موضعی یا نسبی آن است.

تابعی چون f در $x=c$ یك **مینیمم نسبی یا موضعی** دارد هرگاه به‌ازای همهٔ مقادیر x در یك بازهٔ باز حول c داشته‌باشیم

$$f(c)\leqslant f(x).$$

(اگر c یك نقطهٔ انتهایی دامنهٔ f باشد، بازه نیمباز است، و c یك نقطهٔ انتهایی آن است.) بازه ممکن است کوچك باشد یا بزرگ، اما دراین بازه مقدار تابع هیچگاه از $f(c)$ کمتر نیست.

در مورد **ماکسیمم نسبی یا موضعی** در $x=c$، به‌ازای همهٔ مقادیر x در یك بازه حول c داریم

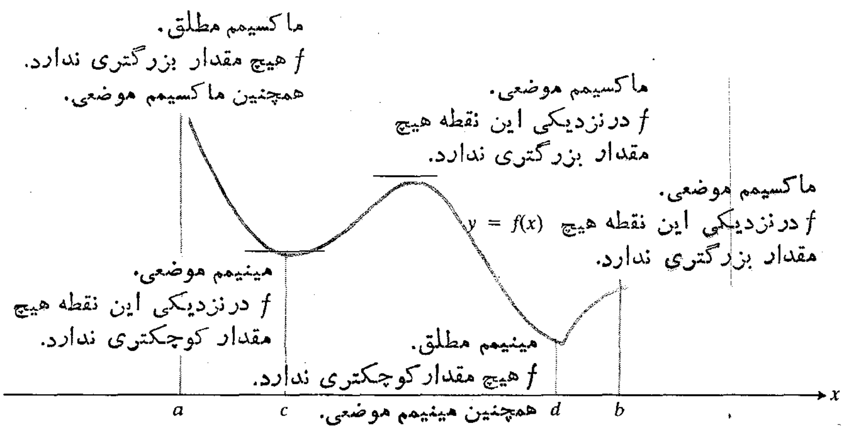
$$f(c)\geqslant f(x).$$

در اینجا واژهٔ نسبی یا موضعی را به‌کار می‌بریم تا تمایزی بین این نقطه و یك نقطهٔ ماکسیمم یا مینیمم مطلق قائل شویم. در مورد نقطهٔ ماکسیمم یا مینیمم مطلق به‌ازای تمام xهای واقع در دامنهٔ f، و نه صرفاً تمام xهای واقع دریك بازهٔ مناسب حول c، داریم

$$f(x)\leqslant f(c) \quad \text{یا} \quad f(c)\leqslant f(x).$$

قضیهٔ مشتق اول

درشکل ۲۷.۳ دوتا از مقادیر اکسترمم تابع به‌ازای نقاط انتهایی دامنهٔ آن به‌دست می‌آیند، یکی هم درنقطه‌ای قرار دارد که در آن f' وجود ندارد، و دوتا هم درنقاط داخلی‌اند که در آنها f' صفر



۲۷.۳ نحوهٔ رده‌بندی ماکسیممها و مینیممها.

است.معمولاً درمورد توابعی که بر یك بازهٔ بسته تعریف می‌شوند، همین وضع برقرار است. همان‌گونه که قضیهٔ زیر می‌گوید، اگر تابعی دریك نقطهٔ داخلی از دامنه‌اش یك ماکسیمم یا یك مینیمم موضعی داشته‌باشد، و نیز اگر در آنجا مشتق وجود داشته باشد، آنگاه مشتق در آن نقطه باید صفر باشد.

قضیهٔ ۱

قضیهٔ مشتق اول برای مقادیر اکسترمم موضعی

فرض کنید تابعی چون f در یك نقطهٔ داخلی مانند c از بازه‌ای که f بر آن تعریف می‌شود، ماکسیمم یامینیمم موضعی داشته‌باشد. اگر f' در c تعریف بشود، آنگاه

$$f'(c)=۰.$$

اثبات مثلاً، فرض کنید f در $x=c$ یك مقدار مینیمم موضعی داشته باشد؛ لذا به‌ازای تمام مقادیر x نزدیك c داریم $f(x)\geqslant f(c)$ (شکل ۲۸۰۳ را ببینید). چون c یك نقطهٔ داخلی دامنهٔ f است، می‌دانیم حد

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \tag{۱}$$

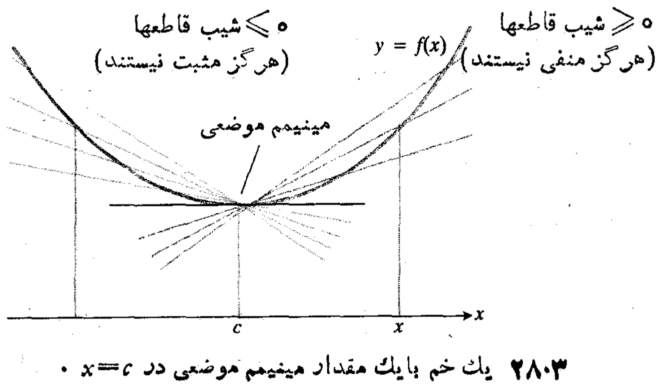
که $f'(c)$ را تعریف می‌کند، یك حد دوطرفه است. این بدین معناست که در $x=c$ هم حد راست وجود دارد و هم حد چپ، و هردو برابرند با $f'(c)$. اگر این حدها را جداگانه بررسی کنیم می‌بینیم که

$$\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geqslant ۰ \tag{۲}$$

زیرا وقتی x درسمت راست c قرار گیرد داریم $f(x)\geqslant f(c)$ و $x-c>۰$؛ و نیز می‌بینیم که

$$\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leqslant ۰ \tag{۳}$$

زیرا وقتی x درسمت چپ c قرارگیرد داریم $f(x)\geqslant f(c)$ و



۲۸۰۳ یك خم با یك مقدار مینیمم موضعی در $x=c$.

$x-c<۰$. نابرابری (۲) حاکی است که $f'(c)$ نمی‌تواند از صفر کوچکتر باشد ونابرابری (۳) حاکی است که $f'(c)$ نمی‌تواند ازصفر بزرگتر باشد. پس $f'(c)$ با ۰ برابراست.

وقتی f در c یك مقدار ماکسیمم موضعی داشته باشد، برهان مربوط به $f'(c)=۰$ شبیه استدلال فوق است واز آوردن آن صرفنظر می‌کنیم.

قضیهٔ ۱ با حذف نقاطی داخلی که در آنها f' صفر نیست، محل وقوع ماکسیممها ومینیممهای موضعی تابع را مشخص می‌کند. این قضیه حاکی است که با اطمینان می‌توانیم بررسی خود را به:

۱. نقاطی داخلی‌که به‌ازای آنها f' صفراست،
۲. نقاطی داخلی‌که به‌ازای آنها f' وجود ندارد،
۳. نقاط انتهایی دامنهٔ تابع

محدودکنیم. هیچ‌یك ازاین نقاط الزاماً محل یك ماکسیمم یامینیمم موضعی نیست، اما این نقاط **تنها** نامزدهای ممکن‌اند.

نقاطی را که درآنها $f'=۰$ یا f' وجود ندارد، عموماً **نقاط بحرانی** f می‌نامند. پس در جستجو برای یافتن مقادیر اکسترمم یك تابع تنها نقاطی‌که شایستهٔ بررسی هستند، نقاط‌بحرانی ونقاط انتهایی‌اند. حال چند مثال می‌آوریم.

تابعهای پیوسته بر بازه‌های بسته

در بیشترکاربردها، مطلوب ما یافتن مقادیرماکسیمم یا مینیمم مطلق یك تابع پیوسته بر یك بازهٔ بسته است. لذا ابتدا به این حالت می‌پردازیم. تعداد نقاطی‌که این مقادیررا به‌دست می‌دهند معمولاً چنان‌کم است که به‌راحتی می‌توانیم فهرست آنها را تشکیل دهیم، مقادیرمتناظر آنها را از تابع به‌دست آوریم، و ببینیم ماکسیمم و مینیمم چه هستند، و درچه نقاطی به‌دست می‌آیند.

مثال ۱ مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق $y=x^{۲/۳}$ بر بازهٔ $-۲\leqslant x\leqslant ۳$ را بیابید.

حل: مقادیرتابع را درنقاط بحرانی ونقاط‌انتهایی به‌دست می‌آوریم. مشتق اول

$$y'=\frac{۲}{۳}x^{-۱/۳}=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

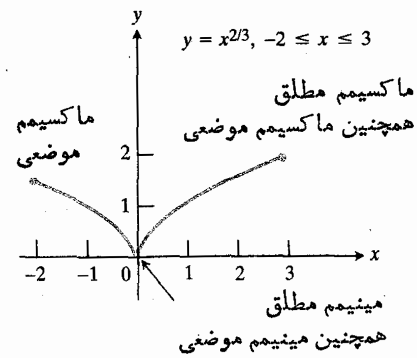
هیچ صفری ندارد، اما در $x=۰$ تعریف نمی‌شود. به‌ازای این تنها نقطهٔ‌بحرانی،و دونقطهٔ انتهایی دامنه، تابع را محاسبه می‌کنیم:

مقدار درنقطهٔ بحرانی: $y(۰)=۰$

مقادیر درنقاط انتهایی: $y(-۲)=۴^{۱/۳}$

$y(۳)=۹^{۱/۳}$

مقدار ماکسیمم $9^{1/3}$ است که به‌ازای $x=3$ به دست می‌آید. مینیمم ۰ است که به‌ازای $x=0$ حاصل می‌شود. شکل ۲۹.۳ را ببینید.



۲۹.۳ تابع درنقطه‌ای که مشتق ندارد می‌تواند يك مقدار مینیمم داشته باشد. یکی از حالاتی که چنین وضعی می‌تواند پیش آید این است که خم در $x=0$ مماس قائم داشته باشد. حالت دیگر در شکل **۱۲.۳** نشان داده شده است که درآن، $y=|x|$ در $x=0$ هیچ مماسی ندارد. ■

مثال ۱ نشان می‌دهد که وقتی ماکسیمم یا مینیمم در انتهای يك خم قرارمی‌گیرد (انتها صرفاً دربازه‌های محدود وجود دارد) مشتق در چنین نقطه‌ای الزاماً صفر نیست. این مطلب به هیچ‌وجه قضیهٔ ۱ را نقض نمی‌کند. اثبات قضیه ارتباطی با نقاط انتهایی ندارد زیرا لازم است حد خارج قسمت تفاضلهای موجود درمعادلهٔ (۱) در $x=c$ حد دوطرفه باشد تا برهان بعد ازآن بتواند اقامه شود.

مثال ۲ مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $y=x^3-3x+2$ بر بازهٔ $[0, 2]$ را بیابید.

حل: در نقاط بحرانی و نقاط انتهایی، مقادیر تابع را می‌یابیم. مشتق

$$y'=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$$

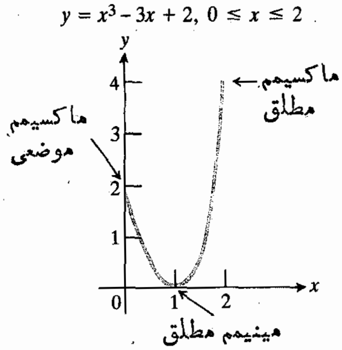
در هرنقطه‌ای از دامنهٔ تابع تعریف می‌شود و در $x=1$ مقدار آن صفراست. (در $x=-1$ نیزمقدار صفراست، اما این نقطه در دامنه نیست.) با مقایسهٔ مقادیر زیر

مقدار درنقطهٔ بحرانی: $y(1)=0$

مقادیر درنقاط انتهایی: $y(0)=2$

$y(2)=4$

مقدار ماکسیمم ۴ در $x=2$، و مقدار مینیمم ۰ در $x=1$ پیدا می‌شود. شکل ۳۰.۳ را ببینید.



۳۰.۳ نمودار $y=x^3-3x+2$ بر $[0, 2]$. ■

بازه‌های باز یا نامتناهی: آزمون مشتق دوم

توابعی که بر بازه‌های باز یا نامتناهی تعریف می‌شوند ممکن است مقدار ماکسیمم یا مینیمم داشته باشند یا نداشته باشند، و وقتی مقادیرنقاط بحرانی وانتهایی را فهرست می‌کنیم، ممکن‌است فوراً نتوانیم نتیجه‌گیری کنیم. در چنین موردی حدهای بینهایت تابع (درصورت وجود) وگاه مشتق دوم تابع را بررسی می‌کنیم.

مثال ۳ مقادیرماکسیمم و مینیمم تابع

$$y=x+\frac{1}{x}$$

را، درصورت وجود، بیابید.

حل: می‌دانیم که این تابع هیچ مقدار ماکسیمم یا مینیمم مطلقی ندارد زیرا وقتی $x\to\infty$، $y\to\infty$، و وقتی $x\to-\infty$، $y\to-\infty$. باوجود این، تابع ممکن است در نقاط انتهایی دامنه (در این مورد چنین نقاطی وجود ندارند)، ودر نقاطی که مشتق اول

$$y'=1-\frac{1}{x^2}$$

صفرمی‌شود یا وجود ندارد، ماکسیمم یامینیمم موضعی داشته‌باشد. ازفرمول دیده می‌شودکه y' در $x=\pm 1$ صفراست ودر $x=0$ تعریف نمی‌شود. از $x=0$ صرفنظرمی کنیم زیرا در دامنهٔ تابع قرار نمی‌گیرد. پس، ازمقادیرتابع تنها مقادیرمربوط به‌نقاط بحرانی

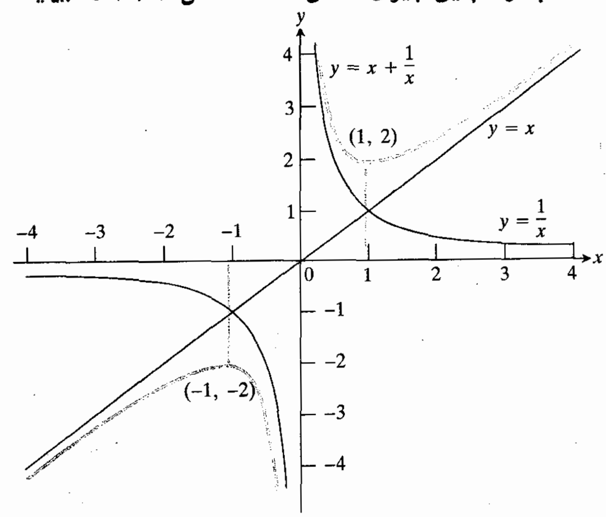
$$y(1)=2 \quad و \quad y(-1)=-2$$

را در نظر می‌گیریم. اما باید مواظب بودکه هرچند -2 از 2 کوچکتراست نباید نتیجه گرفت که -2 يك مینیمم موضعی و 2 يك ماکسیمم موضعی است. در واقع، همان‌گونه که ذیلاً نشان می‌دهیم، درست برعکس است.

مشتق دوم

$$y''=\frac{2}{x^3}$$

وقتی $x<0$، منفی است. بنابراین، در $x=-1$ تقعرخم رو به پایین است، و $y(-1)=-2$ یك مقدار ماکسیمم موضعی است. همچنین، وقتی $x=1$، $y''=2/x^3$ مثبت است، ولذا تقعرخم در $x=1$ رو به بالاست، و $y(1)=2$ یك مقدار مینیمم موضعی است. پس، مقدار مینیمم موضعی از مقدار ماکسیمم موضعی بزرگتر است. چطور چنین چیزی ممکن است؟ شکل ۳۱.۳ را ببینید.



۳۱.۳ نمودار $y=x+(1/x)$ تنها دومقدار اکسترمم دارد: ماکسیمم موضعی در نقطهٔ $(-1, -2)$ و مینیمم موضعی در نقطهٔ $(1, 2)$. ■

آزمون مشتق دوم که غالباً برای بررسی نقاطی که در آنها مشتق اول صفراست به‌کار می‌رود به‌شرح زیر است.

آزمون مشتق دوم برای ماکسیممها و مینیممهای موضعی

اگر $f'(c)=0$ و $f''(c)<0$، آنگاه f در $x=c$ یك ماکسیمم موضعی دارد.

اگر $f'(c)=0$ و $f''(c)>0$، آنگاه f در $x=c$ یك مینیمم موضعی دارد.

مسألهٔ ۹۴ از مسأله‌های گوناگون آخرفصل نشان می‌دهد که چرا این آزمون درست است.

از آزمون مشتق دوم وقتی که y' و y'' هر دو صفرند نمی‌توان بهره گرفت. درچنین نقطه‌ای ممکن است یك ماکسیمم یا یك مینیمم وجود داشته‌باشد، یا هیچ‌کدام وجود نداشته باشند (مسألهٔ ۳۸ را ببینید).

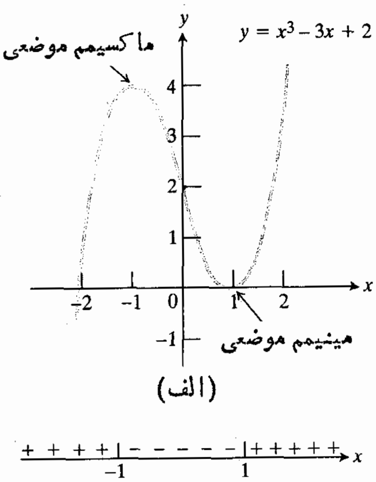
مثال ۴ تمام ماکسیممها و مینیممهای تابع زیر را بیابید.

$$y=x^3-3x+2,\qquad -\infty<x<\infty.$$

حل: دامنه هیچ نقطهٔ انتهایی ندارد، و تابع در همهٔ نقاط مشتق‌پذیراست. پس، مقادیر اکسترمم تنها به‌ازای نقاطی به دست می‌آیند که در آنها مشتق

$$y'=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$$

صفراست؛ این نقاط عبارت‌اند از $x=1$ و $x=-1$. مشتق‌دوم $y''=6x$ در $x=1$ مثبت و در $x=-1$ منفی است. پس $y(1)=0$ یك مقدار مینیمم موضعی است و $y(-1)=4$ یك مقدار ماکسیمم موضعی است. شکل ۳۲.۳ (الف) را ببینید.



(الف)

(ب) علامت $y'=3(x-1)(x+1)$

۳۲.۳ نمودار $y=x^3-3x+2$. ■

همان‌گونه که از مقایسهٔ مثالهای ۲ و ۴ برمی‌آید، وجود مقادیر اکسترمم همان‌قدرکه به‌فرمول مورد استفاده درمحاسبهٔ مقادیر تابع بستگی دارد، به‌دامنهٔ تابع نیز وابسته است. نتایجی که درمثال ۲ درمورد مقادیر $y=x^3-3x+2$ بر $[0, 2]$ به‌دست‌آوردیم، همان نتایجی نیست که درمثال۴ درمورد مقادیر $y=x^3-3x+2$ بردامنهٔ $-\infty<x<\infty$ استخراج کردیم. بنابرقضیهٔ ماکسیمم-مینیمم برای توابع پیوسته دربخش ۱۱.۱ (قضیهٔ ۷)، این تابع بر $[0, 2]$ مقادیرماکسیمم ومینیمم مطلق دارد. بر $-\infty<x<\infty$ مقادیر ماکسیمم و مینیمم نسبی هستند و نه مطلق؛ و ماکسیمم نسبی برابر با ماکسیمم مطلقی که قبلاً آن را یافتیم *نیست*.

کنارگذاشتن y''

درمثال ۴ اگر به‌چگونگی تغییرعلامت $y'=3(x-1)(x+1)$ وقتی x زیاد می‌شود توجه کنیم (شکل ۳۲.۳ ب) دیگر به‌آزمون مشتق دوم نیازی نداریم. تغییر علامت y' از $+$ به $-$ در $x=-1$، بر وجود مقدار ماکسیمم موضعی در $x=-1$ دلالت

دارد. به‌همین ترتیب، تغییرعلامت y' از $-$ به $+$ در $x=۱$ از وجود یك مقدار مینیمم موضعی در $x=۱$ حکایت می‌کند.

اگر یافتن مشتق دوم تابعی مشکل باشد یا اگر پس ازمحاسبهٔ مشتق دوم کارکردن با آن آسان نباشد، شاید بررسی y' و تعیین تغییرعلامت راه بهتری باشد. در واقع، وقتی یافتن تغییرات علامت y' آسان است، ممکن است محاسبهٔ y'' اصلاً لزومی نداشته باشد.

خلاصه

برای یافتن مقادیرماکسیمم و مینیمم تابعی چون $y=f(x)$

۱. نقاطی را تعیین کنیدکه f' درآنها صفر باشد یا وجود نداشته باشد، و

۲. نقاط انتهایی دامنهٔ f را (درصورت وجود) بیابید. اینها تنها نقاطی هستندکه درآنها f مقدار اکسترمم دارد.

نقاطی که درآنها مشتق صفر است یا وجود ندارد، **نقاط بحرانی** f نام دارند. با مقایسهٔ مقادیر f در نقاط بحرانی و نقاط انتهایی با یکدیگرو با مقادیر f در نقاط مجاور، تعیین کنید کدام یك ازآنها، درصورت وجود، ماکسیمم یامینیمم موضعی (یا مطلق) هستند. حتماً به تغییر علامت y' توجه داشته باشید. مشتق دوم هم (اگرمحاسبهٔ آن آسان باشد) می‌تواند سودمند باشد.

مسأله‌ها

درمسأله‌های ۱ـ۳۰ برای هر تابع نقاط‌بحرانی را بیابید. درمورد هرنقطهٔ بحرانی تعیین کنید آیا تابع یك ماکسیمم موضعی یا یك مینیمم موضعی دارد، و یا نه. در صورت امکان مقادیرماکسیمم و مینیمم مطلق تابع بردامنهٔ داده شده را بیابید.

۱. $y=x-x^{۲},\ [۰,۱]$

۲. $y=x-x^{۳},\ -\infty<x<\infty$

۳. $y=x-x^{۳},\ [۰,۱]$

۴. $y=x^{۳}-۳x^{۲}+۲,\ -\infty<x<\infty$

۵. $y=x^{۳}-۱۴۷x,\ -\infty<x<\infty$

۶. $y=x^{۳}-۲x^{۲}+x,\ [-۱,۲]$

۷. $y=x^{۲}-۴x+۳,\ (۰,۳)$

۸. $y=x^{۳}-۶x,\ [۰,۲]$

۹. $y=x-x^{۲},\ (۰,۱)$

۱۰. $y=\dfrac{۱}{x-۲},\ (۱,۳)$

۱۱. $y=۲x,\ [۰,۳]$

۱۲. $y=\dfrac{۱}{۳-x},\ [۰,۴]$

۱۳. $y=x^{۲}+\dfrac{۲}{x},\ x>۰$

۱۴. $y=\dfrac{x}{۱+x},\ [۰,۱]$

۱۵. $y=x^{۳}+۳x^{۲}+۳x+۲,\ -\infty<x<\infty$

۱۶. $y=-x^{۲}+۴x,\ x\geqslant ۰$

۱۷. $y=\sqrt{x}-x,\ x\geqslant ۰$

۱۸. $y=\sqrt{۴-x^{۲}},\ -۴\leqslant x\leqslant ۴$

۱۹. $y=x^{۴}-۴x,\ [۰,۲]$

۲۰. $y=x^{۴}-x^{۲},\ [-۱,۱]$

۲۱. $y=\tan x,\ \left[۰,\dfrac{\pi}{۲}\right]$

۲۲. $y=\sec x,\ \left(\dfrac{-\pi}{۲},\dfrac{\pi}{۲}\right)$

۲۳. $y=۲\sin x+\cos ۲x,\ \left[۰,\dfrac{\pi}{۲}\right]$

۲۴. $y=x^{۴}-۲x^{۲}+۲,\ [-۱,۲]$

۲۵. $y=x^{۴}-۸x^{۳}-۲۷۰x^{۲},\ -\infty<x<\infty$

۲۶. $y=x^{۴}-\dfrac{x^{۳}}{۳}-۲x^{۲}+x-۱,\ -\infty<x<\infty$

۲۷. $y=(x-x^{۲})^{-۱},\ (۰,۱)$

۲۸. $y=|x^{۳}|$ بر $[-۲,۳]$. اگر دامنه به $[-۲,۳)$ تبدیل شود چه اتفاقی می‌افتد؟

۲۹. $y=\begin{cases}-x & x\leqslant ۰\\ ۲x-x^{۲} & x>۰\end{cases}$

۳۰. $y=\begin{cases}۳-x & [۰,۲]\\ (۱/۲)x^{۲} & (۲,۳]\end{cases}$

درمسأله‌های ۳۱ـ۳۶ مقادیرماکسیمم و مینیمم مطلق تابع را (در صورت وجود) بیابید. درهرمورد ابتدا بااستفاده ازفرمول مناسب

در بازه‌های مختلف دامنه،قدرمطلق موجود در فرمولهای داده شده را از بین ببرید. سپس مرزهای این بازه‌ها را به‌نقاط مورد بررسی بیفزایید. دامنهٔ تابع دامنهٔ طبیعی (یعنی بزرگترین دامنهٔ) آن است، مگراینکه خلافش ذکرشده باشد.

۳۱. $y=\dfrac{x}{۱+|x|}$

۳۲. $y=\dfrac{|x|}{۱+|x|}$

۳۳. $y=\sin|x|,\quad -۲\pi\leqslant x\leqslant ۲\pi$

۳۴. $y=\dfrac{|x|}{x}$

۳۵. $y=|x^۲-۱|,\quad -۱\leqslant x\leqslant ۲$

۳۶. $y=|x-x^۲|,\quad x\geqslant ۰$

۳۷. برای‌اینکه نشان دهیم وقتی $x>۰$، $x+۱/x\geqslant ۲$ نیازی به‌حساب دیفرانسیل نداریم. برای ملاحظهٔ دلیل این امر، طرف چپ نابرابری $(x-۱)^۲\geqslant ۰$ را بسط دهید، وبعد دوطرف را بر x تقسیم کنید.

۳۸. برای اینکه نشان دهید "y وقتی مقدارش صفر است هیچ ارزش پیشگویی ندارد، مقادیر مشتقهای اول و دوم $y=x^۳$، $y=x^۴$، و $y=-x^۴$ را درمبدأ بیابید.

۳۹. نقاط بحرانی، مجانبها، و نقاط عطف تابع زیررا بیابید و نمودار تابع را رسم کنید

$$y=\frac{x}{x^۲+۱}\cdot$$

۴۰. آیا تابع

$$y=\frac{x^۳}{۶}+\frac{x^۲}{۲}-۱+\cos x$$

یك ماکسیمم یا مینیمم نسبی در $x=۰$ دارد؟

۴۱. فرض‌کنید تابع $y=f(x)$ به‌ازای تمام مقادیر x مشتقپذیر است و در $x=c$ یك ماکسیمم نسبی دارد. در مورد نمودار f' کدام‌یك ازموارد زیرحتماً درست است؟

الف) یك نقطهٔ عطف در $x=c$ دارد.

ب) محور x را در $x=c$ قطع می‌کند.

پ) یك ماکسیمم یا مینیمم موضعی در $x=c$ دارد.

۴۲. حداکثر ارتفاع خم $y=۴\sin x-۳\cos x$ از محور x را به‌دست آورید.

۴۳. حداکثرارتفاع خم $y=۴\sin^۲x-۳\cos^۲x$ ازمحور x را به‌دست آورید.

۴۴. الف) مقداری برای b تعیین کنید به قسمی که تابع $y=۲x^۳+bx+c$ در $x=۱$ یك مقدار مینیمم موضعی داشته‌باشد.

ب) چرا به‌ازای هیچ‌مقداری‌از b،تابع $y=۲x^۳+bx+c$ در $x=۱$ یك مقدار ماکسیمم موضعی ندارد؟

۵.۳ مسأله‌های ماکسیمم و مینیمم

بسیاری از مسائلی‌که درعلوم تجربی و ریاضیات مطرح می‌شوند، در جستجوی یافتن بزرگترین و کوچکترین مقداری هستندکه یك تابع مشتقپذیرمی‌تواند در دامنهٔ خاصی اختیارکند. همان‌گونه که قبلاً دیدیم، حساب دیفرانسیل ابزار ریاضی مناسبی است برای یافتن این مقادیر. دراین بخش خط‌مشیی برای حل مسائل کاربردی عرضه می‌شود.

مثال ۱ دو عدد مثبت بیابید که مجموعشان ۲۰ و حاصلضربشان حداکثرممکن باشد.

حل: اگریکی ازاین دوعدد x باشد، عدد دیگر $(۲۰-x)$ است وحاصلضربشان عبارت است از:

$$f(x)=x(۲۰-x)=۲۰x-x^۲\cdot$$

در جستجوی مقدار یا مقادیری برای x هستیم‌که به‌ازای آنها f حداکثرممکن شود. با توجه به‌صورت مسأله، دامنهٔ f را می‌توان به‌بازهٔ $۰\leqslant x\leqslant ۲۰$ محدودکرد. فرمول f نشان می‌دهد که f براین بازه پیوسته است، و لذا مطمئناً یك مقدار ماکسیمم خواهد داشت. چون f مشتقپذیرهم هست، بنابرمطالب بخش ۴.۳ می‌دانیم‌که ماکسیمم یا به‌ازای $x=۰$ یا $x=۲۰$ به‌دست می‌آید یا به‌ازای نقطه‌ای درونی‌که درآن $f'=۰$. مشتق

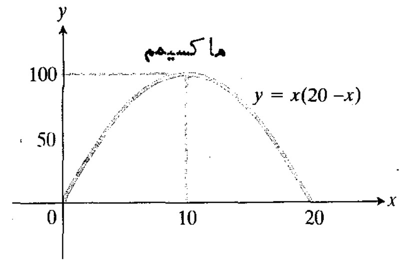
$$f'(x)=۲۰-۲x=۲(۱۰-x)$$

تنها به‌ازای $x=۱۰$ برابر با صفر است. بنابراین ماکسیمم مطلق یکی ازسه عدد زیراست:

$$f(۰)=۰,\quad f(۱۰)=۱۰(۲۰-۱۰)=۱۰۰$$

$$f(۲۰)=۰.$$

تابع بزرگترین مقدار خود، ۱۰۰، را وقتی به‌دست می‌آوردکه $x=۱۰$ (شکل ۳۳.۳). پس دو عدد مورد نظر $x=۱۰$ و $۲۰-x=۱۰$ هستند.



۳۳.۳ حاصلضرب $y=x(۲۰-x)$ وقتی به مقدار ماکسیمم ۱۰۰ می‌رسد که $x=۱۰$. ■

مثال ۲ مستطیلی داخـل نیمدایره‌ای به شعاع ۲ محاط شده‌است. حداکثرمساحت ممکن برای مستطیل چقدراست، و ابعادآن چیست؟

حل: برای توصیف ابعاد مستطیل، دایره و مستطیل را طبق شکل ۳۴.۳ در صفحهٔ مختصات قرار می‌دهیم. لذا طول، ارتفاع، و مساحت مستطیل برحسب x، موضع رأس پـایین سمت راست، عبارت‌اند از:

طول: $۲x$

ارتفاع: $\sqrt{۴-x^۲}$

مساحت: $۲x\cdot\sqrt{۴-x^۲}$

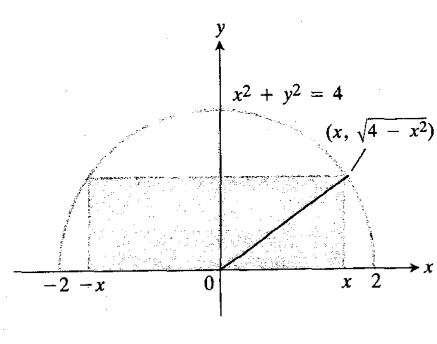
پس مسألهٔ ریاضی، این است که مقدار ماکسیمم مطلق تابع پیوستهٔ

$$A(x)=۲x\sqrt{۴-x^۲}$$

را بر بازهٔ $۰\leqslant x\leqslant ۲$ بیابیم. برای انجام این کار مقادیر A را درنقاط بحرانی ونقاط انتهایی می‌آزماییم.

مشتق

$$\frac{dA}{dx}=\frac{-۲x^۲}{\sqrt{۴-x^۲}}+۲\sqrt{۴-x^۲}$$

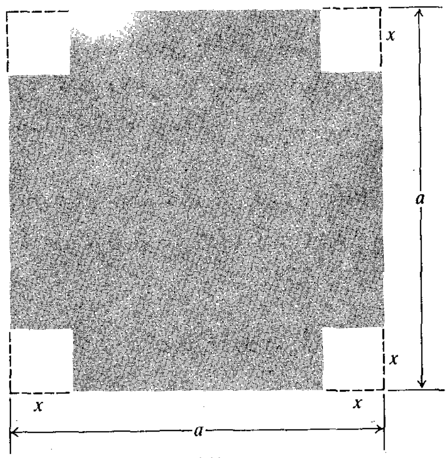


۳۴.۳ مستطیل و نیمدایرهٔ مربوط به‌مثال ۲.

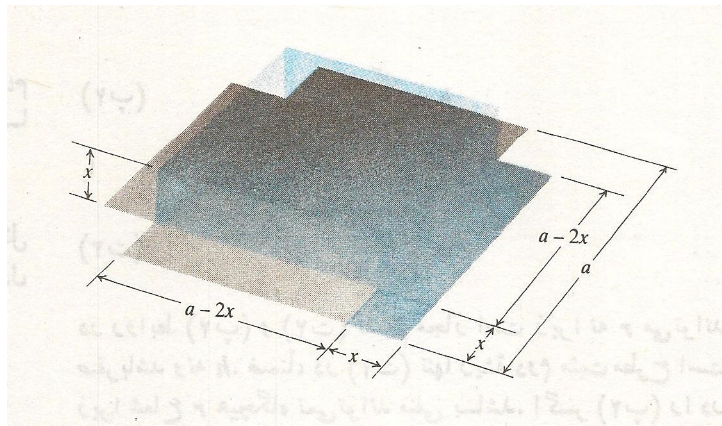
■ ■ ■

کمترین و بیشترین

بسیاری ازمسائلی‌که درقرن هفدهم سبب گسترش حساب دیفرانسیل و انتگرال شدند، مسائل مربوط بـه ماکسیمم و مینیمم بودند. این مسائل غالباً از پژوهشهایی در فیزیك، از قبیل یافتن برد ماکسیمم یك توپ، ناشی می‌شدند. گالیله نشان دادکه برد ماکسیمم یك توپ وقتی به‌دست می‌آیدکه زاویهٔ آتش ۴۵درجه بالای خط افق باشد (بخش۲.۱۳ را ببینید). وی فرمولهایی نیز به‌دست‌آوردکه ارتفاع ماکسیمم پرتابه‌هایی را که با زوایای مختلف نسبت بـه خط افق پرتاب می‌شدند پیشگویی می‌کرد. مسألهٔ معمول دیگر قرن هفدهم محاسبهٔ بیشترین وکمترین فاصلهٔ یك سیاره ازخورشید بود. (بخش ۴.۱۴ را ببینید.) فرما و دکارت روی مسائل دیگرمربوط به‌ماکسیمم و مینیمم نیز کار کردند. اوج کارفرما درایـن زمینه، «اصل کمترین زمـان» (مثال ۶ را ببینید) است. این اصل را هامیلتن در «اصل کمترین کنش» که یکی از قویترین ایده‌های زیربنایی فیزیك است تعمیم داد.



(الف)



(ب)

۳۵.۳ برای اینکه از یك ورق حلبی مربع شکل یك جعبهٔ سر باز بسازیم، (الف) ازگوشه‌های آن مربعهایی جدا می‌کنیم. (ب) لبه‌ها را خم می‌کنیم. مقدار x چه باشد تا حجم جعبه حداکثرشود؟

در $x = 2$ تعریف نمی‌شود، و وقتی مساوی صفر است که

$$\frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2} = 0$$

$$-2x^2 + 2(4 - x^2) = 0$$

$$8 - 4x^2 = 0$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}.$$

بنابراین، به‌ازای $0 \leqslant x \leqslant 2$ داریم

مقادیر درنقاط بحرانی: $A(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\sqrt{4-2} = 4$

$A(2) = 0,$

مقادیردرنقاط انتهایی: $A(0) = 0$

$A(2) = 0.$

وقتی که طول مستطیل $2x = 2\sqrt{2}$ واحد و ارتفاع آن $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{2}$ واحد باشد، مساحت دارای مقدار ماکسیمم ۴ است. ■

مثال ۳ ورق حلبی مربع شکلی که طول هرضلعش a اینچ است داده شده‌است. از هر گوشهٔ این ورق، مربع کوچکی می‌بریم، و لبه‌ها را خم می‌کنیم تا یك جعبهٔ سر باز ساخته شود. برای اینکه حجم جعبه بیشترین مقدار ممکن را داشته‌باشد، ابعاد مربعی که می‌بریم چقدر باید باشد؟

حل: ابتدا شکلی می‌کشیم تامسأله روشن‌شود (شکل ۳۵.۳). درشکل، طول ضلع هریك از مربعهایی را که باید ببریم x اینچ می‌گیریم. لذا حجم جعبه برحسب اینچ مکعب برابراست با

$$y = x(a-2x)^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{2} \qquad (1)$$

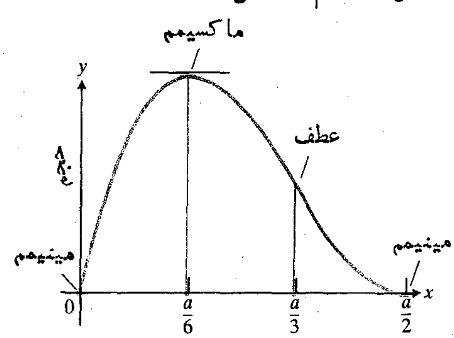
در رابطهٔ (۱)، x به این دلیل محدود شده‌است که نه می‌توان مقداری منفی از هر گوشه برید و نه مقداری بیش از کل مقدار موجود. همچنین واضح است که اگر $x = 0$ یا اگر $x = a/2$، آنگاه $y = 0$، ولذا وقتی y یا حجم جعبه ماکسیمم می‌شود که مقدار x بین ۰ و $a/2$ باشد. تابع موجود درمعادلهٔ (۱) درهمهٔ این‌نقاط مشتق دارد، ولذا ماکسیمم به‌ازای نقطه‌ای از $[0, a/2]$ به‌دست می‌آید که درآن $y' = 0$. بنابررابطهٔ (۱) داریم

$$y = a^2x - 4ax^2 + 4x^3$$

$$y' = a^2 - 8ax + 12x^2 = (a-2x)(a-6x)$$

لذا اگر $x = a/6$ یا $x = a/2$ داریم $y' = 0$.

ازاین‌مقادیر، تنها $x = a/6$ درون $[0, a/2]$ قرارمی‌گیرد. پس‌ماکسیمم به‌ازای $x = a/6$ به‌دست می‌آید. برای اینکه حجم جعبه ماکسیمم باشد ابعاد مربعهای واقع درگوشه‌ها باید $a/6$ در $a/6$ باشد. نمودارحجم درشکل ۳۶.۳ نشان داده شده‌است.



۳۶.۳ دراینجا نمودارحجم جعبهٔ شکل ۳۵.۳ به‌صورت تابعی از x رسم شده‌است. ■

مثال ۴ می‌خواهیم یك قوطی به‌شکل استوانهٔ مستدیرقائم بسازیم که درآن ۱/۴ گالن روغن جا بگیرد. ابعاد قوطی چه باشد تا ورق لازم به‌حداقل مقدار برسد؟

حل: باز هم با رسم شکل کارخود را آغاز می‌کنیم (شکل ۳۷.۳). این شرط که درقوطی ۱/۴ گالن روغن جا بگیرد، معادل است با اینکه

$$V=\pi r^{2}h=a^{3}\,. \qquad (\text{۲ الف})$$

دراینجا r شعاع، و h ارتفاع، برحسب اینچ‌اند، و a^{3} حجم ربع گالن برحسب اینچ مکعب است ($a^{3}=57{,}75$).

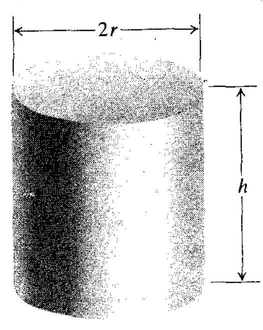
تعبیر عبارت «حداقل ورق» چیست؟ یك امکان این است‌که ازضخامت ورق و از ضایعات ساخت قوطی صرفنظر کنیم. دراین صورت باید ابعاد r و h را چنان تعیین کنیم‌که مساحت کل رویهٔ

$$A=2\pi r^{2}+2\pi rh \qquad (\text{۲ب})$$

حداقل ممکن‌باشد، وشرط موجود درمعادلهٔ (۲ الف) هم برآورده شود. مسألهٔ ۴۵ راهی را نشان می‌دهد که هزینهٔ ضایعات را هم می‌توان ملحوظ کرد.

به‌هرحال، انتظار ما از شکل قوطی روغن چیست؟ نه یك قوطی دراز و باریك، شبیه لوله‌ای‌که شش فوت درازا و یك اینچ قطرداشته‌باشد، ونه یك قوطی‌کوتاه و پهن، شبیه یك قوطی سوهان با قطر نه اینچ. در هر یك از اینها تقریباً ۱/۴ گالن روغن جا می‌گیرد، اما ورق مورد نیاز آنها بیش از قوطی روغن اتومبیل است. انتظار ما چیزی در بین این دو است.

هنوز آمادگی کافی نداریم تا روشهایی راکه درمثالهای ۱ تا ۳ به‌کار بردیم مورد استفاده قرار دهیم، زیرا معادلهٔ (۲ب)، A را به‌صورت تابعی از دو متغیر r و h بیان می‌کند، حال‌آنکه روش ما وقتی مفید است‌که A به صورت تابعی از تنها یك متغیر باشد. با وجود این، از معادلهٔ (۲ الف) می‌توان استفاده‌کرد و هریك از متغیرهای r یا h را برحسب دیگری به‌دست آورد؛ به‌این ترتیب داریم



۳۷.۳ وقتی می‌توانیم با کمترین مقدار ورق یك قوطی ۱/۴ گالنی بسازیم که $h=2r$.

$$h=\frac{a^{3}}{\pi r^{2}} \qquad (\text{۲پ})$$

یا

$$r=\sqrt{\frac{a^{3}}{\pi h}}\,. \qquad (\text{۲ت})$$

در روابط (۲پ) و (۲ت) تقسیم مجاز است زیرا نه r می‌تواند صفرباشد ونه h. ضمناً، در (۲ت) تنها ریشهٔ دوم مثبت مطرح است زیرا شعاع r هیچگاه نمی‌تواند منفی باشد. اگر (۲پ) را در (۲ب) قرار دهیم، داریم

$$A=2\pi r^{2}+\frac{2a^{3}}{r},\quad 0<r. \qquad (\text{۲ث})$$

حال می‌توانیم از روشهای قبل استفاده کنیم. مینیمم A تنها در نقطه‌ای به‌دست می‌آیدکه درآن

$$\frac{dA}{dr}=4\pi r-2a^{3}r^{-2} \qquad (\text{۲ج})$$

صفر باشد؛ یعنی جایی که

$$4\pi r=\frac{2a^{3}}{r^{2}},\quad r^{3}=\frac{a^{3}}{2\pi}\quad \text{یا}\quad r=\frac{a}{\sqrt[3]{2\pi}}. \qquad (\text{۲چ})$$

به‌ازای چنین مقداری از r

$$\frac{d^{2}A}{dr^{2}}=4\pi+4a^{3}r^{-3}=12\pi>0$$

که دلالت بریك مینیمم موضعی دارد. چون مشتق دوم برای $r>0$ همواره مثبت است، تقعر خم روبه‌بالاست، و هیچ مینیمم موضعی دیگری وجود ندارد. پس مینیمم مطلق هم به‌دست‌آمده‌است. بنابر (۲چ) و (۲پ)، ابعاد قوطیی باحجم V که مساحتش مینیمم باشد، اینها هستند:

$$r=\frac{a}{\sqrt[3]{2\pi}}=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}},\qquad h=\frac{2a}{\sqrt[3]{2\pi}}=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}=2r$$

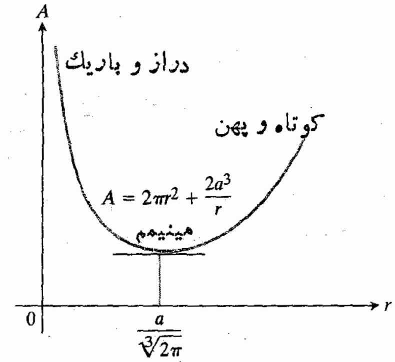
ارتفاع قوطی با قطرش برابراست. اگر

$$V=1/4(\text{گالن})=57{,}75\ \text{in}^{3}$$

پس ازگردکردن داریم

$$r=2{,}1\ \text{in}\quad \text{و}\quad h=4{,}2\ \text{in}\,.$$

شکل ۳۸.۳ نمودار A را به‌صورت تابعی از r نشان می‌دهد.



۳۸.۳ نمودار $A=2\pi r^2+(2a^3/r)$.

در برخی از مسائل ماکسیمم و مینیمم، جواب به‌ازای نقاط انتهایی دامنهٔ تابع به دست می‌آید. مثال بعد نمونه‌ای از این مسائل است.

مثال ۵ سیمی به‌طول L داده شده‌است تا با آن یك دایره و یك مربع بسازیم. برای اینکه مجموع مساحتهای دایره و مربع ماکسیمم باشد، سیم چگونه باید تقسیم شود؟

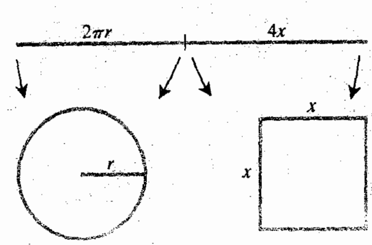
حل: فرض می‌کنیم ازاین سیم یك دایره ویك مربع ساخته شده‌باشد، وابعاد مربوط مطابق شکل ۳۹.۳ باشند. با استفاده از نمادهای موجود در شکل ۳۹.۳ مجموع مساحت دایره و مربع عبارت است از

(۳ الف) $$A=\pi r^2+x^2$$

که درآن

(۳ ب) $$2\pi r+4x=L.$$

مسألهٔ ریاضی ما یافتن مقداری برای r در بازهٔ $0\leqslant 2\pi r\leqslant L$ است که تابع مشتق‌پذیر A را ماکسیمم کند. می‌توانیم از رابطهٔ (۳ب)، x را برحسب r به دست آوریم و نتیجه را در رابطهٔ (۳ الف) قرار دهیم، ولی به جای این‌کار از (۳ الف) و (۳ ب) نسبت به r مشتق می‌گیریم، و نتایج را باهم تلفیق می‌کنیم.



۳۹.۳ از سیمی به‌طول $2\pi r+4x$ واحد یك دایره و یك مربع ساخته‌ایم. حداکثر مجموع اندازهٔ مساحتهایی که این دوشکل می‌سازند چیست؟

(۳پ) $$\frac{dA}{dr}=2\pi r+2x\frac{dx}{dr}$$

(۳ت) $$2\pi+4\frac{dx}{dr}=\frac{dL}{dr}.$$

چون L ثابت است، $dL/dr=0$ و از رابطهٔ (۳ت) می‌توانیم dx/dr را به‌دست آوریم.

$$2\pi+4\frac{dx}{dr}=0$$

$$\frac{dx}{dr}=-\frac{2\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}$$

بااستفاده ازاین رابطه، معادلهٔ(۳پ) را به‌صورت زیردرمی‌آوریم

(۳ث) $$\frac{dA}{dr}=2\pi r-\pi x.$$

هرچند (۳ث)، dA/dr را برحسب تنها یك متغیر بیان نمی‌کند، ولی به‌ما نشان می‌دهدکه مشتق دوم

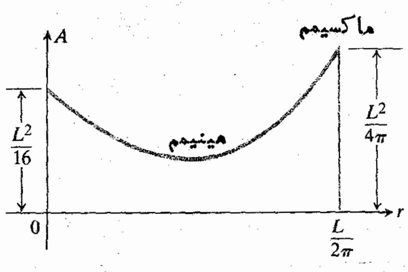
$$\frac{d^2A}{dr^2}=2\pi-\pi\frac{dx}{dr}=2\pi+\frac{\pi^2}{2}$$

همواره مثبت است، پس، نمودار A به‌صورت تابعی از r تقعرش روبه‌بالاست. بنابراین بر بازهٔ $0\leqslant 2\pi r\leqslant L$، مقدار ماکسیمم A به‌ازای یکی‌از دونقطهٔ انتهایی $r=0$، $r=L/2\pi$ یا به‌ازای هردوی آنها به‌دست می‌آید. مقادیر درنقاط انتهایی عبارت‌اند از

در $r=0$: $\quad x=\frac{L}{4},\quad A=\frac{L^2}{16}$

در $r=\frac{L}{2\pi}$: $\quad x=0,\quad A=\frac{L^2}{4\pi}$

ماکسیمم مقدار A وقتی به دست می‌آید که $r=L/2\pi$ یا $2\pi r=L$. پس، برای اینکه بیشترین مساحت به‌دست آید، اصلاً نباید سیم را ببریم بلکه باید همهٔ آن را به‌صورت دایره درآوریم. نمودار A به‌صورت تابعی از r شبیه خم شکل ۴۰.۳ است



۴۰.۳ نمودار مجموع مساحتهای موردنظر در شکل ۳۹.۳ به‌صورت تابعی از r رسم‌شده‌است.

که دارای دو ماکسیمم نسبی است، اما برای یافتن ماکسیمم مطلق نیازی به‌دانستن این مطلب نیست. ■

مثال ۶ اصل فرما و قانون اسنل. سرعت نور بستگی به محیطی دارد که از آن عبور می‌کند، و معمولاً در محیطهای چگالتر کندتر است. در خلأ، نور با سرعت معروف $c=3\times10^{8}\ \mathrm{m/sec}$ حرکت می‌کند، اما در جو زمین از آن کندتر عبور می‌کند، و در شیشه از آن هم کندتر.

اصل فرما در اپتیك حاکی است که نور از یك نقطه به‌نقطهٔ دیگر از راهی می‌گذرد که مدت زمان حرکت مینیمم باشد. فرض کنید یك پرتو نور از نقطه‌ای چون A واقع در محیطی که در آن سرعت نور c_1 است به‌نقطهٔ B واقع در محیطی که در آن سرعت نور c_2 است می‌رسد. مسیر پرتو چه خواهد بود؟

حل: فرض می‌کنیم هردو نقطه درصفحهٔ xy باشند، ومحور xها طبق شکل۴۱٫۳ دومحیط را از هم جدا کند.

در هر دو محیط، که در آنها سرعت نور ثابت می‌ماند، «کوتاهترین زمان» به‌معنای «کوتاهترین مسیر» است، و پرتو نور به صورت خط مستقیم است. پس مسیر از A تا B متشکل خواهد بود از یك پاره‌خط از A تا یك نقطهٔ مرزی P، و به دنبال آن پاره‌خط دیگری از P تا B. طبق فرمول، فاصله برابر است با حاصلضرب سرعت در زمان،

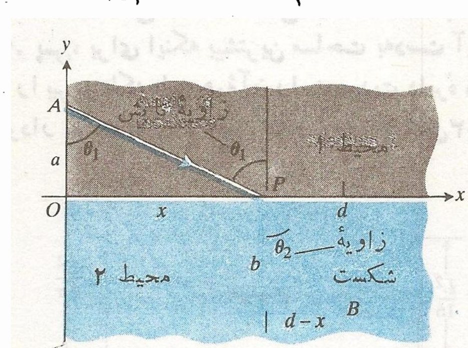
$$\text{زمان}=\frac{\text{فاصله}}{\text{سرعت}}.$$

پس، زمان لازم برای عبور نور از A تا P عبارت است از

$$t_1=\frac{AP}{c_1}=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c_1}.$$

همچنین زمان لازم برای عبور نور از P تا B عبارت است از

$$t_2=\frac{PB}{c_2}=\frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{c_2}.$$



۴۱٫۳ پرتو نور هنگام عبور از یك محیط به‌محیط دیگر می‌شکند (از مسیرش منحرف می‌شود). θ_1 زاویهٔ تابش، و θ_2 زاویهٔ شکست نور است.

زمان عبور از A تا B مجموع این دو است:

$$t=t_1+t_2=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c_1}+\frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{c_2}. \qquad (\text{۴ الف})$$

مسألهٔ ریاضی ما یافتن‌مقدار یامقادیری است‌برای x دربازهٔ $0\leqslant x\leqslant d$ که به‌ازای آن t مقدارمینیمم خودش را اختیار کند. داریم

$$\frac{dt}{dx}=\frac{x}{c_1\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{(d-x)}{c_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}} \qquad (\text{۴ب})$$

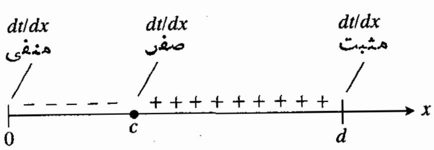
و یا، با استفاده از زوایای θ_1 و θ_2 شکل، داریم

$$\frac{dt}{dx}=\frac{\sin\theta_1}{c_1}-\frac{\sin\theta_2}{c_2}. \qquad (\text{۴پ})$$

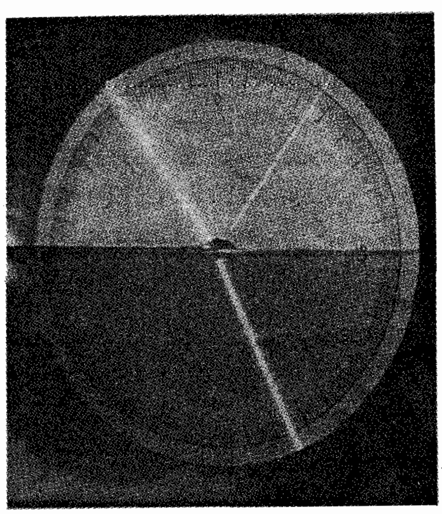
از معادلهٔ (۴ب) دیده می‌شود که dt/dx در $x=0$ منفی است و در $x=d$ مثبت است، و در نقطه‌ای که بین آنهاست صفر است (شکل ۴۲٫۳). این نقطه یکتاست زیرا dt/dx تابعی است صعودی از x. دراین نقطه

$$\frac{\sin\theta_1}{c_1}=\frac{\sin\theta_2}{c_2}. \qquad (\text{۴ت})$$

این معادله را **قانون اسنل** یا **قانون شکست** می‌نامند.



۴۲٫۳ الگوی علامت dt/dx در مثال ۶. ■



دردمای اتاق، نسبت‌سرعت‌نور درهوا وآب، ۱٫۳۳ است، ولذا قانون اسنل به‌صورت $\sin\theta_1=1.33\sin\theta_2$ درمی‌آید. در این‌عکس آزمایشگاهی $\theta_1=35.5^\circ$، $\theta_2=26^\circ$، و همان‌طورکه پیش‌بینی شد داریم
$(\sin 35.5^\circ)/(\sin 26^\circ)=0.581/0.438\approx1.33$.

استدلالی (گاه) مفید

استدلال زیر را درمورد بسیاری ازمسائلی که مربوط به‌یافتن مقدار اکسترمم، مثلاً ماکسیمم، یك تابع می‌شوند، می‌توان به‌کار برد. فرض کنید می‌دانیم که

۱. می‌توانیم مسأله را به‌یك بازهٔ بستهٔ I محدود کنیم.

۲. تابع همه‌جا پیوسته و مشتقپذیر است (ممکن است این مطلب از فرمول تابع معلوم باشد یا با توجه به‌ملاحظات فیزیکی آن را فرض کنیم).

۳. ماکسیمم تابع به‌ازای هیچ‌یك از نقاط انتهایی به‌دست نمی‌آید.

دراین صورت، می‌دانیم که تابع دست‌کم دریك نقطهٔ درونی I یك ماکسیمم دارد، و درآن نقطه مشتق باید صفر باشد. پس، اگر دریابیم که مشتق تابع تنها در یك نقطهٔ درونی I صفرمی‌شود، این همان نقطه‌ای است که ماکسیمم تابع رابه‌دست می‌دهد. برای یافتن مقدار مینیمم استدلال مشابهی می‌توان اقامه‌کرد.

مثال ۷ تولیدکننده‌ای می‌تواند درهفته x واحدکالا را با بهای $P=۲۰۰-۰٫۰۱x$ ریال بفروشد. ساختن x واحد کالا، $C=۵۰x+۲۰۰۰۰$ ریال خرج دارد. برای کسب بیشترین سود چه تعداد کالا باید ساخته شود؟

حل: درآمد کل حاصل‌ازفروش x واحدکالا عبارت‌است‌از

$$xP=۲۰۰x-۰٫۰۱x^{۲} .$$

سود T برابراست با درآمد منهای هزینه:

$$T=xP-C=(۲۰۰x-۰٫۰۱x^{۲})-(۵۰x+۲۰۰۰۰)$$

$$=۱۵۰x-۰٫۰۱x^{۲}-۲۰۰۰۰ .$$

برای مقادیر خیلی بزرگ x، مثلاً بیش از یك میلیون، T منفی است. پس ماکسیمم مقدار T به‌ازای نقطه‌ای از بازهٔ $۰\leqslant x\leqslant ۱۰^{۶}$ به‌دست می‌آید. فرمول T نشان می‌دهد‌که T درهر xی مشتقپذیر است، ومسلماً T در هیچ‌یك از دونقطهٔ انتهایی ۰ و $۱۰^{۶}$ ماکسیمم نیست. مشتق

$$\frac{dT}{dx}=۱۵۰-۰٫۰۲x$$

تنها وقتی صفراست که

$$x=۷۵۰۰ .$$

پس، برای کسب سود ماکسیمم میزان تولید باید $x=۷۵۰۰$ باشد. ■

برای حل مسألهٔ موجود درمثال ۷ می‌توانستیم مشتق دوم $d^{۲}T/dx^{۲}=-۰٫۰۲$ را حساب‌کنیم و نتیجه بگیریم که T در $x=۷۵۰۰$ یك ماکسیمم موضعی دارد. نگاهی سریع به دامنهٔ x یا به‌نمودار T کافی است نشان دهد این ماکسیمم، مطلق هم هست. حسن این روش استدلال در این است‌که آن را می‌توان در مورد توابعی که مشتق دوم ندارند، یامحاسبهٔ مشتق دوم آنها دشوار است، به‌کار برد.

خط‌مشی حل مسائل ماکسیمم و مینیمم

۱. شکلی رسم کنید. درصورت امکان شکلی بکشید تا مسأله روشن شود. بخشهایی از شکل را که برای حل مسأله مهم‌اند علامتگذاری کنید. حروف مناسبی برای ثابتها و متغیرها برگزینید.

۲. معادله‌ای بنویسید. برای کمیتی که‌می‌خواهید مقدار ماکسیمم یا مینیمم آن را بیابید معادله‌ای بنویسید. معمولاً مطلوب است که کمیت به‌صورت تابعی از تنها یك متغیر بیان شود، مثلاً $y=f(x)$. این کار ممکن است مستلزم قدری محاسبه، و استفاده از مفروضات مسأله باشد. به‌دامنهٔ مقادیر x مورد نظر توجه داشته‌باشید.

۳. نقاط بحرانی، و نقاط انتهایی را بیازمایید. مقادیر اکسترمم f را می‌توان از بین مقادیر f به‌ازای نقاط انتهایی دامنه، و به ازای نقاطی که در آنها f' صفر است یا اینکه f' وجود ندارد، یافت. مقادیر f به‌ازای این‌نقاط را فهرست‌کنید. اگر f بر دامنه‌اش یك ماکسیمم یا مینیمم مطلق داشته‌باشد، در فهرست ظاهر خواهد شد. برای اینکه تعیین کنید یك مقدار مفروض ماکسیمم است، مینیمم است، و یا هیچ‌کدام، ممکن است مجبورشوید الگوی‌علامت f'، یا علامت f'' را بیابید.

مسأله‌ها

۱. مجموع دوعدد نامنفی ۲۰ است. در هر یك از شرایط زیر این دوعدد را بیابید. (الف) اگربخواهیم مجموع مربعاتشان حداکثر ممکن باشد؛ (ب) اگر بخواهیم حاصلضرب مربع یکی در مکعب دیگری حداکثرممکن باشد؛ (پ) اگربخواهیم مجموع یکی باریشهٔ دوم دیگری حداکثرممکن باشد.

۲. اگر طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۵ سانتیمتر باشد، حداکثر مساحت ممکن آن چقدراست؟

۳. اگر مساحت مستطیلی $۱۶\ \mathrm{in}^{۲}$ باشد، کمترین محیط ممکن آن چقدر است؟

۴. درچه نقطه‌ای ازبازهٔ $۰\leqslant x\leqslant \pi/۲$، مجموع $\sin x+\cos x$ حداقل است؟

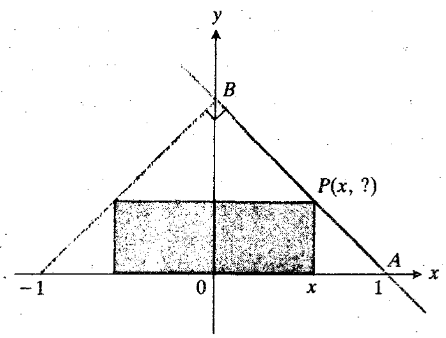
۵. نزدیکترین نقطهٔ دایرهٔ $x=\cos t$، $y=\sin t$، $۰\leqslant t\leqslant ۲\pi$ به‌نقطهٔ $(۱,\sqrt{۳})$ کدام است؟ (راهنمایی: به‌ازای چه‌مقدار از t تابع

$$f(t)=(\cos t-1)^2+(\sin t-\sqrt{3})^2$$

که مربع فاصلهٔ بین $(\cos t, \sin t)$ و $(1, \sqrt{3})$ را بـه دست می‌دهد، مینیمم می‌شود؟)

۰۶. شکل ۴۳.۳ مستطیلی را نشان می‌دهد که دریك مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه که طول و تـرش ۲ واحد است، محاط شده است.

الف) مختص y نقطهٔ P را برحسب x بنویسید.
ب) مساحت مستطیل را برحسب x بیان کنید.
پ) حداکثرمساحت ممکن این مستطیل چقدراست؟



۴۳.۳ مستطیل مورد بحث درمسألهٔ ۶.

۰۷. قاعدهٔ پایینی مستطیلی برمحور x، و رأسهای بالایی آن بـر سهمی $y=12-x^2$ واقع‌اند. بزرگترین مساحت ممکن ایـن مستطیل چقدراست؟

۰۸. می‌خواهیم از یك تکه مقوا به‌درازای ۱۵ اینچ و پهنای ۸اینچ یك جعبهٔ باز مربعی شکل بسازیم. برای این کار چهـار مربع از گوشه‌ها می‌بریم ولبه‌ها را به‌بالا تا می‌کنیم. ابعاد جعبهٔ با بیشترین حجم را بیابید.

۰۹. قراراست درکنار رودخانهٔ مستقیمی، باکشیدن حصار، محوطهٔ مستطیلی شکلی ایجادکنیم. برای سه طرفی کـه به‌حصار نیاز دارد ۸۰۰ مترنرده در اختیار است. مساحت بزرگترین زمینی را کـه می‌توان محصورکرد بیابید.

۰۱۰. نشان دهیدکـه در بین تمام مستطیلهای بامحیط مفروض P، مساحت مربع ازهمه بیشتراست.

۰۱۱. قرار است با ۱۵۸ فوت مربع ورق، مخزنی سرباز بسازیم که قاعده‌اش مربع، و دیوارهایش قائم باشند. اگر بخواهیم حجم ماکسیمم باشد، ابعاد مخزن را بیابید. ازضخامت ورق و ضایعات حین ساخت صرفنظر کنید.

۰۱۲. قاعدهٔ جعبهٔ سربازی مربع وحجم آن ۳۲ اینچ مکعب است. ابعاد جعبه چه‌باشد تا ورق موردنیاز برای‌ساختن‌آن، حداقل باشد؟ ازضخامت ورق و ضایعات حین ساخت صرفنظر کنید.

۰۱۳. قراراست بایك پاره‌خط به‌طول ۲۵ واحدکه از $(a, 0)$ تا $(0, b)$ امتداد دارد در ربع اول صفحهٔ مختصات، مثلثی بسازیم. نشان دهید وقتی‌که $a=b$، مثلث حداکثرمساحت را دارد.

۰۱۴. برای یافتن معـادلهٔ خط $y=mx+b$ گذرنده از نقطـهٔ $(1, 2)$ که از ربع اول کمترین مساحت را جدا می‌کند،کارهای زیر را انجام دهید

الف) m را برحسب b بیان‌کنید.
ب) طول ازمبدأ خط را بیابید.
پ) فرمولی چون $A(b)$ بیابیدکه مساحت مثلث را به‌صورت تابعی از b بیان‌کند.
ت) b چه باشد تا A مینیمم شود؟

۰۱۵. ذره‌ای روی محور x حرکت می‌کند، و در زمان t موضع آن $x=(t-1)(t-4)^4$ است.

الف) چه موقع ذره می‌ایستد؟
ب) درچه بازهٔ زمانی ذره به‌طرف چپ می‌رود؟
پ) وقتی‌که ذره به طرف چپ می‌رود حداکثر سرعت آن چقدراست؟

۰۱۶. معادلات $x=1/t$، $y=(t^3/3)-4t$، $t>0$، مـوضع ذرهٔ متحرکی در صفحه را به‌دست می‌دهند. به‌ازای چـه مقدار t، مسیری کـه ذره می‌پیماید بیشترین شیب را دارد؟ بیشترین شیب چقدراست؟

۰۱۷. می‌خواهیم پوستری تهیه‌کنیم‌که برآن ۵۰ اینچ مربع مطلب نوشته شود و حاشیهٔ بالا و پایین هریك ۴ اینچ وحاشیهٔ هریك از دوطرف ۲ اینچ باشد. ابعادکل چه باشد تـا کمترین مقدار کاغذ لازم باشد؟

۰۱۸. ارتفاع شیئی‌که به‌طور قائم حرکت می‌کند از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$s=-16t^2+96t+112$$

که درآن s برحسب فوت و t برحسب ثانیه است. مطلوب است (الف) سرعت شیء وقتی‌که $t=0$، (ب) ماکسیمم ارتفاع شیء، و (پ) سرعت شیء وقتی‌که $s=0$.

۰۱۹. قطعه زمین مستطیل شکلی ۲۱۶ مترمربع مساحت دارد. دور این زمین را حصار می‌کشیم وبا حصار دیگری موازی با یکی از اضلاع، آن را به دوقطعهٔ متساوی تقسیم می‌کنیم. ابعـاد مستطیل بزرگ چه‌باشد تاطول‌کل حصارهای لازم‌کمترین مقدار را داشته باشد؟ به‌چقدر حصار نیاز داریم؟

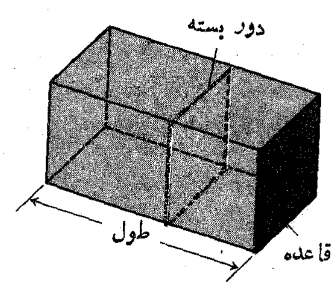
۰۲۰. طول دو ضلع مثلثی باید a و b سانتیمتر بـاشند. بیشترین مساحتی‌که چنین مثلثی می‌تواند داشته‌باشد چقدراست؟ (راهنمایی: $A=(1/2)ab\sin\theta$.)

۲۱. می‌خواهیم یك قوطی استوانه‌ای مستدیر قائم سر باز بسازیم که حجمش ۱۰۰۰ سانتیمترمکعب باشد. این قوطی از ورقی ساخته می‌شود که وزن هر سانتیمتر مربع آن ۱ گرم است. ابعاد سبکترین قوطی با این مشخصات چیست؟ این نتیجه را با نتیجهٔ مربوط به‌مثال ۴ مقایسه کنید.

۲۲. x و y طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای هستند که طول وترش $\sqrt{5}$ واحد است. بیشترین مقدار $2x+y$ را بیابید.

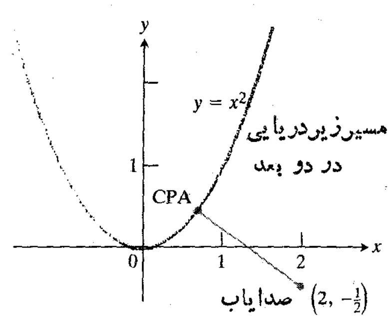
۲۳. قاعده و سطوح جانبی ظرفی به‌شکل مستطیل‌اند. ظرف سرباز است وحجمش ۲ مترمکعب است. عرض قاعدهٔ ظرف ۱ متر است. بهای هرمترمربع از ورق قاعده ۱۰ دلار وهرمترمربع از ورق‌سطوح جانبی ۵ دلار است. بهای ارزانترین ظرف با این مشخصات چیست؟

۲۴. ادارهٔ پست آمریکا برای پست داخلی بسته‌هایی را می‌پذیرد که مجموع طول و دور (اندازهٔ کمر) آنها از ۱۰۸ اینچ تجاوز نکند. ابعاد بزرگترین بستهٔ قابل پذیرش با این فرض که قاعده‌اش مربع باشد چیست (شکل ۴۴.۳)؟



۴۴.۳ بستهٔ مربوط به‌مسألهٔ ۲۴.

۲۵. (نتیجه‌گیری از مسألهٔ صدایاب، مسألهٔ ۱۶ در بخش ۲.۹) نشان دهید xی که فاصلهٔ بین نقاط (x, x^2) و $(2, -1/2)$ در شکل ۴۵.۳ را مینیمم می‌کند جوابی برای معادلهٔ $x = 1/(x^2+1)$ است. (راهنمایی: مربع فاصله را مینیمم کنید.)

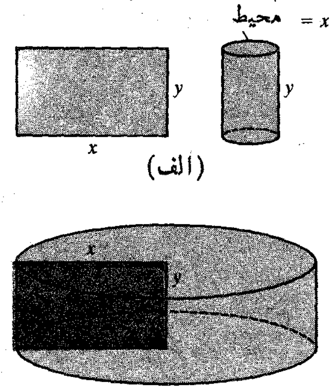


۴۵.۳ مسیر زیردریایی و صدایاب درمسألهٔ ۲۵. نزدیکترین‌فاصلهٔ زیردریایی تا شناور، با CPA نمایش داده شده‌است.

۲۶. جوابهای دومسألهٔ زیر را باهم مقایسه کنید.

الف) ورق مستطیل شکلی به‌ابعاد x در y سانتیمتر را لوله می‌کنیم و آن را به‌صورت استوانهٔ شکل ۴۶.۳ (الف) در می‌آوریم. محیط ورق ۳۶ سانتیمتر است. x و y چه باشند تا حجم استوانه ماکسیمم شود؟ این حجم چقدراست؟

ب) ورق مستطیل شکل مذکور در (الف) را حول یکی از اضلاع به‌طول y دوران می‌دهیم تا استوانهٔ شکل ۴۶.۳(ب) پدید آید. در این حالت x و y چه باشند تا حجم استوانهٔ حاصل ماکسیمم شود؟ این حجم چقدر است؟



(الف)

(ب)

۴۶.۳ ورق مستطیل شکل و استوانه‌های مربوط به‌مسألهٔ ۲۶.

۲۷. مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر مفروضی‌راحول یکی ازساقهایش دوران می‌دهیم تا مخروط مستدیرقائمی پدیدآید. حجم بزرگترین مخروط را بیابید.

۲۸. تولیدکنندهٔ کالای خاصی برای ساخت و توزیع یك عدد از یك کالا c دلار خرج می‌کند. اگر هرعددکالا را x دلار بفروشد، تعداد فروش از رابطهٔ $n=a/(x-c)+b(100-x)$ به‌دست می‌آید. در این رابطه a و b ثابتهای مثبت معینی هستند. بهای فروش هرعدد کالا چقدر باشد تا سود حاصل ماکسیمم شود؟

۲۹. مقدار a چه باشد تا تابع

$$f(x)=x^2+\frac{a}{x}$$

دارای

الف) یك مینیمم موضعی در $x=2$ باشد؟

ب) یك مینیمم موضعی در $x=-3$ باشد؟

پ) یك نقطهٔ عطف در $x=1$ باشد؟

ت) نشان دهید که این تابع به‌ازای هیچ مقداری از a نمی‌تواند ماکسیمم موضعی داشته‌باشد.

۳۰. مقادیر a و b چه باشند تا تابع

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

در شرایط زیر صدق کند

الف) در $x=-1$ یك ماکسیمم موضعی و در $x=3$ یك مینیمم موضعی داشته باشد؟

ب) در $x=4$ یك مینیمم موضعی و در $x=1$ یك نقطهٔ عطف داشته باشد؟

۳۱. سیمی به‌طول L را به‌دوتکه تقسیم می‌کنیم؛ از یك تکه یك مربع و از دیگری یك مثلث متساوی‌الاضلاع می‌سازیم. سیم را چگونه ببریم تا مجموع مساحات حاصل (الف) مینیمم شود؛ (ب) ماکسیمم شود؟

۳۲. روی خم $y=\sqrt{x}$ نزدیکترین نقطه به $(c, 0)$ را درهر یك از حالات زیر بیابید

الف) $c \geqslant 1/2$

ب) $c < 1/2$

۳۳. کره‌ای به شعاع r مفروض است. حجم بزرگترین مخروط مستدیرقائمی که می‌تواند دراین کره محاط شود چقدراست؟

۳۴. کره‌ای به‌شعاع r مفروض است. حجم بزرگترین استوانهٔ مستدیرقائمی که می‌تواند دراین کره محاط شود چقدراست؟

۳۵. نشان دهید حجم بزرگترین استوانهٔ مستدیرقائمی که می‌تواند در یك مخروط مستدیرقائم محاط شود، $4/9$ حجم مخروط است.

۳۶. استحکام تیری با مقطع مستطیل شکل، متناسب است با حاصلضرب پهنای تیر در مربع ارتفاع مقطع آن. مطلوب است ابعاد مستحکمترین تیری که از یك‌کندهٔ استوانه‌ای مستدیر به‌شعاع r می‌توان برید.

۳۷. سفتی یك تیرمستطیل شکل متناسب است باحاصلضرب پهنای تیردرمکعب ارتفاع مقطع آن، اما به‌طول آن بستگی ندارد. ابعاد سفت‌ترین تیری را که می‌توان از کنده‌ای به‌قطر مفروض برید به‌دست آورید.

۳۸. شدت‌نور درهر نقطه‌ای برابراست باحاصلضرب عددی ثابت درقدرت منبع نور تقسیم برمربع فاصله تا منبع. اگر قدرت‌دومنبع نور به‌ترتیب a و b، وفاصلهٔ بین آنها c باشد، درچه نقطه‌ای از خط واصل بین دومنبع، شدت نورمینیمم است؟ فرض کنید که شدت نور درهرنقطه برابراست با مجموع شدتهای ناشی از هردو منبع.

۳۹. پنجره‌ای از دوقسمت به‌شکل مستطیل و نیمدایره تشکیل شده است. شیشهٔ قسمت مستطیلی شکل سفید، و شیشهٔ قسمت نیمدایره‌ای رنگی است. نوری که از یك فوت مربع شیشهٔ رنگی می‌گذرد نصف نوری است که از یك فوت مربع شیشهٔ سفید عبور می‌کند. محیط کل ثابت است. ابعاد پنجره‌ای را بیابید که بیشترین نور از آن عبور می‌کند.

۴۰. می‌خواهیم یك قوطی حلبی به شکل استوانهٔ مستدیر قائم بسازیم که حجم معینی داشته باشد. بریدن حلب برای ساختن سطوح جانبی قوطی ضایعاتی ندارد، ولی برای ساختن دوایر به شعاع r باید ازمربعهایی استفاده کنیم که‌طول هرضلع آنها $2r$ واحد است. پس کل ورق لازم برای هر قوطی $A=8r^2+2\pi rh$ (به جای $A=2\pi r^2+2\pi rh$ درمثال ۴) است. برای اینکه کمترین مقدار ورق را مصرف کنیم نسبت ارتفاع به‌قطر چه باید باشد؟

۴۱. بایك استوانهٔ مستدیرقائم به‌شعاع r وارتفاع h ویك‌نیمکره که دربالای آن قرار می‌گیرد یك ظرف سربسته می‌سازیم. ارتباط بین r و h چه باشد تا با مساحت مفروضی از رویهٔ کل، حجم ماکسیمم شود؟

۴۲. فرض کنید سیم به طول L درمثال ۵ را باید بین دایره و مربع طوری تقسیم کنیم که مساحت کل به‌جای ماکسیمم‌شدن، مینیمم شود. بااین فرض، شعاع دایره وطول هرضلع مربع چه‌باید باشد؟ (از تمام سیم باید استفاده شود.)

۴۳. آیا توابع زیرهیچگاه مقدار منفی دارند؟ ازکجا می‌دانید؟

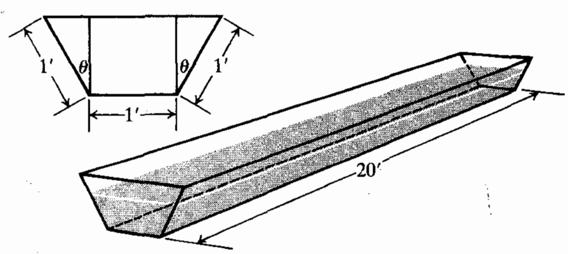
الف) $f(x)=x^2-x+1$

ب) $f(x)=3+4\cos x+\cos 2x$

۴۴. می‌خواهیم از فلزی که ۲۰ فوت طول و ۳ فوت عرض دارد آبشخوری راکه درشکل۴۷.۳ نشان داده شده‌است بسازیم. برای ساختن آبشخور باید لبه‌های به‌عرض ۱ فوت را طوری به‌بالا خم کنیم که با امتداد قائم، زاویهٔ ثابت θ بسازند.

الف) حجم آبشخور را برحسب زاویهٔ θ بیان کنید.

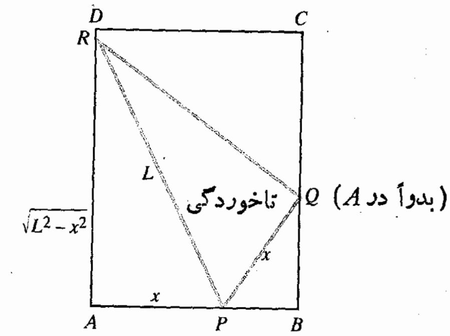
ب) حجم ماکسیمم ممکن چقدراست؟



۴۷.۳ آبشخور درمسألهٔ ۴۴.

۴۵. تمام ماکسیممها و مینیممهای $y=\sin x+\cos x$ را بیابید.

۴۶. یك صفحهٔ کاغذ مستطیلی $11 \times 8\frac{1}{2}$ اینچ بریك سطح صاف قرار دارد.سه‌تا از رأسها را ثابت نگه می‌داریم، ورأس چهارم را بلند می‌کنیم و برلبهٔ طویلتر مقابل قرارمی‌دهیم.حال هرچهار رأس را ثابت نگه می‌داریم وکاغذ را مانند شکل ۴۸.۳ صاف‌می‌کنیم.



۴۸.۳ کاغذ مربوط به‌مسألهٔ ۴۶.

مسأله، یافتن مینیمم طول ممکن برای قسمت تاخورده است.

الف) آنچه را گفته شد با کاغذ انجام دهید.

ب) نشان دهید که

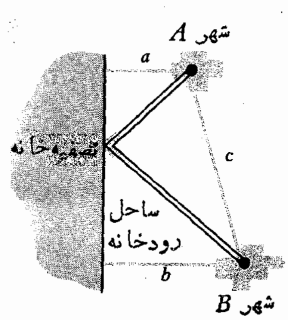
$$L^{۲}=۲x^{۳}/(۲x-۸{,}۵)\text{،}\quad ۴{,}۲۵<x<۸{,}۵$$

پ) $L^{۲}$ را مینیمم کنید.

۴۷. می‌خواهیم سیلویی به شکل استوانه بسازیم که در روی آن نیمکره‌ای قرار گیرد. هزینهٔ ساخت هرفوت مربع ازمساحت سطح نیمکره دو برابر استوانه‌است. اگر بخواهیم حجم ثابت‌وهزینه مینیمم باشد، ابعاد لازم را بیابید. از ضخامت سیلو و ضایعات ساخت صرفنظر کنید.

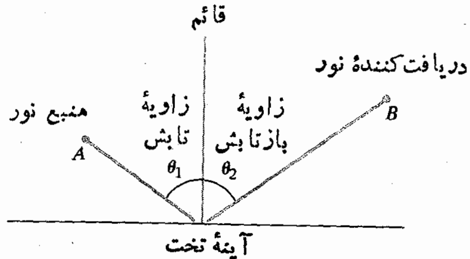
۴۸. اگرمجموع مساحتهای سطح مکعب وسطح کره‌ای ثابت باشد، نسبت طول ضلع مکعب به‌قطر کره چقدر باشد تا: (الف) مجموع حجمهایشان مینیمم باشد؛ (ب) مجموع حجمهایشان ماکسیمم باشد.

۴۹*. در یك طرف رودخانهٔ مستقیمی دو شهرقرار دارندکه قرار است درساحل رودخانه تصفیه‌خانهٔ مشترکی برای آب مصرفی آن دو شهرساخته شود. فاصلهٔ این دو شهرتا رودخانهٔ a و b وفاصلهٔ بین آنها c است(شکل۴۹.۳). نشان دهیدکه مجموع طول‌لوله‌هایی کـه دو شهر را به تصفیه‌خانه وصل می‌کند، حداقل $\sqrt{c^{۲}+۴ab}$ است.



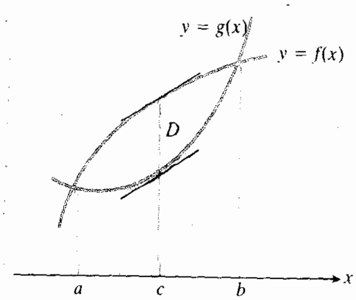
۴۹.۳ شهرها وتصفیه‌خانهٔ مورد بحث درمسألهٔ ۴۹.

۵۰*. نور ازنقطهٔ A به‌آینهٔ تختی می‌تابد و به‌نقطهٔ B بازتابیده می‌شود. اگر بخواهیم زمان لازم برای حرکت نور از A به‌آینه و سپس ازآینه به B مینیمم شود، نشان دهید که باید زاویهٔ تابش برابر با زاویهٔ بازتابش باشد. شکل ۵۰.۳ را ببینید.



۵۰.۳ درمطالعهٔ حرکت نور، زاویه‌های تابش و بازتابش نسبت به‌خط قائم برسطح بازتابنده اندازه گرفته می‌شوند. مسألهٔ ۵۰ از شما می‌خواهد نشان دهیدکه اگرنور از اصل «کوتاهترین زمان» فرما تبعیت‌کند، آنگاه $\theta_۱=\theta_۲$.

۵۱. فرض‌کنید $f(x)$ و $g(x)$ بر $a\leqslant x\leqslant b$ توابع مشتقپذیری باشند که نمودارهایشان در شکل ۵۱.۳ نشان داده شده‌است. نقطهٔ c نقطه‌ای است که درآن فاصلهٔ قائم D بین خمها بزرگترین مقدار ممکن است. نشان دهید که خطهای ممـاس بر خمها در $x=c$، متوازی‌اند.



۵۱.۳ نمودارهای مفروض درمسألهٔ ۵۱.

۵۲. یك بنگاه جهانگردی براساس نرخهای زیرکار می‌کند.

i) هر نفر ۲۰۰ دلار اگر (حداقل) ۵۰ نفر برای مسافرت ثبت‌نام کنند.

ii) به‌ازای هر نفر اضافی، تـا حداکثر ۸۰ نفر، نرخ فوق برای هرنفر ۲ دلارکم می‌شود. خرج این تور برای بنگاه ۶۰۰۰ دلار (یك هزینهٔ ثابت)، به‌اضافهٔ ۳۲ دلار برای هر مسافر است. با چند مسافرسود بنگاه ماکسیمم می‌شود؟

۵۳. در پایان بخش ۸.۱ هزینهٔ نهایی تولید x تن فولاد درهفته، dy/dx، را به‌صورت مشتق هزینه، y، نسبت به x تعریف‌کردیم.

---

* این مسأله را بدون استفاده ازحساب دیفرانسیل نیز می‌توان حل‌کرد.

مشتق به‌ازای هر x معین، هزینهٔ تقریبی تولید فولاد به‌اندازهٔ یك تن بعدی بود.

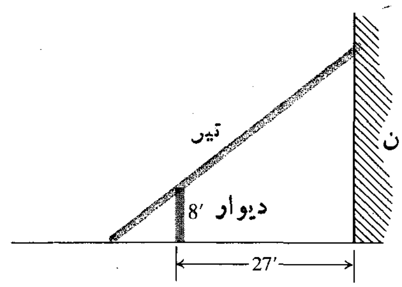
فرض کنید برای فروش x تن فولاد در هفته، شرکت بهای هرتن آن را P دلار تعیین می‌کند. لذا درآمد شرکت برابر xP است. درآمد نهایی شرکت مشتق xP نسبت به x، یا آهنگ تغییر درآمد در هر واحد تولید اضافی است. سود شرکت، T، اختلاف بین درآمد و هزینه است: $T = xP - y$.

شرکت می‌خواهد میزان تولید آنقدر باشد که سود به ماکسیمم خود برسد.

الف) نشان دهید که اگر سود بتواند ماکسیمم شود، به‌ازای مقداری از x ماکسیمم می‌شود که درآمد نهایی برابر با هزینهٔ نهایی باشد.

ب) درمورد مشتقهای دوم P و y چه شرایطی باید برقرار باشند تا مطمئن باشیم که نقطهٔ برابری در (الف) مربوط به سود ماکسیمم است (ونه مثلاً سود مینیمم)؟

۵۴. دیواری که درشکل ۵۲.۳ می‌بینید ۸ فوت ارتفاع دارد، و فاصلهٔ آن تا ساختمان ۲۷ فوت است. مطلوب است طول کوتاهترین تیر مستقیمی که یك سر آن برزمین قراردارد، از روی دیوار می‌گذرد، و سردیگر آن به‌ساختمان می‌رسد.



۵۲.۳ نمودار مربوط به‌مسألهٔ ۵۴.

۵۵. **واکنش خود کاتالیزوری.** در واکنشهای شیمیایی کاتالیزور ماده‌ای است که بدون اینکه خود تغییر دائمی کند، آهنگ واکنش را کنترل می‌کند. یك واکنش خودکاتالیزوری، واکنشی است که محصولش کاتالیزور خودش باشد. اگرمقدار کاتالیزور موجود کم باشد، چنین واکنشی ممکن است در آغاز که کاتالیزور کم است و در پایان که بیشترماده اصلی به‌مصرف رسیده‌است، به‌آرامی انجام شود. اما، در اواسط کار که هم ماده فراوان است و هم محصول، واکنش می‌تواند با آهنگ تندتری انجام شود.

در مواردی، معقول است فرض شود که آهنگ واکنش، $v = dx/dt$، هم با مقدارمادهٔ اولیهٔ موجود وهم با مقدارمحصول متناسب است. یعنی، می‌توان فرض کرد که v تابعی است از x به تنهایی، و

$$v = kx(a-x) = kax - kx^2.$$

که در آن

$x =$ مقدار محصول

$a =$ مقدار ماده در آغاز

$k =$ یك ثابت مثبت

به‌ازای چه مقداری از x، v یك ماکسیمم دارد؟ مقدار ماکسیمم v چقدر است؟

TOOLKIT PROGRAMS
Derivative Grapher   Super * Grapher

۶.۳ آهنگهای تغییر وابسته

وقتی هوا با آهنگ $10\ \text{cm}^3/\text{sec}$ به یك حباب کروی صابون دمیده می‌شود، شعاع حباب با چه سرعتی تغییر می‌کند؟ وقتی آب یك مخزن استوانه‌ای با آهنگ ۳ لیتر برثانیه تخلیه می‌شود، سطح آب با چه سرعتی پایین می‌رود؟

مضمون این پرسشها این است که با دانستن آهنگ تغییر یك متغیرچگونه می‌توان آهنگ تغییردیگری را محاسبه‌کرد. برای محاسبهٔ آهنگ مجهول، معادله‌ای می‌نویسیم که این دومتغیررا به‌هم ربط دهد وسپس ازآن مشتق می‌گیریم تا معادله‌ای به‌دست آید که آهنگ مطلوب را به‌آهنگ معلوم مربوط کند. در این بخش به تفصیل به‌این مطالب می‌پردازیم.

مثال ۱ **حباب صابون.** وقتی هوا را با آهنگ $10\ \text{cm}^3/\text{sec}$ به‌یك حباب کروی صابون می‌دمیم، شعاع آن با چه سرعتی تغییر می‌کند؟

حل: آهنگ تغییرحجم به ما داده شده‌است و می‌خواهیم آهنگ تغییرشعاع را بیابیم.

حجم V و شعاع r را به‌صورت توابع مشتقپذیری از زمان t درنظرمی‌گیریم. مشتقات dV/dt و dr/dt به ترتیب آهنگ تغییر V و r را به‌دست می‌دهند. بنا به‌فرض داریم

$$\frac{dV}{dt} = 10 \quad \text{(هوا با آهنگ } 10\ \text{cm}^3/\text{sec} \text{ دمیده می‌شود.)}$$

مطلوب ما دانستن مقدار

$$\frac{dr}{dt} \quad \text{(باچه سرعتی شعاع تغییر می‌کند؟)}$$

است.

برای پاسخگویی به‌این سؤال، ابتدا معادله‌ای می‌نویسیم که V و r را به‌هم مربوط کند.

$$V=\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}. \quad \text{(حباب کروی است.)} \qquad (۱)$$

حال اگر از دو طرف معادله نسبت بـه t مشتق بگیریم معادله‌ای به‌دست می‌آوریم که dr/dt و dV/dt را به‌هم مربوط می‌کند

$$\frac{dV}{dt}=۴\pi r^{۲}\frac{dr}{dt}. \qquad (۲)$$

مقدارمعلوم $dV/dt=۱۰$ را درمعادله می‌گذاریم و dr/dt را محاسبه می‌کنیم

$$\frac{dr}{dt}=\frac{۱۰}{۴\pi r^{۲}}. \qquad (۳)$$

از معادلهٔ (۳) برمی‌آید که آهنگ تغییر r در هـر زمان مشخص بـه بزرگی r درآن لحظه بستگی دارد. وقتی r کوچك بـاشد، dr/dt بزرگ است؛ و وقتی r بزرگ باشد، dr/dt کوچك خواهد بود

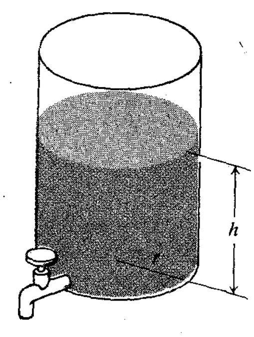
در $r=۱\ \text{cm}$، $\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{۱۰}{۴\pi}\approx ۰٫۸\ \text{cm/sec}$

در $r=۱۰\ \text{cm}$، $\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{۱۰}{۴۰۰\pi}\approx ۰٫۰۰۸\ \text{cm/sec}$. ■

مثال ۲ مخزن استوانه‌ای. وقتی آب با آهنگ ۳ لیتر بر ثانیه از یك مخزن استوانه‌ای خارج می‌شود، سطح آب با چه سرعتی پایین می‌رود؟

حل: شکلی از یك مخزن استوانه‌ای می‌کشیم که تا ارتفاعی آب دارد. شعاع آن را r و ارتفـاع آب را h می‌نامیم (شکل ۵۳.۳). حجم آب مخزن را با V نمایش می‌دهیم.

شعاع r ثابت است، اما V و h نسبت به‌زمان تغییر می‌کنند. فرض می‌کنیم V و h توابع مشتقپذیری از زمان‌اند، و زمان را با t نمایش می‌دهیم. مشتقات dV/dt و dh/dt به‌ترتیب، آهنگ



۵۳.۳ مخزن استوانه‌ای مورد بحث درمثال ۲.

تغییر V و h را به‌دست می‌دهند. به‌ما گفته شده که

$$\frac{dV}{dt}=-۳ \quad \text{(مخزن با آهنگ ۳ لیتر بر ثانیه خالی می‌شود.)}$$

واز ما خواسته شده

$$\frac{dh}{dt} \quad \text{(سطح آب با چه سرعتی پایین می‌رود؟)}$$

را محاسبه‌کنیم.

برای پاسخگویی به‌این سؤال، ابتدا معادله‌ای می‌نویسیم که V و h را به‌هم ربط دهد

$$V=\pi r^{۲}h \quad \text{(مخزن استوانه‌ای است.)}$$

سپس از دو طرف نسبت به t مشتق می‌گیریم تا معادله‌ای به‌دست آوریم‌که dh/dt رابه dV/dt مربوط کند

$$\frac{dV}{dt}=\pi r^{۲}\frac{dh}{dt}.$$

مقدار معلوم $dV/dt=-۳$ را در معادله می‌گذاریم و dh/dt را حساب می‌کنیم

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{۳}{\pi r^{۲}}. \qquad (۴)$$

سطح آب با آهنگ ثابت $۳/\pi r^{۲}$ لیتر برثانیه پایین می‌رود. ■

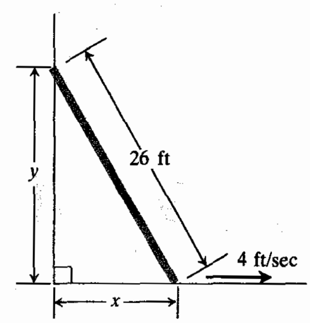
مثال ۳ پای نردبانی که ۲۶ فوت طول دارد روی زمین افقی، و سرآن بردیواری قائم متکی است. پای آن را با آهنگ ۴ فوت برثانیه‌از دیوار دور می‌کنیم. وقتی پای نردبان ۱۰ فوت از دیوار فاصله دارد سرآن با چه آهنگی به‌طرف پایین می‌لغزد؟

حل: درچندگام به‌این پرسش پاسخ می‌دهیم.

گام ۱: شکلی می‌کشیم و متغیرها و ثابتها را نامگذاری می‌کنیم. شکل نردبانی را رسم می‌کنیم‌که پای آن روی زمین افقی است و سرآن به‌دیوار قـائم تکیه دارد (شکل ۵۴.۳). متغیرهـای شکل حاصل عبارت‌اند از فاصلهٔ سرنردبان از سطح زمین، y، و فاصلهٔ پای نردبان تا دیوار، x. طول نردبان را هم کـه ۲۶ فوت است نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم t زمان را نشان دهد و x و y توابع مشتقپذیری از t باشند.

گام ۲: هر اطلاع عددی دیگر را هم یادداشت می‌کنیم. به ما گفته شده‌که $dx/dt=۴$ فوت برثانیه است.

گام ۳: چیزی را که از ما خواسته شده‌است یادداشت می‌کنیم. از ما خواسته شده‌که مقدار dy/dt در $x=۱۰$ فوت را بیابیم.



۵۴.۳ نردبان مورد بحث درمثال ۳. وقتی پای نردبان از دیوار دور می‌شود، y نزول، و x صعود می‌کند.

گام ۴: معادله‌ای می‌نویسیم که متغیرها را به هم ربط دهد. زاویهٔ پای دیوار یك زاویهٔ قائمه است، پس x و y بنا به‌قضیهٔ فیثاغورس چنین به‌هم مربوط می‌شوند.

$$x^{۲}+y^{۲}=۲۶^{۲}.$$

گام ۵: مشتق می‌گیریم تا dy/dt برحسب dx/dt تعیین شود

$$۲x\frac{dx}{dt}+۲y\frac{dy}{dt}=۰$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}. \qquad (۵)$$

وقتی $x=۱۰$ داریم

$$y=\sqrt{۲۶^{۲}-۱۰^{۲}}=۲۴،\ \frac{dx}{dt}=۴،\ و$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{۱۰}{۲۴}(۴)=-\frac{۵}{۳}.$$

وقتی پای نردبان در ۱۰ فوتی دیوار قراردارد، سرآن با آهنگ ۵/۳ فوت برثانیه به‌طرف پایین می‌آید (y نزول می‌کند). ■

گامهای مذکور در مثال ۳، مراحل خط‌مشی اساسی حل مسائل آهنگهای وابسته‌اند.

خط‌مشی حل مسائل آهنگهای وابسته

۱. شکلی بکشید و متغیرها و ثابتها را نامگذاری کنید. زمان را با t نشان دهید و فرض کنید که تمام متغیرها توابع مشتقپذیری از t هستند.

۲. هر اطلاع عددی دیگر را هم یادداشت کنید.

۳. چیزی را که از شما خواسته شده یادداشت کنید. معمولاً این خواسته آهنگی است که به‌صورت مشتق بیان می‌شود.

۴. معادله‌ای بنویسید که متغیرها را به هم مربوط کند. ممکن است مجبور شوید دو یا چند معادله را باهم تلفیق کنید تا معادله‌ای به‌دست آید که متغیری راکه آهنگش مطلوب شماست به‌متغیری که آهنگش معلوم است، مربوط کند.

۵. مشتق بگیرید.

هنگام مطالعهٔ دومثال بعدی این گامها را درنظر داشته باشید.

مثال ۴ آب با آهنگ ۲ فوت مکعب بر دقیقه وارد یك مخزن مخروطی می‌شود. نوك مخزن در پایین، بلندی‌اش ۱۰ فوت وشعاع قاعده‌اش ۵ فوت است. وقتی ارتفاع آب ۶ فوت باشد، سطح آب باچه سرعتی بالا می‌آید؟

حل: شکلی برای مخزن مخروطی شکلی‌که تا ارتفاعی‌آب دارد می‌کشیم (شکل ۵۵.۳). متغیرهای مسأله عبارت‌اند از:

حجم (فوت مکعب) آب درمخزن در زمان t (ثانیه) $=V$

شعاع (فوت) سطح آب در زمان $t=x$

ارتفاع (فوت) آب درمخزن در زمان $t=y$

ثابتها ابعاد مخزن‌اند، و

$$\frac{dV}{dt}=۲ \qquad \text{دقیقه/فوت مکعب}$$

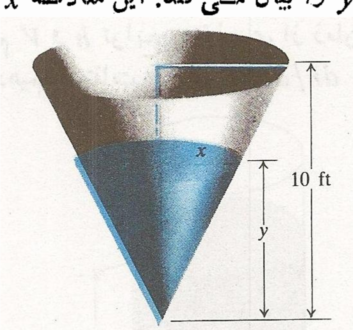
آهنگ پرشدن مخزن را نشان می‌دهد.

ازما خواسته شده مقدار dy/dt در $y=۶$ را بیابیم.

معادلهٔ

$$V=\frac{۱}{۳}\pi x^{۲}y \qquad (۶)$$

رابطهٔ بین V و y را بیان می‌کند. این معادله x، y، و V را



۵۵.۳ مخزن مخروطی در مثال ۴. برای اینکه نشان دهیم سطح آب موجود در این مخزن مخروطی تغییر می‌کند، ارتفاع آب را با متغیری چون y نمایش می‌دهیم. بدین ترتیب آهنگ تغییرسطح آب dy/dt است.

دربر دارد، اما باروش زیر می‌توانیم x را حذف کنیم. بنابرتشابه مثلثها (شکل ۵۵.۳) داریم

$$x=\frac{۱}{۲}y \quad \text{یا} \quad \frac{x}{y}=\frac{۵}{۱۰}$$

پس

$$V=\frac{۱}{۳}\pi\left(\frac{۱}{۲}y\right)^{۲}y=\frac{۱}{۱۲}\pi y^{۳}. \qquad (۷)$$

حال از دو طرف معادلهٔ (۷) مشتق می‌گیریم تا dy/dt برحسب dV/dt به‌دست آید

$$(۸) \qquad \frac{dV}{dt}=\frac{۱}{۴}\pi y^{۲}\frac{dy}{dt} \quad \text{یا} \quad \frac{dy}{dt}=\frac{۴}{\pi y^{۲}}\frac{dV}{dt}.$$

وقتی $dV/dt=۲$ و $y=۶$، داریم

$$\frac{dy}{dt}=\frac{۴\times ۲}{\pi\times ۳۶}=\frac{۲}{۹\pi}\approx ۰٫۰۷۱\ \text{ft/min}.$$

وقتی ارتفاع آب ۶فوت باشد، سطح آن با آهنگ ۰٫۰۷۱فوت بردقیقه بالا می‌رود. ■

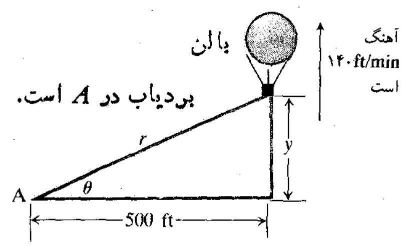
مثال ۵ بالنی با آهنگ ۱۴۰فوت بردقیقه از زمین به‌بالا می‌رود و رد آن بـا ردیابی در نقطهٔ A که ۵۰۰ فوت از نقطهٔ حرکت فاصله دارد گرفته می‌شود (شکل ۵۶.۳ را ببینید). وقتی بالن در ۵۰۰ فوتی سطح زمین باشد، آهنگ تغییر زاویـه برد را در A بیابید.

حل: زاویه در A. متغیر θ و y با معادلهٔ

$$\tan\theta=\frac{y}{۵۰۰}$$

بـه‌هم مربوط می‌شوند. پس، مشتقهای θ و y نسبت به‌زمان t با معادلهٔ زیر به‌هم مربوط می‌شوند.

$$\sec^{۲}\theta\frac{d\theta}{dt}=\frac{۱}{۵۰۰}\frac{dy}{dt}. \qquad (۹)$$



۵۶.۳ بالن بالارونده درمثال ۵.

وقتی $y=۵۰۰$ ft داریم $\theta=\pi/۴$ و $\sec^{۲}\theta=(\sqrt{۲})^{۲}=۲$. همچنین $dy/dt=۱۴۰$ ft/min. این مقادیر را درمعادلهٔ (۹) قرار می‌دهیم و $d\theta/dt$ را به‌دست می‌آوریم

$$۲\frac{d\theta}{dt}=\frac{۱}{۵۰۰}(۱۴۰)$$

یا

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{۱۴۰}{۱۰۰۰}=۰٫۱۴\ \text{radians/min}.$$

وقتی $y=۵۰۰$ ft، زاویهٔ A با آهنگ ۰٫۱۴ رادیان بر دقیقه افزایش می‌یابد.

برد r. متغیرهای r و y را معادلهٔ

$$r^{۲}=۵۰۰^{۲}+y^{۲}$$

به هم مربوط می‌کند، و مشتقهای آنها نسبت به‌زمان را معادله‌های زیر مرتبط می‌سازند.

$$۲r\frac{dr}{dt}=۲y\frac{dy}{dt} \quad \text{یا} \quad \frac{dr}{dt}=\frac{y}{r}\frac{dy}{dt}.$$

وقتی $y=۵۰۰$، داریم $r=\sqrt{۵۰۰^{۲}+۵۰۰^{۲}}=۵۰۰\sqrt{۲}$، و $dy/dt=۱۴۰$ ft/min، و

$$\frac{dr}{dt}=\frac{۵۰۰}{۵۰۰\sqrt{۲}}۱۴۰=\frac{۱۴۰\sqrt{۲}}{۲}=۷۰\sqrt{۲}\ \text{ft/min}.$$

وقتی $y=۵۰۰$ ft، برد با آهنگ $۷۰\sqrt{۲}$ فوت بردقیقه زیـاد می‌شود. ■

مسأله‌ها

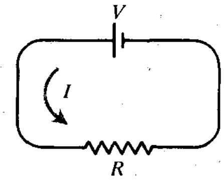
۱. فرض‌کنید A مساحت دایـره‌ای به‌شعاع r در زمان t باشد. معادله‌ای بنویسیدکه dA/dt و dr/dt را به‌هم ربط دهد.

۲. فرض‌کنید S مساحت رویهٔ کره‌ای به‌شعاع r در زمان t باشد. معادله‌ای بنویسیدکه dS/dt و dr/dt را به‌هم ربط دهد.

۳. فرض‌کنید V حجم مکعبی باشد که طول یالهایش در زمان t برابر با s باشد. معادله‌ای بنویسید کـه dV/dt و ds/dt را به‌هم ربط دهد.

۴. وقتی یك صفحهٔ مستدیرفلزی را درکوره‌ای گرم‌کنیم، شعاعش با آهنگ ۰٫۰۱ سانتیمتر بر دقیقه زیاد می‌شود. وقتی شعاع ۵۰ سانتیمتراست، مساحت صفحه با چه آهنگی افزایش می‌یابد؟

۵. در مورد مدارهای الکتریکی، نظیرآنچه درشکل ۵۷.۳ نشان داده شده‌است، قانون اهم حاکی است که $V=IR$. دراین رابطه



۵۷.۳ در این مدار، جریان از قانون اهم تبعیت می‌کند (مسألهٔ ۵).

V ولتاژ، I جریان برحسب آمپر، و R مقاومت برحسب اهم است. فرض کنید V با آهنگ ۱ volt/sec زیاد شود، و I با آهنگ ۱/۳ amp/sec تقلیل یابد. نیز فرض کنید t زمان برحسب ثانیه را نشان دهد.

الف) مقدار dV/dt چیست؟

ب) مقدار dI/dt چیست؟

پ) چه معادله‌ای dR/dt را به dV/dt و dI/dt ربط می‌دهد؟

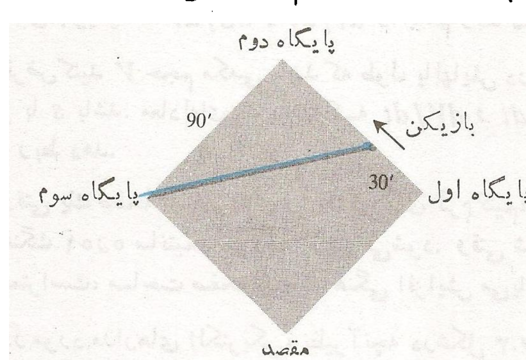
ت) وقتی $V = 12$ ولت، و $I = 2$ آمپر است، آهنگ تغییر R را بیابید. آیا R صعودی است یا نزولی؟

۶. طول یک مستطیل، l، با آهنگ ۲ cm/sec کاهش و عرض آن، w، با آهنگ ۲ cm/sec افزایش می‌یابد. وقتی $l = 12\text{cm}$ و $w = 5\text{ cm}$، مطلوب است آهنگهای تغییر: (الف) مساحت، (ب) محیط، و (پ) طول قطر مستطیل. از این سه کمیت کدام صعودی، و کدام نزولی‌اند؟

۷. زمین بیسبال، مربعی به ضلع ۹۰ فوت است (شکل ۵۸.۳). یکی از بازیکنان با سرعت ۱۶ ft/sec از پایگاه اول به پایگاه دوم می‌رود. وقتی این بازیکن از پایگاه اول ۳۰ فوت فاصله دارد، سرعت تقلیل فاصله‌اش از پایگاه سوم چقدر است؟ برای پاسخگویی به این پرسش مراحل زیر را طی کنید.

الف) به فواصل بین بازیکن و پایگاههای دوم و سوم متغیرهایی نسبت دهید. در زمان موردنظر در صورت مسأله، مقادیر این متغیرها چقدرند؟

ب) متغیرها چگونه به‌هم مربوط می‌شوند؟



۵۸.۳ زمین بیسبال موضوع مسألهٔ ۷.

پ) مشتقهای این متغیرها چگونه به‌هم مربوط می‌شوند؟

ت) آهنگ تغییر فاصلهٔ بازیکن تا پایگاه سوم را محاسبه کنید.

۸. فرض کنید V حجم و S مساحت رویهٔ کل استوانهٔ مستدیر قائمی باشد که ارتفاع آن ۵ و شعاعش r فوت است. مطلوب است dV/dS به‌ازای $r = 3$.

۹. مساحت مثلث متشکل از نردبان، زمین، و دیوار در مثال ۳، وقتی $x = 10$ با چه آهنگی تغییر می‌کند؟ اگر در زمان $t = 0$ ثانیه که نردبان به‌دیوار چسبیده است حرکت آغاز شود، و $x = 4t$، در چه زمانی مساحت مثلث بزرگترین مقدار ممکن را دارد؟

۱۰. ماسه با آهنگ $10\ \text{ft}^3/\text{min}$ از تسمهٔ نقاله‌ای می‌ریزد و کپه‌ای مخروطی شکل می‌سازد. شعاع قاعدهٔ کپه همیشه برابر با نصف ارتفاع آن است. وقتی ارتفاع کپه ۵ فوت باشد، ارتفاع آن با چه سرعتی افزایش می‌یابد؟

۱۱. فرض کنید قطرهٔ باران به شکل یک کرهٔ کامل است. نیز فرض کنید قطرهٔ باران ازطریق تقطیر، رطوبت را با آهنگی متناسب با مساحتش جذب کند. نشان دهید که شعاع با آهنگی ثابت زیاد می‌شود.

۱۲. نقطهٔ A در امتداد محور x با آهنگ ثابت a ft/sec، و نقطهٔ B در امتداد محور y با آهنگ ثابت b ft/sec حرکت می‌کنند. وقتی A در نقطهٔ $(x, 0)$ و B در نقطهٔ $(0, y)$ باشد، فاصلهٔ بین دو نقطه با چه سرعتی تغییر می‌کند؟

۱۳. بالنی کروی را با آهنگ $100\ \text{ft}^3/\text{min}$ از گاز پر می‌کنیم. فرض کنید فشار گاز ثابت باقی بماند. در زمانی که شعاع بالن ۳ فوت است، شعاع با چه سرعتی زیاد می‌شود؟ مساحت سطح بالن با چه سرعتی افزایش می‌یابد؟

۱۴. قایقی را با طنابی به‌لنگرگاه می‌کشیم. یک سر طناب به‌دماغهٔ قایق وصل است، وسر دیگرش ازحلقه‌ای می‌گذرد که روی لنگرگاه نصب شده‌است و ارتفاع آن ۴ فوت از ارتفاع دماغهٔ قایق بیشتر است. اگر طناب با آهنگ ۲ ft/sec کشیده شود، وقتی که ۱۰ فوت ازطناب باقی باشد، قایق با چه سرعتی به‌لنگرگاه نزدیک می‌شود؟

۱۵. بالنی در ۲۰۰ فوتی زمین واقع است، و با آهنگ ثابت ۱۵ ft/sec به‌طور قائم صعود می‌کند. اتومبیلی در جاده‌ای مستقیم با آهنگ ثابت ۴۵ mph = ۶۶ ft/sec از زیر بالن عبور می‌کند. بعداز یک ثانیه فاصلهٔ بین آنها با چه سرعتی تغییر می‌کند؟

۱۶. مخزنی مخروطی (رأس در پایین) ۸ فوت قطر و ۱۰ فوت عمق دارد و آب با آهنگ ثابت $5\ \text{ft}^3/\text{min}$ از آن خارج می‌شود. وقتی عمق آب موجود در مخزن ۶ فوت است، سطح آب با چه سرعتی پایین می‌رود؟

۰۱۷ نقطه‌ای برخم $12 = y^2 - 3x^2$ چنان حرکت می‌کند که مختص y آن با آهنگ ثابت $6\ m/sec$ زیاد می‌شود. وقتی $x = 4\ m$، مختص x با چه آهنگی تغییر می‌کند، و شیب خم چیست؟

۰۱۸ ذره‌ای با سرعتی که مؤلفهٔ x آن عبارت است از $dx/dt = y$ دور دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ می‌چرخد. dy/dt را بیابید. آیا ذره درجهت ساعت دور دایره می‌چرخد، یا درخلاف این جهت؟

۰۱۹ ذره‌ای در ربع اول روی سهمی $y = x^2$ چنان حرکت می‌کند که مختص x موضع آن، $P(x, x^2)$، با آهنگ $10\ m/sec$ زیاد می‌شود. زاویهٔ میل خط OP که P را به مبدأ وصل می‌کند، وقتی $x = 3\ m$ با چه سرعتی تغییر می‌کند؟ وقتی $x = 103\ m$ چطور؟

۰۲۰ الف) ذره‌ای با آهنگ یك دور بر ثانیه روی دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ در جهت ساعت حرکت می‌کند. درلحظه‌ای که ذره ازنقطهٔ $(0, 1)$ در بالای دایره می‌گذرد، مختص x ذره باچه سرعتی زیاد می‌شود؟ (راهنمایی: فرض کنید زاویهٔ شعاع گذرنده از مبدأ و P با قسمت مثبت محور xها، θ باشد.) $d\theta/dt$ برحسب رادیان بر ثانیه چیست؟
ب) چرخی به‌شعاع ۱ فوت با آهنگ یك دور بر ثانیه روی زمین مسطحی می‌غلتد. نقطهٔ واقع در بالای چرخ باچه‌سرعتی نسبت به‌زمین حرکت می‌کند؟

۰۲۱ شخصی ۶ فوت قد دارد، و با آهنگ $5\ ft/sec$ به‌چراغی که درارتفاع ۱۶ فوتی سطح زمین است نزدیك می‌شود. نوك سایهٔ شخص باچه آهنگی حرکت می‌کند؟ وقتی فاصلهٔ او تا پای چراغ ۱۰ فوت است، طول سایه باچه سرعتی تغییرمی‌کند؟

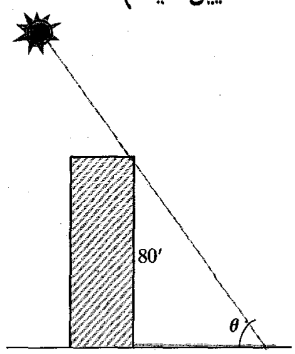
۰۲۲ چراغ واقع دربالای تیری که ۵۰ فوت ارتفاع دارد روشن است. از همان ارتفاع و در فاصلهٔ ۳۰ فوتی چراغ، توپی را رها می‌کنیم. پس از ۱/۲ ثانیه، سایهٔ توپ برروی زمین باچه سرعتی حرکت می‌کند؟ (فرض‌کنید توپ فاصلهٔ $s = 16t^2$ فوت را در t ثانیه می‌پیماید.)

۰۲۳ شخصی بادبادکی‌داردکه در ارتفاع ۳۰۰ فوتی است. باد، بادبادك رادر امتداد افقی باآهنگ $25\ ft/sec$ ازشخص‌دورمی‌کند. وقتی فاصلهٔ بادبادك وشخص ۵۰۰فوت باشد، نخ باچه سرعتی باید رها شود؟

۰۲۴ قطر یك توپ‌آهنی‌کروی ۸ اینچ است واین توپ بالایه‌ای از یخ با ضخامت یکنواخت پوشیده شده‌است. اگر یخ با آهنگ $10\ in^3/min$ آب شود، ضخامت یخ وقتی ۲ اینچ است، باچه سرعتی کم می‌شود؟ مساحت سطح بیرونی یخ با چه‌سرعتی کم می‌شود؟

۰۲۵ یك هواپیمای مراقب جاده با سرعت ثابت $120\ mph$ در ارتفاع ۱ مایلی در بالای جادهٔ مستقیمی در پرواز است. خلبان اتومبیلی را می‌بیندکه به‌او نزدیك می‌شود، و رادار تعیین می‌کند که فاصلهٔ بین اتومبیل و هواپیما ۱٫۵ مایل است، و این فاصله با آهنگ $136\ mph$ تقلیل می‌یابد. سرعت اتومبیل درامتداد جاده چقدر است؟

۰۲۶ در روزی، وقتی‌که خورشید درست از بالای سر می‌گذرد، طول سایهٔ ساختمانی که ۸۰ فوت ارتفاع دارد و برزمین مسطحی واقع است ۶۰فوت است (شکل ۵۹۰۳). اگرزاویهٔ θ که خورشید با زمین می‌سازد، با آهنگ ۰٫۲۵ درجه بر دقیقه افزایش یابد، طول سایه باچه آهنگی کم می‌شود؟ (جواب خودرا برحسب اینچ بردقیقه تا یك رقم اعشار تعیین کنید.)



۵۹۰۳ ساختمان موردبحث درمسألهٔ ۲۶.

۰۲۷ سرظهر کشتی A درست درشمال کشتی B قراردارد و فاصلهٔ آنها ۱۲ مایل دریایی است. کشتی A با سرعت ۱۲ گره (مایل دریایی برساعت) به‌طرف جنوب می‌رود و در تمام روز در مسیر خود تغییری ایجاد نمی‌کند. کشتی B باسرعت ۸ گره به‌طرف شرق می‌رود و درتمام روز در مسیرخود تغییری نمی‌دهد.
الف) سرظهرفاصلهٔ بین‌کشتیها باچه سرعتی در تغییراست؟ یك ساعت بعد چطور؟
ب) در این روز خاص، شعاع رؤیت اشیاء ۵ مایل دریایی است. آیا دراین روزکشتیها اصلاً یکدیگررا می‌بینند؟

۰۲۸ دوکشتی A و B بر دومسیر به‌طور مستقیم در حرکت‌اند و ازنقطهٔ O، با زاویهٔ $AOB = 120°$، از یکدیگر دورمی‌شوند. در لحظهٔ معینی‌که $OA = 8\ mi$، $OB = 6\ mi$، کشتی A با آهنگ $20\ mph$ حرکت می‌کند، وکشتی B باآهنگ $30\ mph$ حرکت می‌کند. فاصلهٔ بین آنها باچه سرعتی‌تغییر می‌کند؟ (راهنمایی: از قانون کسینوسها استفاده‌کنید.)

TOOLKIT PROGRAMS Derivative Grapher Super * Grapher

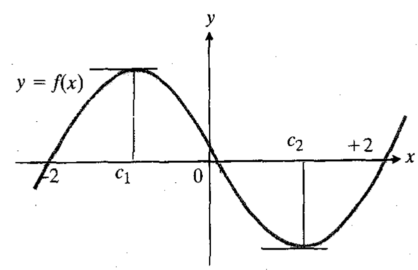
۷.۳ قضیهٔ مقدار میانگین

درحساب دیفرانسیل و انتگرال کمترقضیه‌ای به‌اندازهٔ قضیهٔ مقدار میانگین و تعمیمهایش کارساز است. صورت این قضیه چنان ساده است‌که در بدو امر کسی متوجه اهمیت نتایج عدیدهٔ آن نمی‌شود. این‌قضیه، ریاضیات لازم را برای براوردکردن مقدارخطای ناشی ازتقریب‌زدن خطی دراختیار ما می‌گذارد؛ آزمون مشتق اول برای صعودی و نزولی بودن را توضیح می‌دهد؛ و با نشان دادن این مطلب‌که توابع ثابت تنها توابعی هستندکه مشتقشان صفراست، راه حساب انتگرال را می‌گشاید. درفصل حاضر، تمام این مطالب را تشریح خواهیم‌کرد.

راه ورود به‌قضیهٔ مقدار میانگین، صورت اولیهٔ آن است‌که قضیهٔ رول نام دارد و در زیرمی‌آید.

قضیهٔ رول

شواهد هندسی محکمی در دست است که اگر خم همواری محور x را در دونقطه قطع‌کند، نقطه‌ای روی خم بین‌آن دو نقطه وجود داردکه درآن، مماس برخم افقی است (شکل ۶۰.۳). قضیهٔ ۳۰۰ سالهٔ میشل رول (۱۶۵۲-۱۷۱۹) به ما اطمینان می‌دهد که این مطلب درست است.



۶۰.۳ این خم هموار بین نقاطی‌که درآنها محور x را قطع می‌کند مماسهای افقی دارد.

قضیهٔ ۲
قضیهٔ رول

فرض‌کنیدکه $y=f(x)$ درهرنقطه از بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ پیوسته، و در هرنقطه از بازهٔ باز (a, b) مشتقپذیر باشد. اگر

$$f(a)=f(b)=0$$

آنگاه، دست‌کم یك نقطه مانند c بین a و b وجود داردکه درآن

$$f'(c)=0.$$

اثبات قضیهٔ رول می‌دانیم تابع پیوسته‌ای که بر بازهٔ بسته‌ای تعریف شده‌باشد، برآن بازه مقادیر ماکسیمم و مینیمم دارد، و نیز می‌دانیم‌که این مقادیرتنها به‌ازای نقاط انتهایی و نقاط بحرانی به‌دست می‌آیند. درمورد تابع مورد نظر ما این نقاط عبارت‌اند از نقاط انتهایی وآن نقاط داخلی‌که به‌ازای‌آنها f' صفراست. پس، اگر f در یك نقطهٔ داخلی مانند c ماکسیمم یا مینیمم بشود، آنگاه $f'(c)=0$. اگراین تابع به‌ازای نقاط‌انتهایی هم ماکسیمم شود، و هم مینیمم، آنگاه صفر هم مقدار ماکسیمم و هم مقدار مینیمم f است. بنابراین به‌ازای‌تمام xهای موجود در $[a, b]$، $f(x)=0$، و f' به‌ازای همهٔ مقادیر (a, b) صفراست زیرا f ثابت است. در هرحال، در (a, b) دست‌کم یك نقطه می‌یابیم‌که درآن f' صفراست.

مثال ۱ چندجمله‌ای

$$y=x^3-4x=f(x)$$

به‌ازای تمام xها، $-\infty<x<+\infty$، پیوسته و مشتقپذیر است. اگر فرض‌کنیم

$$a=-2, \quad b=+2$$

فرضهای قضیهٔ رول برقرار خواهند بود زیرا

$$f(-2)=f(+2)=0.$$

پس

$$f'(x)=3x^2-4$$

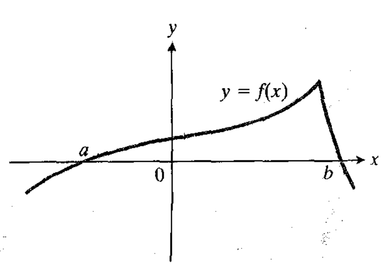
باید بین ۲- و ۲+ دست‌کم یك بار صفر شود. در عمل نیز می‌بینیم‌که در

$$x=c_1=-\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{و} \quad x=c_2=+\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

داریم

$$3x^2-4=0. \quad \blacksquare$$

نکته همان‌گونه‌که شکل ۶۱.۳ نشان می‌دهد، مشتقپذیربودن f بر (a, b) اساس قضیهٔ رول است. اگر f' حتی در یك نقطه وجود نداشته‌باشد، ممکن است خم هیچ مماس افقی نداشته‌باشد.



۶۱.۳ بین دونقطه‌ای‌که خم محور x راقطع می‌کند هیچ مماس افقی وجود ندارد.

یافتن جوابهای معادله

استفادهٔ اصلیی که رول ازقضیهٔ خودکرد این بودکه نشان داد بین هردو ریشهٔ یك چندجمله‌ای، همیشه ریشه‌ای ازمشتق آن چندجمله‌ای وجود دارد. (ناگفته نماندکه رول به‌حساب دیفرانسیل و انتگرال اعتماد نداشت، وبا صرف وقت وانرژی زیادکوشید استفاده ازآن را تقبیح کند. او در کارهایش تنها از جبر و هندسه استفاده‌کرد، و جالب است که امروز به‌خاطر کاری معروف است که ناخودآگاه در زمینهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال انجام داد، یعنی در زمینهٔ موضوعی که می‌کوشید از اشاعه وگسترش آن جلوگیری کند.)

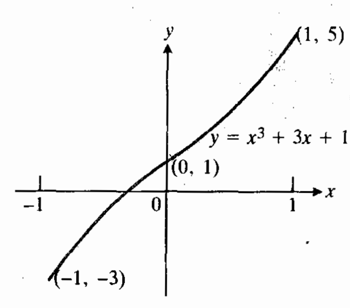
صورتی از قضیهٔ رول که در بالا ذکر شد، به چندجمله‌ایها محدود نمی‌شود. این قضیه حاکی است‌که بین ریشه‌های یك‌تابع مشتقپذیر همیشه می‌توان ریشه‌ای برای مشتقش یافت. این اطلاع، نتیجهٔ تعجب‌آور ومفیدی دارد. فرض‌کنید

۱. f بر $[a, b]$ پیوسته، و بر (a, b) مشتقپذیر باشد؛
۲. $f(a)$ و $f(b)$ علامتهای مختلف داشته‌باشند؛ و
۳. f' هرگز در بین a و b صفر نشود.

آنگاه f بین a و b دقیقاً یك ریشه دارد. اگر f بیش از یك ریشه داشته‌باشد، f' هم مجبور است یك ریشه داشته‌باشد. اینکه f دست‌کم یك ریشه دارد بنا به‌قضیهٔ مقدار میانی بخش ۱۱.۱ مسجل است.

مثال ۲ نشان دهیدکه معادلهٔ $x^۳+۳x+۱=۰$ دقیقاً یك ریشهٔ حقیقی دارد.

حل: تابع $f(x)=x^۳+۳x+۱$ به‌ازای هر مقدار x مشتقپذیراست،ومشتق $f'(x)=۳x^۲+۳$ هرگزصفر نمی‌شود. اگر f دو ریشه داشته‌باشد، f' باید ریشه‌ای بین‌آنها داشته‌باشد. پس f حداکثر یك ریشه دارد. از طرف دیگر، f دست‌کم یك ریشه دارد زیرا $f(-۱)=-۳$ منفی است، $f(۱)=۵$ مثبت است، و f پیوسته است. بنابراین، f دقیقاً یك صفردارد (شکل ۶۲.۳).



۶۲.۳ تنها ریشهٔ حقیقی چندجمله‌ای $y=x^۳+۳x+۱$ عددی است بین -۱ و ۰ که در شکل نشان داده شده‌است. ■

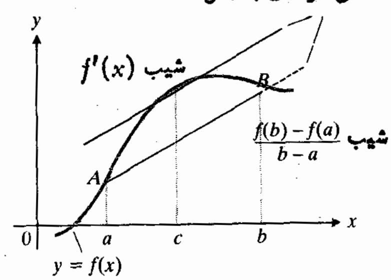
■ ■ ■

چه‌کسی قضیهٔ مقدار میانگین را ثابت کرد ؟

ژوزف لویی لاگرانژ (۱۷۳۶–۱۸۱۳) در سال ۱۷۸۷، درآن هنگام‌که می‌کوشید بدون استفاده از مفهوم حد، حساب دیفرانسیل و انتگرال را مورد مطالعه قراردهد، برای نخستین‌بار قضیهٔ مقدار میانگین را اثبات کرد. این قضیهٔ عمیق و مهم را در آثار آمپر (۱۷۷۵–۱۸۳۶) هم می‌توان یافت. هرچند شهرت آمپر به‌خاطر تحقیقاتی‌است‌که درالکتریسیته انجام داد، ولی تحقیقات اولیهٔ وی در زمینهٔ حساب دیفرانسیل وانتگرال بود و او به نقد و تصحیح ایده‌های لاگرانژ درمبادی حساب دیفرانسیل و انتگرال پرداخت. ولی،کوشی بودکه در دوکتاب درسی‌معروف خود به‌نام درسهای آنالیز در۱۸۲۱ وخلاصه درسهایی دربارهٔ حساب بینهایت کوچکها در سال ۱۸۲۳ تعمیم قضیهٔ مقدار میانگین را به‌چاپ رسانید، و بدین ترتیب آن را معروف ساخت.

قضیهٔ مقدار میانگین

قضیهٔ مقدار میانگین همان قضیهٔ رول است که درآن، وتر به‌جای بازه قرار می‌گیرد. اگر به‌شکل ۶۳.۳ نگاه کنید منظور ما را می‌فهمید. این شکل، نمودار تابع مشتق‌پذیری را نشان می‌دهد که بر بازه‌ای چون $a \leqslant x \leqslant b$ تعریف شده‌است. نقطه‌ای روی خم وجود دارد که مماس درآن نقطه با وتر AB موازی است. درقضیهٔ رول خط AB محور x است و $f'(c)=0$. دراینجا خط AB وترمار بر نقاط انتهایی خم است که در بالای a و b قرار دارند، و $f'(c)=(f(b)-f(a))/(b-a)$.



۶۳.۳ تعبیر هندسی قضیهٔ مقدار میانگین این است که درجایی بین A و B، خم دست‌کم یک مماس دارد که با وتر AB موازی است.

قضیهٔ ۳

قضیهٔ مقدار میانگین

اگر $y=f(x)$ در هر نقطه از بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ پیوسته و در هر نقطه از بازهٔ باز (a, b) مشتق‌پذیر باشد، آنگاه دست‌کم یک نقطه چون c بین a و b وجود دارد که

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c). \qquad (۱)$$

اثبات اگر نمودار f بر $[a, b]$ را رسم کنیم، وخط مار بر نقاط انتهایی $A(a, f(a))$ و $B(b, f(b))$ را بکشیم، شکل ۶۴.۳(الف) را به‌دست می‌آوریم که شبیه شکلی است که برای قضیهٔ رول رسم کردیم. اختلاف در این است که خط AB الزاماً محور x نیست زیرا $f(a)$ و $f(b)$ ممکن است صفر نباشند. قضیهٔ رول را مستقیماً برای f نمی‌توانیم به‌کار ببریم، اما می‌توانیم از آن برای فاصلهٔ قائم بین نمودار f وخط AB استفاده کنیم. اتفاقاً، این‌همان چیزی را به‌ما می‌گوید که دربارهٔ مشتق f می‌خواهیم بدانیم.

خط AB نمودار تابع

$$g(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \qquad (۲)$$

(معادلهٔ نقطه‌ـشیب) است، وتابعی که برای اندازه‌گیری فاصلهٔ قائم بین نمودارهای f و g مورد استفاده قرار می‌دهیم $V=f-g$ است. فرمول $V(x)$ عبارت است از:

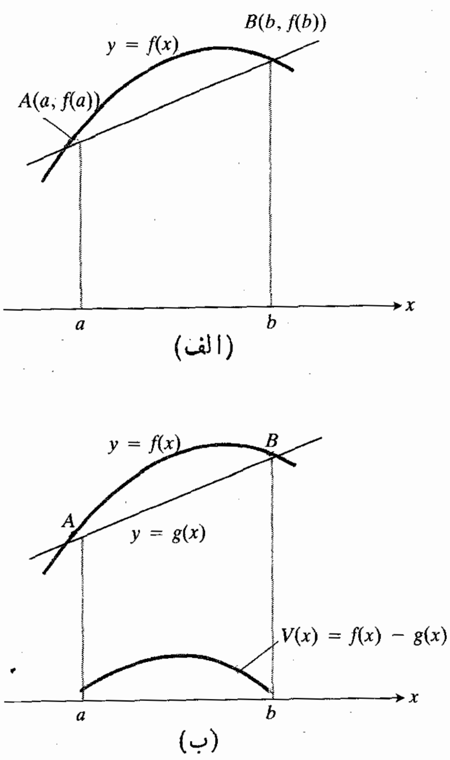
$$V(x)=f(x)-g(x)$$
$$=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a). \qquad (۳)$$

شکل ۶۴.۳(ب) نمودارهای f، g، و V را یکجا نشان می‌دهد. می‌توان دید که V درفرضهای قضیهٔ رول برای بازهٔ $[a, b]$ صدق می‌کند: بر $[a, b]$ پیوسته، و بر (a, b) مشتق‌پذیر است، زیرا f و g هر دو چنین‌اند. هم $V(a)$ صفر است و هم $V(b)$ زیرا نمودارهای f و g از A و B می‌گذرند. پس V' درنقطه‌ای چون c بین a و b صفراست.

برای اینکه ببینیم نتیجه درمورد مشتق f چیست، از دوطرف فرمول $V(x)$ در معادلهٔ (۳) نسبت به x مشتق می‌گیریم و به‌جای x، c می‌گذاریم. مشتق عبارت است از

$$V'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \qquad (۴)$$

و اگردرمعادلهٔ (۴) به‌جای x، c بگذاریم، داریم



۶۴.۳ (الف) نمودار یک تابع و وترش AB. (ب) تابع V فاصلهٔ قائم بین نمودارهای f و g را اندازه می‌گیرد.

$$0=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

یا با مختصری تغییر

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,. \qquad (۵)$$

معادلهٔ (۵) همان چیزی را بیان می‌کند که به‌دنبال اثباتش بودیم: درنقطه‌ای چون c بین a و b، شیب خم $y=f(x)$ برابراست با شیب خط قاطع AB.

اگر $f'(x)$ بر $[a, b]$ پیوسته باشد، بنابرقضیهٔ ۷ بخش ۱۱.۱، بر $[a, b]$ یك مقدارماکسیمم $\max f'$ ویك مقدارمینیمم $\min f'$ دارد. چون عدد $f'(c)$ نه می‌تواند از $\max f'$ بیشتر شود ونه از $\min f'$ کمتر، ازمعادلهٔ

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad (۶)$$

نابرابری

$$\min f' \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \max f' \qquad (۷)$$

به‌دست می‌آیدکه درآن، منظوراز max و min مقادیر f' بر بازهٔ $[a, b]$ هستند.

اگر تعبیر ما از $y=f(x)$ مسافت پیموده شده از زمان a تا زمان x باشد، آنگاه معادلهٔ (۷) حاکی است که سرعت متوسط از زمان a تا زمان b بیش از سرعت ماکسیمم وکمتراز سرعت مینیمم نیست. معادلهٔ (۶) می‌گویدکه در لحظه‌ای چون c ازاین سفر، سرعت دقیقاً برابراست با سرعت متوسط دراین سفر.

اهمیت قضیهٔ مقدار میانگین در براوردهایی عددی است که گاه به‌کمك معادلهٔ (۷) به‌دست می‌آید، و نیز در نتایجی ریاضی است که از معادلهٔ (۶) گرفته می‌شود (به‌چند مورد از آنها ذیلاً اشاره خواهیم کرد). براوردهایی که از تعمیمی از قضیهٔ مقدار میانگین به‌دست می‌آیند، موضوع بحث، دربخش ۹.۳ است.

معمولاً دربارهٔ c بیش ازآنچه‌که قضیهٔ فوق به‌ما می‌گوید چیزی‌نمی‌دانیم، وآن‌این‌است‌که می‌دانیم c وجوددارد. دومثال‌زیر نشان می‌دهند که درموارد بسیار استثنایی می‌توان به‌کنجکاوی فرد درمورد دانستن مقدار c پاسخ مثبت داد. باوجود این، درنظرداشته باشید که توانایی ما در تعیین c قاعده نیست، بلکه استثناست؛ اهمیت قضیهٔ مقدارمیانگین مربوط به‌چیزهای دیگری است.

مثال ۳ شکل ۶۵.۳ را ببینید. فرض کنید $y=x^3$، $a=-2$، و $b=+2$. دراین صورت

$$f'(x)=3x^2, \qquad f'(c)=3c^2$$

$$f(b)=2^3=8, \quad f(a)=(-2)^3=-8\,.$$

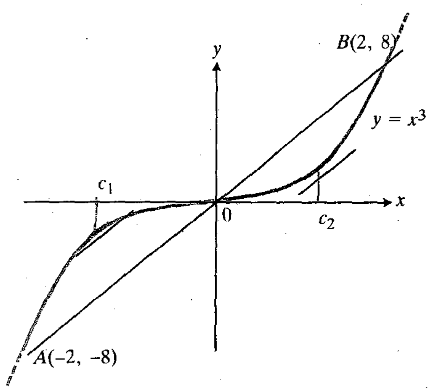
بنابراین از

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{8-(-8)}{2-(-2)}=\frac{16}{4}=4$$

داریم

$$3c^2=4, \qquad c=\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}\,.$$

پس، بین $a=-2$ و $b=+2$ دومقدار برای c وجود داردکه درآنها مماس برخم $y=x^3$ با وترمار بر $A(-2,-8)$ و $B(2,8)$ موازی است.

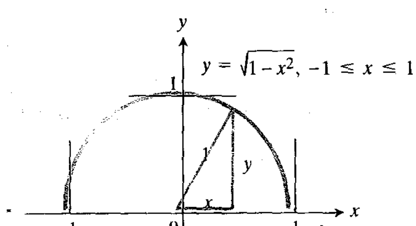


۶۵.۳ در $c=\pm(2/3)\sqrt{3}$ مماس برخم با وتر AB موازی است.

■

مثال ۴ شکل ۶۶.۳ را ببینید. تابع $y=\sqrt{1-x^2}$ فرضهای (و حکم) قضیهٔ مقدارمیانگین را بربازهٔ $[-1, 1]$ براورده می‌کند. در هرنقطه از بازهٔ بسته تابع پیوسته است، ومشتقش

$$y'=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$



۶۶.۳ وجود مماسهای قائم در $x=-1$ و $x=1$ مانع‌ازصدق‌کردن‌تابع $y=\sqrt{1-x^2}$ درفرضهای (وحکم) قضیهٔ مقدارمیانگین بر بازهٔ $[-1, 1]$ نیست.

در هر نقطهٔ بازهٔ (۱ ,۱ −) تعریف می‌شود. نمودار در $x=0$ مماس افقی دارد. توجه‌کنید که تابع در $x=-1$ و $x=1$ مشتق ندارد؛ برای استفاده از قضیه لازم هم نیست چنین باشد. ■

مثال ۵ قضیهٔ مقدار میانگین درمورد بازهٔ [۸ ,۸−] و تابع **$f(x)=x^{2/3}$ قابل استفاده نیست (شکل ۶۷.۳). مشتق f عبارت است از**

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

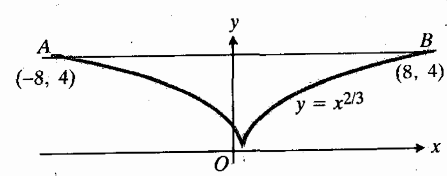
می بینیم که

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{8^{2/3}-(-8)^{2/3}}{8-(-8)}=\frac{4-4}{16}=0$$

اما

$$f'(c)=\frac{2}{3\sqrt[3]{c}}$$

به‌ازای هیچ مقداری از c در بازهٔ (۸ ,۸−) صفر نیست. مشکل، ناشی از عدم وجود f' در $x=0$ است. قضیهٔ مقدارمیانگین در مورد یك بازهٔ بسته کاربرد ندارد مگر اینکه تابع به‌ازای هر نقطهٔ داخلی آن بازه مشتقپذیر باشد.



۶۷.۳ وجود مماس درهر نقطه به‌معنای وجود مشتق در هر نقطه نیست، و حکم قضیهٔ مقدار میانگین را تضمین نمی‌کند. نمودار $y=x^{2/3}$ در هر نقطه مماس دارد (مماس در O قائم است)، اما هیچ یك از مماسها با وتر AB موازی نیست. ■

درمثال بعد نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان گاه از معادلهٔ (۷) استفاده کرد و مقدار یك تابع f را به‌ازای مقدار خاصی از x، با این فرض که a و f' معلوم باشند، به‌دست آورد.

مثال ۶ اگر

$$f(0)=2 \quad \text{و} \quad f'(x)=\frac{1}{5-x^2}$$

$f(1)$ را براوردکنید.

حل: معادلهٔ (۷) با ضوابط $a=0$، $b=1$، و $f'(x)=1/(5-x^2)$ به‌صورت

$$\min\frac{1}{5-x^2}\leqslant\frac{f(1)-f(0)}{1-0}\leqslant\max\frac{1}{5-x^2}$$

در می‌آید که در آن min و max به بازهٔ [۰, ۱] مربوط می‌شوند. $1/(5-x^2)$ بر [۰, ۱] به‌ازای $x=0$ کوچکترین مقدار، و به‌ازای $x=1$ بزرگترین مقدار را دارد، لذا از نابرابریهای فوق داریم

$$\frac{1}{5-0}\leqslant f(1)-2\leqslant\frac{1}{5-1}$$

$$2+\frac{1}{5}\leqslant f(1)\leqslant 2+\frac{1}{4}$$

$$2.2\leqslant f(1)\leqslant 2.25. \quad ■$$

سه نتیجه

حال به‌بررسی سه‌نتیجه می‌پردازیم‌که تا اندازه‌ای از دلایل اهمیت قضیهٔ مقدارمیانگین در توسعهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌شمار می‌آیند. نتیجهٔ اول آزمون مشتق اول برای صعودی ونزولی بودن، و اندکی بیش از آن را به‌دست می‌دهد. دومی حاکی است‌که تنها توابع ثابت‌اندکه مشتق صفردارند. نتیجهٔ سوم دال براین است‌که تفاضل توابعی که مشتق یکسان دارند الزاماً مقداری ثابت است. نتیجهٔ اول را ثابت می‌کنیم و اثبات دو نتیجهٔ دیگر را به‌صورت تمرین به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

نتیجهٔ ۱

اگر $f'>0$، f صعودی است، و اگر $f'<0$، f نزولی است.

فرض‌کنیدکه f در هرنقطه از بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ پیوسته، و درهر نقطه از بازهٔ (a, b) مشتقپذیر باشد. اگر به‌ازای هر نقطه از (a, b)، $f'>0$، آنگاه f در سراسر $[a, b]$ صعودی است. اگردرهرنقطه از (a, b)، $f'<0$، آنگاه f درسراسر $[a, b]$ نزولی است. درهرحالت، f یك به‌یك است.

اثبات فرض می‌کنیم x_1 و x_2، $x_1<x_2$، دوعدد موجود در $[a, b]$ باشند. قضیهٔ مقدارمیانگین را در مورد f بر $[x_1, x_2]$ به‌کار می‌گیریم

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1) \qquad (8)$$

که درآن c بین x_1 و x_2 است. علامت طرف راست معادلهٔ (۸) با علامت $f'(c)$ یکی است زیرا x_2-x_1 مثبت است. پس

اگر $f'(x)$ بر (a, b) مثبت باشد، $f(x_2)>f(x_1)$

(f صعودی است) و

اگر $f'(x)$ بر (a, b) منفی باشد، $f(x_2) < f(x_1)$ (f نزولی است). در هر حالت از $x_2 \neq x_1$ نتیجه می‌شود که $f(x_1) \neq f(x_2)$، و لذا f یک به‌یک است.

نتیجهٔ ۲

اگر $F' = 0$، آنگاه F یک عدد ثابت است.

اگر به‌ازای هر x در (a, b)، $F'(x) = 0$، آنگاه در سراسر (a, b)، F یک مقدار ثابت دارد. به‌عبارت دیگر، عدد ثابتی چون C وجود دارد که به‌ازای هر x در (a, b)، $F(x) = C$.

نتیجهٔ ۲ عکس قاعده‌ای است که می‌گوید مشتق یک مقدار ثابت، صفراست. هرچند مشتق توابع غیرثابت ممکن است گهگاه صفر شود، تنها توابعی که مشتقشان به‌ازای همهٔ نقاط یک بازهٔ کامل صفراست توابعی هستند که بر بازهٔ داده شده ثابت‌اند.

نتیجهٔ ۳

تابعهایی که مشتقشان یکی است، تفاضلشان مقداری ثابت است.

اگر در هر نقطهٔ x از یک بازهٔ باز (a, b)، $F_1'(x) = F_2'(x)$، آنگاه ثابتی چون C وجود دارد که به‌ازای هر x در (a, b):

$$F_1(x) - F_2(x) = C.$$

نتیجهٔ ۳ حاکی است که دو تابع تنها دریک صورت می‌توانند درسراسر یک بازه آهنگ تغییریکسان داشته باشند و آن اینکه تفاضل مقدارشان درآن بازه مقداری ثابت باشد. مثلاً، می‌دانیم که مشتق تابع x^2، $2x$ است. پس هرتابع دیگری که مشتقش $2x$ باشد از فرمول $F(x) = x^2 + C$ (که درآن C مقداری ثابت است) به‌دست می‌آید. مشتق هیچ تابع دیگری $2x$ نیست.

درفرمول $F(x) = x^2 + C$ گفته می‌شود که F با خطایی درحد یک مقدار ثابت تعیین شده‌است. درعلوم ومهندسی روشهای تعیین تابع از روی آهنگ تغییرش فوق‌العاده مهم‌اند، وهمان گونه که در فصل ۴ خواهیم دید، نتیجهٔ ۳ درست همان ریاضیاتی را فراهم می‌آورد که برای به‌دست آوردن این روشها لازم است.

مسأله‌ها

قضیهٔ رول

درمسأله‌های ۱ـ۳ نشان دهید که معادله در بازهٔ داده شده دقیقاً یک جواب دارد.

۱. $x^4 + 3x + 1 = 0, \quad [-2, -1]$

۲. $x^4 + 2x^3 - 2 = 0, \quad [0, 1]$

۳. $2x^3 - 3x^2 - 12x - 6 = 0, \quad [-1, 0]$

۴. فرض کنید f و دو مشتق اولش f' و f'' بر بازهٔ $a \leqslant x \leqslant b$ پیوسته‌اند. همچنین فرض کنید نمودار f محور x را در دست‌کم سه نقطه از بازه قطع می‌کند. نشان دهید f'' بین a و b دست‌کم یک ریشه دارد. این نتیجه را تعمیم دهید.

۵. الف) ریشه‌های چندجمله‌ایهای زیر و ریشه‌های مشتق اولشان را روی یک خط مشخص کنید.

i) $y = x^2 - 4$

ii) $y = x^2 + 8x + 15$

iii) $y = x^3 - 3x^2 + 4 = (x+1)(x-2)^2$

iv) $y = x^3 - 33x^2 + 216x = x(x-9)(x-24)$

دراینجا چه الگویی می‌بینید؟

ب) از قضیهٔ رول استفاده و ثابت کنید که بین هر دو ریشهٔ چندجمله‌ای $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ یک ریشه از چندجمله‌ای زیر وجود دارد

$$nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1.$$

۶. تابع

$$y = f(x) = \begin{cases} x & 0 \leqslant x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

در $x = 0$ و در $x = 1$ صفر می‌شود. مشتقش، $y' = 1$، در هر نقطه‌ای بین 0 و 1 مخالف با صفراست. چرا این امرقضیهٔ رول را نقض نمی‌کند؟

قضیهٔ مقدار میانگین

درمسأله‌های ۷ـ۱۰، a، b، و c عناصری هستند که درمعادلهٔ

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

آمده‌اند. این معادله قضیهٔ مقدار میانگین را توصیف می‌کند. $f(x)$، a، و b داده شده‌اند. c را بیابید.

۷. $f(x) = x^2 + 2x - 1, \quad a = 0, \quad b = 1$

۸. $f(x) = x^{2/3}, \quad a = 0, \quad b = 1$

۹. $f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad a = \frac{1}{2}, \quad b = 2$

۱۰. $f(x) = \sqrt{x-1}, \quad a = 1, \quad b = 3$

۱۱. فرض کنید می‌دانیم که $f(x)$ مشتق‌پذیر است، و $f'(x)$ همیشه

مقداری بین ۱− و ۱+ دارد. نشان دهید که

$$|f(x)-f(a)|\leqslant|x-a|.$$

۱۲. فرض کنید تابعی چون $y=f(x)$ بر $[a, b]$ پیوسته و بر (a, b) مشتقپذیر است. نشان دهید کـه اگـر f' در بازهٔ (a, b) هیچگاه صفر نشود، آنگاه $f(a)\neq f(b)$.

۱۳. با استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین نشان دهید که

$$|\sin b-\sin a|\leqslant|b-a|.$$

۱۴. آیـا تابع $y=x$، $۰\leqslant x\leqslant ۱$ در فرضهـای قضیهٔ مقدار میانگین صدق می‌کند؟ اگر جواب منفی است دلیلش را بگویید. اگرجواب مثبت است، c چه مقدار یامقادیری می‌تواند داشته باشد؟

۱۵. تابع $y=|۱-x^۲|$، $-۲\leqslant x\leqslant ۲$ در $x=۰$ ممـاس افقی دارد، ولی در $x=-۱$ و $x=۱$ مشتقپذیر نیست. آیا این امر قضیهٔ مقدارمیانگین را نقض می‌کند؟ توضیح دهید.

۱۶. نشان دهید که $f(x)=\tan x$ در سراسر بازه‌ای که بر آن $\cos x\neq ۰$، صعودی است.

۱۷. تابع بزرگترین عدد صحیح $y=[x]$ در هـر نقطه از بازهٔ $[۰, ۱]$ تعریف می‌شود، ولی در بازهٔ $[۰, ۱]$ درحکم قضیهٔ مقدار میانگین صدق نمی‌کند. موضوع چیست؟

۱۸. فـرض کنید $y=f(x)$ بر $[۰, ۱]$ پیوسته و بـر $(۰, ۱)$ مشتقپذیر باشد و داشته باشیم $f(۰)=۰$، $f(۱)=۱$. نشان‌دهید که مشتق f درنقطه‌ای بین $x=۰$ و $x=۱$ باید صفر باشد.

۱۹. راننده‌ای در یك سفر یك ساعته ۳۰ مـایل را پیمود. نشان دهید که دست‌کم یك بار سرعت اتومبیل وی برابر با ۳۰ mph شده‌است.

۲۰. فرض کنید به‌ازای $۰\leqslant x\leqslant \pi/۲$،

$$f'(x)=۱/(۱+\cos x)$$

و داریم $f(۰)=۳$. مطلوب است براورد $f(\pi/۲)$.

۲۱. فرض کنید به‌ازای همهٔ مقادیر x، تابع f مشتقپذیر است و داریم $f(-۳)=-۳$، $f(۳)=۳$، و $|f'(x)|\leqslant ۱$. نشان دهید که $f(۰)=۰$.

۲۲. فرض کنید f درهر نقطهٔ $[a, b]$ پیوسته، ودرهر نقطهٔ (a, b) مشتقپذیراست، و داریم $f(a)<f(b)$. نشان دهید که درنقطه‌ای بین a و b، f' مثبت است.

۲۳. فـرمول $f(x)=۳x+b$ به‌ازای bهـای مختلف، توابع مختلفی به‌دست می‌دهد. با وجود این، مشتق تمام این توابع نسبت به x یکسان هستند: $f'(x)=۳$. آیا اینها تنها توابع مشتقپذیری از x هستند که مشتقشان ۳ است؟ آیا تابع دیگری هم بااین مشخصه می‌تواند وجود داشته‌باشد؟ توضیح دهید.

۲۴. نشان دهید کـه حتی اگر $x/(x+۱)\neq -۱/(x+۱)$ داریم

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+۱}\right)=\frac{d}{dx}\left(-\frac{۱}{x+۱}\right)$$

آیا این مطلب نتیجهٔ ۳ از قضیهٔ مقدار میانگین را نقض نمی‌کند؟ توضیح دهید.

۲۵. نتیجهٔ ۲ را اثبات کنید.

۲۶. نتیجهٔ ۳ را اثبات کنید.

TOOLKIT PROGRAMS

Derivative Grapher   Super * Grapher
Function Evaluator

۸.۳ صورتهای مبهم و قاعدهٔ هوپیتال

دراواخر قرن هفدهم، یوهان برنولی برای محاسبهٔ حدکسرهایی که صورت و مخرجشان هردو به‌صفر میل می‌کنند، قاعده‌ای کشف کرد. امروز این قاعده‌را قاعدهٔ‌هوپیتال می‌نامند. این نامگذاری به‌افتخار یك نجیب‌زادهٔ فرانسوی به‌نام‌هوپیتال[1] (۱۶۶۱–۱۷۰۴)صورت گرفته است که برای نخستین‌بار یك‌کتاب درسی مقدماتی درزمینهٔ حساب دیفرانسیل نوشت، و در آن برای اولین مرتبه این قاعده را ذکر کرد.

قاعدهٔ هوپیتال رامی‌توان به‌آسانی به‌کار گرفت، و به‌سرعت به‌نتیجه رسید،به‌ویژه وقتی که روش دیگری وجود ندارد یا کند به نتیجه می‌رسد.

صورت مبهم ۰/۰

اگـر f و g در $x=a$ پیـوسته بـاشند، و داشتـه بـاشیم $f(a)=g(a)=۰$، حد

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \qquad (۱)$$

را با قراردادن a به‌جای x نمی‌توان به‌دست‌آورد، زیرا این‌کار به ۰/۰ منجرمی‌شود که عبارت بیمعنایی است و به‌آن **صورت مبهم** می‌گویند.

۱. Guillaume François Antoine de l'Hôpital, Marquis de St. Mesme. تلفظ درستتر نام این شخص، لوپیتال است اما در فارسی به‌هوپیتال معروف است.

همان گونه که دیده‌ایم مقدار حد در معادلهٔ (۱) به سادگی قابل پیشگویی نیست؛ مثلاً

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}-۴}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}(x+۲)=۴$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{x}=۰\,.$$

حد

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

که مشتق از آن محاسبه می‌شود، همیشه صورت مبهم ۰/۰ را به‌دست می‌دهد. موفقیت در محاسبهٔ مشتق، ما را به این اندیشه وامی‌دارد که ممکن است با استفاده از مشتق بتوانیم حدهایی را که به‌صورت مبهم می‌انجامند، پیدا کنیم. برای مثال

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x-\sin ۰}{x-۰}$$

$$=\frac{d}{dx}(\sin x)\Big|_{x=۰}$$

$$=\cos ۰=۱\,.$$

قاعدهٔ هوپیتال ارتباط صریح بین مشتق و حدی را که به صورت مبهم ۰/۰ منجر می‌شود، به‌دست می‌دهد.

قضیهٔ ۴

قاعدهٔ هوپیتال (صورت اول)

فرض کنید که $f(a)=g(a)=۰$، $f'(a)$ و $g'(a)$ وجود داشته باشند، و $g'(a)\neq ۰$. آنگاه

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}\,.$$

اثبات از $f'(a)$ و $g'(a)$ که خودشان هم حد هستند آغاز می‌کنیم. داریم

$$\frac{f'(a)}{g'(a)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-۰}{g(x)-۰}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\,.$$

مثال ۱

(الف) $$\lim_{x\to ۰}\frac{۳x-\sin x}{x}=\frac{۳-\cos x}{۱}\Big|_{x=۰}=۲$$

(ب) $$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۱+x}-۱}{x}=\frac{\dfrac{۱}{۲\sqrt{۱+x}}}{۱}\Bigg|_{x=۰}=\frac{۱}{۲}$$

(پ) $$\lim_{x\to ۰}\frac{x-\sin x}{x^{۳}}=\frac{۱-\cos x}{۳x^{۲}}\Big|_{x=۰}=?$$ ■

با حد مورد بحث درمثال ۱(پ) چه می‌توان کرد؟ صورت اول قاعدهٔ هوپیتال به ما نمی‌گوید که این حد چیست، زیرا مشتق $g(x)=x^{۳}$ در $x=۰$ صفر است. با وجود این صورت قویتری ازقاعدهٔ هوپیتال هم وجود داردکه می‌گوید هرگاه قاعده به ۰/۰ منجرشد می‌توانیم دوباره از آن استفاده‌کنیم، وآن‌قدر این فرایند را تکرارکنیم که به نتیجهٔ متفاوتی برسیم. با این قاعدهٔ قویتر می‌توانیم‌کاری راکه درمثال۱(پ) آغازکردیم به‌انجام برسانیم.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x-\sin x}{x^{۳}}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{۳x^{۲}}$$

(بازهم ۰/۰؛ قاعده‌رادوباره‌به‌کارمی بریم.)

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{۶x}$$

(بازهم ۰/۰؛ قاعده‌رادوباره‌به‌کارمی بریم.)

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x}{۶}=\frac{۱}{۶}\,.$$

(نتیجه‌ای متفاوت؛ پایان.)

توجه‌کنیدکه برای استفاده ازقاعدهٔ هوپیتال درمورد f/g، مشتق f را برمشتق g تقسیم می‌کنیم. کسرمورد استفاده f'/g' است و نه $(f/g)'$. در دام مشتقگیری از f/g نیفتید.

قضیهٔ ۵

قاعدهٔ هوپیتال (صورت قویتر)

فرض کنید

$$f(x_{۰})=g(x_{۰})=۰$$

و توابع f و g هردو بربازهٔ باز (a,b)، که نقطهٔ $x_{۰}$ را دربر دارد، مشتق‌پذیر باشند. و نیز فرض کنید درهر نقطه از (a,b) بجز احتمالاً در $x_{۰}$، $g'\neq ۰$. آنگاه با این شرط که حدطرف راست معادلهٔ زیروجود داشته باشد، داریم

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\cdot$$

اثبات صورت قویتر قاعدهٔ هوپیتال مبتنی برشکل خاصی از قضیهٔ مقدارمیانگین‌است که‌آن‌را می‌توان در پیوست۵ ملاحظه‌کرد.

مثال ۲

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-(x/2)}{x^2}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1/2)(1+x)^{-1/2}-(1/2)}{2x}\qquad\left(\text{بازهم } \frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-(1/4)(1+x)^{-3/2}}{2}=-\frac{1}{8}\cdot\qquad\blacksquare$$

هنگام استفاده از قاعدهٔ هوپیتال در پی این باشید که ۰/۰ به‌مقدار دیگری تبدیل شود. ازاینجا مقدارحد معلوم می‌شود.

مثال ۳

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x+x^2}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+2x}=\frac{0}{1}=0\ \cdot$$

اگر بازهم مشتق بگیریم وقاعدهٔ هوپیتال را باردیگر به‌کار ببریم، خواهیم داشت

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

که غلط است. $\blacksquare$

اگر به جایی برسیم‌که یکی ازمشتقها صفر و دیگری ناصفر باشد، آنگاه حد موردنظر یا نظیرمثال ۳، صفر، یا نظیرمثال زیر بینهایت است.

مثال ۴

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x^2}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{2x}=\infty\ \cdot\qquad\blacksquare$$

صورتهای مبهم دیگر

در کتابهای پیشرفته‌تر، ثابت می‌کنند کـه قاعدهٔ هوپیتال نه‌تنها در مورد ۰/۰ بلکه درمورد صورت مبهم ∞/∞ نیز به‌کارمی‌رود.

■ ■ ■

قاعده‌ای با نام غلط، و اولین کتاب درسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

کتاب درسی حساب دیفرانسیل و انتگرال هوپیتال که در ۱۶۹۶ منتشر شد، بسیاری از نتایجی را که لایب‌نیتس و برادران برنولی به‌دست آورده بودند، به همگان شناساند و قاعدهٔ محاسبهٔ حدهایی را که به‌صورت مبهم ۰/۰ منجرمی‌شوند عرضه‌کرد. هرچندهوپیتال به‌طور کلی‌خود را مدیون پیشینیان می‌دانست، ولی ابداع این‌قاعده را به‌کسی نسبت نداد. در واقع، هوپیتال، به‌برنولی‌کوچك، به‌نام یوهان، حق‌الزحمه می‌پرداخت تاحساب دیفرانسیل‌وانتگرال جدید را به‌وی بیاموزد، و او را ازآخرین پیشرفتهای این‌علم‌آگاه سازد. او نیزچنین می‌کرد؛ واز جملـه در ۲۲ ژوئیهٔ ۱۶۹۴ نامه‌ای بـه هوپیتال نوشت و درآن قاعده‌ای را کـه امروزه به‌قاعدهٔ هوپیتال معروف است فاش ساخت.

اگر وقتی x به a میل می‌کند، $f(x)$ و $g(x)$ هردو به‌بینهایت میل کنند، آنگاه با این‌شرط که حد سمت راست تساوی زیر وجود داشته‌باشد، داریم

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

درنماد $x\to a$، a می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

مثال ۵

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\tan x}{1+\tan x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sec^2 x}{\sec^2 x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2x^2}{3x^2+5x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-4x}{6x+5}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{6}=-\frac{2}{3}\,.$$ ■

صورتهای $0\times\infty$ و $\infty-\infty$ را هم‌گاه می‌توان با تغییر دادن عبارات به‌کمك عملیات جبری به‌صورت $0/0$ یا ∞/∞ تبدیل کرد. (در اینجا بازهم نمی‌خواهیم القا کنیم که عددی چون $0\times\infty$ یا $\infty-\infty$ وجود دارد؛ همان‌طورکه در مورد $0/0$ یا ∞/∞ هم قصد ما این نبود. این صورتها عدد نیستند، بلکه توصیف‌کنندهٔ حدهایی هستند.)

مثال ۶ حد

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$$

به‌صورت $\infty\times 0$ منجر می‌شود، اما با نوشتن $x=1/t$ و میل دادن t به 0^+، می‌توانیم آن را به‌صورت $0/0$ تبدیل کنیم.

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}\cdot\sin t$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\sin t}{t}=1\,.$$ ■

مثال ۷ مطلوب است

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right).$$

حل: اگر $x\to0^+$، آنگاه $\sin x\to0^+$ و $1/\sin x\to+\infty$، حال آنکه $1/x\to+\infty$. عبارت $(1/\sin x)-(1/x)$ رسماً به صورت $(+\infty)-(+\infty)$ درمی‌آید که مبهم است. از طرف دیگر اگر $x\to0^-$، آنگاه $1/\sin x\to-\infty$ و $1/x\to-\infty$، لذا $(1/\sin x)-(1/x)$ به‌صورت $-\infty+\infty$ درمی‌آید که این‌هم مبهم است. اما داریم

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sin x}{x\sin x}\,.$$

حال قاعدهٔ هوپیتال را درمورد عبارت سمت راست به‌کار می‌بریم

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}\qquad\left(\text{بازهم }\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0\,.$$ ■

چه هنگام از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کنیم و چه هنگام دست نگه‌داریم

برای یافتن

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال، به‌مشتق‌گرفتن از f و g در $x=a$ مادام که صورت $0/0$ یا ∞/∞ به‌دست می‌آید ادامه دهید. به‌محض اینکه به‌چیز دیگری رسیدید مشتقگیری‌را متوقف سازید. وقتی هر یك از صورت یا مخرج، حد ناصفر متناهی داشته‌باشد، قاعدهٔ هوپیتال کاربرد ندارد.

مسأله‌ها

درمسأله‌های ۱ـ۲۳ حد را بیابید.

۱. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{x^2-4}$

۲. $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{6t+5}{3t-8}$

۳. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x}{7x^2+1}$

۴. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{4x^3-x-3}$

۵. $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t^2}{t}$

۶. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{2x-\pi}{\cos x}$

۷. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$

۸. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cos t-1}{t^2}$

۹. $\lim\limits_{\theta\to \pi} \dfrac{\sin \theta}{\pi-\theta}$

۱۰. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{1-\sin x}{1+\cos 2x}$

۱۱. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\sin x-\cos x}{x-\pi/4}$

۱۲. $\lim\limits_{x\to \pi/3} \dfrac{\cos x-0.5}{x-\pi/3}$

۱۳. $\lim\limits_{x\to(\pi/2)} -\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\tan x$

۱۴. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{x+7\sqrt{x}}$

۱۵. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-(3x+1)\sqrt{x}+2}{x-1}$

۱۶. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}$

۱۷. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{a(a+x)}-a}{x}$, $a>0$

۱۸. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{10(\sin t-t)}{t^3}$

۱۹. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(\cos x-1)}{\sin x-x}$

۲۰. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(a+h)-\sin a}{h}$

۲۱. $\lim\limits_{r\to 1} \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$, n عدد صحیح مثبت

۲۲. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

۲۳. $\lim\limits_{x\to \infty} (x-\sqrt{x^2+x})$

۲۴. (الف) درست است یا (ب)؟ توضیح دهید.

الف) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{2x}=\dfrac{1}{6}$

ب) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-3}=\dfrac{0}{6}=0$

۲۵. درمورد $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{10x+1}}{\sqrt{x+1}}$ قاعدهٔ هوپیتال کارساز نیست. حد را به‌روش دیگری بیابید.

۲۶. درمورد

$$\lim_{x\to \pi/2} \frac{\sec x}{\tan x}$$

قاعدهٔ هوپیتال کارساز نیست. این موضوع را امتحان کنید. از راه دیگری حد را بیابید.

۲۷. فرض کنید $y=\sec x+\tan x$، $-\pi/2<x<\pi/2$.

الف) نشان دهید y، y'، و y'' مثبت‌اند.

ب) مطلوب است

$$\lim_{x\to -(\pi/2)^+} (\sec x+\tan x).$$

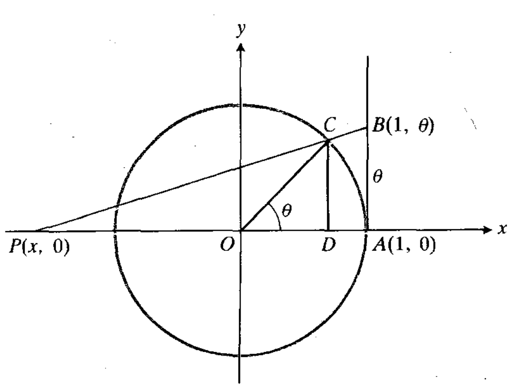
پ) نمودار y را بـه‌ازای $-\pi/2<x<\pi/2$ رسم کنید.

۲۸. در شکل ۶۸.۳، طول شعاع دایره، OA، برابر با ۱ است، و AB درنقطهٔ A بردایره مماس است. اندازهٔ رادیانی قوس AC، θ است، وطول پاره‌خط AB هم θ است. خط مار بر B و C محور x را در $P(x, 0)$ قطع می‌کند.

الف) نشان دهیدکه طول PA عبارت است از

$$1-x=\frac{\theta(1-\cos\theta)}{\theta-\sin\theta}.$$

ب) $\lim\limits_{\theta\to 0}(1-x)$ را بیابید.



۶۸.۳ نمودار مسألهٔ ۲۸.

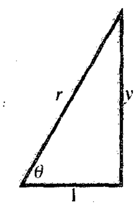
پ) نشان‌دهید که $\lim\limits_{\theta \to ۰} [(۱-x)-(۱-\cos\theta)] = ۰$.

۲۹. درشکل ۶۹.۳ طول یکی از ساقهـای مثلث قائم‌الزاویه ۱، طول ساق دیگر y، وطول وتر r است. اندازهٔ رادیانی زاویهٔ مقابل y، θ است. وقتی $\theta \to \pi/۲$، حد عبارتهای زیر را بیابید

الف) $r-y$

ب) $r^۲-y^۲$

پ) $r^۳-y^۳$.



۶۹.۳ مثلث قائم‌الزاویهٔ مربوط به‌مسألهٔ ۲۹.

۳۰. تابع زیررا درنظر بگیرید و فرض کنید $x_۰ = ۰$.

$$f(x)=\begin{cases} x+۲ & x\neq ۰ \\ ۰ & x=۰ \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} x+۱ & x\neq ۰ \\ ۰ & x=۰ \end{cases}$$

نشان دهید که

$$\lim_{x\to x_۰} \frac{f'(x)}{g'(x)} = ۱ \quad \text{اما} \quad \lim_{x\to x_۰} \frac{f(x)}{g(x)} = ۲.$$

آیا این امر قاعدهٔ هوپیتال را نقض نمی‌کند؟

TOOLKIT PROGRAMS

Limit Problems   Super * Grapher

۹.۳ تقریبهای درجهٔ دوم و خطاهای تقریب: تعمیم قضیهٔ مقدار میانگین

دراین بخش صورتی از قضیهٔ مقدارمیانگین را به‌دست می‌دهیم که صورت خطی‌شدهٔ یك تابع، ونیز فرمولی تك‌معادله‌ای برای خطای آن را عرضه می‌کند. همچنین خواهیم دید کـه چگونه با افزودن یك جملهٔ دیگر به این معادله صورتهای تقریبی درجهٔ دوم به دست می‌آیند که معمولاً درعلوم و مهندسی کاربرد دارند. علاوه‌براینها، به‌چگونگی کنترل خطاهای این‌صورتهای تقریبی خواهیم‌پرداخت.

تعمیم قضیهٔ مقدار میانگین (صورت اول)

صورت مختصراً تغییر یافتهٔ قضیهٔ مقدارمیانگین بخش ۷.۳ این است که اگر تابعی چون f درهرنقطه از بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ پیوسته ودر هرنقطه از بازهٔ باز (a, b) مشتقپذیر باشد، آنگاه دست‌کم یك عدد چون c بین a و b وجود داردکه درآن

$$f(b)=f(a)+f'(c)(b-a). \qquad (۱\ \text{الف})$$

اگر b را یك متغیرمستقل درنظربگیریم، می‌توانیم معادلهٔ (۱ الف) را به‌صورت

$$f(x)=f(a)+f'(c)(x-a) \qquad (۱\ \text{ب})$$

بنویسیم که برای بازهٔ از a تا x، و cیی در بین‌آنها، درست است. طرف راست معادلهٔ (۱ ب) شبیه صورت خطی

$$L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$

است. همان‌گونه‌که قضیهٔ زیرنشان می‌دهد این‌تشابه تصادفی‌نیست.

قضیهٔ ۶

تعمیم قضیهٔ مقدار میانگین (صورت اول)

اگر f و f' در هـرنقطه از $[a, b]$ پیوسته، و f' درهرنقطه از (a, b) مشتقپذیر باشد، آنگاه دست‌کم یك عدد چون $c_۲$ بین aو b وجود دارد به‌قسمی‌که

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(c_۲)}{۲}(b-a)^۲. \qquad (۲)$$

اهمیت معادلهٔ (۲) دراین نیست‌که عددی چون k در

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+k(b-a)^۲ \qquad (۳)$$

صدق می‌کند. اطلاع از وجـود k اطلاع چندان تازه‌ای نیست زیرا از معادلهٔ (۳) همواره می‌توان آن را به‌دست آورد. اهمیت معادلهٔ (۲) در این است که به‌ازای نقطه‌ای بین a و b مقدار k نصف مقدار f'' است. این مطلب حاکی است‌که f'' اندازهٔ k را کنترل می‌کند. به‌زودی خواهیم دیدکه این اطلاع تـا چه اندازه می‌تواند مفید باشد.

اثبات معادلهٔ (۳) حـاکی است‌که وقتی $x=b$، مقـدار تابع $f(x)$، و تابع

$$f(a)+f'(a)(x-a)+k(x-a)^۲$$

یکی خواهدبود. این دوتابع در $x=a$ هم مقدارمساوی خواهند داشت (این مقدار $f(a)$ است)، اما عموماً اختلافشان

$$F(x)=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-k(x-a)^۲ \qquad (۴)$$

صفرنیست.

تابع $F(x)$ بر بازهٔ $[a, b]$ درتمـام فرضهای قضیهٔ رول صدق می‌کند: $F(a)=0$، $F(b)=0$، F بـر $[a, b]$ پیوسته است زیرا f، $(x-a)$، و $(x-a)^2$ پیوسته‌اند، وبه‌دلیل مشابه، F بر (a, b) مشتقپذیر است. پس، به‌ازای نقطه‌ای چون c_1 بین a و b داریم $F'=0$:

$$F'(c_1)=0, \quad a<c_1<b.$$

چون $F'(c_1)=0$، مشتق

$$F'(x)=f'(x)-f'(a)-2k(x-a) \qquad (5)$$

بر بازهٔ $[a, c_1]$ در تمـام فرضهـای قضیهٔ رول صدق می‌کند: $F'(c_1)=0$، واگردرمعادلهٔ (۵) به‌جایx،aرا قراردهیم داریم $F'(a)=0$. همچنین F' بـر $[a, c_1]$ پیوسته و بـر (a, c_1) مشتقپذیراست، زیرا f' و $(x-a)$ هردوچنین‌اند. بنابراین، مشتق

$$F''(x)=f''(x)-2k$$

درنقطه‌ای چون c_2 بین a و c_1 صفراست، واین بدین معناست که

$$0=f''(c_2)-2k \quad \text{یا} \quad k=\frac{f''(c_2)}{2}.$$

اگر در معادلهٔ (۳) به‌جای k این مقدار را قرار دهیم معادلهٔ (۲) به‌دست می‌آید که مطلوب ماست.

نکته این قضیه واثبات آن با فرض $a>b$ هم صادق‌اند، بااین شرط که به‌جای ذکرصریح $[a, b]$ یا (a, b) قیدکنیم «بازهٔ بـا نقـاط انتهایی a و b». اگردرمورد این بازه وسایر بازه‌هایی که دراثبات مطرح می‌شوند چنین کنیم، استدلال را می‌توان به‌درستی به‌انجام رساند.

اندازه‌گیری خطا در یك تقریب خطی

حال درموقعیتی هستیم که خطای تقریب خطی

$$f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a)$$

مذکور در بخش۴.۲ را محاسبه کنیم. درآغاز b را یك متغیرمستقل تلقی می‌کنیم، و معادلهٔ (۲) را با آگاهی ازاینکه c_2 بین a و x قرار دارد به‌صورت

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(c_2)}{2}(x-a)^2 \qquad (6)$$

می‌نویسیم. ایـن معادله، با توجه به نکتهٔ مذکور در پایان اثبات قضیهٔ ۶، هم برای $x<a$ برقرار است و هـم بـرای $x>a$.

ازمعادلهٔ (۶) تقریب‌خطی

$$f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a), \quad x\approx a \qquad (7)$$

به‌دست می‌آید که بر بازهٔ بـا دوانتهای a و x درست است، و خطایش برابراست با

$$e_1(x)=\frac{f''(c_2)}{2}(x-a)^2. \qquad (8)$$

اگر f'' بربازهٔ بسته از a تا x پیوسته باشد، آنگاه براین بازه یك مقدارماکسیمم دارد، و $e_1(x)$ در نابرابری

$$|e_1(x)|\leqslant\frac{1}{2}\max|f''|(x-a)^2 \qquad (9)$$

صدق می‌کند. دراینجا max مربوط است به‌بازهٔ بادوانتهای a وx. امـا، وقتی برای براورد خطا از این نابرابری استفـاده می‌کنیم، معمولاً نمی‌توانیم مقدار دقیق $\max|f''|$ را بیابیم، ومجبوریم به‌جای‌آن یك‌کران بالا یامقدار «حالت بدتر» را قراردهیم. اگر M کران بالای دلخواهی از $\max|f''|$ باشد، آنگاه

$$|e_1(x)|\leqslant\frac{1}{2}M(x-a)^2. \qquad (10)$$

این نابرابری همان است‌که معمولاً برای براورد $|e_1(x)|$ ازآن استفاده می‌شود. ما بهترین Mی را که می‌توانیم، پیدا می‌کنیم و کار را ادامه می‌دهیم. برای‌اینکه به‌ازای یك M مفروض، $|e_1(x)|$ را کوچك‌کنیم، صرفاً $(x-a)^2$ را کوچك می‌کنیم.

خطا در تقریب خطی $f(x)$ در نزدیکی $x=a$

اگر f، f'، و f'' در هرنقطه ازبازهٔ بسته‌ای با دوانتهای x و a پیوسته باشند،آنگاه دراین بازه خطای $e_1(x)$ ناشی از قرار دادن صورت خطی

$$L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$

به‌جای $f(x)$، در نابرابری

$$|e_1(x)|\leqslant\frac{1}{2}M(x-a)^2 \qquad (11)$$

صدق می‌کند. دراینجا M کران بالای دلخواهی‌است برای مقادیر $|f''|$ بربازهٔ با دوانتهای a و x.

مثال ۱ صورت خطی $f(x)=1/(1-x)$ در $x=0$ عبارت است از $L(x)=1+x$. اگر $|x|\leqslant 0.1$، تقریب

$$\frac{1}{1-x}\approx 1+x$$

تا چه حد خوب است؟

حل: از نابرابری (۱۱) برای یافتن یك‌کران بـالا برای

$|e_1(x)|$، به‌ازای x مفروض، استفاده می‌کنیم. ابتدا مشتق دوم $f(x)=(1-x)^{-1}$ را پیدا می‌کنیم

$$f(x)=(1-x)^{-1}, \quad f'(x)=(1-x)^{-2}$$

$$f''(x)=2(1-x)^{-3}.$$

حال برای مقادیر $|f''(x)|$ بر بازهٔ $-0{,}1 \leqslant x \leqslant 0{,}1$ کرانی بالایی چون M می‌یابیم. براین بازه داریم

$$|f''(x)|=\frac{2}{|1-x|^3} \leqslant \frac{2}{|1-0{,}1|^3}=\frac{2}{(0{,}9)^3}<2{,}8\,.$$

می‌توانیم با اطمینان کامل $M=2{,}8$ را درنظر بگیریم. با این مقدار M و با $a=0$، از نابرابری (۱۱) نتیجه می‌گیریم که

$$|e_1(x)| \leqslant \frac{1}{2}(2{,}8)(x-0)^2$$

$$\leqslant 1{,}4x^2$$

$$\leqslant 1{,}4(0{,}1)^2 \quad (|x| \leqslant 0{,}1 \text{ زیرا})$$

$$\leqslant 0{,}014.$$

درتقریب $(1-x)^{-1} \approx 1+x$ اگر $|x| \leqslant 0{,}1$، خطا بیش از ۰٫۰۱۴ نیست. ■

تقریب درجهٔ دوم

برای‌اینکه تقریب خطی‌از دقت بیشتری برخوردار باشد، یك‌جملهٔ درجهٔ دوم هم به‌آن اضافه می‌کنیم. چند تقریب درجهٔ دوم معمولی درنزدیکی ۰ اینها هستند

$$\frac{1}{1-x} \approx 1+x+x^2$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$$

$$\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2}$$

$$\sin x \approx x.$$

تقریبهای دیگر را می‌توان باکمك جبراز اینها به‌دست‌آورد. برای $x \approx 0$ داریم

$$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x/2}\right) \approx \frac{1}{2}\left[1+\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x^2}{8}$$

$$\frac{1+x}{1-x} \approx (1+x)(1+x+x^2)$$

$$\approx 1+2x+2x^2. \quad (\text{باصرفنظر کردن ازجملهٔ } x^3)$$

برای اینکه تقریبها را به‌طور صحیح باهم ترکیب‌کنیم، هریك از آنها در وقت کاربرد باید معتبر باشد

صحیح: $\frac{1}{1-\sin x} \approx \frac{1}{1-x} \approx 1+x+x^2, \quad x \approx 0$

غلط: $\sin\left(\frac{1}{1-x}\right) \underset{(1)}{\approx} \frac{1}{1-x} \underset{(2)}{\approx} 1+x+x^2.$

ترکیب دوم غلط است زیـرا تقریب (۱) ایجـاب می‌کند کـه $1/(1-x) \approx 0$، ولذا $|x|$ بزرگ باشد؛ حال‌آنکه تقریب (۲) ایجاب می‌کندکه $|x|$ کوچك باشد.

اگرقضیهٔ مقدارمیانگین را به‌طریق زیر بازهم تعمیم دهیم، می‌توانیم براورد خوبی از خطای تقریبهای درجـهٔ دوم به‌دست آوریم.

قضیهٔ ۷

تعمیم قضیهٔ مقدار میانگین (صورت دوم)

اگر f، f'، و f'' بـر $[a, b]$ پیوسته باشند و f'' بـر (a, b) مشتق‌پذیر هم باشد، آنگاه عددی چون c_2 بین a و b وجود دارد که به‌ازای آن

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \frac{f'''(c_2)}{6}(b-a)^3. \tag{۱۲}$$

اثبات تعمیم اخیرقضیهٔ مقدارمیانگین، که شبیه اثبات تعمیم قبلی‌آن است، حالت خاصی است ازاثباتی‌که خلاصهٔ آن درمسألهٔ ۹۵ از مسأله‌های گوناگون درآخراین فصل داده شده‌است.

در کاربردها معمولاً در معـادلهٔ (۱۲) به‌جـای b، x را می‌نویسیم

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(c_2)}{6}(x-a)^3. \tag{۱۳}$$

بـا آگاهی ازاینکه c_2 بین a و x واقع است، از معادلهٔ (۱۳) تقریب درجهٔ دوم

$$f(x) \approx f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 \tag{۱۴}$$

را به‌دست می‌آوریم که بر بازهٔ بین a و x معتبر است، و خطای آن چنین است

$$e_{۲}(x)=\frac{f'''(c_{۲})}{۶}(x-a)^{۳}. \qquad (۱۵)$$

توجه کنید که دو جملهٔ اول موجود درطرف راست تقریب (۱۴)، تقریب خطی متداول f را به‌دست می‌دهد. برای به‌دست آوردن تقریب درجهٔ دوم تنها باید جملهٔ درجهٔ دوم را، بدون تغییر قسمت خطی، به‌آن بیفزاییم.

اگر $f'''(x)$ بر بازهٔ بسته از a تا x پیوسته باشد، آنگاه بر آن بازه یك مقدار ماکسیمم دارد، و بنا به‌معادلهٔ (۱۵) داریم

$$|e_{۲}(x)|\leqslant\frac{۱}{۶}\max|f'''(x)||x-a|^{۳}. \qquad (۱۶)$$

بخت ما در یافتن $\max|f'''|$ بیش از یافتن $\max|f''|$ نیست؛ و لذا به‌جای آن یك کران بالا مانند M می‌گذاریم، و $|e_{۲}(x)|$ را با نابرابری

$$|e_{۲}(x)|\leqslant\frac{۱}{۶}M|x-a|^{۳} \qquad (۱۷)$$

براورد می‌کنیم.

تقریب درجهٔ دوم $f(x)$ در نزدیکی $x=a$

اگر f، f'، f''، و f''' درهر نقطه از بازهٔ بسته‌ای با دوانتهای x و a پیوسته باشند، آنگاه دراین بازه خطای $e_{۲}(x)$ ناشی‌از قرار دادن تقریب درجهٔ دوم

$$Q(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{۲}(x-a)^{۲} \qquad (۱۸)$$

به‌جای $f(x)$، در نابرابری

$$|e_{۲}(x)|\leqslant\frac{۱}{۶}M|x-a|^{۳} \qquad (۱۹)$$

صدق می‌کند. دراینجا M کران بالای دلخواهی است برای مقادیر $|f'''|$ بر بازهٔ با دوانتهای a و x.

مثال ۲ تقریب درجهٔ دوم $f(x)=۱/(۱-x)$ را در نزدیکی $x=۰$ بیابید. اگر $|x|<۰٫۱$، این تقریب چقدر دقیق است؟

حل: برای یافتن تقریب درجهٔ دوم، ازمعادلهٔ (۱۸) باضابطهٔ $a=۰$ استفاده می‌کنیم

$$f(x)=(۱-x)^{-۱} \qquad f(۰)=۱$$

$$f'(x)=(۱-x)^{-۲} \qquad f'(۰)=۱$$

$$f''(x)=۲(۱-x)^{-۳} \qquad f''(۰)=۲$$

$$f'''(x)=۶(۱-x)^{-۴},$$

$$\begin{aligned}Q(x)&=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{۲}(x-a)^{۲}\\&=۱+(۱)(x-۰)+\frac{۲}{۲}(x-۰)^{۲}\\&=۱+x+x^{۲}.\end{aligned}$$

تقریب درجهٔ دوم $۱/(۱-x)$ درنزدیکی $x=۰$ عبارت است‌از

$$\frac{۱}{۱-x}\approx ۱+x+x^{۲}.$$

بـرای براورد خطای تقریب، ابتدا یك‌کران بالا چون M برای مقادیر $|f'''(x)|$ در بازهٔ $-۰٫۱\leqslant x<۰٫۱$ می‌یابیم. دراین بازه،

$$|f'''(x)|=\frac{۶}{|۱-x|^{۴}}\leqslant\frac{۶}{(۰٫۹)^{۴}}<۹٫۱۵$$

لذا با اطمینان می‌توانیم بنویسیم $M=۹٫۱۵$. حال از نابرابری (۱۹) باضوابط $a=۰$ و $M=۹٫۱۵$ استفاده می‌کنیم

$$|e_{۲}(x)|\leqslant\frac{۱}{۶}(۹٫۱۵)|x-۰|^{۳}$$

$$\leqslant\frac{۱}{۶}(۹٫۱۵)(۰٫۱)^{۳} \qquad (\text{زیرا } |x|\leqslant ۰٫۱)$$

$$\leqslant ۰٫۰۰۱۶.$$

اگر $|x|\leqslant ۰٫۱$، خطای تقریب بیش از ۰٫۰۰۱۶ نیست. در مقایسه با کران بالای ۰٫۰۱۴ کـه در مثال ۱ برای تقریب خطی $۱/(۱-x)$ یافتیم، مقدار ۰٫۰۰۱۶ بهتراست. ■

مثال ۳ تقریب درجهٔ دوم $\sin x$ را در نزدیکی $x=۰$ بیابید. برای خطای تقریب بربازهٔ $|x|\leqslant ۰٫۳$، یك کران بالا پیداکنید.

حل: برای یافتن تقریب درجهٔ دوم، ازمعادلهٔ (۱۸) با ضوابط $f(x)=\sin x$، و $a=۰$ استفاده می‌کنیم:

$$f(x)=\sin x \qquad f(۰)=۰$$

$$f'(x)=\cos x \qquad f'(۰)=۱$$

$$f''(x)=-\sin x \qquad f''(۰)=۰$$

$$f'''(x)=-\cos x,$$

$$Q(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)(x-a)^{۲}$$
$$=۰+(۱)(x-۰)+۰$$
$$=x.$$

تقریب درجهٔ دوم $\sin x$ در نزدیکی $x=۰$ عبارت است از $\sin x \approx x$.

این تقریب که درآن جملهٔ $x^{۲}$ وجود ندارد چگونه می‌تواند درجهٔ دوم باشد؟ در این تقریب جملهٔ درجهٔ دوم وجود دارد، اما ضریبش صفراست. مهم این است که ازجملهٔ درجهٔ دوم صرفنظر نشده است، و می‌توانیم خطای تقریب را به‌جای $e_{۱}(x)$ با $e_{۲}(x)$ براورد کنیم.

برای یافتن یك کران بالا برای $|e_{۲}(x)|$ بر بازهٔ $-۰٫۳ \leqslant x \leqslant ۰٫۳$، ابتدا یك کران بالا برای $|f'''(x)|$ می‌یابیم. چون $|\cos x|$ هرگز از ۱ بیشترنمی‌شود، داریم:

$$|f'''(x)|=|-\cos x|\leqslant ۱\,.$$

پس بااطمینان می‌نویسیم $M=۱$. باضوابط $M=۱$، و $a=۰$، نابرابری (۱۹) نتایج زیررا به‌دست می‌دهد.

$$|e_{۲}(x)|\leqslant\frac{۱}{۶}(۱)|x-۰|^{۳}$$
$$\leqslant\frac{۱}{۶}|x|^{۳}$$
$$\leqslant\frac{۱}{۶}(۰٫۳)^{۳}\qquad (\text{زیرا } |x|\leqslant ۰٫۳)$$
$$\leqslant ۰٫۰۰۴۵\,.$$

خطا در بازهٔ $-۰٫۳\leqslant x\leqslant ۰٫۳$ هرگز از ۰٫۰۰۴۵ بیشتر نمی‌شود. ■

مسأله‌ها

در مسأله‌های ۱ـ۵، با استفاده از فرمولهای جدول ۲.۳، تقریبهای درجهٔ دومی برای توابع داده شده به‌ازای مقادیرمفروض x بیابید.

۱. $x\sin x,\ \ x\approx ۰$

۲. $\sqrt{۱+\sin x},\ \ x\approx ۰$

۳. $\cos\sqrt{۱+x},\ \ x\approx -۱$

۴. $\dfrac{\sec x}{۱-x},\ \ x\approx ۰$

۵. $\sqrt{x}$، $x\approx ۱$ (راهنمایی: $x=۱+(x-۱)$؛ با $(x-۱)\approx ۰$.)

۶. تقریب درجهٔ دوم $f(x)=\sec x+\tan x$ را در نزدیکی $x=۰$ بیابید.

۷. برای خطای $|e_{۱}(x)|$ درخطی‌سازیهای زیر، کران بالا بیابید.

الف) $\sqrt{۱+x}\approx ۱+(x/۲),\ \ |x|\leqslant ۰٫۱$

ب) $\cos x\approx ۱,\ \ |x|\leqslant ۰٫۱$

درمسأله‌های ۸ـ۱۰، (الف) تقریب درجهٔ دوم تابع مفروض رادر نزدیکی $x=۰$ به‌دست آورید؛ (ب) یك کران بالای عددی برای $|e_{۲}(x)|$، خطای تقریب برای بازهٔ $|x|\leqslant ۰٫۱$، بیابید.

۸. $\sqrt{۱+x}$

۹. $\tan x$

۱۰. $\cos x$

درمسأله‌های ۱۱ـ۱۴، (الف) تقریب درجهٔ دوم تابع مفروض را درنزدیکی نقطهٔ مفروض a بیابید؛ (ب) با استفاده ازمعادلهٔ (۱۹) یك کران بالای عددی برای خطای تقریب دربازهٔ $|x-a|\leqslant ۰٫۱$ پیدا کنید.

۱۱. $\sin x,\ \ a=\dfrac{\pi}{۲}$

۱۲. $\sin x,\ \ a=\pi$

۱۳. $\cos x,\ \ a=\dfrac{\pi}{۲}$

۱۴. $\cos x,\ \ a=\pi$

۱۵. بنا برمعادلهٔ (۱۹)، به‌ازای چه مقادیری از x خطای $|e_{۲}(x)|$ درتقریب $\sin x\approx x$ کمتراز (الف) ۱/۱۰۰؛ (ب) ۱٪ مقدار $|x|$ است؟

۱۶. بنا برمعادلهٔ (۱۹)، به‌ازای چه مقادیری از x خطای $|e_{۲}(x)|$ در تقریب

$$\cos x\approx ۱-\frac{x^{۲}}{۲}$$

کمتراز (الف) ۱/۱۰۰؛ (ب) ۱٪ مقدار $|x|$ است؟

۱۷. فرض کنید فرمول مشتقگیری

$$\frac{d}{dx}u^{k}=ku^{k-۱}\frac{du}{dx}$$

به‌ازای هرعدد k برقرار باشد. نشان دهید که تقریب درجهٔ دوم $(۱+x)^{k}$ عبارت است از

جدول ۲۰۳ فرمولهای تقریب

درجهٔ دوم	خطی
	تقریب
$Q(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$	$L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$
	کران خطا
$\lvert e_2(x)\rvert \leqslant \frac{1}{6}M\lvert x-a\rvert^3$	$\lvert e_1(x)\rvert \leqslant \frac{1}{2}M(x-a)^2$
M کران بالای دلخواهی است برای $\max\lvert f'''\rvert$ بر بازهٔ با دو انتهای x و a.	M کران بالای دلخواهی است برای $\max\lvert f''\rvert$ بر بازهٔ با دو انتهای x و a.
	تقریبهای معمول برای $x\approx 0$
$\frac{1}{1-x}\approx 1+x+x^2$	$\frac{1}{1-x}\approx 1+x$
$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$	$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}$
$\sin x\approx x$	$\sin x\approx x$
$\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}$	$\cos x\approx 1$
$(1+x)^k\approx 1+kx+\frac{k(k-1)}{2}x^2$	$(1+x)^k\approx 1+kx$
به‌ازای هرعدد k	به‌ازای هرعدد k

$$(1+x)^k\approx 1+kx+\frac{k(k-1)}{2}x^2.$$

۱۸. درستی معادلهٔ (۶) را برای $f(x)=3x^2+2x+4$، و $a=1$ بررسی کنید.

۱۹. درستی معادلهٔ (۱۳) را برای $f(x)=x^3+5x-7$، و $a=1$ بررسی کنید.

۲۰. با استفاده از معادلهٔ (۶) ثابت کنید که اگر f پیوسته باشد، و مشتقات اول و دوم پیوسته داشته‌باشد، و اگر $f'(a)=0$، آنگاه

الف) f در a یك ماکسیمم موضعی دارد به‌این شرط که درسراسر بازهٔ بازی که a را شامل است، $f''\leqslant 0$.

ب) f در a یك مینیمم موضعی دارد. به این شرط که در سراسر بازهٔ بازی که a را شامل است، $f''\geqslant 0$.

TOOLKIT PROGRAMS

Derivative Grapher   Super * Grapher

پرسشها و تمرینهای مروری

۱. دربارهٔ اهمیت علامت مشتق اول و دوم بحث کنید. بخش کوچکی ازخمی را بکشیدکه درآن:

الف) y' و y'' هردومثبت باشند

ب) $y'>0$، $y''<0$

پ) $y'<0$، $y''>0$

ت) $y'<0$، $y''<0$.

۲. نقطهٔ عطف را تعریف کنید. نقاط عطف را چگونه از معادلهٔ یك خم می‌یابند؟

۳. تابعی مثال بزنید که نمودارش دارای یك مجانب مایل؛ قائم؛ یا افقی باشد. نمودارها و مجانبهایشان را بکشید.

۴. تابع فرد و تابع زوج را تعریف کنید. نمودارهای این توابع چه نوع تقارنهایی دارند؟

۵. چگونه مقادیرماکسیمم و مینیمم موضعی یك تابع را به‌دست می‌آورید؟ دربحث خود نقاط‌انتهایی و نقاط بحرانی را هم درنظر بگیرید. با رسم نمودار مطلب را روشن کنید.

۶. مقادیرماکسیمم ومینیمم مطلق یك تابع پیوسته بریك بازهٔ بسته را چگونه تعیین می‌کنند؟ مثال بزنید.

۷. فرض کنید n یك عددصحیح مثبت باشد. به‌ازای چه مقادیری از n، خم $y=x^n$ دارای: (الف) مینیمم موضعی در مبدأ است؛ (ب) نقطهٔ عطف درمبدأ است؟

۸. رئوس روش کلی حل مسائل ماکسیمم مینیممی را شرح دهید.

۹. رئوس روش کلی حل مسائل آهنگ وابسته را شرح دهید.

۱۰. فرضهای قضیهٔ رول چه هستند؟ حکم آن چیست؟

۱۱. کتاب را ببندید، صورت قضیهٔ مقدارمیانگین را بنویسید، و آن را اثبات کنید. تعبیرهندسی این قضیه چیست؟

۱۲. می‌دانیم که اگر $F(x)=x^2$، آنگاه $F'(x)=2x$. اگر کسی بداند تابعی چون G چنان است که $G'(x)=2x$، و $G(x)\neq x^2$، دربارهٔ تفاضل $G(2)-G(1)$ چه می‌توان گفت؟ توضیح دهید.

۱۳. قاعدهٔ هوپیتال را شرح دهید. در مورد یك مسألهٔ مفروض از کجا می‌دانید چند بار باید این قاعده را به‌کار ببرید؟ مثال بزنید.

۱۴. تقریب خطی و درجهٔ دوم سه تابع مختلف را بنویسید. فرمولهای کلی تقریب‌خطی و درجهٔ دوم یك تابع چه‌هستند؟ چگونه می‌توانیم کران بالایی برای خطای این تقریبها بیابیم؟

مسأله‌های گوناگون

درمسأله‌های ۱-۱۸، y' و y'' را بیابید. در هرمورد مجموعه‌های مقادیری از x را تعیین کنیدکه به‌ازای آنها

الف) y صعودی باشد (وقتی x زیاد می‌شود)

ب) y نزولی باشد (وقتی x زیاد می‌شود)

پ) تقعرنمودار رو به‌بالا باشد

ت) تقعرنمودار رو به‌پایین باشد.

همچنین، در هر حالت نمودار را بکشید؛ ماکسیممها، مینیممها، مجانبها، ونقاط عطف را مشخص کنید.

۱. $y=9x-x^2$

۲. $y=x^3-5x^2+3x$

۳. $y=4x^3-x^4$

۴. $y=4x+x^{-1}$

۵. $y=x^2+4x^{-1}$

۶. $y=x+4x^{-2}$

۷. $y=5-x^{2/3}$

۸. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$

۹. $y=x-\dfrac{4}{x}$

۱۰. $y=x^4-2x^2$

۱۱. $y=\dfrac{x^2}{ax+b},\quad a>0,\quad b>0$

۱۲. $y=2x^3-9x^2+12x$

۱۳. $y=(x-1)(x+1)^2$

۱۴. $y=x^2-(1/6)x^3$

۱۵. $y=2x^3-9x^2+12x-4$

۱۶. $y=3x(x-1)(x+1)^2$

۱۷. $xy^2=3(1-x)$

۱۸. $y=2\cos x+\cos^2 x$

درمسأله‌های ۱۹-۲۶، دامنهٔ تابع را بیابید، و درمورد نمودارآن ویژگیهای زیررا بررسی کنید: (الف) تقارن، (ب) محل تقاطع با محورها، (پ) مجانبها، (ت) شیب در محل تقاطع با محورها، (ث) صعود و نزول، (ج) تقعر، و(چ) جملات چیره. سپس نمودار تابع را رسم کنید.

۱۹. الف) $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ ب) $y=\dfrac{x^2+1}{x+1}$

۲۰. الف) $y=x+\frac{1}{x^2}$ ب) $y=x^2+\frac{1}{x^2}$

۲۱. $y=x(x+1)(x-2)$

۲۲. $y=\frac{8}{4+x^2}$

۲۳. $y=\frac{8}{4-x^2}$

۲۴. $y=\frac{8x}{4+x^2}$

۲۵. $x^2y-y=4(x-2)$

۲۶. $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$

۲۷. معادلهٔ نموداری به‌صورت

$$y=\frac{ax+b}{cx^2+dx+e}$$

است که درآن ثابتهای a، b، c، d، و e یا ۰ اند یا ۱. بااستفاده ازاطلاعات زیرثابتها را تعیین کنید. درهرمورد، دلیل انتخاب خود را بیان کنید.

۱. نمودار محور y را قطع نمی‌کند.
۲. محور x مجانب است.
۳. محل تقاطع با محور x، $(-1, 0)$ است.

نمودار را رسم کنید.

۲۸. تقارن نسبت به‌محور x. آزمون تقارن یك خم نسبت به‌محور x چنین است: نقطهٔ $(x, -y)$ بر خم واقع است هرگاه نقطهٔ (x, y) برآن واقع باشد. فرض کنید نمودار $y=f(x)$ هم نسبت به‌محور y متقارن باشد و هم نسبت به‌مبدأ. آیا باید نسبت به‌محور x نیزمتقارن باشد؟ اگرچنین است، چرا؟ درغیراین صورت، خمی را مشخص کنید که نسبت به‌محور y ومبدأ متقارن باشد، ولی نسبت به‌محور x متقارن نباشد.

۲۹. شیب خمی دریك نقطهٔ دلخواه (x, y) از معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{dy}{dx}=6(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4.$$

الف) به ازای چه مقدار (یا مقادیر) x، y یك ماکسیمم موضعی دارد؟ چرا؟

ب) به ازای چه مقدار (یامقادیر) x، y یك مینیمم موضعی دارد؟ چرا؟

۳۰. عدد بیست را به‌دو بخش (لازم نیست اعداد صحیح باشند) طوری تقسیم کنید که حاصلضرب یك بخش درمربع بخش دیگر حداکثرممکن باشد.

۳۱. مطلوب است بزرگترین مقدار $f(x)=4x^3-8x^2+5x$ به‌ازای $0\leqslant x\leqslant 2$. برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۳۲. دوعدد مثبت بیابید که مجموعشان ۳۶ وحاصلضربشان بیشترین مقدارممکن باشد. اگر بخواهیم حاصلضرب کمترین مقدارممکن باشد، آیا مسأله را می‌توان حل کرد؟

۳۳. به‌ازای چه مقادیر a، b، c، و d، $y=ax^3+bx^2+cx+d$ در $(-1, 10)$ یك ماکسیمم موضعی، و درنقطهٔ $(1, -6)$ یك نقطهٔ عطف دارد؟

۳۴. عددی بیابید که حداکثراختلاف را با مربعش داشته باشد.

۳۵. یك قطاع مستدیر («یك تکه ازکیك») به‌شعاع r وطول قوس s مفروض است. محیط ومساحت آن به‌ترتیب از فرمولهای $p=2r+s$، و $A=(1/2)rs$ تعیین می‌شوند. اگرمحیط ۱۰۰ فوت باشد، به‌ازای چه مقدار r، مساحت ماکسیمم است؟

۳۶. اگر توپی را با سرعت $32\ \mathrm{ft/sec}$ درامتداد قائم به‌بالا پرتاب کنیم، بعداز t ثانیه ارتفاع آن ازمعادلهٔ $s=32t-16t^2$ به‌دست می‌آید. در چه لحظه‌ای توپ به بالاترین نقطه می‌رسد، و چقدر بالا می‌رود؟

۳۷. ارتفاع مخروط مستدیر قائمی ۱۲ فوت وشعاع قاعده‌اش ۶ فوت‌است. مخروط دیگری‌را دراین‌مخروط‌چنان محاط می‌کنیم که رأسش درمرکز قاعدهٔ مخروط اول قرارگیرد، وقاعده‌اش موازی با قاعدهٔ آن باشد. مطلوب است ابعاد یك چنین مخروط محاطی که بیشترین حجم را داشته‌باشد.

۳۸. تمام ماکسیممها و مینیممهای $f(x)=\sin x+\cos x$ را بیابید.

۳۹. مثلث متساوی‌الساقینی چنان رسم شده‌است که رأسش در مبدأ وقاعده‌اش در بالای محور x و موازی با آن است، و رأسهای قاعده‌اش برخم $12y=36-x^2$ واقع‌اند. مساحت بزرگترین مثلث ممکن با این مشخصات را بیابید.

۴۰. دریك کارخانهٔ تایرسازی، درهرروز $100x$ تایرازنوع A و $100y$ تایر از نوع B ساخته می‌شود، به‌طوری‌که با فرض $0\leqslant x\leqslant 4$ داریم

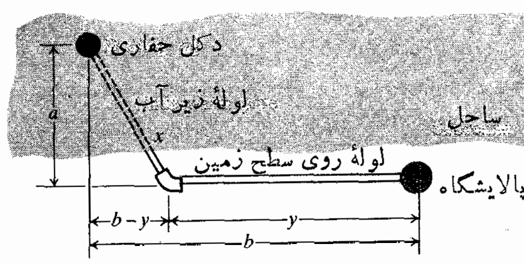
$$y=\frac{(40-10x)}{(5-x)}$$

اگرسود هرتایرنوع A دو برابرسود هرتایرنوع B باشد، برای کسب بیشترین سود درهرروز چند تایرنوع A باید ساخته شود؟

۴۱. روی خم $x^{۲}-y^{۲}=۱$ نزدیکترین نقاط به‌نقطهٔ $P(a,\ ۰)$ را بیابید اگر
الف) $a=۴$
ب) $a=۲$
پ) $a=\sqrt{۲}$.

۴۲. راننده‌ای دریك‌صحرا درجایی‌است که فاصله‌اش تا نزدیکترین نقطه، A، از یك جادهٔ طولانی و مستقیم ۵ مایل است، ومی‌خواهد به‌نقطهٔ B از جاده برسد. اگر اتومبیل بتواند درصحرا با سرعت ۱۵ mph و در جاده با سرعت ۳۹ mph حرکت کند و اگر راننده بخواهد درکوتاهترین زمان به‌مقصد برسد، و اگر
الف) فاصلهٔ B از A، ۵ مایل باشد
ب) فاصلهٔ B از A، ۱۰ مایل باشد
پ) فاصلهٔ B از A، ۱ مایل باشد
راننده باید خودرا به‌چه نقطه‌ای از جاده برساند؟

۴۳. مطابق شکل۷۰.۳ یك دکل حفاری a کیلومتر ازساحل فاصله دارد، و قراراست با لوله به‌پالایشگاهی وصل شودکه فاصله‌اش تا دکل در امتداد خط ساحل؛ b کیلومتراست. اگر هزینهٔ لوله‌کشی درهر کیلومتر برای لولهٔ زیرآب w دلار و برای لولهٔ روی سطح زمین l دلار $(l<w)$ باشد، x و y چه‌باشند تااتصال باکمترین هزینه انجام شود؟



۷۰.۳ نمودار لوله‌کشی مربوط به‌مسألهٔ ۴۳.

۴۴. نقاط A و B دوانتهای قطری از یك دایره‌اند و C نقطه‌ای ازمحیط آن است. کدام‌یك از گزاره‌های زیردرمورد مثلث ABC درست است؟
الف) مساحت وقتی بزرگترین مقدار را داردکه مثلث متساوی‌الساقین باشد.
ب) مساحت وقتی کوچکترین مقدار را داردکه مثلث متساوی‌الساقین باشد.
پ) محیط وقتی بزرگترین مقدار را داردکه مثلث متساوی‌الساقین باشد.
ت) محیط وقتی کوچکترین مقدار را داردکه مثلث متساوی‌الساقین باشد.

۴۵. محیط و طول قاعدهٔ مثلثی ثابت‌اند. اگر بخواهیم مساحت ماکسیمم باشد، طول دوضلع دیگررا بیابید. مساحت مثلثی با اضلاع a، b، و c ونصف محیط s برابراست با

$$A=[s(s-a)(s-b)(s-c)]^{۱/۲}.$$

۴۶. مساحت، A، وطول قاعدهٔ مثلثی، b، ثابت‌اند. اگربخواهیم زاویهٔ مقابل قاعده ماکسیمم باشد، زوایای مجاور به قاعده را بیابید.

۴۷. ازنقطهٔ ثابت $(a,\ b)$ خطی رسم می‌کنیم تا محورهای x و y را در P و Q قطع‌کند. نشان دهیدکه مقادیر مینیمم PQ، $OP+OQ$، و $OP\cdot OQ$ به‌ترتیب عبارت‌اند از

$$(a^{۲/۳}+b^{۲/۳})^{۳/۲}،\ (\sqrt{a}+\sqrt{b})^{۲}،\ \text{و}\ ۴ab.$$

۴۸. اگر بخواهیم به‌ازای همهٔ مقادیرمثبتx، $mx-۱+(۱/x)$ کمترازصفر نباشد، کوچکترین مقدارثابت m را بیابید.

۴۹. فاصلهٔ بین نقطهٔ ثابت $P_{۱}(x_{۱},\ y_{۱})$ و یك نقطهٔ $P(x,\ y)$ برخط

$$L:\ ax+by=c$$

را s می‌نامیم. با استفاده از روشهای حساب دیفرانسیل وانتگرال نشان دهیدکه
الف) $s^{۲}$ وقتی مینیمم است که $P_{۱}P$ بر L عمود باشد
ب) فاصلهٔ مینیمم عبارت است از

$$\frac{|ax_{۱}+by_{۱}-c|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}.$$

۵۰. می‌خواهیم یك میدان بازی بسازیم که به‌شکل یك مستطیل به‌اضافهٔ دوناحیهٔ نیمدایره‌ای در دوانتهای میدان باشد. اگربخواهیم محیط میدان ۴۰۰ متر باشد، با چه ابعادی مساحت بخش مستطیلی حداکثر ممکن خواهدبود؟

۵۱. اگر a، b، و c ثابتهای مثبتی باشند، و اگر به‌ازای جمیع مقادیرمثبت x داشته‌باشیم $ax+(b/x)\geqslant c$، نشان دهیدکه $ab\geqslant c^{۲}/۴$.

۵۲. اگر a، b، و c ثابتهای مثبتی باشند، و اگر به‌ازای جمیع مقادیرمثبت x داشته‌باشیم $ax^{۲}+(b/x)\geqslant c$، ثابت‌کنید که $۲۷ab^{۲}\geqslant ۴c^{۳}$.

۵۳. نشان دهیدکه اگر $a>۰$، آنگاه به‌ازای جمیع مقادیر حقیقی x، $f(x)=ax^{۲}+۲bx+c\geqslant ۰$ اگر و تنها اگر $b^{۲}-ac\leqslant ۰$.

۵۴. نابرابری شوارتس. درمسألهٔ ۵۳، $f(x)$ را چنین در نظر بگیرید:

$$f(x)=(a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2+\cdots+(a_nx+b_n)^2$$

و نابرابری زیرموسوم به‌نابرابری شوارتس را به‌دست آورید

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2).$$

۵۵. درمسألهٔ ۵۴ ثابت کنیدکه برابری تنها هنگامی می‌تواند برقرار باشدکه عددی حقیقی چون x وجود داشته‌باشدکه به‌ازای هر $i=1, 2, \ldots, n$ داشته‌باشیم $b_i=-a_ix$.

۵۶. اگر x مثبت و m بزرگتر از یك باشد، ثابت‌کنید $x^m-1-m(x-1)$ منفی نیست.

۵۷. قاعدهٔ مثلثی ۳۶فوت و ارتفاع آن ۱۲فوت‌است. می‌خواهیم بخش مستطیل شکلی از آن جدا کنیم‌که مساحتش حداکثرممکن باشد. ابعاد مستطیل را بیابید. فرض کنید یکی ازاضلاع مستطیل برقاعدهٔ مثلث قرار داشته‌باشد.

۵۸. طول قاعدهٔ بزرگتر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی ۱۲ وطول یکی ازساقهای آن ۶ اینچ است. اگربخواهیم مساحت‌آن حداکثرممکن باشد، طول قاعدهٔ کوچکترچقدر باید باشد؟

۵۹. موضع دو ذره برمحور x عبارت‌اند از: $x_1=\sin t$ و $x_2=\sin[t+(\pi/3)]$. بیشترین فاصلهٔ بین آنها را بیابید.

۶۰. فرض‌کنید هزینهٔ راه بردن کشتی ملکهٔ الیزابت II در هر ساعت $a+bv^n$ باشد؛ a، b، و n ثابت مثبت‌اند، $n>1$، و v سرعت‌حرکت است. برای‌اینکه هزینهٔ سفراز لیورپول تا نیویورك مینیمم باشد، سرعت‌کشتی چقدر باید باشد؟

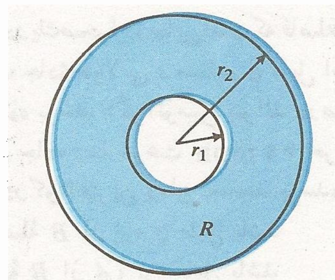
۶۱. می‌خواهیم باغچه‌ای بسازیم‌که به شکل قطاع مستدیر («تکهٔ کیك») با شعاع r و زاویهٔ مرکزی θ باشد. اگربخواهیم مساحت ثابت، ومحیط مینیمم باشد، r و θ را بیابید.

۶۲. چراغی دربالای مرکز یك میز به‌شعاع r فوت‌آویزان است. درهرنقطهٔ میز، نورنسبت مستقیم با کسینوس زاویهٔ تابش (زاویهٔ پرتونور با امتداد قائم) ونسبت معکوس با مربع فاصلهٔ نقطه تا چراغ دارد. چراغ را درچه ارتفاعی از میز نصب‌کنیم تا نور در لبهٔ میزحداکثرممکن باشد.

۶۳. فرض‌کنید مساحت ناحیهٔ R بین دو دایرهٔ هم مرکز به‌شعاع r_1 و r_2، A باشد (شکل ۷۱.۳).

الف) وقتی r_1 برابر با ۴ سانتیمتر باشد، و با آهنگ ۰٫۰۲ cm/sec افزایش یابد، و r_2 برابر با ۶ سانتیمتر باشد، و با آهنگ ۰٫۰۱ cm/sec افزایش یابد، A با چه سرعتی زیاد (یا کم) می‌شود؟

ب) فرض کنید در لحظهٔ $t=0$ داریم $r_1=3\,\text{cm}$ و $r_2=5\,\text{cm}$، و به‌ازای $t>0$، r_1 با آهنگ ثابت $a\,\text{cm/sec}$ و r_2 با آهنگ ثابت $b\,\text{cm/sec}$ افزایش یابد. اگر $a<b<(5/3)a$، چه موقع مساحت A بیشترین مقدار را دارد؟



۷۱.۳ ناحیهٔ مذکور درمسألهٔ ۶۳.

۶۴. فرض کنید V حجم ناحیهٔ D بین دوکرهٔ هم مرکز به شعاع r_1 و r_2، $r_1<r_2$، باشد. فرض‌کنید درلحظهٔ $t=0$، $r_1=r$ و $r_2=R$ اینچ است. وبرای $t>0$، r_1 با آهنگ ثابت $a\,\text{in/sec}$ و r_2 با آهنگ ثابت $b\,\text{in/sec}$ افزایش می‌یابد. اگر $a>b>ar^2/R^2$، چه موقع V بیشترین مقدار را دارد؟

۶۵. فرض‌کنید موضع یك ذره بریك خط‌مستقیم در زمان t برابر باشد با $s(t)=at-(1+a^4)t^2$. نشان دهید که وقتی a مثبت باشد، ذره درآغاز به طرف جلو می‌رود، ولی سرانجام به‌عقب برمی‌گردد. همچنین نشان دهید به‌ازای مقادیرمختلف a، حداکثر مسافتی‌که ذره می‌تواند طی‌کند ۱/۸ است.

۶۶. فرض کنید $h(x)=f(x)g(x)$ حاصلضرب دو تابع مثبتی باشدکه به‌ازای جمیع مقادیر x مشتق اول و دوم دارند.

الف) اگر f و g هردو در $x=a$ ماکسیمم موضعی داشته باشند، آیا h هم در $x=a$ یك ماکسیمم موضعی دارد؟

ب) اگر f و g هر دو در $x=a$ نقطهٔ عطف داشته‌باشند، آیا h هم در $x=a$ یك نقطهٔ عطف دارد؟

درهر دو مورد (الف) و (ب) یا دلیل بیاورید یایك مثال عددی به‌دست دهیدکه نشان دهدگزاره غلط است.

۶۷. درآزمایشی اعداد c_1، c_2، $\ldots$، c_n ثبت شده‌اند. به‌ازای چه مقداری از x مجموع

$$(c_1-x)^2+(c_2-x)^2+(c_3-x)^2+\cdots+(c_n-x)^2$$

به‌حداقل ممکن می‌رسد؟

۶۸. چهارنقطهٔ

$$\left(-2, -\tfrac{1}{2}\right),\ (0, 1),\ (1, 2),\ \text{و}\ (3, 3)$$

کمابیش نزدیک خط $y=mx+1$ واند. اگر (x_1, y_1)، ...، (x_4, y_4) مختصات نقاط مفروض باشند، m را چنان بیابید که مجموع

$$(y_1-mx_1-1)^2+(y_2-mx_2-1)^2+(y_3-mx_3-1)^2+(y_4-mx_4-1)^2$$

مینیمم باشد.

۶۹. میانگینهای هندسی و حسابی. میانگین هندسی n عدد مثبت a_1، a_2، ...، a_n ریشهٔ nام $a_1a_2\ldots a_n$؛ و میانگین عددی آنها $(a_1+a_2+\cdots+a_n)/n$ است. نشان دهید که اگر a_1، a_2، ...، a_{n-1} ثابت باشند، و $a_n=x$ بتواند هرعدد حقیقی مثبتی باشد، نسبت میانگین حسابی به میانگین هندسی مینیمم است وقتی که x میانگین حسابی a_1، a_2، ...، a_{n-1} باشد.

۷۰. فرض کنید که برای شرکتی، هزینهٔ تولید x واحد از کالایی در هفته $y=a+bx$ دلار باشد. این شرکت درهفته می‌تواند x واحد ازکالارا با بهای هرواحد $P=c-ex$ دلار بفروشد.

الف) مقدار تولید (برحسب واحد درهفته) چه باشد تاسود ماکسیمم شود؟

ب) قیمت فروش متناظرچیست؟

پ) با این مقدارتولید، سود هفتگی چقدراست؟

ت) اگردولت بخواهد برای هر واحد کالا که به‌فروش می‌رسد t دلار مالیات وضع کند، هرواحد کالا به‌چه بهایی باید به‌فروش برسد تا سود ماکسیمم شود؟ دربارهٔ اختلاف بین این بها وبهای قبل‌از وضع مالیات توضیح دهید.

۷۱. ذره‌ای در امتداد محور x با سرعت $v=dx/dt=f(x)$ حرکت می‌کند. نشان دهید شتاب برابراست با $f(x)f'(x)$.

۷۲. سرعت یك سنگ آسمانی هنگام ورود به‌جو زمین با $\sqrt{s}$ نسبت معکوس دارد. s فاصلهٔ سنگ تامرکز زمین برحسب کیلومتر است. نشان دهیدکه شتاب با s^2 نسبت معکوس دارد.

۷۳. حجم مکعبی وقتی طول یالش $20\ \mathrm{cm}$ باشد، با آهنگ $300\ \mathrm{cm^3/min}$ زیاد می‌شود. آهنگ تغییرطول یال را بیابید.

۷۴. شن با آهنگ $3\ \mathrm{ft^3/min}$ فرومی‌ریزد وکپهٔ مخروطی‌شکلی می‌سازدکه شعاع قاعده‌اش همیشه دوبرابرارتفاع آن است. مطلوب است آهنگ تغییرارتفاع درلحظه‌ای که ارتفاع ۱۰ فوت است.

۷۵. حجم کره‌ای با آهنگ $12\pi\ \mathrm{m^3/min}$ کم می‌شود. در لحظه‌ای که شعاع ۲۰ متراست، آهنگ تغییرشعاع و مساحت رویهٔ کره را بیابید. همچنین تعیین کنیدکه تغییرشعاع ومساحت رویه در ۶ ثانیه بعد تقریباً چقدراست.

۷۶. درزمان معینی هواپیمای A باسرعت $500\ \mathrm{mph}$ درارتفاع ثابتی درحال پرواز است. در همان زمان هواپیمای B که درست در بالای هواپیمای A است با سرعت $700\ \mathrm{mph}$ برمسیری پرواز می‌کندکه مسیر A را درنقطه‌ای چون C قطع می‌کندکه ۴ مایل از A و دومایل از B فاصله دارد.

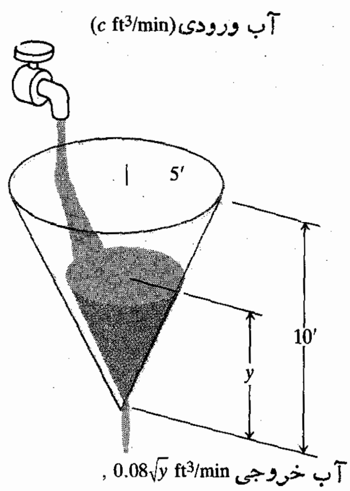
الف) در لحظهٔ مذکور فاصلهٔ بین دو هواپیما با چه سرعتی کم می‌شود؟

ب) اگر دو هواپیما باهمین سرعتها و برهمین مسیرها به پرواز خود ادامه دهند، چقدر به‌یکدیگرنزدیك می‌شوند؟

۷۷. نقطه‌ای برخم $y^2=x^3$ چنان حرکت می‌کند که با آهنگ ثابت ۲ واحد در ثانیه فاصله‌اش از مبدأ زیاد می‌شود. در $(2, 2\sqrt{2})$، dx/dt را بیابید.

۷۸. مساحت مثلثی که ازنردبان، دیوار و زمین موردبحث درمثال ۳ ازبخش۶٫۳ تشکیل‌می‌شود، وقتی که $x=17\sqrt{2}$ باچه سرعتی تغییر می کند؟

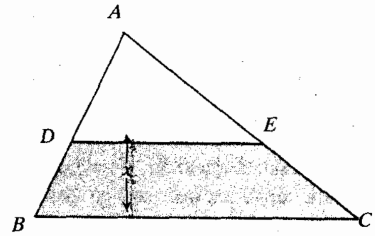
۷۹. فرض‌کنید ته مخروط درشکل ۷۲٫۳ سوراخ کوچکی دارد وآب وقتی عمقش y است، ازآن باآهنگ $0.08\sqrt{y}\ \mathrm{ft^3/min}$ خارج می‌شود. و نیز فرض کنید آب با آهنگ ثابت $c\ \mathrm{ft^3/min}$ وارد مخروط می‌شود. وقتی عمق آب $6.25\ \mathrm{ft}$ است، مشاهده می‌شودکه با آهنگ $0.02\ \mathrm{ft/min}$ بر عمق آن اضافه می‌شود. آیا ظرف پر می‌شود؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.



۷۲٫۳ مخزن مخروطی مذکور درمسألهٔ ۷۹.

۸۰. شیئی را از زمین با سرعت اولیهٔ v_0 در امتداد قائم به‌بالا پرتاب می‌کنیم. وقتی شیء به فاصلهٔ $s\geqslant R$ از مرکز زمین برسد، سرعت آن $\sqrt{v_0^2-2gR[1-(R/s)]}$ است. (R شعاع زمین است.) نشان دهیدکه شتاب با s^2 نسبت معکوس دارد.

۸۱. درمثلث ABC در شکل ۷۳٫۳ پاره‌خط DE با قاعدهٔ BC



۷۳۰۳ مثلث مذکور درمسألهٔ ۸۱.

موازی است، و به‌فاصلهٔ x واحد دربالای قاعده قرار دارد. نشان دهید که مشتق مساحت $BCED$ نسبت به x با طول DE برابر است.

۸۲. دونقطهٔ A و B به‌ترتیب برمحور x ومحور y چنان حرکت می‌کنندکه فاصلهٔ مبدأ تا خط AB، r (برحسب اینچ)، ثابت باقی می‌ماند. وقتی‌که $OB=۲r$، و B با آهنگ ۰ر۳۲ in/sec به طرف O در حرکت باشد، OA بـا چه سرعتی تغییرمی‌کند وآیا OA افزایش می‌یابد یا کاهش؟

۸۳. دریك‌لحظه دوکشتی A و B از O شروع به‌حرکت می‌کنند. کشتی A باسرعت ۱۵ mph به‌طرف شرق می‌رود. کشتی B در مسیر مستقیمی حرکت می‌کند کـه با مسیرکشتی A زاویـهٔ ۶۰° می‌سازد، و سرعت آن ۲۰ mph است. ایـن‌کشتیها در پایان ۲ ساعت باچه سرعتی ازهم دور می‌شوند؟

۸۴. آب بـا آهنگ $۲\ \mathrm{ft^۳/min}$ به یك مخزن مخروطی شکل (رأس در پایین است) می‌ریزد. وقتی عمق‌آب ۵ ft است، سطح آب باچه سرعتی بالا می‌آید؟ شعاع قاعدهٔ مخزن ۳ ft، و ارتفاع آن ۱۰ ft است.

۸۵. خم $x^۲=(y+۱)^۳$ ازنقاط $(۱, ۰)$ و $(-۱, ۰)$ می‌گذرد. آیا قضیهٔ رول این نتیجه‌گیری را توجیه می‌کندکه به‌ازای xی از بازهٔ $-۱\leqslant x\leqslant ۱$، $dy/dx=۰$؟ برای پاسخ خود دلیل اقامه کنید.

۸۶. الف) اگر $a<۰<b$، و $f(x)=x^{-۱/۳}$، نشان دهید مقداری برای c وجود نداردکه در معادلهٔ (۱) بخش ۷۰۳ صدق‌کند. با رسم یك نمودار مطلب را توضیح دهید.

ب) اگـر $a<۰<b$، و $f(x)=x^{۱/۳}$، نشان دهیـد مقداری برای c وجود داردکـه درمعادلهٔ (۱) بخش ۷۰۳ صدق‌کند ــ حتی اگراین تابع‌در $x=۰$ مشتق نداشته‌باشد. با رسم یك نمودارمطلب را توضیح دهید.

۸۷. نمودار $y=\sin x\sin(x+۲)-\sin^۲(x+۱)$ را در بازهٔ $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ رسم‌کنید. (راهنمایی: ابتدا y' را بیابید.)

۸۸. **ماشین حساب** نشان دهیدکه معادلهٔ

$$f(x)=۲x^۳-۳x^۲+۶x+۶=۰$$

دقیقاً یك ریشهٔ حقیقی دارد؛ مقدارآن رابادقت هرچه بیشتر بیابید. (راهنمایی: $f(-۱)=-۵$، $f(۰)=+۶$، و به‌ازای هرعدد حقیقی x، $f'(x)>۰$.)

۸۹. اگر به‌ازای همهٔ xها، $f'(x)\leqslant ۲$، f حداکثرچقدرمی‌تواند بربازهٔ $[۰, ۶]$ افزایش یابد؟

۹۰. فرض‌کنید f بر $[a, b]$ پیوسته ومشتق‌پذیرباشد. نشان دهید که اگـر بر $(a, c]$، $f'(x)\leqslant ۰$ و بـر $[c, b)$، $f'(x)\geqslant ۰$، $a<c<b$، آنگاه بـر $[a, b]$، $f(x)$ هرگز کمتر از $f(c)$ نیست.

۹۱. الف) نشان دهیدکه به‌ازای هرمقدار x،

$$-\frac{۱}{۲}\leqslant\frac{x}{۱+x^۲}\leqslant\frac{۱}{۲}.$$

ب) فرض‌کنید f تابعی باشدکه مشتقش با

$$f'(x)=\frac{x}{۱+x^۲}$$

تعریف می‌شود. ازنتیجهٔ مذکور در(الف) استفاده‌کنیدو نشان دهیدکه به‌ازای هر a و b یا $a\neq b$، داریم

$$|f(b)-f(a)|\leqslant\frac{۱}{۲}|b-a|.$$

۹۲. حدهای زیررا محاسبه‌کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۲\sin ۵x}{۳x}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\sin ۵x\cot ۳x$

پ) $\lim\limits_{x\to ۰} x\csc^۲\sqrt{۲x}$

ت) $\lim\limits_{x\to\pi/۲}(\sec x-\tan x)$

ث) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{x-\sin x}{x-\tan x}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sin x^۲}{x\sin x}$

چ) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sec x-۱}{x^۲}$

ح) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x^۳-۸}{x^۲-۴}$

۹۳. درمورد حدهای زیرقاعدهٔ هوپیتال کارساز نیست. با روشی دیگرآنها را بیابید.

الف) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x}+5}$

ب) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x+7\sqrt{x}}$.

۹۴. آزمون مشتق دوم. آزمون مشتق‌دوم درمورد ماکسیمم ومینیمم موضعی (بخش ۴.۳) حاکی است که:

اگر $f'(c)=0$ و $f''(c)<0$، آنگاه در $x=c$، f یك ماکسیمم موضعی دارد.

اگر $f'(c)=0$ و $f''(c)>0$، آنگاه در $x=c$، f یك مینیمم موضعی دارد.

برای اثبات این آزمون، فرض‌کنید $\epsilon=(1/2)|f''(c)|$ و با استفاده ازاین واقعیت که

$$f''(c)=\lim_{h\to0}\frac{f'(c+h)-f'(c)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f'(c+h)}{h}$$

نتیجه بگیرید که به‌ازای یك $\delta>0$، داریم

$$0<|h|<\delta \Rightarrow \frac{f'(c+h)}{h}<f''(c)+\epsilon<0.$$

پس $f'(c+h)$ به ازای $-\delta<h<0$ مثبت و به ازای $0<h<\delta$ منفی است.

۹۵. فرمول تیلر. تعمیمهای قضیهٔ مقدارمیانگین در بخش ۹.۳ حالتهای خاصی از فرمولی هستند که در ۱۷۱۲ توسط بروك تیلر منتشرشد. این‌فرمول را جیمز گرگوری(۱۶۳۸–۱۶۷۵) در ۱۶۷۰ می‌دانست ولی آن را منتشرنکرد؛ چند سال بعد لایب‌نیتس آن را مستقلاً کشف کرد، ولی او هم آن را انتشار نداد. بالاخره این فرمول مجدداً توسط ژان برنولی کشف شد وآن را درسال۱۶۹۴ منتشرکرد. اما امروزه آن را فرمول تیلرمی‌نامند. قضیه این است: فرض‌کنید $f(x)$ و مشتقات از مرتبهٔ ۱ تا n آن یعنی، $f'(x)$، $f''(x)$، ...، $f^{(n)}(x)$ بر $a\leqslant x\leqslant b$ پیوسته باشند، وفرض کنید $f^{(n+1)}(x)$ به‌ازای $a<x<b$، وجود داشته‌باشد. اگر

$$F(x)=f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)-\frac{(x-a)^2f''(a)}{2}-\dots-\frac{(x-a)^nf^{(n)}(a)}{n!}-k(x-a)^{n+1}$$

که در آن k چنان انتخاب شده‌است‌که $F(b)=0$، نشان دهید

الف) $F(a)=F(b)=0$

ب) $F'(a)=F''(a)=\dots=F^{(n)}(a)=0$

پ) اعدادی چون c_1، c_2، c_3، ...، c_{n+1} وجود دارند به‌قسمی که

$$a<c_{n+1}<c_n<\dots<c_2<c_1<b$$

و

$$F'(c_1)=0=F''(c_2)=F'''(c_3)=\dots=F^{(n)}(c_n)=F^{(n+1)}(c_n+1).$$

ت) ازاین‌مطالب نتیجه بگیرید که مانند قسمت(پ) به‌ازای c_{n+1} داریم $k=[f^{(n+1)}(c_{n+1})]/(n+1)!$؛ یا به‌عبارت دیگر چون $F(b)=0$، به‌ازای c_{n+1}ی که در نابرابری $a<c_{n+1}<b$ صدق کند داریم

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}(b-a)^{(n+1)}.$$

۹۶. درمسألهٔ ۹۵، فرمول تیلر را برای $f(b)$ بنویسید، ولی به جای b، x قراردهید. سپس با استفاده‌ازفرمول $f(x)=1/(x-1)$، $a=0$، و $n=3$، یك تقریب درجهٔ سوم برای $1/(x-1)$ بیابید. وقتی $|x|<0.1$، کران بالای اندازهٔ خطای این تقریب را پیداکنید.

۹۷. براورد کردن عکس اعداد. با استفاده از روش نیوتن (بخش ۹.۲)، وانتخاب $f(x)=(1/x)-a$، می‌توانیم عکس یك عدد مثبت a را بدون تقسیم‌کردن بر a، براوردکنیم.

الف) نشان دهیدکه فرمول مربوط به‌این روش،

$$x_{n+1}=x_n(2-ax_n)$$

را به‌دست می‌دهد که درآن x_n و x_{n+1} دوتقریب متوالی $1/a$ هستند.

ب) برای تعیین بازه‌ای از مقادیرx که درآن حدس اولیه و مثبت x_0 به $1/a$ منجرخواهد شد، کارهای زیررا انجام دهید

i) نمودار f را بکشید، و ببینید برای $x<0$ جریان ازچه قراراست. طول ازمبدأ نمودارچیست؟

ii) نشان‌دهیدکه اگر $x_0>2/a$، آنگاه $x_1<0$، اما اگر $0<x_0<2/a$، آنگاه $x_1>0$. اگر $x_0=2/a$ چه اتفاق می‌افتد؟

iii) بازهٔ مناسب برای انتخاب x_0 چیست؟

۴

انتگرالگیری

چشم‌انداز

یکی از اولین هنرهای حساب دیفرانسیل و انتگرال پیش‌بینی مکان آیندهٔ یك جسم متحرك به کمك مکان آن در لحظات پیشین و تابع سرعتش بود. ما امروزه به این امر به عنوان یکی از مواردی می‌نگریم که در آنها توابع را از اطلاعاتی که در بارهٔ مشتقاتشان داریم تعیین می‌کنیم. ما سرعت اجسامی را که شتابشان معلوم است محاسبه می‌کنیم. میزان جمعیت در آینده را با استفاده از جمعیت فعلی و آهنگ تغییر آن حساب می‌کنیم. از آهنگ تلاشی فضولات رادیواکتیو مدت زمانی را می‌یابیم که پس از آن فضولات بی‌ضرر می‌شوند.

نظریهٔ یافتن توابعی که مشتقاتشان معلوم‌اند قسمتی از **حساب انتگرال** است. انتگرال گرفتن از یك تابع، یافتن همهٔ توابعی است که مشتقشان آن تابع است، یا اصطلاحاً یافتن همهٔ «پادمشتقها»ی تابع مفروض است. لغت انتگرال گرفتن از معنی دیگری نیز دارد که تقریباً به همان معنی غیرفنی آن در زبان انگلیسی یعنی «به‌دست آوردن مجموع یا کل» چیزی است. وقتی از لغت انتگرالگیری به معنی مجموعیابی استفاده می‌کنیم، منظورمان فرایندی ریاضی است که ما را قادر می‌سازد مساحت ناحیه‌ای را که مرز خمیده دارد، حجم جسمی در فضا، نیرویی که آب پشت سد به سد وارد می‌کند، یا مقدار انرژی لازم برای بردن یك ماهواره به مدار را محاسبه کنیم. چنانکه بعداً خواهیم دید این دو نوع انتگرالگیری ارتباط تنگاتنگی با یکدیگر دارند.

در این فصل روشی اسلوبمند برای انتگرالگیری می‌یابیم و قضایای اصلی لایب‌نیتس و نیوتن را عرضه می‌کنیم که ارتباط میان پادمشتقها و مجموعیابی را مشخص می‌کنند. این فصل بحث قبلی ما در بارهٔ مشتقها را کامل می‌کند و ما را برای مطالعهٔ کاربردهای انتگرالگیری در فصل ۵ آماده می‌سازد.

۱.۴ انتگرال نامعین

این بخش را با یافتن $v(t)$، تابع سرعت جسمی که از حال سکون با شتاب ثابت $۹٫۸\ \mathrm{m/sec^2}$ سقوط می‌کند آغاز می‌کنیم. برای این منظور معادلهٔ $dv/dt = ۹٫۸$ را با شرط $v(0) = 0$ حل می‌کنیم. این معادله یکی از معادلات دیفرانسیلی (معادلاتی که در آنها مشتق وجود دارد) است که با معکوس کردن فرمولهای آشنای مشتق قابل حل است. برخی از این‌گونه معادلات را حل می‌کنیم و به تمرین یافتن پادمشتق می‌پردازیم. مجموعهٔ همهٔ پادمشتقهای یك تابع را **انتگرال نامعین** آن تابع می‌نامیم.

تعیین سرعت

شتاب گرانش در نزدیکی سطح زمین $۹٫۸\ \mathrm{m/sec^2}$ است. یعنی آهنگ تغییر سرعت vی جسمی که در نزدیك سطح زمین و در خلأ سقوط آزاد می‌کند برابر است با

$$\frac{dv}{dt} = ۹٫۸\ \mathrm{m/sec^2}. \qquad (۱)$$

اگر جسم از حال سکون رها شود، سرعت آن پس از t ثانیه چقدر است؟

برای تعیین سرعت، v، باید از تنها دو مطلبی که در بارهٔ v به صورت تابعی از t می‌دانیم بهره بگیریم. یعنی اینکه:

۱. $\frac{dv}{dt}=۹٫۸$ (شتاب $۹٫۸\ \mathrm{m/sec^۲}$ است)

۲. $v(۰)=۰$ (سرعت اولیهٔ جسم صفر است)

کار را با معادلهٔ شتاب شروع می کنیم و می‌پرسیم «چه توابعی از t مشتقشان دقیقاً برابر با ۹٫۸ است؟» یکی از این توابع، بنا به‌تجربه، این است

$$v=۹٫۸t\,.$$

اما جوابهای دیگری نیز وجود دارند، زیرا

$$v=۹٫۸t+C \tag{۲}$$

به‌ازای هر مقداری از ثابت C یك جواب است.

آیا معادلهٔ (۲) را می‌توان معادلهٔ همهٔ توابعی دانست که مشتقشان ۹٫۸ است؟ پاسخ مثبت است، زیرا نتیجهٔ ۳ از قضیهٔ مقدار میانگین (بخش ۷.۳) حاکی است که تفاوت توابع دارای مشتق ۹٫۸ با تابع $۹٫۸t$، تنها یك مقدار ثابت است.

پس از اینکه ثابت شد سرعت یك جسم در حال سقوط از رابطهٔ زیر به‌ازای مقدار مشخصی از C به‌دست می‌آید

$$v(t)=۹٫۸t+C\,. \tag{۳}$$

این سؤال مطرح می‌شود که این مقدار مشخص C در این مسألهٔ خاص کدام‌است؟ برای پاسخ‌دادن به‌این‌سؤال، $t=۰$ را درمعادلهٔ (۳) قرارمی‌دهیم و با استفاده از این‌واقعیت که $v(۰)=۰$، چنین به‌دست می‌آوریم

$$۰=۹٫۸(۰)+C \quad \text{یا} \quad C=۰\,.$$

بنابراین، سرعت جسم درحال سقوط t ثانیه پس‌از رهاشدن چنین است

$$v(t)=۹٫۸t\ \mathrm{m/sec}\,. \tag{۴}$$

معادله‌های دیفرانسیل

ازنظر ریاضی، مسأله تعیین سرعت یك جسم درحال سقوط از روی شتابش حالت خاصی‌است از تعیین یك تابع $y=F(x)$ که مشتقش را معادلهٔ زیر روی بازه‌ای از مقادیر x به‌دست می‌دهد

$$\frac{dy}{dx}=f(x). \tag{۵}$$

معادله‌ای نظیرمعادلهٔ (۵) را که درآن مشتق وجود دارد **معادله دیفرانسیل** می‌نامند.

معادلهٔ (۵)، dy/dx را به‌صورت تابعی از x به‌دست می‌دهد. در یك معادلهٔ دیفرانسیل پیچیده‌تر مانند معادله زیر، dy/dx می‌تواند تابعی از y هم باشد

$$\frac{dy}{dx}=۲xy^۲.$$

معادلهٔ دیفرانسیل می‌تواند شامل مشتقات مراتب بالاترهم باشد

$$\frac{d^۲y}{dx^۲}+۶xy\frac{dy}{dx}+۳x^۲y^۳=۰\,.$$

اما فعلاً تنها به‌معادلاتی می‌پردازیم که شامل یك تك‌مشتق مرتبهٔ اول‌اند. معادلات دیفرانسیل کلیتر را درفصل ۲۰ بررسی می‌کنیم.

تابع $F(x)$ را یك **جواب** معادلهٔ دیفرانسیل $dy/dx=f(x)$ روی بازهٔ I می‌نامیم هرگاه F درهرنقطهٔ I مشتق‌پذیر باشد ودرهر نقطه از I داشته‌باشیم

$$\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$$

تابع $F(x)$ را یك **پادمشتق** $f(x)$ نیز می‌نامند.

حل‌کردن معادلهٔ $dy/dx=f(x)$ دربازهٔ I به‌معنی یافتن همهٔ توابعی است‌که روی I تعریف بشوند و پادمشتق f باشند. بازه می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. درمثال جسم درحال‌سقوط، معادلهٔ $dv/dt=۹٫۸$ را روی بازهٔ $t\geqslant ۰$ با تعیین **جواب عمومی** $v(t)=۹٫۸t+C$ حل کردیم. سپس مسأله را با **شرط اولیهٔ** $v(۰)=۰$ حل‌کردیم و**جواب خاص** $v(t)=۹٫۸t$ را از **جواب عمومی** برگزیدیم.

انتگرال نامعین

اگر $F(x)$ پادمشتق $f(x)$ باشد، آنگاه $F(x)+C$ به‌ازای هر مقدارثابت C یك‌پادمشتق $f(x)$ است زیرا اگر $dF/dx=f$، آنگاه

$$\frac{d}{dx}(F+C)=\frac{dF}{dx}+\frac{dC}{dx}=f(x)+۰=f(x)\,. \tag{۶}$$

آیا جز پادمشتقهایی‌که فرمول $F(x)+C$ به‌دست می‌دهد، f پادمشتق دیگری هم دارد؟ نتیجهٔ ۳ی قضیهٔ مقدار میانگین چنین بیان‌می‌کند: «خیر. هرپادمشتق f از این‌فرمول به‌ازای‌مقدارخاصی از C به‌دست می‌آید». بنابراین اگر $F(x)$ جوابی برای $dy/dx=F(x)$ باشد، فرمول $y=F(x)+C$ همهٔ جوابها را به‌دست می‌دهد.

مجموعهٔ همهٔ پادمشتقهای یك‌تابع $f(x)$ را **انتگرال‌نامعین** f **نسبت‌به** x می‌نامند. نماد انتگرال نامعین چنین است

$$\int f(x)\,dx\,.$$

هرگاه‌فرمول $F(x)+C$ همهٔ پادمشتقهای f را به‌دست‌دهد، آن را چنین مشخص می‌کنیم

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C\,. \tag{۷}$$

این معادله را به‌دوصورت می‌توان خواند: «انتگرال $f(x)$ نسبت به x برابر است با $F(x)$ به‌علاوهٔ C» یا «انتگرال $f(x)dx$

برابر است با $F(x)$ به علاوهٔ C.» نماد $\int$ **علامت انتگرال** است. تابع f **انتگرالدهٔ** انتگرال، و C **ثابت انتگرالگیری** است. dx نشان می‌دهد که **متغیر انتگرالگیری** x است.

درمثال جسم درحال سقوط، دریافتیم که انتگرال ۹٫۸ نسبت به t برابراست با $9.8t+C$:

$$\int 9.8\, dt = 9.8t + C.$$

دراینجا انتگرالده، تابع ثابت ۹٫۸ و متغیر انتگرالگیری، t است.

مثال ۱ معادلهٔ دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2.$$

حل: بنا به تجربه می‌دانیم که

$$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2.$$

بنابراین

$$y = \int 3x^2\, dx = x^3 + C. \quad \blacksquare$$

جداکردن متغیرها

اگر در یک معادلهٔ دیفرانسیل، dy/dx هم برحسب x وهم برحسب y بیان شود، معادله‌ای داریم که یک متغیر را صریحاً برحسب دیگری به‌دست نمی‌دهد. حل معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx} = x^2\sqrt{y} \qquad (8)$$

به‌معنی یافتن یک تابع $y=f(x)$ است که مشتق آن، dy/dx، درهر x خاصی مساوی x^2 برابرمقدار $\sqrt{y}$ در x باشد. معادلاتی نظیر (۸) چنانکه در فصل ۲۰ خواهیم دید معمولاً جواب دارند، اما جوابها همواره بسادگی به‌دست نمی‌آیند. روشی که گاه به‌کار می‌رود چنین است که همهٔ جملات شامل y و dy/dx را به یک طرف معادله و همهٔ جملات شامل x را به طرف دیگر بریم. این روش را **جداکردن متغیرها** می‌نامیم. اگر بتوانیم متغیرها را جدا کنیم، چنانکه درمثال زیردیده می‌شود، می‌توانیم y را با انتگرالگیری تعیین کنیم.

مثال ۲ معادلهٔ دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$\frac{dy}{dx} = x^2\sqrt{y}, \quad y > 0. \qquad (8)$$

حل: برای جداکردن متغیرها طرفین معادله را بر $\sqrt{y}$ تقسیم می‌کنیم

$$y^{-1/2}\frac{dy}{dx} = x^2. \qquad (9)$$

با این فرض که معادلهٔ اصلی y را به‌صورت تابعی مشتقپذیر از x تعریف می‌کند، می‌بینیم که طرف چپ معادلهٔ (۹) مشتق تابع $2y^{1/2}$ نسبت به x است. طرف راست مشتق $x^3/3$ نسبت به x است. بنابراین با انتگرالگیری از دوطرف معادلهٔ (۹) نسبت به x داریم

$$\int\left(y^{-1/2}\frac{dy}{dx}\right)dx = \int x^2\, dx$$

$$2y^{1/2} + C_1 = \frac{x^3}{3} + C_2$$

$$2y^{1/2} = \frac{x^3}{3} + C$$

که درآن C_1 و C_2 ادغام شده و به‌صورت یک ثابت $C = C_2 - C_1$ درآمده‌اند. هرگاه بتوان دسته‌ای جواب را با یک ثابت توصیف کرد نیازی به توصیف آن با دو ثابت نیست، زیرا با استفاده از دو ثابت به انتگرالهای نامعین کلیت بیشتری بخشیده نمی‌شود. ■

فرمولهای انتگرالگیری

همچنانکه در بالا دیدیم برای انتگرالگیری باید بتوان پاسخ را حدس زد. اما به‌کمک فرمولهای صفحهٔ بعد در بسیاری از موارد می‌توان کمتر به حدس تکیه کرد. در این فرمولها u و v توابع مشتقپذیر از x اند، و a، n، و C ثابت‌اند.

شرح این فرمولها چنین است:

۱. انتگرال مشتق یک تابع مشتقپذیر u برابر است با u به‌علاوهٔ یک ثابت دلخواه.

۲. یک ثابت را می‌توان از زیرنماد انتگرالگیری بیرون آورد. (توجه: عباراتی را که توابعی از متغیر انتگرالگیری‌اند نمی‌توان از زیرنماد انتگرالگیری بیرون آورد.)

۳. انتگرال مجموع دوتابع برابر مجموع انتگرالهای آنهاست. این مطلب را می‌توان به مجموع هر تعداد متناهی از توابع تعمیم داد:

$$\int(u_1+u_2+\dots+u_n)\,dx = \int u_1\,dx + \int u_2\,dx + \dots + \int u_n\,dx.$$

۴. اگر $n \neq -1$، انتگرال $u^n\, du/dx$ با افزودن ۱ به نما، تقسیم نتیجه برنمای جدید، وافزودن یک ثابت دلخواه به‌حاصل به‌دست می‌آید.

فرمول (۱) بیان دیگری است از تعریف انتگرال نامعین به‌عنوان مجموعهٔ همهٔ توابع دارای یک مشتق مفروض. این فرمول حاکی است که هر تابعی که مشتقش du/dx باشد باید با فرمول $u(x)+C$، به‌ازای مقدارخاصی از C، مشخص شود. فرمولهای دیگر از «معکوس کردن» فرمولهای مشتق فصل ۲ به‌دست می‌آیند. در اینجا این فرمولهای انتگرالگیری را به دست نمی‌آوریم اما باچند مثال چگونگی استفاده ازآنها را در به‌دست‌آوردن انتگرالهای نامعین نشان می‌دهیم.

فرمولهای انتگرالگیری

	انتگرال	مشتق نظیر
۱.	$\int \frac{du}{dx}\,dx = u(x)+C$	$\frac{d}{dx}(u(x)+C)=\frac{du}{dx}$
۲.	$\int au(x)\,dx = a\int u(x)\,dx$ (اگر a ثابت باشد.)	$\frac{d}{dx}(au)=a\frac{du}{dx}$
۳.	$\int (u(x)+v(x))\,dx = \int u(x)\,dx + \int v(x)\,dx$	$\frac{d}{dx}(u+v)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$
۴.	$\int u^n \frac{du}{dx}\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C$ $(n\neq -1)$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right)=u^n\frac{du}{dx}$

مثال ۳

$$\int (5x-x^2+2)\,dx = 5\int x\,dx - \int x^2\,dx + \int 2\,dx$$

$$=\frac{5}{2}x^2-\frac{x^3}{3}+2x+C.$$

$$\int x^{1/2}\,dx=\frac{x^{3/2}}{3/2}+C=\frac{2}{3}x^{3/2}+C.$$

$$\int (x^2+5)^2\,dx=\int (x^4+10x^2+25)\,dx$$

$$=\frac{x^5}{5}+\frac{10}{3}x^3+25x+C.$$

$$\int (x^2+5)^2 2x\,dx=\frac{(x^2+5)^3}{3}+C.$$

برای به‌دست‌آوردن انتگرال رابطهٔ آخر، فرمول

$$\int u^n\frac{du}{dx}\,dx=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C,\quad n\neq -1$$

را به‌ازای $u=x^2+5$، $n=2$، و $du/dx=2x$ به‌کاربرده‌ایم. ■

مثال ۴ تعدیل‌کردن انتگرالده به‌کمک یك ثابت. انتگرال زیر را حساب کنید

$$\int x^3 dx.$$

حل: می‌دانیم که

$$\frac{d}{dx}(x^4)=4x^3$$

بنابراین

$$\int 4x^3\,dx=x^4+C.$$

از این‌رو انتگرال مطلوب را می‌توان چنین حساب کرد: انتگرالده را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$x^3=\frac{1}{4}\cdot 4x^3$$

و ۱/۴ را از زیرنماد انتگرال بیرون می‌آوریم

$$\int x^3\,dx=\int \frac{1}{4}\cdot 4x^3\,dx=\frac{1}{4}\int 4x^3\,dx$$

$$=\frac{1}{4}(x^4+C)$$

$$=\frac{1}{4}x^4+C'$$

که درآن $C'=C/4$. ■

خط‌مشی اسلوبمند حدس و بررسی

در حل مثالهایی که تاکنون دیده‌ایم کامیاب بوده‌ایم زیرا تجربهٔ ما دربارهٔ مشتق این امکان را به‌ما داد که پاسخها را حدس بزنیم. اما اگر نتوانیم حدس بزنیم چه؟

برای به‌دست‌آوردن انتگرال تابع مفروضی که نمی‌توان بی‌درنگ انتگرال آن را حساب کرد روندی وجود دارد. برای استفاده از این‌روند باید تجربهٔ کافی داشته باشیم تا دربارهٔ پاسخ حدس مناسبی بزنیم اما ضرورتی ندارد حدسمان در وهلهٔ نخست درست باشد. مراحل این روند چنین‌اند

۱. حدس‌زدن یك پاسخ مناسب.
۲. مقایسهٔ مشتق این پاسخ با انتگرالده.
۳. تصحیح این پاسخ حدسی.

۴. بررسی نتیجه و انجام تصحیحات درصورت نیاز.

۵. افزودن C.

این روند را درمثال بعد به‌کار می‌بریم. پس از بررسی بیشتر یاد مشتقها، در بخش ۴.۳ با روش اسلوبمندتری برای انتگرالگیری، یعنی انتگرالگیری به‌کمک جانشانی، آشنا می‌شویم.

مثال ۵ انتگرال زیر را حساب کنید

$$\int\sqrt{2x+1}\,dx.$$

حل: تابعی را می‌جوییم که مشتقش $(2x+1)^{1/2}$ باشد. نمای این مشتق را با ۱ جمع می‌کنیم و $(2x+1)^{3/2}$ را می‌آزماییم. مشتق $(2x+1)^{3/2}$ چنین است

$$\frac{3}{2}(2x+1)^{1/2}\cdot 2=3(2x+1)^{1/2}.$$

فرق این با انتگرالدهٔ $(2x+1)^{1/2}$ درضریب ۳ است. یعنی تابع حدسی ما ۳ برابر بزرگتر است. این تابع را بر ۳ تقسیم می‌کنیم و تابع حدسی جدید زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\frac{1}{3}(2x+1)^{3/2}.$$

مشتق این تابع جدید چنین است

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}(2x+1)^{1/2}\cdot 2=(2x+1)^{1/2}$$

و این همان تابعی است که ما انتگرالش را می‌جستیم. پس

$$\int\sqrt{2x+1}\,dx=\frac{1}{3}(2x+1)^{3/2}+C. \qquad \blacksquare$$

مسأله‌ها

درمسأله‌های ۱–۱۲، انتگرالها را حساب کنید. تا آنجا که می‌توانید این‌کار را بدون نوشتن انجام دهید.

۱. الف) $\int 2x\,dx$

ب) $\int 3\,dx$

پ) $\int (2x+3)\,dx$

۲. الف) $\int 6x\,dx$

ب) $\int -2\,dx$

پ) $\int (6x-2)\,dx$

۳. الف) $\int 3x^2\,dx$

ب) $\int x^2\,dx$

پ) $\int (x^2+2x)\,dx$

۴. الف) $\int 8x^7\,dx$

ب) $\int x^7\,dx$

پ) $\int (x^7-6x)\,dx$

۵. الف) $\int -3x^{-4}\,dx$

ب) $\int x^{-4}\,dx$

پ) $\int (x^{-4}+2x+3)\,dx$

۶. الف) $\int \frac{1}{x^2}\,dx$

ب) $\int \frac{-5}{x^2}\,dx$

پ) $\int \left(2-\frac{5}{x^2}\right)dx$

۷. الف) $\int \frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx$

ب) $\int 4\sqrt{x}\,dx$

پ) $\int (x^2-2\sqrt{x})\,dx$

۸. الف) $\int \frac{3}{2}\sqrt{x+1}\,dx$

ب) $\int \sqrt{x+1}\,dx$

پ) $\int \sqrt{5x+1}\,dx$

۹. الف) $\int (2x-1)\,dx$

ب) $\int (2x-1)^2\,dx$

پ) $\int (2x-1)^3\,dx$

۱۰. الف) $\int 5(x-2)^4\,dx$

ب) $\int (x-2)^4\,dx$

پ) $\int 2(x-2)^4\,dx$

۱۱. الف) $\int 2(x^2-3)2x\,dx$

ب) $\int (x^2-3)x\,dx$

۱۲. الف) $\int 2(2x^3+1)6x^2\,dx$

ب) $\int (2x^3+1)x^2\,dx$

درمسأله‌های ۱۳–۳۶، معادلات دیفرانسیل را حل کنید.

۱۳. $\dfrac{dy}{dx}=2x-7$

۱۴. $\dfrac{dy}{dx}=7-2x$

۱۵. $\dfrac{dy}{dx}=x^2+1$

۱۶. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x^2},\quad x>0$

۱۷. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-5}{x^2},\quad x>0$

۱۸. $\dfrac{dy}{dx}=3x^2-2x+5$

۱۹. $\dfrac{dy}{dx}=(x-2)^4$

۲۰. $\dfrac{dy}{dx}=(5x-2)^4$

۲۱. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x^2}+x,\quad x>0$

۲۲. $\dfrac{dy}{dx}=x+\sqrt{2x}$

۲۳. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y},\quad y>0$

۲۴. $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{\dfrac{x}{y}},\quad y>0$

۲۵. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+1}{y-1},\quad y>1$

۲۶. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{y-1}},\quad y>1$

۲۷. $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{xy},\quad x>0,\quad y>0$

۲۸. $\dfrac{dy}{dx}=x\sqrt{x^2+1}$

۲۹. $\dfrac{dy}{dx}=2xy^2,\quad y>0$

۳۰. $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt[3]{y/x},\quad x>0\quad y>0$

۳۱. $x^3\dfrac{dy}{dx}=-2,\quad x>0$

۳۲. $x^2\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{y^2+\sqrt{y}},\quad x>0,\quad y>0$

۳۳. $\dfrac{ds}{dt}=3t^2+4t-6$

۳۴. $\dfrac{dx}{dt}=8\sqrt{x},\quad x>0$

۳۵. $\dfrac{dy}{dt}=(2t+t^{-1})^2,\quad t>0$

۳۶. $\dfrac{dy}{dz}=\sqrt{(z^2-z^{-2})^2+4},\quad z>0$

۳۷. شتاب گرانش در روی ماه ۱ر۶ $\mathrm{m/sec^2}$ است. اگر سنگی

در حفره‌ای از ماه سقوط کند، سرعت آن، ۳۰ ثانیه بعد و درست قبل از برخورد با ته‌حفره چقدر است؟

۳۸. موشکی با شتاب ثابت $20\ \mathrm{m/sec^2}$ از سطح زمین برمی‌خیزد. یک‌دقیقه بعد سرعت آن چقدر است؟

۲.۴ انتخاب مقدار ثابت انتگرالگیری

در حل یک معادلهٔ دیفرانسیل مانند $dy/dx = f(x)$ معمولاً به‌دنبال جواب خاصی هستیم که شرایط عددی از پیش تعیین شده را برآورده سازد. بدین منظور، نخست جواب عمومی، $y = F(x) + C$، را تعیین می‌کنیم که همهٔ جوابهای ممکن را به‌دست می‌دهد. سپس مقداری از C را تعیین می‌کنیم که جواب خاص مطلوب را به‌دست دهد.

همهٔ نمودارهای خمهای جواب $y = F(x) + C$ از انتقال خم جواب $y = F(x)$ به‌اندازهٔ C در امتدادقائم به‌دست‌می‌آید. بنابراین، این نمودارها دسته‌ای از خمهای «موازی» تشکیل می‌دهند وکنار هم قرارمی‌گیرند وصفحهٔ بالا وپایین‌دامنهٔ F را پر می‌کنند. با نگاهی به‌شکل ۱.۴ منظور ما را درمی‌یابید. در این‌شکل چندتا ازخمهای تشکیل‌دهندهٔ جواب عمومی معادلهٔ $dy/dx = 3x^2$، یعنی $y = x^3 + C$، رسم شده‌است.

اگر نقطه‌ای چون x_0 از دامنهٔ F را درنظربگیریم و مقدار دلخواه y_0 را برگزینیم، می‌توان باقراردادن $x = x_0$ و $y = y_0$ درمعادلهٔ $y = F(x) + C$ و حل آن نسبت به C جوابی را یافت که ازنقطهٔ (x_0, y_0) بگذرد. به‌این ترتیب داریم

$$y_0 = F(x_0) + C \quad \text{یا} \quad C = y_0 - F(x_0).$$

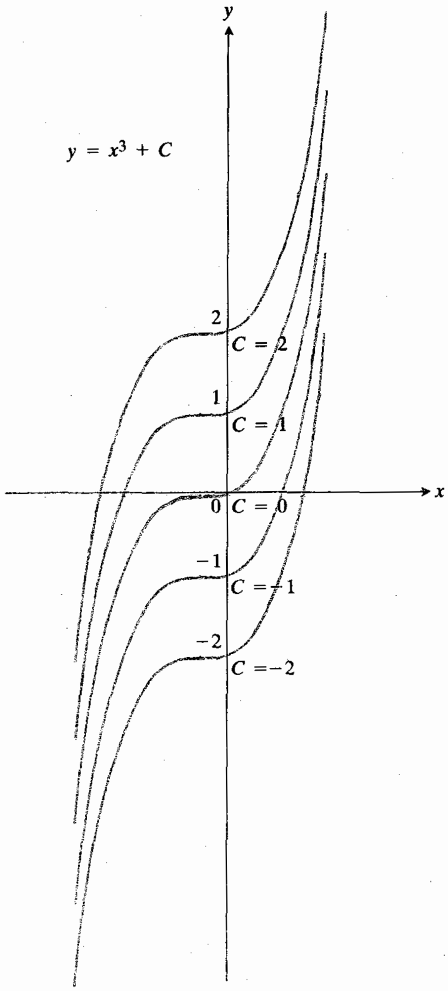
خم $y = F(x) + (y_0 - F(x_0))$ خمی است که از (x_0, y_0) می‌گذرد.

این‌شرط که «وقتی x برابربا x_0 است y برابربا y_0 است» یک **شرط اولیه** نام دارد. این نامگذاری ازمسائلی ناشی‌می‌شودکه درآنها زمان، متغیرمستقل و y_0، سرعت یا مکان جسم متحرک در زمان‌اولیهٔ x_0 است. تا اینجا دریافتیم که همواره‌می‌توان ازجواب عمومی $y = F(x) + C$ جواب خاصی را برگزید که درشرط اولیهٔ مفروضی، مشروط به‌اینکه x_0 در دامنهٔ F باشد، صدق کند.

مثال ۱ با توجه به‌شکل ۱.۴ خمی بیابید که شیب آن درنقطهٔ (x, y) برابر $3x^2$ باشد و از نقطهٔ $(1, -1)$ بگذرد.

حل: به زبان ریاضی، مطلوب ما حل مسأله‌ای است با مشخصات زیر

(۱) معادلهٔ دیفرانسیل: $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$



۱.۴ چند خم از دسته خمهای $y = x^3 + C$. کل خمهای این دسته که جواب عمومی $dy/dx = 3x^2$ را تشکیل می‌دهند صفحه را پرمی‌کنند.

(۲) شرط اولیه: به‌ازای $x = 1$، $y = -1$

نخست با انتگرالگیری از طرفین معادله دیفرانسیل نسبت به x، جواب عمومی آن را می‌یابیم.

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$y = \int 3x^2\, dx = x^3 + C.$$

سپس برای تعیین جواب خاصی که نمودارش از نقطهٔ $(1, -1)$ بگذرد، مقداری از C را می‌یابیم که به‌ازای آن وقتی $x = 1$ داشته‌باشیم $y = -1$.

$$y=x^3+C$$
$$-1=(1)^3+C$$
$$C=-2.$$

بنا براین‌جواب مطلوب $y=x^3-2$ است. شیب‌خم، $y'=3x^2$ است و خم از نقطهٔ $(1,-1)$ می‌گذرد. ■

مثال ۲ سرعت جسم متحرکی در لحظهٔ t چنین است

$$\frac{ds}{dt}=at$$

که در آن a ثابت و s مکان جسم در لحظهٔ t است. اگر به‌ازای $t=0$ داشته‌باشیم $s=s_0$، تابع s برحسب t را بیابید.

حل: مطلوب ما حل مسأله‌ای است با این مشخصات:

معادلهٔ دیفرانسیل: $\dfrac{ds}{dt}=at$

شرط اولیه: به‌ازای $t=0$، $s=s_0$.

با انتگرالگیری از طرفین معادلهٔ دیفرانسیل نسبت به t، جواب عمومی آن را می‌یابیم

$$\frac{ds}{dt}=at$$

$$s=\int at\,dt=a\frac{t^2}{2}+C.$$

سپس C را چنان‌می‌یابیم که جواب‌خاص، برآورندهٔ شرط $s=s_0$ به‌ازای $t=0$ باشد. برای انجام این‌کار $s=s_0$ و $t=0$ را در فرمول جواب عمومی قرار می‌دهیم و C را محاسبه می‌کنیم

$$s_0=a\frac{(0)^2}{2}+C$$

$$C=s_0.$$

جواب مطلوب چنین است

$$s=a\frac{t^2}{2}+s_0.$$ ■

مثال ۳ پرتابه‌ای از یک‌سکو که در ارتفاع ۱۰ فوتی ازسطح زمین قرار دارد در امتداد قائم به‌طرف بالا پرتاب‌می‌شود. سرعت اولیه 160 ft/sec است. بنا به‌فرض، تنها نیروی مؤثر برحرکت پرتابه درضمن حرکتش نیروی گرانش است که به اندازهٔ 32 ft/sec^2 شتاب به‌طرف پایین ایجاد می‌کند. به‌فرض‌اینکه در لحظهٔ پرتاب $t=0$ باشد معادله‌ای برای‌ارتفاع پرتابه ازسطح زمین، به‌صورت تابعی از t، بیابید.

حل: اگر ارتفاع پرتابه ازسطح زمین را با s نشان‌دهیم، سرعت و شتاب پرتابه چنین‌اند

$$v=\frac{ds}{dt} \quad \text{و} \quad a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}.$$

چون پرتابه به‌طرف‌بالا پرتاب، و نیروی گرانش درجهت مخالف بر آن وارد می‌شود سرعت، تابعی نزولی از t است. بنابراین معادلهٔ دیفرانسیلی‌که باید حل شود معادلهٔ

$$\frac{dv}{dt}=-32\ \text{ft/sec}^2$$

با شرط اولیهٔ زیر است

$$v(0)=160\ \text{ft/sec} \quad \text{و} \quad s(0)=10\ \text{ft}.$$

پس از یک‌بار انتگرالگیری داریم

$$v=\frac{ds}{dt}=-32t+C_1.$$

اگر از این معادله دوباره انتگرال بگیریم چنین به‌دست می‌آید

$$s=-16t^2+C_1t+C_2.$$

مقادیرمناسب C_1 و C_2 از شرایط اولیه چنین به‌دست می‌آیند

$$C_1=v(0)=160,\quad C_2=s(0)=10.$$

پس معادلهٔ حرکت چنین است

$$s=-16t^2+160t+10.$$ ■

مسأله‌ها

درمسأله‌های ۱ـ۶، تابع مکان s را برحسب زمان t با استفاده از سرعت مفروض $v=ds/dt$ بیابید. سپس ثابت انتگرالگیری را چنان بیابید‌که به‌ازای $t=0$ داشته‌باشیم $s=s_0$.

۱. $v=3t^2,\quad s_0=4$

۲. $v=2t+1,\quad s_0=0$

۳. $v=(t+1)^2,\quad s_0=0$

۴. $v=t^2+1,\quad s_0=1$

۵. $v=(t+1)^{-2},\quad s_0=-5$

۶. $v=8\sqrt{s},\quad s_0=9$

درمسأله‌های ۷ـ۱۲، با استفاده ازشتاب‌مفروض $a = dv/dt$ تابع سرعت $v = ds/dt$ و مکان s را برحسب زمان t بیابید. سپس ثابتهای انتگرالگیری را چنان تعیین‌کنید که به‌ازای $t = ۰$ داشته باشیم $v = v_۰$ و $s = s_۰$.

۷. $a = ۹٫۸,\quad v_۰ = ۲۰,\quad s_۰ = ۰$

۸. $a = ۹٫۸,\quad v_۰ = ۰,\quad s_۰ = ۲۰$

۹. $a = ۲t,\quad v_۰ = ۱,\quad s_۰ = ۱$

۱۰. $a = ۶t,\quad v_۰ = ۰,\quad s_۰ = ۵$

۱۱. $a = ۲t + ۲,\quad v_۰ = ۱,\quad s_۰ = ۰$

۱۲. $a = ۴/v,\quad v_۰ = ۰,\quad s_۰ = ۲۵$

درهریك ازمسأله‌های ۱۳ـ۲۴، معادلهٔ دیفرانسیل‌را باتوجه به‌شرط اولیهٔ مفروض حل کنید.

۱۳. $\dfrac{dy}{dx} = ۳x^۲ + ۲x + ۱$ ؛ به‌ازای $x = ۱$ ، $y = ۰$

۱۴. $\dfrac{dy}{dx} = ۹x^۲ - ۴x + ۵$ ؛ به‌ازای $x = ۱$ ، $y = ۰$

۱۵. $\dfrac{dy}{dx} = ۴(x-۷)^۳$ ؛ به‌ازای $x = ۸$ ، $y = ۱۰$

۱۶. $\dfrac{dy}{dx} = x^{۱/۲} + x^{۱/۴}$ ؛ به‌ازای $x = ۰$ ، $y = = ۲$

۱۷. $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{y}$ ؛ به‌ازای $x = ۰$ ، $y = ۱$

۱۸. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^۲+۱}{x^۲}$ ؛ به‌ازای $x = ۱$ ، $y = ۱$

۱۹. $\dfrac{dy}{dx} = ۲xy^۲$ ؛ به‌ازای $x = ۱$ ، $y = ۱$

۲۰. $\dfrac{dy}{dx} = (x + x^{-۱})^۲$ ؛ به‌ازای $x = ۱$ ، $y = ۱$

۲۱. $\dfrac{d^۲y}{dx^۲} = ۲ - ۶x$ ؛ به‌ازای $x = ۰$ ، $y = ۱$ ، و $\dfrac{dy}{dx} = ۴$

۲۲. $\dfrac{d^۳y}{dx^۳} = ۶$ ؛ به‌ازای $x = ۰$ ، $y = ۱$ ، $\dfrac{dy}{dx} = ۰$ ، و $\dfrac{d^۲y}{dx^۲} = -۸$

۲۳. $\dfrac{d^۲y}{dx^۲} = \dfrac{۳x}{۸}$ نمودار ازنقطهٔ $(۴, ۴)$ می‌گذرد و شیب آن ۴ است.

۲۴. $\dfrac{d^۲y}{dx^۲} = ۲x - ۳x^۲ + ۱$ نمودار از مبدأ و نقطهٔ $(۱, ۱)$ می‌گذرد.

۲۵. نمودار $y = f(x)$ از نقطهٔ $(۹, ۴)$ می‌گذرد و شیب خط مماس برنمودار درهرنقطهٔ (x, y) برابر $۳\sqrt{x}$ است. تابع f را بیابید.

۲۶. اگر $dy/dx = ۲x/y^۲$ و به ازای $x = ۳$ داشته باشیم $y = ۳$، مقدار y را به‌ازای $x = ۱$ بیابید.

۲۷. اگر شناگری از روی‌سکویی ۳۰ متری به‌طرف آب شیرجه برود، سرعت تقریبی او هنگام ورود به آب چقدر است؟ $(g = ۹٫۸\ \mathrm{m/sec^۲})$

۲۸. شتاب گرانش درنزدیکی‌سطح مریخ $۳٫۷۲\ \mathrm{m/sec^۲}$ است. سنگی از روی سطح مریخ با سرعت اولیهٔ $۲۳\ \mathrm{m/sec}$ به‌طرف بالا پرتاب می‌شود. سنگ تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟ (راهنمایی: چه‌موقع سرعت صفرمی‌شود؟)

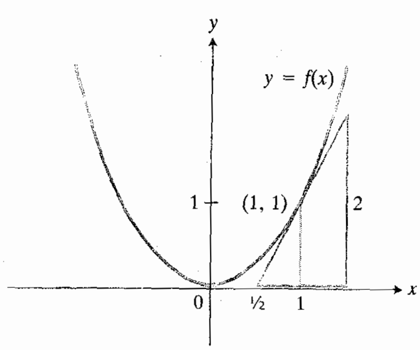
۲۹. شکل ۲.۴، نمودارتابع جواب کدام یك ازمعادلات دیفرانسیل زیرباشرط اولیهٔ مفروض است؟ توضیح دهید.

الف) $\dfrac{dy}{dx} = ۲x,\quad y(۱) = ۰$

ب) $\dfrac{dy}{dx} = x^۲,\quad y(۱) = ۱$

پ) $\dfrac{dy}{dx} = ۲x + ۲,\quad y(۱) = ۱$

ت) $\dfrac{dy}{dx} = ۲x,\quad y(۱) = ۱$



۲.۴ شکل مسألهٔ ۲۹.

۳۰. اگرشیر خروجی آب‌مخزن استوانه‌ای‌شکل۳.۴ بازشود، وقتی که مخزن پراست جریان‌آب سریع‌است اما باخالی‌شدن مخزن از

سرعت جریان آب کاسته می‌شود. می‌توان ثابت کرد که آهنگ پایین‌آمدن سطح آب با جذر ارتفاع آب متناسب است. یعنی برمبنای نمادهای شکل ۳.۴ داریم

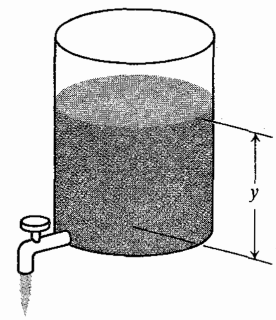
$$\frac{dy}{dt}=-k\sqrt{y}\,. \qquad (۳)$$

عدد k به‌شتاب گرانش، مساحت‌سطح مقطع مخزن، و مساحت‌سطح مقطع سوراخ شیر بستگی دارد. علامت منفی درمعادلهٔ (۳) به‌سبب این است که y با زمان کاهش می‌یابد.

الف) ازمعادلهٔ (۳) تابع y را برحسب t به‌دست آورید.

ب) تابع y را، به‌فرض‌اینکه t برحسب‌ثانیه و $k=۱/۱۰$ باشد و به‌ازای $t=۰$ داشته‌باشیم $y=۹$ ft، بیابید.

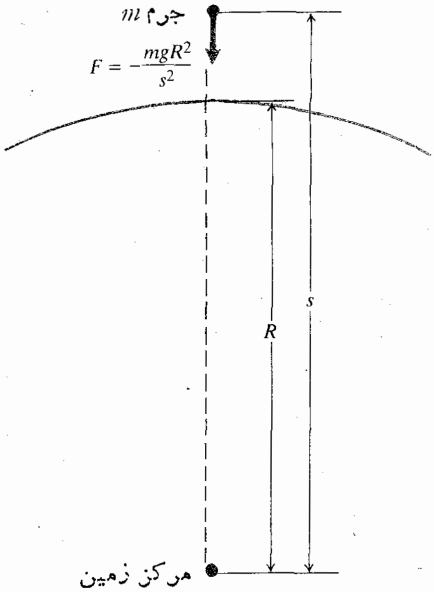
پ) اگر درابتدا ارتفاع‌آب درمخزن ۹ ft باشد چه‌مدت طول می‌کشد تا مخزن خالی‌شود؟



۳.۴ مخزن درحال خالی‌شدن درمسألهٔ ۳۰.

۳۱. سرعت‌گریز. کرهٔ زمین برذره‌ای به‌جرم m و به‌فاصلهٔ s ازمرکز زمین نیروی جاذبهٔ گرانشی $F=-mgR^{۲}s^{-۲}$ را وارد می‌کند. دراین رابطه R شعاع زمین است. چون نیروی F با افزایش s مخالفت می‌کند منفی است (شکل ۴.۴). اگر ذره‌ای ازسطح زمین با سرعت اولیهٔ $v_0=\sqrt{۲gR}$ به‌طرف‌بالا و درامتداد قائم پرتاب شود، به‌کمک قانون دوم نیوتن، $F=ma$، و رابطهٔ $a=dv/dt=(dv/ds)(ds/dt)=v(dv/ds)$ نشان‌دهید که: $v=v_0\sqrt{R/s}$ و $s^{۳/۲}=R^{۳/۲}[۱+(۳v_0t/۲R)]$.

سرعت اولیهٔ $v_0=\sqrt{۲gR}$ (۱۱٫۲ km/sec) را سرعت گریز می‌نامند، زیرا اگرسرعت اولیه همین مقدار یا بیشتر باشد با افزایش t، مکان s به‌سوی بینهایت می‌رود. درعمل برای گریز از جاذبهٔ گرانشی زمین به‌علت اثرترمزی مقاومت هوا که دراین‌مسأله به‌خاطر سهولت حل ناچیز شمرده شده‌است، به سرعت اولیه‌ای اندکی بزرگتر نیاز است.



۴.۴ ذره‌ای به‌جرم m و به‌فاصلهٔ s کیلومتر از مرکز زمین. مسألهٔ ۳۱ را ببینید.

TOOLKIT PROGRAMS
Antiderivatives and Direction Fields

۳.۴ روش جانشانی در انتگرالگیری

اغلب با تعویض متغیرمی‌توانیم یك انتگرال ناآشنا را به‌انتگرالی تبدیل کنیم که روش محاسبهٔ آن را می‌دانیم. روش انجام‌دادن این کار را **روش جانشانی در انتگرالگیری** می‌نامند. این‌روش یکی‌از روشهای اصلی محاسبهٔ انتگرالهاست. نخست چگونگی کارکرد روش و سپس علت ثمربخش‌بودن آن را نشان می‌دهیم.

مثال ۱ برای محاسبهٔ

$$\int (x^{۴}-۱)^{۲}\cdot ۴x^{۳}\,dx$$

این مراحل را طی می‌کنیم

$$\int (x^{۴}-۱)^{۲}\cdot ۴x^{۳}\,dx=\int u^{۲}\,du$$

۱. جانشانی‌می‌کنیم $u=x^{۴}-۱$ و $du=۴x^{۳}\,dx$

$$=\frac{u^{۳}}{۳}+C=\frac{(x^{۴}-۱)^{۳}}{۳}+C\,.$$

۲. انتگرال می‌گیریم ۳. جانشانی معکوس می‌کنیم

این روش ثمربخش است زیرا

$$۴x^۳=\frac{d}{dx}(x^۴-۱)=\frac{du}{dx}$$

بخشی از انتگرالده است. به‌کمك قاعدهٔ زنجیری داریم

$$\int(x^۴-۱)^۲ ۴x^۳\,dx=\int(x^۴-۱)^۲\frac{d}{dx}(x^۴-۱)\,dx$$

$$=\int\frac{d}{dx}\left[\frac{(x^۴-۱)^۳}{۳}\right]dx$$

$\Uparrow$

قاعدهٔ زنجیری

$$=\frac{(x^۴-۱)^۳}{۳}+C. \quad ■$$

مثال ۲ برای محاسبهٔ

$$\int\sqrt{۱+x^۲}\cdot ۲x\,dx$$

این‌مراحل را طی می‌کنیم

$$\int\sqrt{۱+x^۲}\cdot ۲x\,dx=\int\sqrt{u}\,du$$

۱. جانشانی می‌کنیم،
$u=۱+x^۲$ و $du=۲xdx$

$$=\frac{۲}{۳}u^{۳/۲}+C=\frac{۲}{۳}(۱+x^۲)^{۳/۲}+C.$$

۲. انتگرال می‌گیریم ۳. جانشانی معکوس می‌کنیم

این‌روش ثمربخش است زیرا

$$۲x=\frac{d}{dx}(۱+x^۲)$$

بخشی از انتگرالده است. به‌کمك قاعدهٔ زنجیری داریم

$$\int\sqrt{۱+x^۲}\cdot ۲x\,dx=\int\sqrt{۱+x^۲}\cdot\frac{d}{dx}(۱+x^۲)\,dx$$

$$=\int\frac{d}{dx}\left[\frac{۲}{۳}(۱+x^۲)^{۳/۲}\right]dx$$

$\Uparrow$

قاعدهٔ زنجیری

$$=\frac{۲}{۳}(۱+x^۲)^{۳/۲}+C. \quad ■$$

قاعده‌ای که درمثالهای ۱ و ۲ به‌کاررفت چنین است

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx$$

۱. جانشانی می‌کنیم:
$u=g(x)$ و
$du=g'(x)\,dx$.

$$=\int f(u)\,du$$

۲. با یافتن یك پادمشتق $f(u)$، انتگرال را محاسبه می‌کنیم.

$$=F(u)+C$$

$\Uparrow$

هرپادمشتقی از $f(u)$

۳. جانشانی معکوس می‌کنیم.

$$=F(g(x))+C$$

این سه مرحله، مراحل روش جانشانی در انتگرالگیری‌اند.

روش جانشانی در انتگرالگیری

برای محاسبهٔ انتگرال

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx$$

که درآن f و g' توابعی پیوسته‌اند، مراحل زیر را طی کنید.

۱. جانشانیهای $u=g(x)$ و $du=g'(x)\,dx$ را انجام‌دهید تا انتگرال زیر به‌دست آید

$$\int f(u)\,du.$$

۲. نسبت به u انتگرال بگیرید.

۳. درنتیجهٔ به‌دست‌آمده $g(x)$ را به‌جای u بگذارید.

مثال ۳ انتگرال زیر را حساب کنید

$$\int\sqrt{۴x-۱}\,dx.$$

حل: چنین جانشانی می‌کنیم

$$u=۴x-۱,\quad du=۴\,dx,\quad \frac{۱}{۴}du=dx.$$

بنابراین

$$\int\sqrt{۴x-۱}\,dx=\int\sqrt{u}\cdot\frac{۱}{۴}du$$

$$=\frac{۱}{۴}\int\sqrt{u}\,du$$

$$=\frac{۱}{۴}\left(\frac{۲}{۳}u^{۳/۲}\right)+C=\frac{۱}{۶}u^{۳/۲}+C$$

$$=\frac{۱}{۶}(۴x-۱)^{۳/۲}+C. \quad ■$$

مثال ۴ انتگرال زیر را حساب کنید

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{۴-x^۲}}\cdot$$

حل: چنین جانشانی می‌کنیم

$$u=۴-x^۲,\quad du=-۲x\,dx,\quad -\frac{۱}{۲}du=x\,dx\cdot$$

بنابراین

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{۴-x^۲}}=\int \frac{(-۱/۲)\,du}{\sqrt{u}}=-\frac{۱}{۲}\int \frac{du}{\sqrt{u}}$$

$$=-\frac{۱}{۲}(۲u^{۱/۲})+C=-u^{۱/۲}+C$$

$$=-\sqrt{۴-x^۲}+C\cdot \quad \blacksquare$$

چنانکه مثال بعد نشان می‌دهد برای جانشانی موفق، بیش از یك راه وجود دارد.

مثال ۵ انتگرال زیر را حساب کنید

$$\int \frac{(z+۱)\,dz}{\sqrt[۳]{۳z^۲+۶z+۵}}\cdot$$

حل: روش جانشانی را می‌توان به‌عنوان یك ابزار اکتشافی به‌کار برد: پیچیده‌ترین بخش انتگرالده را انتخاب می‌کنیم، و جانشینی برای آن در نظر می‌گیریم تا ببینیم چه پیش می‌آید. در این مثال می‌توان $u=۳z^۲+۶z+۵$ و یا حتی اگر بخت یاری کند $u=\sqrt[۳]{۳z^۲+۶z+۵}$ را آزمود. در این صورت آنچه پیش می‌آید چنین است

جانشانیهای زیر را انجام می‌دهیم

$$u=۳z^۲+۶z+۵,\quad du=(۶z+۶)\,dz=۶(z+۱)\,dz$$

$$\frac{۱}{۶}du=(z+۱)\,dz\cdot$$

در این صورت داریم

$$\int \frac{(z+۱)\,dz}{\sqrt[۳]{۳z^۲+۶z+۵}}=\int \frac{(۱/۶)\,du}{u^{۱/۳}}$$

$$=\frac{۱}{۶}\int u^{-۱/۳}\,du=\frac{۱}{۶}\cdot\frac{۳}{۲}u^{۲/۳}+C$$

$$=\frac{۱}{۴}(۳z^۲+۶z+۵)^{۲/۳}+C\cdot$$

جانشانیهای زیر را انجام می‌دهیم

$$u=\sqrt[۳]{۳z^۲+۶z+۵}$$

$$۳u^۲\,du=۶z\,dz+۶\,dz=۶(z+۱)\,dz$$

$$u^۳=۳z^۲+۶z+۵$$

$$\frac{۱}{۲}u^۲\,du=(z+۱)\,dz\cdot$$

آنگاه داریم

$$\int \frac{(z+۱)\,dz}{\sqrt[۳]{۳z^۲+۶z+۵}}=\int \frac{(۱/۲)u^۲\,du}{u}=\frac{۱}{۲}\int u\,du$$

$$=\frac{۱}{۲}\left(\frac{u^۲}{۲}\right)+C=\frac{۱}{۴}u^۲+C$$

$$=\frac{۱}{۴}(۳z^۲+۶z+۵)^{۲/۳}+C\cdot \quad \blacksquare$$

علت درستی روش جانشانی

اگر F پاد مشتقی از f باشد، بنا به‌قاعدهٔ زنجیری داریم

$$\frac{d}{dx}F(g(x))=F'(g(x))g'(x)=f(g(x))g'(x)\cdot \quad (۱)$$

بنابراین

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int F'(g(x))g'(x)\,dx$$

$$=\int \frac{d}{dx}(F(g(x)))\,dx \quad (\text{بنا به‌قاعدهٔ جانشانی}) \quad (۲)$$

$$=F(g(x))+C\cdot$$

با قرار دادن $u=g(x)$ و $du=g'(x)\,dx$ در انتگرال همین نتیجه به‌دست می‌آید

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(u)\,du$$
$$=F(u)+C=F(g(x))+C\cdot \quad (۳)$$

فرمول انتگرالها با استفاده از نمادهای دیفرانسیلی

به‌کمك نمادهای دیفرانسیلی می‌توان فرمول انتگرالها را ساده‌تر بیان کرد. هرچند در اینجا به تفصیل به این مطلب نمی‌پردازیم، اما ذکر

این‌مطلب برای ارجاعات بعدی مناسب است. مثلاً

$$\int \frac{du}{dx}\,dx = u + C$$ به‌صورت $$\int du = u + C$$ درمی‌آید.

و

$$\int u^n \frac{du}{dx}\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$ به‌صورت $$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C،$$
$n \neq -1$ درمی‌آید.

همچنین

$$\int \frac{d(uv)}{dx}\,dx = \int \left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right) dx$$
$$= \int u\frac{dv}{dx}\,dx + \int v\frac{du}{dx}\,dx \qquad (۴)$$

به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du\,. \qquad (۵)$$

ساده‌سازیهایی از این دست، به خاطر سپردن فرمولهای پیچیده‌تر، نظیر فرمولهای فصلهای ۵ و ۷ را آسان می‌کند.

مسأله‌ها

درمسأله‌های ۱ـ۳۰، انتگرالها را حساب کنید.

۱. $\int (x-۱)^{۲۴۳}\,dx$

۲. $\int \sqrt{۱-x}\,dx$

۳. $\int \frac{۱}{\sqrt{۱-x}}\,dx$

۴. $\int ۲x\sqrt{x^۲-۱}\,dx$

۵. $\int x\sqrt{۲x^۲-۱}\,dx$

۶. $\int (۳x-۱)^۵\,dx$

۷. $\int (۲-t)^{۲/۳}\,dt$

۸. $\int x^۲\sqrt{۱+x^۳}\,dx$

۹. $\int (۱+x^۳)^۲\,dx$

۱۰. $\int (۱+x^۳)^۲ ۳x^۲\,dx$

۱۱. $\int x(x^۲+۱)^{۱۰}\,dx$

۱۲. $\int \frac{dt}{۲\sqrt{۱+t}}$

۱۳. $\int \frac{x^۲}{\sqrt{۱+x^۳}}\,dx$

۱۴. $\int \sqrt{۲+۵y}\,dy$

۱۵. $\int \frac{dx}{(۳x+۲)^۲}$

۱۶. $\int ۵r\sqrt{۱-r^۲}\,dr$

۱۷. $\int \frac{۳r\,dr}{\sqrt{۱-r^۲}}$

۱۸. $\int \frac{y\,dy}{\sqrt{۲y^۲+۱}}$

۱۹. $\int x^۴(۷-x^۵)^۳\,dx$

۲۰. $\int \frac{x^۳\,dx}{\sqrt[۴]{۱+x^۴}}$

۲۱. $\int \frac{ds}{(s+۱)^۳}$

۲۲. $\int \frac{s\,ds}{(s^۲+۱)^۲}$

۲۳. $\int \frac{۱}{x^۲+۴x+۴}\,dx$

۲۴. $\int \frac{۱}{y^۲-۲y+۱}\,dy$

۲۵. $\int \frac{x+۱}{۲\sqrt{x+۱}}\,dx$

۲۶. $\int x\sqrt{a^۲-x^۲}\,dx$

۲۷. $\int (y^۳+۶y^۲+۱۲y+۸)(y^۲+۴y+۴)\,dy$

۲۸. $\int \frac{(z+۱)\,dz}{\sqrt[۳]{z^۲+۲z+۲}}$

۲۹. $\int \frac{۱}{\sqrt{x}\,(۱+\sqrt{x})^۲}\,dx$

۳۰. $\int (y^۴+۴y^۲+۱)^۲(y^۳+۲y)\,dy$

معادلات دیفرانسیل مسائل ۳۱ـ۳۶ را با توجه به‌شرایط اولیهٔ داده شده حل کنید.

۳۱. $\frac{dy}{dx}=x\sqrt{۱+x^۲}$ ؛ به‌ازای $x=۰$ ، $y=۰$

۳۲. $\frac{dy}{dx}=۳x^۲\sqrt{۱+x^۳}$ ؛ به‌ازای $x=۰$ ، $y=۱$

۳۳. $\frac{dr}{dz}=۲۴z(۳z^۲-۱)^۳$ ؛ به‌ازای $z=۰$ ، $r=-۳$

۳۴. $\frac{dy}{dx}=۴x(x^۲-۸)^{-۱/۳}$ ؛ به‌ازای $x=۰$ ، $y=۰$

۳۵. $۲y\frac{dy}{dx}=۳x\sqrt{x^۲+۱}\sqrt{y^۲+۱}$ ؛ به‌ازای $x=۰$ ، $y=۰$

۳۶. $\frac{dy}{dx}=\frac{۴\sqrt{(۱+y^۲)^۳}}{y}$ ؛ به‌ازای $x=۰$ ، $y=۰$

۳۷. به کمک کدام یك از روشهای زیر این انتگرال را می‌توان حساب کرد؟

$$\int ۳x^۲(x^۳-۱)^۵\,dx$$

الف) بسط $(x^۳-۱)^۵$ و ضرب کردن نتیجه در $۳x^۲$ و انتگرالگیری جمله به‌جمله از چندجمله‌ای حاصل.
ب) بیرون آوردن $۳x^۲$ از زیرنماد انتگرال و به‌دست آوردن انتگرالی به‌شکل $۳x^۲\int u^n\,du$.
پ) استفاده از جانشانی $u=x^۳-۱$ و به دست آوردن انتگرالی به‌شکل $\int u^n\,du$.

۴.۴ انتگرال تابعهای مثلثاتی

این بخش را به‌انتگرالگیری از تابعهای مثلثاتی اختصاص می‌دهیم. از فرمولهای مشتق

$$\cos x=\frac{d}{dx}(\sin x),\quad \sin x=\frac{d}{dx}(-\cos x)$$

فرمولهای انتگرالگیری زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\int \cos x\,dx=\sin x+C \qquad (\text{۱ الف})$$

$$\int \sin x\,dx=-\cos x+C. \qquad (\text{۱ ب})$$

اگر u تابعی مشتقپذیر از x باشد، با به‌کار بردن قاعدهٔ زنجیری درمورد $\sin u$ داریم

$$\frac{d}{dx}\sin u=\cos u\frac{du}{dx}.$$

با جابه‌جا کردن طرفین تساوی چنین به‌دست می‌آید

$$\cos u\frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}\sin u \quad \text{یا} \quad \cos u\,du=d(\sin u).$$

پس

$$\int \cos u\,du=\sin u+C. \qquad (\text{۲ الف})$$

همچنین

$$\frac{d}{dx}(-\cos u)=\sin u\frac{du}{dx}$$

$$d(-\cos u)=\sin u\,du$$

و بنابراین

$$\int \sin u\,du=-\cos u+C. \qquad (\text{۲ ب})$$

به کمک رابطه‌های (۱) و (۲) می‌توان بسیاری از انتگرالهای مثلثاتی را حساب کرد.

مثال ۱ انتگرال زیر را حساب کنید

$$\int \cos ۲x\,dx.$$

حل: جانشانیهای زیر را به‌کار می‌بریم

$$u=2x,\quad du=2\,dx,\quad \frac{1}{2}du=dx.$$

بنا براین

$$\int \cos 2x\,dx=\int \cos u\cdot\frac{1}{2}du=\frac{1}{2}\int \cos u\,du$$

$$=\frac{1}{2}\sin u+C=\frac{1}{2}\sin 2x+C. \quad \blacksquare$$

مثال ۲ انتگرال زیر را حساب کنید

$$\int \sin(7x+5)\,dx.$$

حل: با جانشانیهای

$$u=7x+5,\quad du=7\,dx,\quad \frac{1}{7}du=dx$$

داریم

$$\int \sin(7x+5)\,dx=\int \sin u\cdot\frac{1}{7}du=\frac{1}{7}\int \sin u\,du$$

$$=\frac{1}{7}(-\cos u)+C$$

$$=-\frac{1}{7}\cos(7x+5)+C. \quad \blacksquare$$

مثال ۳ انتگرال زیر را حساب کنید

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x}\,dx.$$

حل: با جانشانیهای

$$u=\sin 2x,\quad du=2\cos 2x\,dx,\quad \frac{1}{2}du=\cos 2x\,dx$$

داریم

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x}\,dx=\int \frac{(1/2)\,du}{u^3}=\frac{1}{2}\int u^{-3}\,du$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}u^{-2}\right)+C$$

$$=-\frac{1}{4}(\sin 2x)^{-2}+C$$

$$=-\frac{1}{4\sin^2 2x}+C. \quad \blacksquare$$

چنانکه در بخش پیش دیدیم ممکن است بیش از یک راه برای یك جانشانی موفق وجود داشته باشد. در مثال بعد برای جانشانی بخش «پیچیدهٔ» انتگرال از دو راه بهره می‌گیریم که هردو راه قرین موفقیت‌اند.

مثال ۴ انتگرال زیر را حساب کنید

$$\int 16x\sin^3(2x^2+1)\cos(2x^2+1)\,dx.$$

حل: با $u=2x^2+1$. با جانشانیهای

$$u=2x^2+1,\quad du=4x\,dx$$

داریم

$$\int 16x\sin^3(2x^2+1)\cos(2x^2+1)\,dx$$

$$=\int 4\sin^3 u\cos u\,du$$

$$=\sin^4 u+C=\sin^4(2x^2+1)+C.$$

حل: با $u=\sin(2x^2+1)$. با جانشانیهای

$$u=\sin(2x^2+1),\quad du=\cos(2x^2+1)\cdot 4x\,dx$$

$$4\,du=16x\cos(2x^2+1)\,dx$$

داریم

$$\int 16x\sin^3(2x^2+1)\cos(2x^2+1)\,dx=\int 4u^3\,du$$

$$=u^4+C=\sin^4(2x^2+1)+C. \quad \blacksquare$$

مثال ۵ انتگرال زیر را حساب کنید

$$\int \sin^n x\cos x\,dx,\quad n\neq -1.$$

حل: با جانشانیهای

$$u=\sin x,\quad du=\cos x\,dx$$

داریم

$$\int \sin^n x\cos x\,dx=\int u^n\,du$$

$$=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C=\frac{\sin^{n+1}x}{n+1}+C. \quad \blacksquare$$

مثال ۶ انتگرال زیر را حساب کنید

$$\int \cos^n x \sin x\, dx, \quad n \neq -1 .$$

حل: با جانشانیهای

$$u = \cos x, \quad du = -\sin x\, dx$$

داریم

$$\int \cos^n x \sin x\, dx = \int u^n \cdot -du$$

$$= -\frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

$$= -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C . \quad \blacksquare$$

اگر درمثالهای ۵ و ۶، n برابر با ۱ − می‌بود باانتگرالها چه می‌کردیم؟ به‌ازای ۱ − = n این انتگرالها به این صورت درمی‌آیند:

$$\int (\sin x)^{-1} \cos x\, dx = \int \cot x\, dx$$

$$\int (\cos x)^{-1} \sin x\, dx = \int \tan x\, dx .$$

با اینکه $\cot x$ و $\tan x$ پادمشتق دارند، *نمی‌توانیم* آنها را برحسب توابعی که فعلاً می‌شناسیم بیان کنیم. بنابراین باید منتظر بمانیم تا درفصل ۶ با تابع لگاریتم طبیعی آشنا شویم و آنگاه این انتگرالها را حساب کنیم.

انتگرال تابعهای مثلثاتی دیگر

با استفاده از فرمولهای مشتق تابعهای تانژانتی، کتانژانتی، سکانتی، وکسکانتی، فرمولهای انتگرالی زیر به‌دست می‌آیند

$$\int \sec^2 u\, du = \tan u + C$$

$$\int \csc^2 u\, du = -\cot u + C$$

$$\int \sec u \tan u\, du = \sec u + C$$

$$\int \csc u \cot u\, du = -\csc u + C .$$

درهمهٔ فرمولها u باید تابعی‌مشتق‌پذیراز x باشد. درستی هرفرمول را می‌توان با مشتقگیری از طرف چپ فرمول نسبت به x بررسی کرد. درهرمورد برای به‌دست‌آوردن انتگرالده طرف‌چپ، قاعدهٔ زنجیری به‌کار می‌رود.

مثال ۷

الف)

$$\int \frac{1}{\cos^2 2x} dx = \int \sec^2 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \sec^2 2x\, d(2x) = \frac{1}{2} \tan 2x + C$$

ب)

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$= \int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$$

پ)

$$\int \sec^2 x \tan x\, dx = \int \sec x (\sec x \tan x\, dx)$$

$$= \int \sec x\, d(\sec x)$$

$$= \frac{1}{2} \sec^2 x + C . \quad \blacksquare$$

مثال ۸ انتگرال زیر را حساب کنید

$$\int \tan^3 x \sec^2 x\, dx .$$

حل: با جانشانیهای

$$u = \tan x, \quad du = \sec^2 x\, dx$$

داریم

$$\int \tan^3 x \sec^2 x\, dx = \int u^3\, du$$

$$= \frac{1}{4} u^4 + C = \frac{1}{4} \tan^4 x + C . \quad \blacksquare$$

استفاده از اتحادهای مثلثاتی

برای تبدیل یك انتگرال ناآشنا به‌انتگرالی که بتوان آن را محاسبه کرد، اغلب می‌توان از اتحادهای مثلثاتی استفاده‌کرد. اینك چند مثال می‌آوریم.

مثال ۹ انتگرال زیر را حساب کنید

$$\int \tan^2 x\, dx .$$

حل: اتحاد $\tan^۲ x = \sec^۲ x - ۱$ را به‌کار می‌بریم

$$\int \tan^۲ x\, dx = \int (\sec^۲ x - ۱)\, dx$$

$$= \int \sec^۲ x\, dx - \int dx = \tan x - x + C.$$ ■

مثال ۱۰ انتگرال زیر را حساب کنید

$$\int \cos^۲ x\, dx.$$

حل: با استفاده از فرمول دو برابر زاویه،

$$\cos^۲ x = \frac{۱+\cos ۲x}{۲}$$

داریم

$$\int \cos^۲ x\, dx = \int \frac{۱+\cos ۲x}{۲}\, dx$$

$$= \int \frac{۱}{۲}\, dx + \int \frac{\cos ۲x}{۲}\, dx$$

$$= \frac{x}{۲} + \frac{۱}{۲}\,\frac{\sin ۲x}{۲} + C = \frac{x}{۲} + \frac{\sin ۲x}{۴} + C.$$ ■

مثال ۱۱ انتگرال زیر را حساب کنید

$$\int \sin^۲ x\, dx.$$

حل: با استفاده از فرمول دو برابر زاویه،

$$\sin^۲ x = \frac{۱-\cos ۲x}{۲}$$

داریم

$$\int \sin^۲ x\, dx = \int \frac{۱-\cos ۲x}{۲}\, dx$$

$$= \int \frac{۱}{۲}\, dx - \int \frac{\cos ۲x}{۲}\, dx$$

$$= \frac{x}{۲} - \frac{۱}{۲}\,\frac{\sin ۲x}{۲} + C = \frac{x}{۲} - \frac{\sin ۲x}{۴} + C.$$ ■

مثال ۱۲ انتگرال زیر را حساب کنید

$$\int \sin^۳ x\, dx.$$

حل: $\sin^۳ x$ را چنین می‌نویسیم

$$\sin^۳ x = \sin^۲ x \cdot \sin x = (۱-\cos^۲ x)\cdot \sin x.$$

بنابراین

$$\int \sin^۳ x\, dx = \int (۱-\cos^۲ x)\sin x\, dx$$

$$= \int \sin x\, dx - \int \cos^۲ x \sin x\, dx$$

$$= -\cos x + \frac{۱}{۳}\cos^۳ x + C.$$

برای محاسبهٔ انتگرال $\cos^۲ x \sin x$ نسبت به x از نتیجهٔ مثال ۶ استفاده کرده‌ایم. ■

مسأله‌ها

درمسأله‌های ۱–۵۴، انتگرالها را حساب کنید.

۱. $\int \sin ۳x\, dx$

۲. $\int \cos(۲x+۴)\, dx$

۳. $\int \sec^۲(x+۲)\, dx$

۴. $\int \sec ۲x \tan ۲x\, dx$

۵. $\int \csc(x+\pi/۲)\cot(x+\pi/۲)\, dx$

۶. $\int \csc^۲(۲x-۳)\, dx$

۷. $\int x \sin(۲x^۲)\, dx$

۸. $\int (\cos\sqrt{x})\frac{dx}{\sqrt{x}}$

۹. $\int \sin ۲t\, dt$

۱۰. $\int \cos(۳\theta-۱)\, d\theta$

۱۱. $\int ۲\cos ۳y\, dy$

۱۲. $\int 2\sin z\cos z\,dz$

۱۳. $\int \sin^2 x\cos x\,dx$

۱۴. $\int \cos^2 2y\sin 2y\,dy$

۱۵. $\int \sec^2 2\theta\,d\theta$

۱۶. $\int \sec^3 x\tan x\,dx$

۱۷. $\int \sec\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}\,dx$

۱۸. $\int \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$

۱۹. $\int \frac{d\theta}{\sin^2\theta}$

۲۰. $\int \csc^2 5\theta\cot 5\theta\,d\theta$

۲۱. $\int \cos^2 y\,dy$

۲۲. $\int \sin^2 (x/2)\,dx$

۲۳. $\int (1-\sin^2 3t)\cos 3t\,dt$

۲۴. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}$

۲۵. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}$

۲۶. $\int \sqrt{2+\sin 3t}\cos 3t\,dt$

۲۷. $\int \frac{\sin 2t\,dt}{\sqrt{2-\cos 2t}}$

۲۸. $\int \sin^3\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}\,dy$

۲۹. $\int \cos^2\frac{2x}{3}\sin\frac{2x}{3}\,dx$

۳۰. $\int \frac{\sec^2 u}{\tan^2 u}\,du$

۳۱. $\int \sec\theta(\sec\theta+\tan\theta)\,d\theta$

۳۲. $\int (1+\tan^2\theta)\,d\theta$

۳۳. $\int (\sec^2 y+\csc^2 y)\,dy$

۳۴. $\int (1+\sin 2t)^{3/2}\cos 2t\,dt$

۳۵. $\int (3\sin 2x+2\cos 3x)\,dx$

۳۶. $\int \sin t\cos t(\sin t+\cos t)\,dt$

۳۷. $\int \tan^2 x\sec^2 x\,dx$

۳۸. $\int \tan^3 5x\sec^2 5x\,dx$

۳۹. $\int \cot^3 x\csc^2 x\,dx$

۴۰. $\int \sin^4 x\cos^3 x\,dx$ (راهنمایی: $\cos^3 x=\cos^2 x\cos x$)

۴۱. $\int \sqrt{\tan x}\sec^2 x\,dx$

۴۲. $\int (\sec x)^{3/2}\tan x\,dx$

۴۳. $\int (\sin x)^{3/2}\cos x\,dx$

۴۴. $\int x^2\cos(x^3+1)\,dx$

۴۵. $\int \cos^3 x\,dx$

۴۶. $\int \tan^2 4x\,dx$

۴۷. $\int \cos^5 x\,dx$ (راهنمایی: $\cos^5 x=\cos^4 x\cos x$)

۴۸. $\int \sin^{-3} 5x\cos 5x\,dx$

۰۴۹ $\int \cos^{-۴} ۲x \sin ۲x\, dx$

۰۵۰ $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sin^{۲}\sqrt{x}}\, dx$

۰۵۱ $\int \frac{\tan^{۲}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

۰۵۲ $\int \frac{۱}{x^{۲}} \sin\frac{۱}{x} \cos\frac{۱}{x}\, dx$

۰۵۳ $\int \frac{x\cos\sqrt{۳x^{۲}-۶}}{\sqrt{۳x^{۲}-۶}}\, dx$

۰۵۴ $\int \frac{\sin((z-۱)/۳)}{\cos^{۲}((z-۱)/۳)}\, dz$

۰۵۵ کدام یك از توابع زیر پاد مشتق $f(x)=\sec x\tan x$ است؟

الف) $-\sec x+x/۶$

ب) $-\tan x+\pi/۳$

پ) $\sec x(\sec^{۲} x)+\tan x(\sec x\tan x)$

ت) $\sec x-\pi/۴$

۰۵۶ کدام یك از توابع زیر پاد مشتق $f(x)=\csc^{۲} x$ است؟

الف) $-۲\csc x(\csc x\cot x)+C$

ب) $-\cot x+\pi/۶$

پ) $\cot x-\pi/۳$

ت) $-(\cot x+C)$

درمسائل ۵۷–۶۰، معادلات دیفرانسیل را با توجه به‌شرایط اولیهٔ مفروض حل کنید.

۰۵۷ $۲y\frac{dy}{dx}=۵x-۳\sin x$ ؛ به‌ازای $x=۰$ ، $y=۰$

۰۵۸ $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{y^{۲}+۱}}{y}\cos x$ ؛ به‌ازای $x=\pi$ ، $y=\sqrt{۳}$

۰۵۹ $\frac{dy}{dx}=\frac{\pi\cos\pi x}{\sqrt{y}}$ ؛ به‌ازای $x=۱/۲$ ، $y=۱$

۰۶۰ $y^{(۴)}=\cos x$ ؛ به‌ازای $x=۰$ ، $y=۳$ ، $y'=۲$ ، $y''=۱$ ، و $y'''=۰$

۰۶۱ سرعت ذره‌ای که برروی یك‌خط حرکت رفت و برگشتی‌دارد به‌ازای‌همهٔ‌مقادیر t چنین‌است: $v=ds/dt=۶\sin ۲t$ m/sec. اگر در $t=۰$ داشته‌باشیم $s=۰$، مقدار s را به‌ازای $t=\pi/۲$ sec بیابید.

۰۶۲ شتاب ذره‌ای که برروی یك‌خط حرکت رفت و برگشتی‌دارد به‌ازای همهٔ مقادیر t چنین است:

$$a=d^{۲}s/dt^{۲}=\pi^{۲}\cos\pi t \text{ m/sec}^{۲}.$$

اگر در $t=۰$ داشته باشیم $v=۸$ m/sec، مقدار s را در $t=۱$ sec بیابید.

۰۶۳ چنین به‌نظرمی‌رسدکه از $۲\sin x\cos x$ نسبت به x می‌توان به‌سه‌روش زیر انتگرال گرفت

الف)

$$\int ۲\sin x\cos x\,dx=\int ۲\sin x\frac{d}{dx}(\sin x)\,dx$$
$$=\sin^{۲} x+C_{۱}$$

ب)

$$\int ۲\sin x\cos x\,dx=\int -۲\cos x\frac{d}{dx}(\cos x)\,dx$$
$$=-\cos^{۲} x+C_{۲}$$

پ)

$$\int ۲\sin x\cos x\,dx=\int \sin ۲x\,dx$$
$$=-\frac{۱}{۲}\cos ۲x+C_{۳}\,.$$

آیا هرسه روش انتگرالگیری درست‌اند؟ توضیح بدهید.

۰۶۴ با استفاده‌از جانشانی $u=\tan x$ در $\int \sec^{۲} x\tan x\,dx$ داریم

$$\int \sec^{۲} x\tan x\,dx=\int \tan x\cdot\sec^{۲} x\,dx$$
$$=\int u\,du=\frac{u^{۲}}{۲}+C=\frac{\tan^{۲} x}{۲}+C\,.$$

و با استفاده از جانشانی $u=\sec x$ در آن داریم

$$\int \sec^{۲} x\tan x\,dx=\int \sec x\cdot\sec x\tan x\,dx$$
$$=\int u\,du=\frac{u^{۲}}{۲}+C=\frac{\sec^{۲} x}{۲}+C\,.$$

آیا هردو روش انتگرالگیری درست‌اند؟ توضیح بدهید.

۶۵. برای محاسبهٔ انتگرال

$$\int \sqrt{1+\sin^2(x-1)}\,\sin(x-1)\cos(x-1)\,dx$$

از جانشانیهای پیاپی زیر استفاده کنید.

الف) نخست $u=x-1$، سپس $v=\sin u$، و سرانجام $w=1+v^2$.

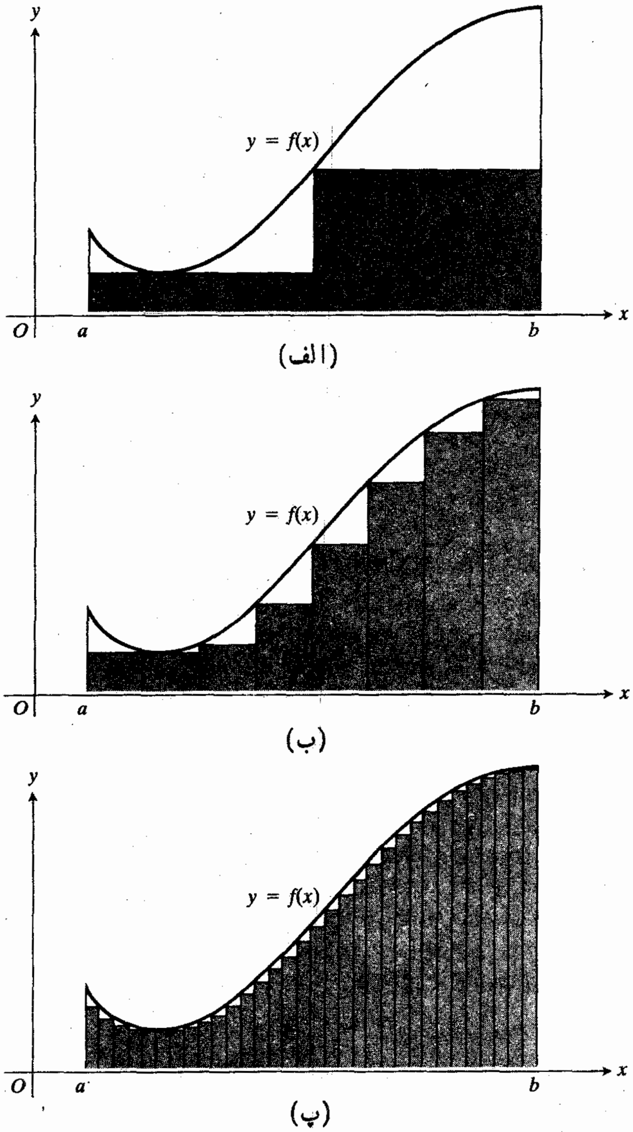
ب) نخست $v=\sin(x-1)$، و سپس $w=1+v^2$.

TOOLKIT PROGRAMS
Antiderivatives and Direction Fields — Function Evaluator

۵.۴ انتگرال معین: مساحت ناحیهٔ زیریك‌خم

اکنون به‌نوع دیگری از انتگرالگیری یعنی انتگرالگیری به‌کمك مجموعیابی می‌پردازیم. انتگرالهایی که در اینجا تعریف می‌کنیم انتگرالهای‌معین نامیده می‌شوند تا ازانتگرالهای نامعین‌که تا اینجا با آنها سروکار داشته‌ایم متمایز باشند. انتگرال معین یك‌حد عددی است و دسته‌ای از پادمشتقها نیست؛ و ممکن است تعجب کنید که چرا این دومقولهٔ متفاوت ریاضی انتگرال نام دارند و ارتباط بین‌آنها چیست. چنانکه دربخش ۷.۴ خواهیم دید ارتباط آنها شگفت‌انگیز است، و کشف و فرمولبندی آن توسط لایب‌نیتس و نیوتن یکی از دستاوردهای بزرگ فکری تمدن بشر محسوب می‌شود.

روشی که برای این نوع انتگرالگیری اتخاذ می‌کنیم چنین است که نخست به‌تعریف‌مساحت ناحیهٔ محصور بین‌نمودار یك‌تابع پیوستهٔ نامنفی مانند $y=f(x)$ و بازه‌ای از محور x مانند $a\leqslant x\leqslant b$ می‌پردازیم. درآغاز تا آنجاکه می‌توانیم، طبق شکل ۵.۴، بخش هر چه بیشتری از این ناحیه را با مستطیلهای محاطی قائم پرمی‌کنیم. مجموع مساحتهای‌مستطیلها تقریبی‌است ازمساحت ناحیه. هرچه تعداد مستطیلها بیشتر باشد، تقریب بهتری به‌دست می‌آید. بنابه‌تعریف، مساحت این ناحیه، حد مجموع مساحتهای مستطیلهاست وقتی‌که مستطیلها کوچك وکوچکتر شوند و تعداد آنها به‌سوی بینهایت میل کند. پس از اینکه بیان دقیق ریاضی این مطالب‌را ارائه‌کردیم دوموضوع روشن خواهندشد. نخست اینکه اگر به‌جای مستطیلهای محاطی، مستطیلهای محیطی (شکل ۶.۴) و یا هرنوع مستطیلهای دیگری‌که قاعدهٔ پایین‌آنها برمحور x منطبق باشد و قاعدهٔ بالای آنها خم را قطع کند به‌کار بریم دقیقاً همان حد به‌دست می‌آید. دوم اینکه، حد مجموع‌مساحتهای این‌مستطیلها نه تنها برای توابع پیوستهٔ نامنفی، که بحث خود را با آنها آغاز کردیم، بلکه برای هرتابع پیوسته‌ای وجود دارد.

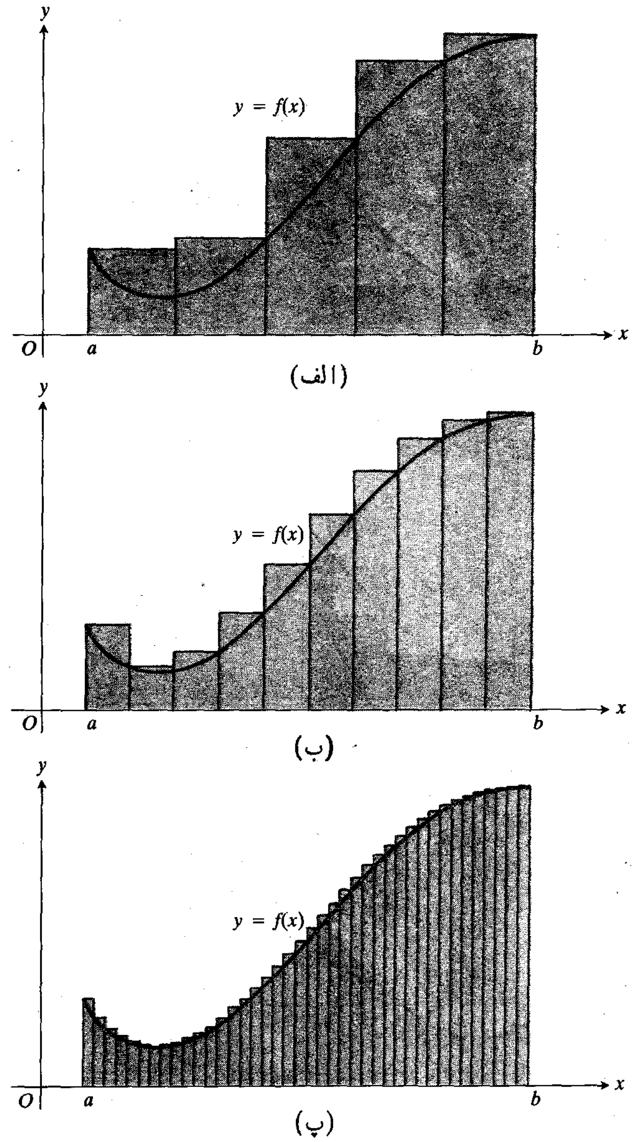


۵.۴ برای تعریف مساحت ناحیهٔ زیر نمودار f از a تا b، ناحیه را با مستطیلهای محاطی تقریب می‌زنیم و مساحتهای مستطیلها را با هم جمع می‌کنیم. مطابق شکلهای (الف)، (ب)، و (پ) هرچه مستطیلها باریکتر باشند و تعدادشان افزایش‌یابد، تقریب بهتری به‌دست‌می‌آید.

تقریب‌زدن مساحت به‌کمك مستطیلها

فرض می‌کنیم $y=f(x)$ تابعی پیوسته و نامنفی روی بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ باشد. می‌خواهیم‌مساحت ناحیهٔ‌محدود به‌نمودار f، خطوط $x=a$ و $x=b$، و محور x را تعریف‌کنیم. این‌ناحیه را ناحیهٔ زیرخم $y=f(x)$ از $x=a$ تا $x=b$ می‌نامیم.

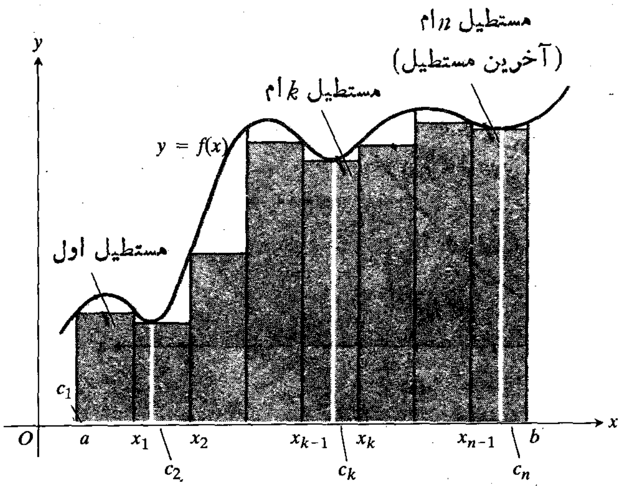
کار را با یك براورد شروع می‌کنیم. بدین‌منظور، ناحیه را به‌کمك خطوط عمود برمحور x به n نوار نازك با پهنای یکسان $\Delta x=(b-a)/n$ تقسیم می‌کنیم. این خطوط از نقاط انتهایی



۶.۴ مستطیلهای محیطی هم، نظیر مستطیلهایی که در این شکل دیده می‌شود، می‌توانند مانند مستطیلهای محاطی شکل ۵.۴ در تقریب زدن مساحت ناحیهٔ زیریک خم به کار روند.

$x=a$ و $x=b$ ونقاط میانی بسیاری که آنها را با $x_۱$، $x_۲$، ...، $x_{k-۱}$، x_k، ...، $x_{n-۱}$ نشان می‌دهیم می‌گذرند (شکل ۷.۴). هرنوار را با مستطیلی محاطی تقریب می‌زنیم که از قاعدهٔ پایینی نوار که برمحور x واقع است تا پایینترین نقطهٔ خم که دربالای این قاعده قراردارد امتداد می‌یابد. اگر c_k نقطه‌ای باشد که در آن مقدار تابع f دربازهٔ از $x_{k-۱}$ تا x_k مینیمم باشد (چنین نقطه‌ای وجود دارد زیرا f پیوسته است)، ارتفاع این مستطیل $f(c_k)$ است. مساحت این مستطیل، حاصلضرب ارتفاع درطول قاعدهٔ آن است

$$f(c_k)(x_k - x_{k-۱}) = f(c_k)\Delta x. \qquad (۱)$$



۷.۴ وقتی برای براوردکردن مساحت ناحیهٔ زیر نمودار یک تابع نامنفی پیوسته مستطیلهای محاطی را به کار می‌بریم، ارتفاع هرمستطیل مقدار مینیمم f برقاعدهٔ آن مستطیل است.

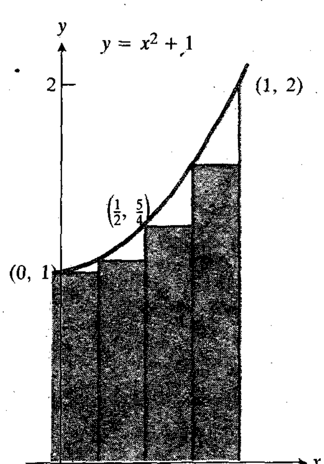
بنابراین، درشکل ۷.۴ مساحت اولین مستطیل محاطی $f(c_۱)\Delta x$، مساحت مستطیل دوم $f(c_۲)\Delta x$ و به‌همین ترتیب، مساحت مستطیل nام یا آخر $f(c_n)\Delta x$ است. مجموع این مساحتها یعنی

$$S_n = f(c_۱)\Delta x + f(c_۲)\Delta x + \cdots + f(c_n)\Delta x \qquad (۲)$$

مقدار تقریبی مساحت ناحیهٔ زیرخم $y=f(x)$ از $x=a$ تا $x=b$ را به‌دست می‌دهد.

مثال ۱ مساحت ناحیهٔ زیرخم $y=x^۲+۱$ از $a=۰$ تا $b=۱$ را با $n=۴$ مستطیل محاطی براوردکنید.

حل: خم‌را دربازهٔ $۰ \leqslant x \leqslant ۱$ رسم می‌کنیم (شکل ۸.۴).



۸.۴ مستطیلهای براوردکنندهٔ مساحت زیرنمودار $y=x^۲+۱$ از $x=۰$ تا $x=۱$

سپس بازه را به‌کمك نقاط زیر به‌چهار بخش تقسیم می‌کنیم

$$x_1=\frac{1}{4}\ ،\ x_2=\frac{1}{2}\ ،\ \text{و}\ \ x_3=\frac{3}{4}$$

طول هرزیربازه برابراست با $\Delta x = 1/4$. مستطیل‌محاطی‌مربوط به‌هرزیربازه را رسم می‌کنیم. در اینجا ارتفاع هرمستطیل برابر با طـول لبهٔ چپ آن است. بنابـراین مجموع مساحتهـای مستطیلها این است

$$\begin{aligned}S_4&=f(c_1)\Delta x+f(c_2)\Delta x+f(c_3)\Delta x+f(c_4)\Delta x\\&=f(0)\Delta x+f\left(\tfrac{1}{4}\right)\Delta x+f\left(\tfrac{1}{2}\right)\Delta x+f\left(\tfrac{3}{4}\right)\Delta x\\&=((0)^2+1)\left(\tfrac{1}{4}\right)+\left(\left(\tfrac{1}{4}\right)^2+1\right)\left(\tfrac{1}{4}\right)\\&\quad+\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+1\right)\left(\tfrac{1}{4}\right)+\left(\left(\tfrac{3}{4}\right)^2+1\right)\left(\tfrac{1}{4}\right)\\&=\frac{16}{64}+\frac{17}{64}+\frac{20}{64}+\frac{25}{64}=\frac{78}{64}=1/21875\,.\end{aligned}$$

حاصلجمع $S_4 = 1/21875$ مقدار تقریبی مساحت ناحیهٔ زیرخم $y=x^2+1$ از $x=0$ تا $x=1$ است. چون مستطیلها همهٔ ناحیهٔ زیرخم‌را نمی‌پوشانند، مقدار ۱/۲۱۸۷۵ تقریبی‌نقصانی ازمساحت است. چنانکه درمثال ۷ بخش ۷.۴ خواهیم‌دید مساحت دقیق ۴/۳ است، بنابـراین مقدار تقریبی به‌دست‌آمده حدود ٪۸ کمتر است. ■

نماد مجموع

برای رعایت اختصار، غالباً مجموعهایی نظیر

$$S_n=f(c_1)\Delta x+f(c_2)\Delta x+\cdots+f(c_n)\Delta x \qquad (3)$$

را با استفاده از حرف بزرگ یونانی Σ (سیگما) که مشخص‌کننده کلمه «مجموع» است به‌صورت زیرمی‌نویسیم

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x\,. \qquad (4)$$

(این رابطه را چنین می‌خـوانیم: «S_n برابـر است بـا مجموع $f(c_k)\Delta x$ از $k=1$ تا n»). این نمادگذاری را نوشتن مجموع با نماد سیگما می‌نامند. توجه‌کنید کـه هرجملهٔ مجموع در رابطهٔ (۳) به‌صورت $f(c_k)\Delta x$، و تفاوت جمله‌ها با یکدیگر در اندیس c است. اندیس را با k نشان داده‌ایم. اما از i یا j یا از هرنماد دیگری که برای چیز دیگری به‌کار نرود می‌توان استفاده کـرد.

■ ■ ■

مجموعیابی

از اعصار قدیم مسألهٔ یافتن مساحت و حجم ذهن ریـاضیدانان را به‌خـود مشغول داشته است. ارشمیدس روشی هوشمندانه بـرای محاسبهٔ مساحت و حجم ارائه‌کرد که بعداً «افنا» نامیده شد. در این روش‌مقادیر بینهایت‌کوچك اساساً به‌کار نرفت، وتنها ازمنطق‌صوری استفاده شد. **نیکل‌اورم**[1] ریاضیدان قرون وسطی (۱۳۲۵ میلادی) مساحت زیرخمها را ضمن مباحث حرکت حساب‌کرد. با انقلاب علمی قرن هفدهم دوباره محاسبهٔ مساحت و حجم مورد توجه قرار گرفت. این‌امر در آثارکاوالیری[2] و توریچلی‌ریاضیدانان ایتالیایی و نیز کپلر ستاره‌شناس کـه در قـانون دومش به‌صراحت از مفهوم مساحت بحث‌می‌شود مشهود است. یوهانس کپلر (۱۵۷۱-۱۶۳۰) برای محاسبهٔ مساحت ناحیه‌ای که یك سیاره می‌روبد از این روش استفاده‌کرد که این‌مساحت‌را مجموعی‌ازمساحتهای مثلثهای بینهایت کوچکی‌درنظر گرفت که یك‌رأس همهٔ آنها خورشید است و دورأس دیگرشان روی مدار سیاره قراردارند و بینهایت به‌هم نزدیك‌اند. سپس او برای‌محاسبهٔ مجموع، ازنوعی حساب‌دیفرانسیل و انتگرال ابتدایی بهره‌گرفت. کپلر به‌محاسبهٔ حجم بشکه‌های شراب تجاری نیز پرداخت. اما درسراسر قـرن شانـزدهم و اوائل قرن هفدهم محاسبهٔ مساحت وحجم با روشهای اختصاصی انجام می‌شد و اکثر دانشمندان و ریاضیدانان گاه و بیگاه روشهای جـالبی می‌یـافتند. نیوتن و لایب‌نیتس نخستین‌کسانی بودندکه برای محاسبهٔ مساحت و حجم حساب انتگرال را به‌صورتی اسلوبمند به‌کار گرفتند.

1. Nicole Oresme 2. Cavalieri

اندیس در نخستین جمله $k=1$، در دومین جمله $k=2$، به‌همین ترتیب، ... در آخرین جمله یا nامین جمله $k=n$ است. این مطلب را با نوشتن $k=1$ در زیر $\sum$ مشخص کردیم تا روشن شود که مجموع با جمله‌ای آغاز می‌شود که از قراردادن ۱ به‌جای k در رابطهٔ بعد از علامت سیگما به‌دست می‌آید. حرف n در بالای سیگما جای توقف را به‌ما نشان می‌دهد. مثلاً اگر $n=4$، داریم

$$\sum_{k=1}^{4} f(c_k)\Delta x = f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + f(c_3)\Delta x + f(c_4)\Delta x .$$

تنها تفاوت هرجمله با جملهٔ بعدی‌اش مقدار k است. به‌جای k؛ اول ۱، بعد ۲، بعد ۳، و بعد ۴ را قرار می‌دهیم. سپس آنها را باهم جمع می‌کنیم.

مثال ۲

الف) $\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$

ب)

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{k}{k+1}=\frac{1}{1+1}+\frac{2}{2+1}+\frac{3}{3+1}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$$

پ)

$$\sum_{j=0}^{2}\frac{j+1}{j+2}=\frac{0+1}{0+2}+\frac{1+1}{1+2}+\frac{2+1}{2+2}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$$

ت) $\sum_{i=1}^{4} x_i = x_1+x_2+x_3+x_4$

ث) $\sum_{k=1}^{4} x^k = x+x^2+x^3+x^4$ ■

مساحت ناحیهٔ زیر یک خم

باردیگر توجه خود را به‌مساحت ناحیهٔ زیر یک خم معطوف می‌کنیم. فرمولهای کلی مساحت مثلث، ذوزنقه، و دایره را که همگی شکلهایی در هندسهٔ کلاسیک یونانی هستند می‌دانیم. اما از دوران قبل از پیدایش حساب دیفرانسیل و انتگرال هیچ فرمول کلی برای مساحت ناحیه‌های دلخواه زیر نمودار توابع نامنفی پیوسته دردست نیست. اکنون باید این مساحتها را تعریف کنیم، البته دربارهٔ روش انجام این کار قبلاً بحث کردیم. این مساحتها را به‌صورت حد مجموع مساحتهای مستطیلهای محاطی تعریف می‌کنیم. برمبنای قضیه‌ای که بعداً دراین بخش بیان می‌کنیم این حدها همواره وجود دارند.

تعریف

مساحت ناحیهٔ زیر یک خم

مساحت ناحیهٔ زیر نمودار تابع پیوستهٔ نامنفی f در بازهٔ $[a,b]$ حد مجموع مساحتهای مستطیلهای محاطی با قاعدهٔ مساوی است وقتی که تعداد مستطیلها، n، به‌سوی بینهایت میل کند. با استفاده از نمادها

$$A=\lim_{n\to\infty}\left(f(c_1)\Delta x+f(c_2)\Delta x+\dots+f(c_n)\Delta x\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x \qquad (5)$$

که در آن $f(c_k)$ کمترین مقدار f روی بازهٔ $[x_{k-1},x_k]$ است.

چنانکه به‌اختصار شرح خواهیم داد حد در معادلهٔ (۵) همواره وجود دارد. بعداً دراین فصل روشهایی برای محاسبهٔ این حد عرضه خواهیم کرد.

انتگرال ریمان

وجود حد در معادلهٔ (۵) نتیجهٔ قضیهٔ کلیتری است که درمورد هر تابع پیوسته روی بازهٔ $[a,b]$ به‌کار می‌رود. دراین قضیهٔ کلیتر، تابع می‌تواند منفی هم باشد. نخست قضیه را بیان می‌کنیم، و سپس به‌علت درستی آن، البته نه با دقت یک اثبات کامل، می‌پردازیم. برای سهولت بررسی، از تصاویر توابع مثبت کمک می‌گیریم ولی مطالب کلیی که به‌کمک این تصاویر تشریح می‌شوند برای هر تابع پیوستهٔ دلخواهی صادق‌اند.

تابع مفروض f را که روی $[a,b]$ پیوسته است درنظر می‌گیریم. مطابق شکل ۹.۴ نقاط زیر را بین a و b درج می‌کنیم

$$x_1,\ x_2,\dots,x_{k-1},\quad x_k,\dots,x_{n-1}\cdot$$

این نقاط $[a,b]$ را به n زیر بازهٔ با طولهای زیر که ضرورتی ندارد مساوی باشند، تقسیم می‌کنند

$$\Delta x_1=x_1-a,\ \ \Delta x_2=x_2-x_1,\dots;\ \ \Delta x_n=b-x_{n-1}\,.$$

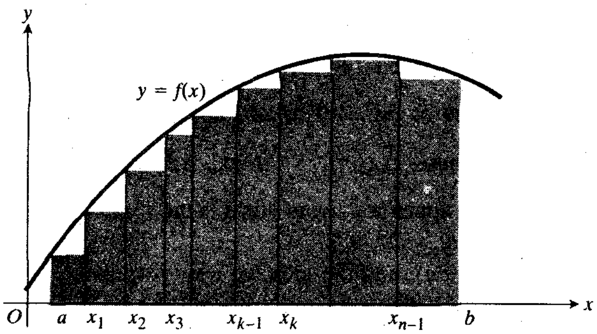
چون f پیوسته است درهر زیر بازه یک مقدار مینیمم، $\min_k$، و یک مقدار ماکسیمم، $\max_k$ دارد. مجموع مساحتهای مستطیلهای سایه‌دار، درشکل ۹.۴ (الف) را **مجموع پایینی** می‌نامیم. این مجموع چنین است

$$L=\min_1\Delta x_1+\min_2\Delta x_2+\dots+\min_n\Delta x_n\,. \quad (6)$$

مجموع مساحتهای مستطیلهای سایه‌دار در شکل ۹.۴ (ب) را **مجموع بالایی** می‌نامیم. این مجموع چنین است

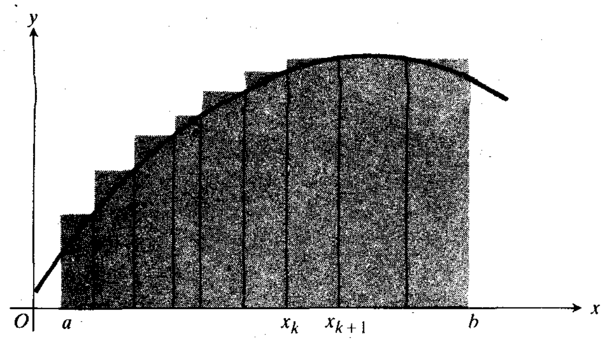
$$U=\max_1\Delta x_1+\max_2\Delta x_2+\dots+\max_n\Delta x_n\,. \quad (7)$$

تفاضل مجموعهای بالایی و پایینی یعنی $U-L$ برابر مجموع مساحتهای بلوکهای سایه‌دار درشکل ۹.۴ (پ) است.



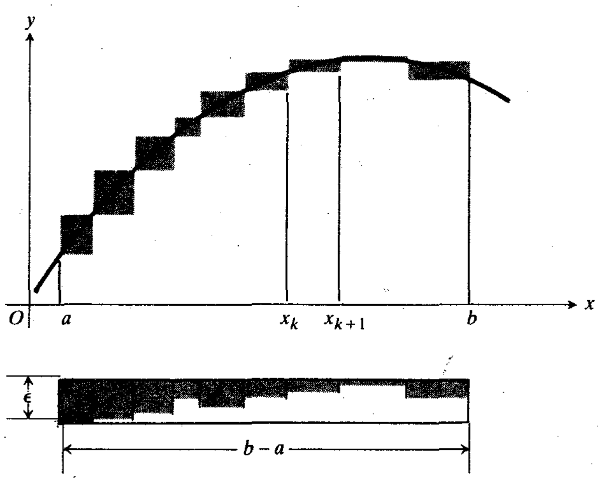
(الف)

مجموع مساحتهای مستطیلهای محاطی، مجموع پایینی L را به دست می‌دهد که کمتر است از . . .



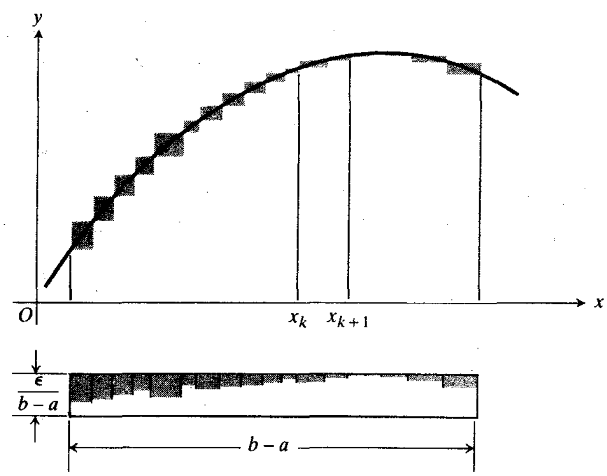
(ب)

... مجموع بالایی U که از جمع کردن مساحتهای مستطیلهای محیطی به‌دست می‌آید.



(پ)

تفاضل مجموع بالایی و پایینی را می‌توان خیلی کم یعنی کمتر از $\epsilon.(b-a)$ کرد.



(ت)

با تقسیم ظریفتر $[a, b]$، تفاضل $U-L$ را می‌توان باز هم کوچکتر کرد و اگر این تقسیم به‌اندازه کافی ظریف باشد تفاضل از هر ϵ داده‌شده‌ای کمتر می‌شود.

۹.۴ به‌ازای هر $\epsilon > 0$، یک $\delta > 0$ نظیر وجود دارد به‌طوری که اگر پهنای ماکسیمم بلوکهای قسمت (ت)ی شکل کمتر از δ باشد ارتفاع آنها کمتر از $\epsilon/(b-a)$ است. پس می‌توان نوشت

$$0 \leqslant U-L = \text{مجموع مساحت بلوکها} < [\epsilon/(b-a)] \cdot (b-a) = \epsilon \, .$$

ایده‌ای که ما در پی آنیم و شکل ۹.۴ (پ) آن را القا می‌کند این است که هرچه $[a, b]$ ظریفتر تقسیم شود، مساحت $U-L$ کمتر است. برای بهره‌وری از این ایدهٔ مهم باید به‌طور دقیقتر مشخص کنیم که منظورمان از تقسیم ظریفتر $[a, b]$ چیست. هدف ما این است که کاری کنیم که ضلع بالایی مستطیلها تقریباً برخم منطبق شوند و درنتیجه تفاضل U و L کاهش یابد. دست‌کم در نظر داریم تعداد xها را افزایش دهیم تا پهنای مستطیلها کوچکتر شود. به بیان دیگر می‌خواهیم تقسیم را ظریفتر انجام دهیم یعنی $[a, b]$ را چنان تقسیم کنیم که پهنترین زیربازه کوچکتر از قبل شود. بنابراین نرم تقسیم

$$a, \; x_1, \; x_2, \cdots, x_{n-1}, \; b$$

را پهنای پهنترین زیربازه تعریف می‌کنیم. بنابراین وقتی که نرم به‌سمت صفر میل کند تعداد زیربازه‌ها بیشتر و پهنای آنها کمتر می‌شود. در شکل ۹.۴ (پ) با میل کردن نرم به‌سمت صفر، تعداد بلوکها افزایش می‌یابد و پهنای آنها کم می‌شود (اما مجموع

پهنای آنها ثابت و برابر $b-a$ است) و هر چه پهنایشان کمتر شود کوتاهتر نیز می‌شوند. مطابق شکل ۹.۴ (ت) با میل کردن نرم تقسیم بازهٔ $[a, b]$ به‌سمت صفر تفاضل $U-L$ از هر ϵ مثبت ازقبل تعیین شده‌ای کمتر می‌شود. به‌بیان دیگر داریم

$$\lim_{\text{نرم}\to 0}(U-L)=0\,. \tag{۸}$$

و همان‌گونه که درکتابهای پیشرفته اثبات می‌شود داریم

$$\lim_{\text{نرم}\to 0} L=\lim_{\text{نرم}\to 0} U\,. \tag{۹}$$

روابط (۸) و (۹) نه‌تنها در مورد تابعی که در شکل ۹.۴ دیده می‌شود، بلکه درمورد هرتابع پیوسته‌ای صادق است و این‌امر نتیجهٔ ویژگی خاصی است به نام **پیوستگی یکنواخت** که توابع پیوسته در یك بازهٔ بستهٔ کراندار دارند. این‌ویژگی تضمین‌می‌کند که وقتی نرم به‌سمت صفرمیل کند، بلوکهای شکل ۹.۴ (پ) که تفاضل U و L را نشان می‌دهند کوتاهتر و نازکتر می‌شوند، و می‌توانیم با نازك‌کردن آنها به‌قدر دلخواه‌کوتاهشان کنیم. چون در اینجا به استدلالهای $\epsilon-\delta$ یی مربوط به پیوستگی یکنواخت نمی‌پردازیم، این شیوهٔ استنتاج تساوی (۹) اثبات تلقی نمی‌شود. اما این استدلال در اساس درست‌است وتصویری صحیح از اثبات کامل به‌دست می‌دهد.

فعلاً فرض‌می‌کنیم برما معلوم‌شده‌است که رابطهٔ (۹) درمورد هرتابع پیوستهٔ روی $[a, b]$ صدق می‌کند. در هر زیربازهٔ $[x_{k-1}, x_k]$ که از تقسیم بازهٔ $[a, b]$ به‌دست می‌آید نقطه‌ای مانند c_k درنظرمی‌گیریم و مجموع زیر را تشکیل می‌دهیم

$$S=\sum f(c_k)\,\Delta x_k\,. \tag{۱۰}$$

S نیزمانند مجموعهای

$$U=\sum \max_k \Delta x_k \quad \text{و} \quad L=\sum \min_k \Delta x_k$$

مجموعی است از حاصلضرب مقادیرتابع درطول بازه‌ها. اما در اینجا c_kها به‌طور تصادفی انتخاب شده‌اند وآنچه دربارهٔ مقدار $f(c_k)$ می‌دانیم این است که

$$\min_k \leqslant f(c_k) \leqslant \max_k\,.$$

ولی دانستن همین‌مطلب برای به‌دست‌آوردن رابطهٔ زیرکافی‌است

$$L\leqslant S\leqslant U \tag{۱۱}$$

و بنابراین داریم

$$\lim_{\text{نرم}\to 0} L=\lim_{\text{نرم}\to 0} S=\lim_{\text{نرم}\to 0} U \tag{۱۲}$$

(این رابطه را می‌توان با تغییر مختصری در قضیهٔ ساندویچ بخش ۹.۱ به‌دست آورد). به بیان دیگر حد S با حد L و حد U یکی است.

از رابطهٔ (۱۲) حقیقتاً به نتیجه‌ای قابل ملاحظه دست می‌یابیم. بنابراین تساوی، چگونگی‌انتخاب نقاط c_k برای تشکیل مجموع

$$S=\sum f(c_k)\,\Delta x_k$$

برای یك تابع پیوسته در بازه‌ای چون $[a, b]$ اهمیت ندارد، و اگرنرم تقسیم به‌سمت صفرمیل کند همواره یك حد ثابت به‌دست می‌آید. اگر c_k را چنان برگزینیم که $f(c_k)$ روی $[x_{k-1}, x_k]$ مقدار ماکسیمم f باشد یا اینکه c_k ها راچنان برگزینیم که $f(c_k)$ روی $[x_{k-1}, x_k]$ مقدار مینیمم f باشد، حد فرق نمی‌کند. می‌توان c_k ها را تصادفی هم انتخاب کرد. c_k ها هرچه باشند حد فرق نمی‌کند.

این مطلب را نخستین‌بار کوشی در سال ۱۸۲۳ (بدون استفاده ازپیوستگی یکنواخت) کشف کرد. بعدها ریاضیدانان قرن نوزدهم آن را (با استفاده از پیوستگی یکنواخت) بربنیان منطقی محکمی استوار ساختند. این حد به یاد گئورك فریدریش برنهارد ریمان (۱۸۲۶–۱۸۶۶) **انتگرال ریمان** f روی‌بازهٔ $[a, b]$ نامیده و به‌صورت زیرنشان داده می‌شود

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

گیرانداختن حد بین‌مجموعهای بالایی و پایینی از ایده‌های‌ریمان بود. مجموع

$$S=\sum f(c_k)\,\Delta x_k$$

را *مجموع تقریب‌زننده* یا **مجموع ریمان** *انتگرال* می‌نامند. اعداد a و b را **حدود انتگرالگیری**، a را **حد پایینی** و b را **حد بالایی** آن می‌نامند.

قضیهٔ ۱

قضیهٔ وجود انتگرال

وجود انتگرال ریمان

اگر f روی $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\text{نرم}\to 0} \sum f(c_k)\,\Delta x_k$$

وجود دارد و مقدار آن به‌ازای‌هرانتخابی از اعداد c_k یکی‌است.

اثبات کامل این قضیه را می‌توان در اکثرکتابهای آنالیز ریاضی یافت.

مساحت ناحیهٔ زیرخم یك تابع نامنفی مانند f روی بازه‌ای چون $[a, b]$ که قبلاً درمعادلهٔ (۵) تعریف شد، انتگرال ریمان f است:

$$\text{وقتی‌که } f(x) \geqslant 0 \text{،} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \text{مساحت.}$$

چنانکه در بخش ۷.۴ و مجدداً در فصل ۵ خواهیم‌دید، انتگرالهای ریمان تعابیر فراوان دیگری نیز دارند.

انتگرالهای معین

برای متمایزساختن انتگرال نامعین از انتگرال ریمان

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

انتگرال‌ریمان را **انتگرال معین** f روی $[a, b]$ می‌نامند. انتگرال معین را می‌توان به‌صورت

$$\int_a^b f(t)\,dt, \quad \int_a^b f(u)\,du$$

و نظایرآن نشان داد. متغیرانتگرالگیری می‌تواند هرحرفی نظیر x، t، یا u باشد مشروط به‌اینکه آن حرف درهمان بحث برای چیز دیگری به‌کار نرود.

این نکته را باید به‌خاطر داشت که $\int_a^b f(x)\,dx$ عددی است‌که به‌صورت حد مجموعهای تقریب‌زننده دربازهٔ از a تا b روی محور x تعریف‌می‌شود. اگرمحور را به‌نام دیگری‌بخوانیم، مثلاً محور t، آنگاه نماد مناسب انتگرال‌چنین‌است: $\int_a^b f(t)\,dt$، اما مقدار انتگرال همان عدد است.

ویژگیهای جبری انتگرال معین

اغلب لازم می‌شودکه انتگرالهای معین را باهم‌جمع، ازهم‌تفریق، آنها را درمقادیر ثابت ضرب، و یا آنها را باهم مقایسه کنیم. ویژگیهایی‌که درجدول ۱.۴ ذکرشده‌اند این‌کارها‌را آسان‌می‌کنند. همهٔ ویژگیها جز دوویژگی اول مستقیماً از تعریف انتگرال به‌عنوان حد یك مجموع متناهی به دست می‌آیند. مجموعهای متناهی این ویژگیها را دارند، بنابراین حدهایشان نیز دارای این ویژگیها هستند. مثلاً، ویژگی ۳ یعنی

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \quad (\text{هرعددی می‌تواند باشد } k)$$

حاکی است‌که انتگرال k برابر یك‌تابع، مساوی‌است با k برابر انتگرال همان تابع. این مطلب به‌دلیل زیر درست است

$$\int_a^b kf(x)\,dx = \lim\sum kf(c_i)\,\Delta x_i = \lim k\sum f(c_i)\,\Delta x_i \tag{۱۳}$$
$$= k\,\lim\sum f(c_i)\,\Delta x_i = k\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

جدول ۱.۴ ویژگیهای جبری انتگرال معین

۱. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ (بنا به‌تعریف)

۲. $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ (بنا به‌تعریف)

۳. $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ (k هرعددی‌می‌تواندباشد)

۴. $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

۵. $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

۶. $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$ (اگر $f(x)$ روی $[a, b]$ نامنفی باشد)

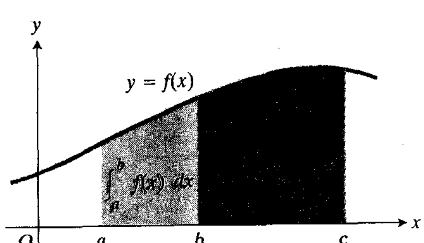
۷. $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$ (اگر $f(x)$ روی $[a, b]$ نابزرگتر از $g(x)$ باشد)

۸. $\min f \cdot (b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \max f \cdot (b-a)$

که درآن منظور از min و max مقدار مینیمم و ماکسیمم f روی $[a, b]$ است.

۹. $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

در ویژگی ۹، برابری به ازای همهٔ a، b، و c ها صادق است مشروط به‌اینکه f در بازه‌های مربوط پیوسته باشد. شکل ۱۰.۴ ویژگی ۹ را درمورد مساحتها تشریح می‌کند.



۱۰.۴ $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$.

ویژگی ۱، یعنی

$$\int_a^a f(x)\,dx=0$$

یك تعریف است. بهتر است انتگرال یك تابع روی بازه‌ای به‌طول صفر، صفر باشد.

ویژگی ۲، یعنی

$$\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$$

نیز یك تعریف است. این ویژگی حاکی است که عوض کردن حدهای انتگرالگیری علامت انتگرال را تغییر می‌دهد. این ویژگی راهی برای تغییر علامت یك انتگرال به‌دست می‌دهد. همچنین به‌کمك این ویژگی راهی برای ترکیب انتگرالها به دست می‌آوریم. مثلاً

$$\int_1^2 f(x)\,dx+\int_2^1 g(x)\,dx$$

$$=\int_1^2 f(x)\,dx-\int_1^2 g(x)\,dx \quad (\text{ویژگی } 2)$$

$$=\int_1^2 [f(x)-g(x)]\,dx. \quad (\text{ویژگی } 5)$$

مثال ۳ بنابه‌فرض f، g، و h توابعی پیوسته‌اند، و روی $[-1,1]$ داریم $h(x)\geqslant f(x)$ و نیز داریم

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx=5,\quad \int_1^4 f(x)\,dx=-2$$

$$\int_{-1}^1 g(x)\,dx=7.$$

آنگاه

۱. $\int_{-1}^1 3f(x)\,dx=3\int_{-1}^1 f(x)\,dx=15$

۲. $\int_{-1}^1 [2f(x)+3g(x)]\,dx=2(5)+3(7)=31$

۳. $\int_{-1}^1 [f(x)-g(x)]\,dx=5-7=-2$

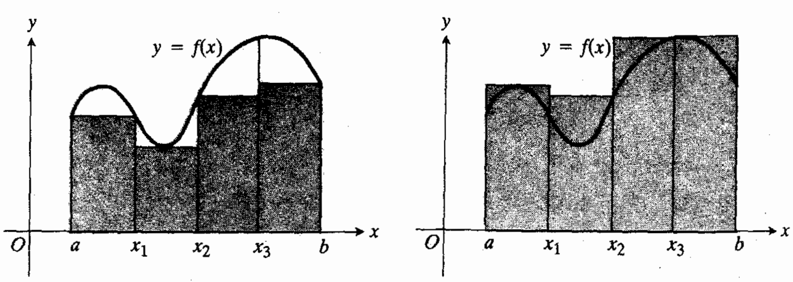
۴. $\int_{-1}^4 f(x)\,dx=\int_{-1}^1 f(x)\,dx+\int_1^4 f(x)\,dx$
$=5-2=3$

۵. $\int_{-1}^1 h(x)\,dx\geqslant\int_{-1}^1 f(x)\,dx=5$ ■

نمادی که برای انتگرال معین به‌کار بردیم نظیر نماد انتگرال نامعین است که در بخشهای ۱.۴ تا ۴.۴ دربارهٔ آن بحث شد. ارتباط میان این دونوع انتگرال را که ازمهمترین روابط موجود در تمام مبحث حساب دیفرانسیل و انتگرال است در بخش ۷.۴ بیان می‌کنیم. اما نخست در بخش ۶.۴، بدون استفاده از ابزارهای جدیدتر ریاضی‌که در بخش ۷.۴ عرضه می‌شود، به محاسبهٔ چند انتگرال می‌پردازیم. تفاوت میان روشهای بخش ۶.۴ و ۷.۴ جالب است و از اختلاف میان ریاضیات در زمان‌تولد لایب‌نیتس و نیوتن و ریاضیات پس ازآنها حکایت دارد.

مسأله‌ها

درمسأله‌های ۱ـ۵، نمودار معادلهٔ داده‌شده را در بازهٔ $a\leqslant x\leqslant b$ رسم کنید. بازه را به $n=4$ زیربازه به طول $\Delta x=(b-a)/4$ تقسیم کنید. (الف) مستطیلهای محاطی‌را رسم و مجموع مساحتهای آنها را حساب کنید. (ب) مستطیلهای محیطی را رسم و مجموع مساحتهای آنها را حساب کنید (شکل ۱۱.۴).



مستطیلهای محاطی

مجموع تقریب‌زننده چنین است:

$$S_4=\sum_{k=1}^4 \min_k \Delta x$$

(الف)

مستطیلهای محیطی

مجموع تقریب‌زننده چنین است:

$$S_4=\sum_{k=1}^4 \max_k \Delta x$$

(ب)

۱۱.۴ درمسأله‌های ۱ـ۵ ازمستطیلهای محاطی و محیطی نظیرآنچه در این شکل دیده می‌شود استفاده کنید.

۱. $y=2x+1, \quad a=0, \quad b=1$

۲. $y=x^2, \quad a=-1, \quad b=1$

۳. $y=\sin x, \quad a=0, \quad b=\pi$

۴. $y=1/x, \quad a=1, \quad b=2$

۵. $y=\sqrt{x}, \quad a=0, \quad b=4$

مجموعهای زیر را، مانند مثال ۲ ، به‌صورت مجموع چند جمله بنویسید.

۶. $\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k}$

۷. $\sum_{i=-1}^{3} 2^i$

۸. $\sum_{n=1}^{4} \cos n\pi x$

مقدار هریك از مجموعهای زیر را بیابید.

۹. $\sum_{n=0}^{4} \frac{n}{4}$

۱۰. $\sum_{k=1}^{3} \frac{k-1}{k}$

۱۱. $\sum_{m=0}^{5} \sin \frac{m\pi}{2}$

۱۲. $\sum_{i=1}^{4} (i^2-1)$

۱۳. $\sum_{i=0}^{3} (i^2+5)$

۱۴. $\sum_{k=0}^{5} \frac{1}{2^k}$

۱۵. کدام یك از مجموعهای زیرعبارت

$$1+2+4+8+16+32$$

را با نماد مجموع بیان می‌کند؟

الف) $\sum_{j=2}^{7} 2^{j-2}$

ب) $\sum_{k=0}^{5} 2^k$

پ) $\sum_{j=0}^{5} 2^j$

ت) $\sum_{j=1}^{6} 2^{j-1}$

۱۶. فرض می‌کنیم f و g پیوسته‌اند و داریم

$$\int_1^2 f(x)\,dx=-4, \quad \int_2^5 f(x)\,dx=6$$

$$\int_1^5 g(x)\,dx=8.$$

انتگرالهای زیر را حساب‌کنید

الف) $\int_1^5 f(x)\,dx$

ب) $\int_5^1 -2f(x)\,dx$

پ) $\int_1^5 [4f(x)-2g(x)]\,dx$

۱۷. فرض می‌کنیم f و h پیوسته‌اند و داریم

$$\int_1^7 f(x)\,dx=-1, \quad \int_7^9 f(x)\,dx=5, \quad \int_7^9 h(x)=4.$$

انتگرالهای زیر را حساب‌کنید

الف) $\int_1^9 -2f(x)\,dx$

ب) $\int_7^9 [2f(x)-h(x)]\,dx$

پ) $\int_9^7 f(x)\,dx$

ت) $\int_7^7 [f(x)+h(x)]\,dx$

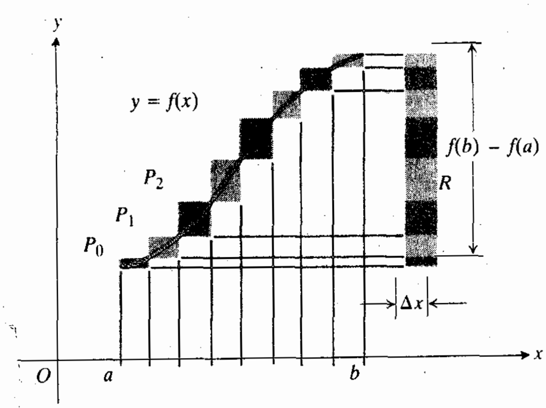
۱۸. فرض می‌کنیم f روی بازهٔ $[0, 4]$ پیوسته است و داریم

$$\int_0^3 f(x)\,dx=3, \quad \int_0^4 f(z)\,dz=7.$$

انتگرال زیر را حساب‌کنید

$$\int_3^4 f(y)\,dy.$$

۱۹. تابعهای صعودی. فرض می‌کنیم نموداد f مطابق شکل ۱۲.۴ بین $x=a$ و $x=b$ از چپ به راست همواره صعود می‌کند. Δx را برابر $(b-a)/n$ درنظر می‌گیریم. با استفاده از شکل ۱۲.۴ نشان دهیدکه تفاضل مجموعهای بالایی و پایینی را می‌توان با مساحت مستطیل R یعنی $[f(b)-f(a)]\Delta x$ نمایش



۱۲.۴ اگر f تابعی صعودی باشد، چهارضلعیهای $U-L$ بدون رویهم افتادگی، مستطیل طرف راست را پرمی‌کنند. (مسأله‌های ۱۹ــ۲۱ را ببینید.)

داد. (راهنمایی: تفاضل $U-L$ برابر با مجموع مساحتهای مستطیلهای با قطرهای P_0P_1، P_1P_2 و نظایر اینها در امتداد خم است، وچنانچه این‌مستطیلها را به‌طور افقی‌جابه‌جاکنیم تا مستطیل R به‌دست‌آید هیچگونه اشتراکی ندارند.)

۲۰. تابعهای نزولی. شکلی رسم‌کنید کـه یك خم پیوسته مـانند $y=f(x)$ را که بین $x=a$ و $x=b$ ازچپ به راست‌همواره نزول می‌کند، نشان دهد. باز هم فرض می‌کنیم Δx_kها برابرند و داریم $\Delta x_k=\Delta x=(b-a)/n$. برای تفاضل $U-L$ رابطه‌ای نظیر رابطهٔ مسألهٔ ۱۹ بیابید.

۲۱. اگر درمسألهٔ ۱۹ یا ۲۰، Δx_kها برابرنباشند، نشان دهید

$$U-L \leqslant |f(b)-f(a)|(\Delta x_{\max})$$

که درآن $\Delta x_{\max}$ بزرگترین Δx_kها به‌ازای $k=1, 2, \ldots, n$ است.

TOOLKIT PROGRAMS
Integration

۶.۴ محاسبهٔ انتگرالهای معین به‌کمك مجموعیابی

در بخش ۵.۴ مساحت‌ناحیهٔ زیرنمودار یك‌تابع‌نامنفی پیوسته چون $y=f(x)$ از $x=a$ تـا $x=b$ را بـه‌صورت حـد مجموع مساحتهای مستطیلهای محاطی تعریف کردیم. همچنین درآن بخش دیدیم‌که این حد حالت خاصی است از حدی به‌نام انتگرال معین f که می‌توان آن را برای هرتابع پیوسته‌ای تعریف کرد.

دراین بخش انتگرالهای معین را به‌کمك فرمولهایی جبری کـه نخست آنها را به‌دست می‌آوریم، محاسبه می‌کنیم. هدف ما نشان دادن چگونگی محاسبهٔ انتگرالهای معین با ریاضیات اواخر دوران رنسانس است. یعنی دورانی قبل از قرن هفدهم کـه هنوز قضایای اساسی‌حساب دیفرانسیل و انتگرال، موضوع بخش‌بعدی، مطرح نبود. چنانکه خواهیم دید هر یك از این محاسبات فراستی خاص می‌خواهد، و فرمولهایی را که برای حل یك مسأله به‌دست می‌آوریم نمی‌توانیم به‌سادگی درمورد مسأله دیگری به‌کاربریم. این تعمیم‌نـاپذیری از وجوه تمایز حساب دیفرانسیل و انتگرال دوران رنسانس وحساب دیفرانسیل و انتگرال لایب‌نیتس و نیوتن است.

فرمولهایی برای $\sum_{k=1}^{n} k$ و $\sum_{k=1}^{n} k^2$

درآغاز به فرمولهای زیرنیاز داریم‌کـه آنها را از راه استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

در روش استقرای ریاضی باید نشان دهیم‌کـه یك فرمول به‌ازای $n=1$ درست‌است وثابت‌کنیم اگر این‌فرمول به‌ازای عدد صحیح n درست باشد، آنگاه به‌ازای عدد صحیح بعدی یعنی $n+1$ نیز درست است. همچنین نشان خواهیم دادکـه چنین فـرمولهایی را چگونه می‌توان به‌دست‌آورد.

درابتدا مجموع نخستین n عدد صحیح را درنظر می‌گیریم

$$F(n)=1+2+3+\cdots+n.$$

جدول ۲.۴ به‌اجمال نشان‌می‌دهدکه چگونه با افزایش n، $F(n)$ افزایش می‌یابد. ستون‌آخر، $F(n)/n$ یعنی نسبت $F(n)$ به n را نشان می‌دهد.

جدول ۲.۴

n	$F(n)=1+2+3+\cdots+n$	$F(n)/n$
۱	۱	۱=۲/۲
۲	۱+۲=۳	۳/۲=۳/۲
۳	۱+۲+۳=۶	۶/۳=۴/۲
۴	۱+۲+۳+۴=۱۰	۱۰/۴=۵/۲
۵	۱+۲+۳+۴+۵=۱۵	۱۵/۵=۶/۲
۶	۱+۲+۳+۴+۵+۶=۲۱	۲۱/۶=۷/۲

چنانکه از ستون آخر بـرمی‌آید $F(n)/n$ برابر است بـا $(n+۱)/۲$. دست‌کم این مطلب درمورد هـر درایهٔ این جدول، درست است. به‌عبارت دیگر، فرمول

$$\frac{F(n)}{n}=\frac{n+۱}{۲}$$

یا

$$۱+۲+۳+\ldots+n=\frac{n(n+۱)}{۲} \qquad (۱)$$

به‌ازای $n=۱,۲,۳,۴,۵,۶$ درست است. حال فرض می‌کنیم n عدد صحیحی بـاشدکـه بدانیم به‌ازای آن فرمول (۱) درست است (فعلاً می‌توان n را یکی از اعداد صحیح از ۱ تا ۶ درنظر گرفت). دراین‌صورت اگر $n+۱$ را به‌دوطرف بیفزاییم، فرمول جدید یعنی

$$۱+۲+۳+\cdots+n+(n+۱)=\frac{n(n+۱)}{۲}+(n+۱) \qquad (۲)$$

نیز به‌ازای همان n درست است.اما طرف‌راست فرمول(۲) چنین است

$$\frac{n(n+۱)}{۲}+(n+۱)=\frac{(n+۱)}{۲}(n+۲)=\frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}.$$

بنابراین فرمول (۲) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$۱+۲+۳+\ldots+n+(n+۱)=\frac{(n+۱)[(n+۱)+۱]}{۲}$$

که همان فرمول (۱) است با این‌تفاوت که $n+۱$ جانشین n شده است. از این‌رو اگر (۱) به‌ازای عـدد صحیح n درست بـاشد، به‌ازای عدد صحیح بعدی یعنی $n+۱$ نیزدرست است. لذا اکنون می‌دانیم کـه این رابطه به‌ازای $n+۱=۷$ درست است، زیـرا به‌ازای $n=۶$ درست است. پس از آن می‌توان گفت‌که این رابطه به‌ازای $n+۱=۸$ درست است، زیـرا به ازای $n=۷$ درست است. از این‌رو این رابطه بنابه‌اصل استقرای ریاضی به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n درست‌است. (برای‌آشنایی با استقرای‌ریاضی پیوست ۲ را ببینید.)

حال مجموع مربعات نخستین n عدد صحیح مثبت را درنظر می‌گیریم.

$$Q(n)=۱^۲+۲^۲+۳^۲+\ldots+n^۲$$

بـدیهی است $Q(n)$ سریعتر از $F(n)$، مجموع تـوانهای اول، افزایش می‌یابد. بـرای مقایسهٔ این‌دو، نسبت $Q(n)$ به $F(n)$ را تشکیل می‌دهیم. (جدول ۳.۴ را ببینید.)

به‌نظم‌ستون آخر توجه‌کنید: ۳/۳، ۵/۳، ۷/۳ و الی آخر. در واقـع، ایـن مقادیر عبارت‌انـد از $(۲n+۱)/۳$ بـه ازای $n=۱,۲,۳,۴,۵,۶$؛ یعنی

$$Q(n)=F(n)\cdot\frac{۲n+۱}{۳}.$$

اما بنابه (۱) داریم $F(n)=n(n+۱)/۲$، پس

$$Q(n)=۱^۲+۲^۲+۳^۲+\ldots+n^۲$$
$$=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶} \qquad (۳)$$

به‌ازای اعداد صحیح n از ۱ تا ۶ درست‌است. برای اثبات اینکه این رابطه به‌ازای همهٔ اعداد صحیح مثبت دیگر نیز درست است مانند قبل عمل می‌کنیم. فرض می‌کنیم (۳) به‌ازای n درست‌است

جدول ۳.۴

n	$F(n)$	$Q(n)=۱^۲+۲^۲+۳^۲+\ldots+n^۲$	$Q(n)/F(n)$
۱	۱	$۱^۲=۱$	$۱/۱=۳/۳$
۲	۳	$۱^۲+۲^۲=۵$	$۵/۳=۵/۳$
۳	۶	$۱^۲+۲^۲+۳^۲=۱۴$	$۱۴/۶=۷/۳$
۴	۱۰	$۱^۲+۲^۲+۳^۲+۴^۲=۳۰$	$۳۰/۱۰=۹/۳$
۵	۱۵	$۱^۲+۲^۲+۳^۲+۴^۲+۵^۲=۵۵$	$۵۵/۱۵=۱۱/۳$
۶	۲۱	$۱^۲+۲^۲+۳^۲+۴^۲+۵^۲+۶^۲=۹۱$	$۹۱/۲۱=۱۳/۳$

آنگاه به‌طرفین آن $(n+۱)^۲$ را می‌افزاییم. داریم

$$\begin{aligned}۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots+n^۲+(n+۱)^۲ &= \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}+(n+۱)^۲\\ &= \frac{(n+۱)}{۶}\,[n(۲n+۱)+۶(n+۱)]\\ &= \frac{(n+۱)}{۶}(۲n^۲+۷n+۶)\\ &= \frac{(n+۱)(n+۲)(۲n+۳)}{۶}\,.\end{aligned}\tag{۴}$$

عبارت‌آخر در (۴) همان عبارت‌آخر در (۳) است با این تفاوت که n جای خود را به $n+۱$ داده است. به‌بیان‌دیگر، اگر فرمول (۳) به‌ازای هرعدد صحیحی چون n درست باشد، به‌ازای $n+۱$ نیز درست است. ازآنجاکه می‌دانیم این فرمول به‌ازای $n=۶$ درست است، پس به‌ازای $n+۱=۷$ نیز درست است. وحال‌که می‌دانیم به‌ازای $n=۷$ درست است، پس به‌ازای $n+۱=۸$ نیز درست است و الی‌آخر. از این‌رو بنا به‌اصل استقرای ریاضی این فرمول به‌ازای هرعدد صحیح مثبت n درست است.

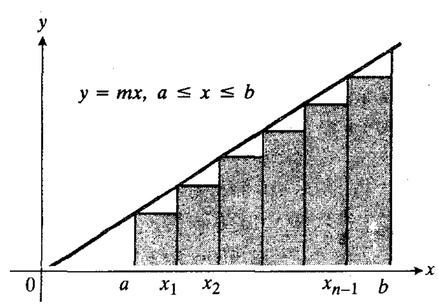
مساحتهای نواحی زیرخمهای $y=mx$ و $y=x^۲$

حال به‌کمک فرمولهای (۱) و (۳) مساحتهای زیر این دوخم را می‌یابیم.

مثال ۱ فرض می‌کنیم a، b، و m اعدادی مثبت‌اند و $a<b$. مساحت زیرخم $y=mx$ از $x=a$ تا $x=b$ را بیابید (شکل ۱۳.۴).

حل: انتگرال

$$\int_a^b mx\,dx$$



۱۳.۴ مستطیلهای تقریب‌زنندهٔ مساحت ناحیهٔ زیرخم $y=mx$ از a تا b.

را به‌عنوان حدی از مجموعها محاسبه می‌کنیم. گیریم n عددی صحیح و مثبت است. بازهٔ $[a, b]$ را با درج نقاط زیر در آن، به n زیربازه با طول برابر $\Delta x=(b-a)/n$ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{aligned}x_۱ &= a+\Delta x\\ x_۲ &= a+۲\,\Delta x\\ x_۳ &= a+۳\,\Delta x\\ &\vdots\\ x_{n-۱} &= a+(n-۱)\,\Delta x\,.\end{aligned}$$

مساحتهای مستطیلهای محاطی چنین‌اند

$$\begin{aligned}f(a)\,\Delta x &= ma\cdot\Delta x\\ f(x_۱)\,\Delta x &= m(a+\Delta x)\cdot\Delta x\\ f(x_۲)\,\Delta x &= m(a+۲\,\Delta x)\cdot\Delta x\\ &\vdots\\ f(x_{n-۱})\,\Delta x &= m(a+(n-۱)\,\Delta x)\cdot\Delta x\,.\end{aligned}$$

مجموع این مساحتها برابر است با

$$\begin{aligned}S_n &= m(a+(a+\Delta x)+(a+۲\,\Delta x)+\cdots\\ &\qquad +(a+(n-۱)\,\Delta x))\cdot\Delta x\\ &= m(na+(۱+۲+\cdots+(n-۱))\,\Delta x)\,\Delta x\\ &= m\left(na+\frac{(n-۱)n}{۲}\Delta x\right)\Delta x\\ &= m\left(a+\frac{n-۱}{۲}\Delta x\right)n\,\Delta x\\ &= m\left(a+\frac{b-a}{۲}\cdot\frac{n-۱}{n}\right)\cdot(b-a)\,.\end{aligned}$$

$$\left(\Delta x=\frac{b-a}{n}\right)$$

مساحت ناحیهٔ زیرخم را به صورت حد S_n وقتی‌که $n\to\infty$ تعریف می‌کنیم. درعبارت‌آخر تنها جایی‌که n آمده است درکسر

$$\frac{n-۱}{n}=۱-\frac{۱}{n}$$

است. وقتی‌که $n\to\infty$ داریم $۱/n\to ۰$، پس

$$\lim\frac{n-۱}{n}=۱-۰=۱\,.$$

بنا بر این

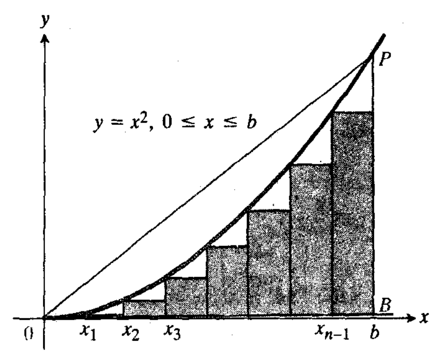
$$\int_a^b mx\,dx=\lim S_n=m\left(a+\frac{b-a}{2}\right)\cdot(b-a)$$

$$=m\left(\frac{b+a}{2}\right)\cdot(b-a)$$

$$=m\left(\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right).$$

این‌عدد برابر است با مساحت‌ذوزنقه‌ای (دراین‌حالت ذوزنقهٔ قائم) با قاعده‌های ma و mb و با ارتفاع $b-a$. ■

مثال ۲ مساحت ناحیهٔ زیرخم $y=x^2$ را از $x=0$ تا $x=b$ بیابید (شکل ۱۴.۴).



۱۴.۴ مستطیلهای تقریب‌زنندهٔ مساحت ناحیهٔ زیرخم $y=x^2$ از ۰ تا b.

حل: انتگرال

$$\int_0^b x^2\,dx$$

را به‌عنوان حدی از مجموعها محاسبه می‌کنیم. با درج نقاط زیر، بازهٔ $0\leqslant x\leqslant b$ را به n زیربازه با طولهای برابر، $\Delta x=b/n$، تقسیم می‌کنیم

$$x_1=\Delta x,\quad x_2=2\,\Delta x$$

$$x_3=3\,\Delta x,\ \dots,\quad x_{n-1}=(n-1)\,\Delta x.$$

مساحتهای مستطیلهای محاطی چنین‌اند

$$f(0)\,\Delta x=0$$

$$f(x_1)\,\Delta x=(\Delta x)^2\,\Delta x$$

$$f(x_2)\,\Delta x=(2\,\Delta x)^2\,\Delta x$$

$$f(x_3)\,\Delta x=(3\,\Delta x)^2\,\Delta x$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$f(x_{n-1})\,\Delta x=[(n-1)\,\Delta x]^2\,\Delta x.$$

مجموع این مساحتها برابر است با

$$S_n=[1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2](\Delta x)^3$$

$$=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\cdot\left(\frac{b}{n}\right)^3$$

$$=\frac{b^3}{6}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{2n-1}{n}$$

$$=\frac{b^3}{6}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2-\frac{1}{n}\right).$$

برای یافتن مساحت ناحیهٔ زیرخم، n را به‌سمت ∞ میل می‌دهیم و داریم

$$A=\int_0^b x^2\,dx=\lim S_n=\frac{b^3}{6}\times 1\times 2=\frac{b^3}{3}.$$

بنا بر این مساحت، ۱/۳ قاعدهٔ b در «ارتفاع» b^2 است. مساحت مثلث OBP درشکل ۱۴.۴ برابر است با $(1/2)b\cdot b^2=b^3/2$، و مساحت ناحیهٔ زیرخم همان‌طور که انتظار می‌رفت کمتر از این مقدار است.

از فرمول

$$\int_0^b x^2\,dx=\frac{b^3}{3}$$

چنین به‌دست می‌آید

$$\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}\text{،}\quad \int_0^2 x^2\,dx=\frac{8}{3}\text{،}\quad \int_0^3 x^2\,dx=\frac{27}{3}=9$$

و به‌همین‌ترتیب. ■

مسأله‌ها

۱. ثابت‌کنید فرمول

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+\dots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

به ازای $n=1, 2, 3$ درست است. سپس با افزودن $(n+1)^3$ به‌کمك استقرای ریاضی (مانند آنچه که دربخش ۶.۴ آمد) ثابت کنیدکه این فرمول به‌ازای همهٔ اعداد صحیح و مثبت n درست است.

۲. با استفاده از نتیجهٔ مسألهٔ ۱ و روش مثال ۲ نشان دهید که مساحت زیر نمودار $y=x^3$ در بازهٔ $0\leqslant x\leqslant b$ برابر با $b^4/4$ است.

۳. درمثال ۱ به‌جای مستطیلهای محاطی، مستطیلهای محیطی را به‌کار ببرید و مساحت ناحیهٔ زیرنمودار $y=mx$ از $x=a$ تا $x=b$ را بیابید.

۴. درمثال ۲ به‌جای مستطیلهای محاطی، مستطیلهای محیطی را به‌کار ببرید و مساحت ناحیه زیرخم $y=x^2$ را، از $x=0$ تا $x=b$، بیابید.

۵. مسألهٔ ۲ را با استفاده از مستطیلهای محیطی به‌جای مستطیلهای محاطی حل کنید.

درستی فرمولهای مسائل ۶ و ۷ را به‌ازای هرعدد صحیح و مثبت n به‌این‌ترتیب ثابت‌کنید: نشان‌دهید (الف) فرمول به‌ازای $n=1$ درست است، و (ب) اگر فرمول به‌ازای n درست باشد، به‌ازای $n+1$ نیز درست است.

۶. $$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$$

۷. $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\dots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$
$$=\frac{n}{n+1}\cdot$$

۸. انتگرالهای زیر را با استفاده از نتایج مثالهای ۱ و ۲ و ویژگیهای انتگرالهای معین که درجدول ۱.۴ از بخش ۵.۴ آمده است، حساب کنید.

الف) $\int_0^2 3x\,dx$

ب) $\int_2^3 4x\,dx$

پ) $\int_0^2 x^2\,dx$

ت) $\int_0^2 (x^2-5x)\,dx$

ث) $\int_0^1 x^2\,dx$

ج) $\int_1^2 x^2\,dx$

چ) $\int_1^3 x^2\,dx$

ح) $\int_2^3 x^2\,dx$

۹. تعبیری از انتگرال
$$\int_0^1 (x^2+1)\,dx$$
به‌صورت یك مساحت به‌دست دهید و با استفاده ازنتیجهٔ مثال ۲ انتگرال‌را محاسبه‌کنید. (نمودار $y=x^2+1$ درشکل ۸.۴ نشان داده شده‌است.)

۱۰. فرض‌کنید
$$S_n=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\dots+\frac{n-1}{n}\right].$$
نشان دهیدکه S_n یك مجموع تقریب‌زنندهٔ انتگرال
$$\int_0^1 x\,dx$$
است‌که مقدار آن را در مثال ۱ به‌دست آوردیم. سپس $\lim_{n\to\infty} S_n$ را محاسبه‌کنید. (راهنمایی: بازهٔ $[0,1]$ را به n زیربازه با طولهای مساوی تقسیم کنید ومجموع تقریب‌زنندهٔ مستطیلهای‌محاطی را بنویسید.)

۱۱. فرض‌کنید
$$S_n=\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\dots+\frac{(n-1)^2}{n^3}.$$
مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{n\to\infty} S_n$ به‌این ترتیب‌که نشان دهید
$$S_n=\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\dots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]$$
و S_n را به‌عنوان یك‌مجموع تقریب‌زنندهٔ انتگرال زیرکه مقدارش را درمثال ۲ به‌دست‌آوردیم، تعبیرکنید
$$\int_0^1 x^2\,dx\,.$$
(راهنمایی: بازهٔ $[0,1]$ را به n زیربازه باطولهای مساوی‌تقسیم کنید و مجموع تقریب‌زنندهٔ مستطیلهای محاطی را بنویسید.)

۱۲. به‌کمك فرمول
$$\sin h+\sin 2h+\sin 3h+\dots+\sin mh$$
$$=\frac{\cos\left(\frac{h}{2}\right)-\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)h}{2\sin(h/2)}$$

مساحت ناحیهٔ زیرخم $y=\sin x$ را از $x=0$ تا $x=\pi/2$ با طی کردن دومرحلهٔ زیر بیابید.

الف) بازهٔ $[0,\pi/2]$ را به n زیربازهٔ برابر تقسیم کنید، و u، مجموع بالایی متناظر آن، را بیابید؛ سپس

ب) حد u را وقتی که $n\to\infty$ و $\Delta x=(b-a)/n\to 0$ بیابید.

TOOLKIT PROGRAMS
Integration Sequences and Series

۷.۴ قضیه‌های اساسی حساب انتگرال

دربخش ۵.۴ مساحت ناحیهٔ زیریك‌خم را بـا یك انتگرال معین تعریف کردیم و چگونگی تقریب‌زدن آن را با جمع کردن‌مساحتهای مستطیلهای محاطی نشان دادیم. دراین محاسبات چیزی جزحساب به‌کارنرفت، اما آنچه کـه به دست‌آوردیم تنها تقریبی از مساحت واقعی بود. دربخش ۶.۴ ازتعریف انتگرال معین به‌عنوان یك حد برای محاسبهٔ دقیق مساحت بهره گرفتیم، کـه البته این روش نیز به‌عملیات جبری مفصلی نیاز داشت. در این بخش راهی را دنبال می کنیم کـه لایب‌نیتس و نیوتن پیش گرفتند تا نشان دهند چگونه می‌توان انتگرالهای معین را به کمك حساب دیفرانسیل و انتگرال محاسبه کرد. چنانکـه خواهیم دیـد همه‌چیز از یك نکته اساسی به‌دست می آید: هرگاه f پیوسته باشد، انتگرال

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

تابعی‌مشتق‌پذیراز x است. این‌قضیه ارتباط بسیارمهم بین‌انتگرالهای معین و پادمشتقها را به‌وجود می‌آورد.

توابعی‌که به‌کمك انتگرال تعریف می‌شوند: قضیه‌های اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

انتگرال معین هر تابع پیوسته‌ای چون $f(t)$ از $t=a$ تا $t=x$ عددی مانند

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \qquad (1)$$

را تعریف می کندکـه می‌توان آن را به‌عنوان تابعی از x درنظر گـرفت. این انتگرال به‌ازای هـرمقدار x در دامنهٔ f، خروجی $F(x)$ را به‌دست می‌دهد.

به‌این‌ترتیب راه مهمی بـرای تعریف توابع جدید به‌دست می‌آید. مثلاً درفصل ۶ لگاریتم طبیعی عددی مثبت چون x را با فرمول زیر تعریف می‌کنیم

■ ■ ■

پدیدآورندهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال کیست؟

چنانکه دیدیم، برخی از مباحث حساب دیفرانسیل و انتگرال‌ریشه درآثار ریاضیدانان مختلف بسیاری‌دارد. فرما و دکارت به‌بسیاری ازجنبه‌های اساسی‌تعیین مماسها، یا حساب دیفرانسیل، دست‌یافتند، ازسوی دیگر به‌عنوان‌مثال‌کاوالیری و هویگنس درمحاسبهٔ مساحت، یا حساب انتگرال، کارهای چشمگیری کردند. پس چرا ما نیوتن و لایب‌نیتس را پدیـدآورنـدگان حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌دانیم؟ اینان نخستین کسانی بودند کـه دریافتند تعیین مماس و تعیین مساحت دوعمل متقابل‌انـد. این نتیجهٔ مهم از نظر اسلافشان پنهان مانده بود.

اما منظورما از این‌پرسش‌که پدیدآورندهٔ حساب‌دیفرانسیل و انتگرال‌کیست چیز دیگر و دقیقتری است. یکی ازمجادلات‌تلخ در تاریخ ریاضیات این است‌که آیـا نیوتن پدیدآورندهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال بوده‌است یا لایب‌نیتس؟ لایب‌نیتس متهم‌شده بودکه‌آثار نیوتن را به‌خود نسبت داده‌است وکمیته‌ای از انجمن سلطنتی لندن‌کـه بـرای رسیدگی به‌این موضوع تشکیل شده‌بود لایب‌نیتس را از این اتهام مبرا نساخت. درنتیجه به‌مدتی بیش از یك قـرن ونیم، شکاف دامنه‌داری درعـالم ریاضی به‌وجود آمد. طرفداران نیوتن کـه اغلب انگلیسی بودنـد متعصبانه رهیافت و روشهای او را پی‌گرفتند و پیروان لایب‌نیتس که اغلب اروپاییان غیرانگلیسی بودنـد روشهای لایب‌نیتس را دنبال‌کردنـد. به‌سبب رجحان نمادهای‌دیفرانسیل‌لایب‌نیتس برنمادهای‌ناهنجارفلوکسیون نیوتن، پیروان لایب‌نیتس حساب دیفرانسیل و انتگرال و فیزیـك ریاضی‌را بسیار بیشتراز رقبای انگلیسی‌خود به‌جلو بردند. انگلیسیان تا اوائل قرن نوزدهم هرگز به‌بررسی‌آثار قایل‌توجه ریاضیدانان فرانسوی، آلمانی و سویسی نپرداختند.

واقعیت این است‌کـه نیوتن چند سال قبل از لایب‌نیتس به مفهوم حساب دیفرانسیل و انتگرال دست یافت، امـا نخستین اثر چاپ‌شده دراین‌مورد ازآن لایب‌نیتس‌است. عموم‌مورخان امروزی ریاضیات برآن‌اندکـه حساب دیفرانسیل و انتگرال را نیوتن و لایب‌نیتس همزمـان امـا مستقل ازهم پدیدآورده‌اند. افتخار این دستاورد هم به‌نیوتن و هم به لایب‌نیتس متعلق است.

$$\ln x=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \quad x>0 \qquad (۲)$$

تابع خطای

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt \qquad (۳)$$

که در نظریه‌های احتمال، جریان گرما، و انتقال سیگنال به‌کار می‌رود و **انتگرال سینوسی**

$$\operatorname{si}(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \qquad (۴)$$

و نظایر آن که درمهندسی کاربرد دارند، نمونه‌هایی از تعریف تابع به‌کمک انتگرال‌اند.

کسانی که نخستین‌بار با توابعی روبه‌رو می‌شوند که به‌کمک انتگرال تعریف شده‌اند گاه چنین می‌پندارند که این تعاریف تنها به این درد می‌خورند که توصیفهای پیچیده‌تری از توابعی به‌دست دهند که قاعدتاً درجاهای دیگر تعاریف ساده‌تری دارند. اما برای $\ln x$، $\operatorname{erf}(x)$، و $\operatorname{si}(x)$ نه فرمولی ساده‌تر از معادلات (۲)–(۴) وجود دارد و نه به‌توصیف ساده‌تر آنها نیازی‌هست. فرمولهای انتگرالی، علی‌رغم نامأنوس بودنشان، ما را قادر می‌سازند مقادیر توابعی را که تعریف می‌کنند، با هر یك از روشهای متعدد عددی برای تخمین‌زدن انتگرالها، با دقت مطلوب محاسبه‌کنیم. در بخش ۹.۴ با دوتا از ساده‌ترین این روشها آشنا خواهیم شد.

نوشتن مقدار لگاریتم طبیعی ۲ به‌صورت

$$\ln 2=\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt$$

حقیقتاً با نوشتن نسبت محیط یك‌دایره به‌قطرش به‌صورت π، فرقی نمی‌کند. هیچ راهی برای نوشتن‌مقدار دقیق این‌نسبت وجود ندارد مگر نوشتن آن به‌صورت π. اما هر گاه بخواهیم می‌توانیم تقریب عددی این‌نسبت‌را تا هرچندرقم اعشار که مطلوب باشد محاسبه‌کنیم.

فرمول

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

ارتباط میان پادمشتق و انتگرال معین را به‌دست می‌دهد: اگر f تابعی پیوسته باشد، آنگاه F تابعی مشتقپذیر از x است، و $dF/dx=f(x)$. اگر قرار باشد به‌جزیره‌ای لم‌یزرع تبعید شوید وتنها بتوانید با خود یك‌فرمول به‌همراه داشته‌باشید، فرمول

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x) \qquad (۵)$$

می‌تواند انتخاب خوبی باشد. این معادله حاکی است که معادلهٔ دیفرانسیل $dF/dx=f(x)$ به‌ازای هر تابع پیوستهٔ f جواب دارد. این معادله می‌گوید که هر تابع پیوسته‌ای (f) مشتق تابع دیگری ($\int_a^x f(t)\,dt$) است. این معادله حاکی است که هر تابع پیوسته‌ای یك پادمشتق دارد. (به این دلیل در بخش ۴.۴ گفتیم که $\tan x$ و $\cot x$ پادمشتقهایی دارند، هرچند نمی‌توانستیم آنها را به‌دست آوریم.) اهمیت معادلهٔ (۵) آن‌قدر است که آن را نخستین قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌نامیم.

قضیهٔ ۲

نخستین قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

اگر f روی بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

درهرنقطهٔ x در $[a,b]$ مشتقپذیر است و داریم

$$\frac{dF}{dx}=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x). \qquad (۶)$$

نتیجه

وجود پادمشتق تابعهای پیوسته

اگر $y=f(x)$ روی بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه یك تابع $F(x)$ وجود داردکه مشتقش روی $[a,b]$، f است.

اثبات نتیجه فرض می‌کنیم $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$. بنا به‌قضیهٔ وجود انتگرال در بخش ۵.۴ این انتگرال وجود دارد، و بنا به‌نخستین قضیهٔ اساسی داریم $dF/dx=f(x)$. ■

برای اثبات نخستین قضیهٔ اساسی dF/dx را به‌کمك تعریفش، به‌عنوان حدکسر زیر وقتی‌که $\Delta x \to 0$، محاسبه‌می‌کنیم

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt}{\Delta x}$$

$$=\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x}.$$

لذا حد زیر را حساب می‌کنیم

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} \qquad (۷)$$

و نشان می‌دهیم که مقدار این حد $f(x)$ است. اما نخست نظری به‌تعبیرهندسی قضیه می‌افکنیم.

اگر f مثبت باشد، انتگرالش از x تا $x+\Delta x$ برابر با مساحت نوار زیرنمودار f از x تا $x+\Delta x$ است (شکل ۱۵.۴). ارتفاع و پهنای نوار به‌ترتیب حدوداً $f(x)$ و Δx است. بنابراین

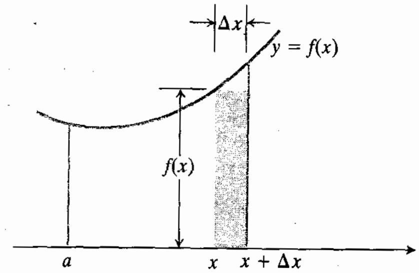
$$\text{مساحت} = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \approx f(x)\Delta x.$$

از تقسیم این رابطه به Δx داریم

$$\frac{\text{مساحت}}{\Delta x} = \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} \approx f(x).$$

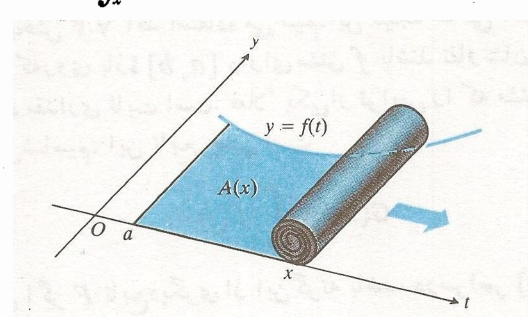
وقتی $\Delta x \to 0$، تقریب بهتر می‌شود، وانتظارداریم درحد، برابری به‌دست آید (و به‌دست می‌آید).

حال تعبیری از معادلهٔ (۶) به کمك حرکت ارائه می‌دهیم. تصور کنید ناحیهٔ زیرخم $y=f(t)$ را با بازکردن فرشی به‌پهنای متغیر $f(x)$ ازچپ به‌راست می‌پوشانیم (شکل ۱۶.۴). آهنگ فرش‌شدن کف وقتی لولهٔ فرش به x می‌رسد $f(x)$ است.



۱۵.۴ وقتی Δx کوچك است، انتگرال f از x تا $x+\Delta x$ تقریباً برابر با مساحت مستطیل سایه‌دار است. با استفاده از نمادها داریم

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \approx f(x)\,\Delta x.$$



۱۶.۴ آهنگ فـرش‌شدن کف در نقطهٔ x، برابر با پهنای لبهٔ جلو فرش هنگام رسیدن آن به x است. با استفاده از نمادهـا داریم $dA/dx=f(x)$.

اکنون به‌اثبات قضیه می‌پردازیم.

اثبات نخستین‌قضیهٔ اساسی برای اثبات قضیه نشان می‌دهیم کـه برای هر تابع پیوستهٔ f، رابطهٔ

$$\lim \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} = f(x)$$

به‌ازای $\Delta x \to 0^+$ و به‌ازای $\Delta x \to 0^-$ برقراراست. این‌روش نشان می‌دهد که وقتی $\Delta x \to 0$، حد دوطرفه وجود دارد و برابر با $f(x)$ است.

بـه‌ازای مقادیر مثبت Δx و $a \leqslant x < b$، محاسبه به این صورت است: چـون $a \leqslant x < b$، می‌توان بـا مقادیرآن‌چنان کوچکی از Δx شروع کرد که $x+\Delta x$ بین a و b قرار گیرد. چون f دربازهٔ بستهٔ از x تا $x+\Delta x$ پیوسته است، دراین بازه یك مقدار مینیمم $\min f$، و یك مقدار ماکسیمم $\max f$ دارد. بنابراین بـا به‌کاربردن نابرابری انتگرالی ویژگی ۸ جدول ۱.۴ از بخش ۵.۴ درمورد بازهٔ $[x, x+\Delta x]$ داریم

$$(\min f)\,\Delta x \leqslant \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \leqslant (\max f)\,\Delta x$$

$$\min f \leqslant \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} \leqslant \max f. \qquad (۸)$$

چون f پیوسته است، درنقطه‌ای چون c از بـازهٔ $[x, x+\Delta x]$ ماکسیمم و درنقطه‌ای چون c' از این‌بازه مینیمم می‌شود. یعنی

$$\min f = f(c') \quad \text{و} \quad \max f = f(c).$$

با این جانشانیها معادلهٔ ۸ چنین می‌شود

$$f(c') \leqslant \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} \leqslant f(c). \qquad (۹)$$

وقتی‌که $\Delta x \to 0^+$، چون c' و c بین x و $x+\Delta x$ قرار دارند هـردو به x میل می‌کنند و چون f در x پیوسته است، $f(c')$ و $f(c)$ هردو به $f(x)$ میل می‌کنند. بنابراین طرف راست و چپ معادلـهٔ (۹) هـردو به $f(x)$ میل می‌کنند و بـا استفاده از قضیهٔ ساندویچ داریم

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} = f(x). \qquad (۱۰)$$

استدلال مشابهی نشان می‌دهد که وقتی Δx منفی بـاشد و $a < x \leqslant b$، داریم

$$\lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} = f(x). \qquad (۱۱)$$

معادلات (۱۰) و (۱۱) همراه با هم چنین نتیجه می‌دهند که در هر نقطهٔ x از $[a, b]$ داریم

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x). \qquad (۱۲)$$

به‌این ترتیب نخستین قضیه اساسی اثبات می‌شود.

مثال ۱

$$\frac{d}{dx}\int_{-\pi}^x \cos t\,dt = \cos x$$

$$\frac{d}{dt}\int_0^x \frac{\sin t}{t^2+1}\,dt = \frac{\sin x}{x^2+1}. \qquad \blacksquare$$

مثال ۲ اگر $y=\int_0^{x^2} \cos t\,dt$، dy/dx را بیابید.

حل: کلید حل این مسأله قاعدهٔ زنجیری است. y را به‌صورت ترکیب زیر درنظرمی گیریم

$$f(u)=\int_0^u \cos t\,dt \quad \text{و} \quad u=x^2.$$

با استفاده از قاعدهٔ زنجیری به‌صورت

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df}{du}\,\frac{du}{dx}$$

داریم

$$\frac{dy}{dx}=\cos u\cdot\frac{d}{dx}(x^2)=\cos x^2\cdot 2x = 2x\cos x^2.$$

بنابراین

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\cos t\,dt = 2x\cos x^2. \qquad \blacksquare$$

مثال ۳ اگر $y=\int_{x^2}^0 \cos t\,dt$، dy/dx را بیابید.

حل: دراین مسأله حد متغیر انتگرالگیری حد پایینی است و نه حد بالایی، بنابراین قبل از به‌کاربردن نخستین‌قضیهٔ اساسی باید حدود انتگرالگیری را عوض کنیم

$$y=\int_{x^2}^0 \cos t\,dt = -\int_0^{x^2}\cos t\,dt.$$

حال می‌توان نتیجهٔ مثال ۲ را به‌کاربرد:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\int_{x^2}^0 \cos t\,dt = -\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\cos t\,dt = -2x\cos x^2. \qquad \blacksquare$$

قضیهٔ تعیین مقدار انتگرال

اکنون به قضیهٔ مهمی می‌پردازیم که چگونگی استفاده از پاد مشتق در تعیین‌مقدار انتگرال معین را مشخص می‌سازد. با دراختیارداشتن این قضیه دیگر مجبور نخواهیم بود انتگرالهای معین را به‌صورت حد حساب کنیم. سودمندی این قضیه به اندازه‌ای است که اغلب آن را دومین قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌نامند.

قضیهٔ ۲

قضیهٔ تعیین مقدار انتگرال (دومین قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال)

اگر f درهر نقطه‌ای از $[a, b]$ پیوسته باشد، و F هر پاد مشتقی از f روی $[a, b]$ باشد، آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a). \qquad (۱۳)$$

قضیهٔ تعیین مقدار انتگرال حاکی است که برای محاسبهٔ انتگرال f روی $[a, b]$ کافی است چنین کنیم:

۱. پاد مشتقی چون F از f را به‌دست‌آوریم، و

۲. مقدار $F(b)-F(a)$ را حساب کنیم.

این مقدار برابر با $\int_a^b f(x)\,dx$ خواهد بود. بنابه نخستین قضیهٔ اساسی، وجود پادمشتق F حتمی‌است. برای انجام محاسبه، کافی است F را بیابیم و مقدار آن را تعیین کنیم.

اثبات برای اثبات این قضیه از نتیجهٔ ۳ی قضیهٔ مقدار میانگین که در بخش ۷.۳ آمد استفاده می‌کنیم. این نتیجه حاکی است که هر دوتابعی که‌روی بازهٔ $[a, b]$ دارای مشتق f باشند تفاوتشان روی این بازه مقداری ثابت است. فعلاً یکی‌از توابعی را که مشتقش f است می‌شناسیم. این تابع چنین است

$$G(x)=\int_a^x f(t)\,dt.$$

بنابراین اگر F تابع‌دیگری از این‌گونه باشد، درسراسر $[a, b]$ به‌ازای مقدار ثابتی مانند C داریم

$$F(x)=G(x)+C. \qquad (۱۴)$$

اگر برای محاسبهٔ $F(b)-F(a)$ معادلهٔ (۱۴) را به‌کاربریم، درمی‌یابیم

$$\begin{aligned}F(b)-F(a)&=[G(b)+C]-[G(a)+C]\\&=G(b)-G(a)\\&=\int_a^b f(t)\,dt-\int_a^a f(t)\,dt\\&=\int_a^b f(t)\,dt-0\\&=\int_a^b f(t)\,dt.\end{aligned}$$

که همان معادلهٔ (۱۳) است. ■

مرسوم است که برای مقدار $F(b)-F(a)$ نماد $F(x)]_a^b$ را به‌کار برند؛ ما نیز درمثالهای زیر از این‌نماد استفاده می‌کنیم.

مثال ۴ مساحت ناحیهٔ زیرخط $y=mx$ درمثال ۱ بخش ۶.۴ چنین است

$$\int_a^b mx\,dx=\frac{mx^2}{2}\Big]_a^b=\frac{mb^2}{2}-\frac{ma^2}{2}.$$ ■

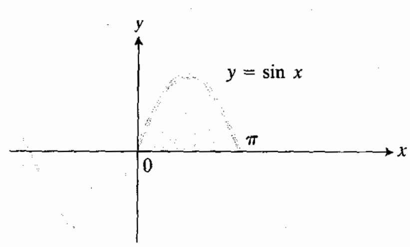
مثال ۵ مساحت ناحیهٔ زیرخم $y=x^2$ درمثال ۲ بخش ۶.۴ چنین است

$$\int_0^b x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big]_0^b=\frac{b^3}{3}-0=\frac{b^3}{3}.$$ ■

مثال ۶ مساحت ناحیهٔ محصور بین محور x و یکی از قوسهای خم $y=\sin x$ را بیابید.

حل: قوس بین $x=0$ تا $x=\pi$ را برمی‌گزینیم (شکل ۱۷.۴). مساحت محصور بین این قوس و محور x چنین است

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin x\,dx&=-\cos x\Big]_0^\pi\\&=-\cos\pi-(-\cos 0)=-(-1)+1=2.\end{aligned}$$



۱۷.۴ درمثال ۶ مساحت‌ناحیهٔ سایه‌دار این شکل حساب می‌شود. ■

مثال ۷ دراین مثال ازچند ویژگی جبری انتگرالهای معین که در جدول ۱.۴ بخش ۵.۴ آمده است استفاده می‌شود.

الف) (با استفاده از نتیجهٔ مثال ۶) $\int_0^\pi 5\sin x\,dx$

$$=5\int_0^\pi \sin x\,dx=5\times 2=10$$

ب) $$\int_0^1 (x^2+1)\,dx=\int_0^1 x^2\,dx+\int_0^1 dx$$

$$=\frac{x^3}{3}\Big]_0^1+x\Big]_0^1$$

$$=\left(\frac{1}{3}-0\right)+(1-0)=\frac{4}{3}$$

پ) $$\int_1^2\left(3-\frac{6}{x^2}\right)dx=\int_1^2 3\,dx-\int_1^2\frac{6}{x^2}\,dx$$

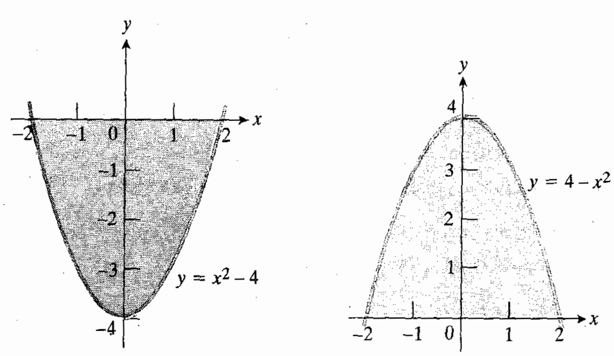
$$=\Big[3x\Big]_1^2-\Big[-\frac{6}{x}\Big]_1^2=6-3+3-6=0$$

انتگرال (ب) مقدار دقیق مساحتی را که در مثال ۱ بخش ۵.۴ مقدار تقریبی آن را تعیین کردیم به‌دست می‌دهد. ■

اگر تابع پیوستهٔ $f(x)$ روی بازهٔ $[a,b]$ مقدارمنفی نداشته باشد، انتگرالش از a تا b برابر مساحت بین نمودارش و محور x است. اگر f روی این بازه منفی یا نامثبت باشد، چنانکه در مثال بعد می‌بینیم، انتگرالش برابر با قرینهٔ این مساحت است.

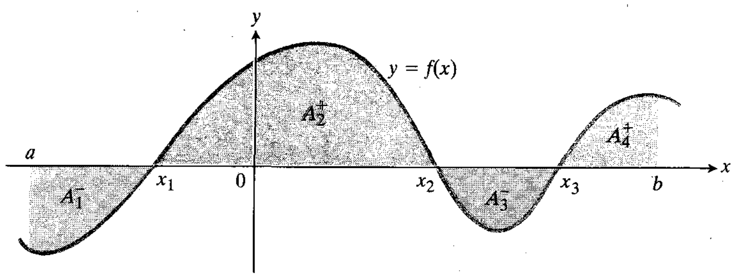
مثال ۸ با توجه به‌شکل ۱۸.۴ مطلوب است تعیین

الف) مساحت ناحیهٔ بین خم $y=x^2-4$ و محور x از $x=-2$ تا $x=2$



(الف) (ب)

۱۸.۴ مساحتهای نواحی بین‌نمودارهای (الف) و (ب) و محور x، باهم برابرند، اما انتگرالهای معین توابع مربوطه از ۲− تا ۲ قرینه‌اند.



۱۹.۴ انتگرال f از a تا b جمع جبری مساحتهای علامتدار است.

ب) مساحت ناحیهٔ بین خم $y=۴-x^۲$ و محور x از $x=-۲$ تا $x=۲$.

حل:

الف) انتگرال $f(x)=x^۲-۴$ روی بازهٔ از ۲− تا ۲ چنین است

$$\int_{-۲}^{۲}(x^۲-۴)\,dx=\frac{x^۳}{۳}-۴x\Big]_{-۲}^{۲}$$

$$=\left(\frac{۸}{۳}-۸\right)-\left(-\frac{۸}{۳}+۸\right)=-\frac{۳۲}{۳}\cdot$$

مساحت بین خم و محور x از $x=-۲$ تا $x=۲$ برابر با ۳۲/۳ واحد مساحت است.

ب) نمودار

$$y=g(x)=-f(x)=۴-x^۲,\quad -۲\leqslant x\leqslant ۲$$

که در شکل ۱۸.۴ (ب) دیده می‌شود تصویر آینه‌ای نمودار f نسبت به محور x است. مساحت بین نمودار g و محور x چنین است

$$\int_{-۲}^{۲}(۴-x^۲)\,dx=۴x-\frac{x^۳}{۳}\Big]_{-۲}^{۲}=\frac{۳۲}{۳}\cdot \quad \blacksquare$$

اگر مطابق شکل ۱۹.۴ بخشی از نمودار تابعی چون f روی بازهٔ $a\leqslant x\leqslant b$ در بالای محور x و بخشی در زیر محور x باشد، انتگرال f روی این بازه جمع جبری مساحتهای علامتدار است. مساحتهای بالای محور را مثبت و مساحتهای زیر محور را منفی در نظر می‌گیریم. در چنین حالتی مقدار انتگرال از کل مساحت ناحیهٔ بین خم و محور x کمتر است.

مثلاً اگر در شکل ۱۹.۴، قدرمطلقهای مساحتهای بین خم و محور x، $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$، و $A_۴$ باشند، آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx=-A_۱+A_۲-A_۳+A_۴$$

که کمتر از مساحت کل $A_۱+A_۲+A_۳+A_۴$ است. برای محاسبهٔ مساحت کل، نقاط $x_۱$، $x_۲$، و $x_۳$ یعنی محل تقاطع خم با محور x را تعیین می‌کنیم و انتگرال هر قسمت را جداگانه به دست می‌آوریم

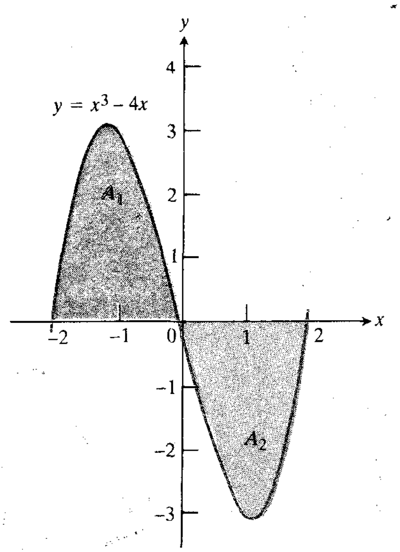
$$\int_a^{x_۱} f(x)\,dx=-A_۱,\qquad \int_{x_۱}^{x_۲} f(x)\,dx=A_۲$$

$$\int_{x_۲}^{x_۳} f(x)\,dx=-A_۳,\qquad \int_{x_۳}^{b} f(x)\,dx=A_۴\cdot$$

سپس قدرمطلقهای این انتگرالها را باهم جمع می‌کنیم.

مثال ۹ مساحت ناحیهٔ بین خم $y=x^۳-۴x$ و محور x را بیابید.

حل: برای تعیین شکل و حدود انتگرالگیری نمودار $y=x^۳-۴x=x(x-۲)(x+۲)$ را رسم می‌کنیم (شکل ۲۰.۴). خم از $x=-۲$ تا $x=0$ بالای محور x و از $x=0$ تا $x=۲$ زیر محور x قرار دارد. انتگرالهای زیر را حساب می‌کنیم:



۲۰.۴ نمودار $y=x^۳-۴x$ از $x=-۲$ تا $x=۲$.

$$\int_{-2}^{0}(x^3-4x)\,dx=\frac{x^4}{4}-2x^2\Big]_{-2}^{0}$$
$$=0-(4-8)=+4=A_1$$
$$\int_{0}^{2}(x^3-4x)\,dx=\frac{x^4}{4}-2x^2\Big]_{0}^{2}$$
$$=(4-8)-0=-4=-A_2\,.$$

مساحت ناحیه برابر است با $A=4+|-4|=8$. ■

مسأله‌ها

درمسأله‌های ۱-۱۰ مساحت بین‌محور x، خم‌داده‌شدهٔ $y=f(x)$، و خطوط قائم داده‌شده را بیابید.

۱. $y=x^2+1,\quad x=0,\quad x=3$

۲. $y=2x+3,\quad x=0,\quad x=1$

۳. $y=\sqrt{2x+1},\quad x=0,\quad x=4$

۴. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}},\quad x=0,\quad x=4$

۵. $y=\dfrac{1}{(2x+1)^2},\quad x=1,\quad x=2$

۶. $y=(2x+1)^2,\quad x=-1,\quad x=3$

۷. $y=x^3+2x+1,\quad x=0,\quad x=2$

۸. $y=x\sqrt{2x^2+1},\quad x=0,\quad x=2$

۹. $y=\dfrac{x}{\sqrt{2x^2+1}},\quad x=0,\quad x=2$

۱۰. $y=\dfrac{x}{(2x^2+1)^2},\quad x=0,\quad x=2$

۱۱. مساحت بین‌محورهای مختصات وخط $x+y=1$ را بیابید.

۱۲. مساحت بین خم $y=1/\sqrt{x}$، محور x، و خطوط $x=1$ و $x=4$ را بیابید.

۱۳. مساحت بین خم $y=\sqrt{1-x}$ و محورهای مختصات را بیابید.

۱۴. مساحت بین محور x و یکی از قوسهای خم $y=\cos 3x$ را بیابید.

۱۵. مساحت بین خم $y^2-1=x$ و محور y را بیابید. (راهنمایی: نسبت به y انتگرال بگیرید.)

۱۶. نشان دهید که مساحت بین محور x و یکی از قوسهای خم $x=\sin ax$ برابر با $2/a$، $a>0$، است.

۱۷. مساحت بین محور x و یکی‌از قوسهای خم $y=\sin^2 3x$ را بیابید.

۱۸. الف) مساحت زیرطاق سهموی $y=6-x-x^2$، $-3\leqslant x\leqslant 2$، را بیابید.
ب) ارتفاع طاق دربالای محور x را تعیین کنید.
پ) نشان دهید که مساحت به‌دست‌آمده دوسوم حاصلضرب قاعده در ارتفاع است.

۱۹. مساحت یك ناحیهٔ مثلثی‌واقع درصفحه‌راکه از پایین به‌قسمت مثبت محور x، و ازبالا به‌خمهای $y=x^2$ و $y=2-x$ محدود می‌شود، بیابید.

۲۰. نمودار $y=\sqrt{a^2-x^2}$ روی $-a\leqslant x\leqslant a$ نیمدایره‌ای است به‌شعاع a.
الف) با استفاده از این مطلب توضیح دهید چرا
$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\pi a^2\,.$$
ب) انتگرال زیررا حساب کنید
$$\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx\,.$$

انتگرالهای مسأله‌های ۲۱-۴۲ را حساب کنید.

۲۱. $\displaystyle\int_{1}^{2}(2x+5)\,dx$

۲۲. $\displaystyle\int_{0}^{1}(x^2-2x+3)\,dx$

۲۳. $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x+1)^2\,dx$

۲۴. $\displaystyle\int_{0}^{2}\sqrt{4x+1}\,dx$

۲۵. $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx$

۲۶. $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\cos x\,dx$

۲۷. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}$

۲۸. $\int_{۰}^{\pi/۶} \frac{\sin ۲x}{\cos^{۲} ۲x}\, dx$

۲۹. $\int_{۰}^{\pi} \sin^{۲} x\, dx$

۳۰. $\int_{۰}^{۲\pi/\omega} \cos^{۲}(\omega t)\, dt$ (ω ثابت است)

۳۱. $\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{(۲x+۱)^{۳}}$

۳۲. $\int_{-۱}^{۰} x\sqrt{۱-x^{۲}}\, dx$

۳۳. $\int_{۰}^{۱} \sqrt{۵x+۴}\, dx$

۳۴. $\int_{-۲}^{۰} (۴-w)^{۲}\, dw$

۳۵. $\int_{-۱}^{۰} \left(\frac{x^{۷}}{۲} - x^{۱۵}\right) dx$

۳۶. $\int_{۰}^{۲} (t+۱)(t^{۲}+۴)\, dt$

۳۷. $\int_{۱}^{۲} \frac{x^{۲}+۱}{x^{۲}}\, dx$

۳۸. $\int_{۹}^{۴} \frac{۱-\sqrt{u}}{\sqrt{u}}\, du$

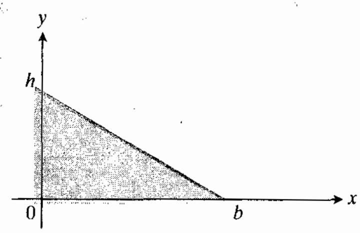
۳۹. $\int_{\pi/۶}^{\pi/۲} \cos^{۲}\theta \sin\theta\, d\theta$

۴۰. $\int_{۰}^{\pi} x\cos\left(۲x - \frac{\pi}{۲}\right) dx$

۴۱. $\int_{-۴}^{۴} |x|\, dx$

۴۲. $\int_{۰}^{\pi} \frac{۱}{۲}(\cos x + |\cos x|)\, dx$

۴۳. در بخش ۵.۴ تعریفی عرضه کردیم که ایدهٔ مساحت را از ردهٔ مثلثها و چندضلعیها به‌ردهٔ وسیعتری یعنی‌نواحی‌محصور بین‌خمهای پیوسته تعمیم داد. هر گاه تعریف جدیدی نظیر این‌تعریف عرضه می‌شود بهتر است اطمینان یابیم که تعاریف قدیم و جدید درمورد مصادیقشان سازگارند یا خیر. مثلاً آیا تعریف انتگرالی‌مساحت، مقدار $A=(۱/۲)bh$ را برای مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای به قاعده b و ارتفاع h به‌دست می‌دهد؟ برای یافتن پاسخ این سؤال مساحت مثلث شکل ۲۱.۴ را به‌کمک یک انتگرال محاسبه کنید.



۲۱.۴ آیا مساحت این مثلث همان $(۱/۲)bh$ است؟ مسأله ۴۳ را ببینید.

۴۴. انتگرال

$$\frac{d}{dx}\int_{۰}^{x} \cos t\, dt$$

را از دو راه محاسبه‌کنید: (الف) محاسبهٔ انتگرال و مشتقگیری از نتیجه و (ب) کاربرد مستقیم نخستین قضیه اساسی در مورد این انتگرال.

درمسأله‌های ۴۵-۵۲، dF/dx را بیابید.

۴۵. $F(x) = \int_{۰}^{x} \sqrt{۱+t^{۲}}\, dt$

۴۶. $F(x) = \int_{۱}^{x} \frac{dt}{t}$

۴۷. $F(x) = \int_{x}^{۱} \sqrt{۱-t^{۲}}\, dt$

۴۸. $F(x) = \int_{۰}^{x} \frac{dt}{۱+t^{۲}}$

۴۹. $F(x) = \int_{۱}^{۲x} \cos(t^{۲})\, dt$

۵۰. $F(x) = \int_{۱}^{x^{۲}} \frac{dt}{۱+\sqrt{۱-t}}$

۵۱. $F(x) = \int_{\sin x}^{۰} \frac{dt}{۲+t}$

۵۲. $F(x) = \int_{۱/x}^{۱} \frac{۱}{t}\, dt$

۵۳. $F(x) = \int_{\cos x}^{۰} \frac{۱}{۱-t^{۲}}\, dt$

۵۴. $F(x)=\int_{\sqrt{x}}^{10}\sin t^2\,dt$

۵۵. فرض کنید تابع f پیوسته ودرهر نقطه‌ای از بازهٔ $0\leqslant x\leqslant 1$ مثبت و مساحت بین نمودارش و بازهٔ $[0,x]$ برابر با $\sin x$ باشد. $f(x)$ را بیابید.

۵۶. به‌کمك قاعدهٔ هوپیتال حد زیر را بیابید

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x\frac{t^2}{t^4+1}\,dt.$$

۵۷. (الف) تقریب درجه‌اول و (ب) تقریب درجهٔ دوم تابع زیر را درنزدیکی $x=0$ بیابید.

$$f(x)=2+\int_0^x\frac{10}{1+t}\,dt.$$

۵۸. فرض‌کنید f بـه ازای همهٔ مقادیر x مشتقی مثبت دارد و $f(1)=0$. کدام‌یك از گزاره‌های زیر درمورد تابع

$$y=\int_0^x f(t)\,dt$$

باید درست باشد؟

الف) y تابعی مشتقپذیر از x است.
ب) y تابعی پیوسته از x است.
پ) نمودار y در $x=1$ مماسی افقی دارد.
ت) y در $x=1$ ماکسیممی موضعی دارد.
ث) y در $x=1$ مینیممی موضعی دارد.
ج) نمودار y در $x=1$ یك نقطهٔ عطف دارد.
چ) نمودار dy/du در $x=1$ محور x را قطع‌می‌کند.

۵۹. $f(4)$ را درهریك ازحالات زیربیابید.

الف) $\int_0^x f(t)\,dt=x\cos\pi x$

ب) $\int_0^{x^2} f(t)\,dt=x\cos\pi x$

پ) $\int_0^{f(x)} t^2\,dt=x\cos\pi x$ (راهنمایی: انتگرال بگیرید.)

۶۰. $f(\pi/2)$ را بـا این مفروضات بیابید: (i) $f(x)$ پیوسته است، و (ii) مساحت زیرنمودار f و روی بـازهٔ $[0,a]$ چنین است

$$\frac{a^2}{2}+\frac{a}{2}\sin a+\frac{\pi}{2}\cos a.$$

TOOLKIT PROGRAMS
Integration   Derivative Grapher

۸.۴ جانشانی در انتگرالهای معین

وقتی کـه یك انتگرال معین را به‌کمك جـانشانی محاسبه می‌کنیم می‌توانیم انتگرال تبدیل‌شده را با حدود تبدیل شده، یـا انتگرال اصلی را با حدود اصلی حساب‌کنیم. مثالهای این بخش چگونگی انجام چنین‌کاری را نشان می‌دهند.

فرمولی‌که برای محاسبهٔ انتگرالهای معین به‌کمك جانشانی به‌کارمی‌بریم نخستین‌بار درکتابی که آیزك بارو (۱۶۳۰–۱۶۷۷) نـوشت آمده است. او معلم نیوتن و از استادان دانشگاه‌کمبریج بود. فرمول او شبیه فرمول زیر است.

فرمول جانشانی برای انتگرالهای معین

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx=\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du.\qquad (1)$$

$$\begin{pmatrix} u=g(x), \\ du=g'(x)\,dx \end{pmatrix}$$

اگر g' روی بازهٔ از a تا b و f روی مجموعهٔ مقادیری که g اختیار می‌کند پیوسته باشند، فرمول بالا برقرار است.

برای اثبات رابطهٔ (۱)، فرض می‌کنیم F پادمشتقی از f باشد. بنابراین $F'=f$. پس

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx=\int_a^b F'(g(x))g'(x)\,dx$$

$$=F(g(x))\Big]_{x=a}^{x=b}=F(g(b))-F(g(a))$$

$$=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

مثال ۱ به‌کمك رابطهٔ (۱) انتگرال زیر را حساب‌کنید

$$\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\cos x\,dx.$$

حل: از جانشانیهای زیر استفاده می‌کنیم

$$u=g(x)=\sin x, \qquad g(0)=\sin(0)=0$$

$$du=g'(x)\,dx=\cos x\,dx, \qquad g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

بنا بر این داریم

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x\, dx = \int_{u=g(0)}^{u=g(\pi/2)} u^2\, du$$

$$= \int_0^1 u^2\, du = \frac{u^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3} .$$ ■

مثال ۲ انتگرال زیر را حساب کنید

$$\int_0^1 15x^2 \sqrt{5x^3+4}\, dx .$$

حل: از دوراه می‌توان مسأله را حل کرد

راه اول: انتگرال را تبدیل می‌کنیم و مانند رابطهٔ (۱) انتگرال تبدیل شده را با حدود تبدیل شده محاسبه می‌کنیم. جانشانیهای زیررا انجام می‌دهیم

$$u = g(x) = 5x^3 + 4, \quad du = g'(x)\, dx = 15x^2\, dx .$$

بنا بر این

$$\int_0^1 15x^2 \sqrt{5x^3+4}\, dx = \int_{g(0)}^{g(1)} \sqrt{u}\, du$$

$$= \int_4^9 u^{1/2}\, du$$

$$= \frac{2}{3} u^{3/2}\Big]_4^9 = \frac{2}{3}(27-8) = \frac{38}{3} .$$

راه دوم: مانند قبل انتگرال را تبدیل می‌کنیم، و انتگرال حاصل را محاسبه‌می‌کنیم. سپس با جانشانی معکوس آن را برحسب x می‌نویسیم و از حدود اصلی برحسب x استفاده می‌کنیم. با جانشانیهای زیر

$$u = 5x^3 + 4, \quad du = 15x^2\, dx$$

داریم

$$\int 15x^2 \sqrt{5x^3+4}\, dx = \int \sqrt{u}\, du = \frac{2}{3} u^{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{3}(5x^3+4)^{3/2} + C .$$

بنا بر این

$$\int_0^1 15x^2 \sqrt{5x^3+4}\, dx = \frac{2}{3}(5x^3+4)^{3/2}\Big]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}(9)^{3/2} - \frac{2}{3}(4)^{3/2} = \frac{2}{3}(27-8) = \frac{38}{3} .$$

کدام‌یك از این روشها بهتر است: محاسبهٔ انتگرال تبدیل شده با حدود تبدیل شده یا محاسبهٔ انتگرال اصلی با حدود اصلی؟ در این مثال هر دو روش مناسب‌اند، اما گاه یك روش از روش دیگر آسانتر است. به‌طورکلی، بهتر است با هردو روش آشنا باشیم، و برحسب مورد روش بهتر را برگزینیم. ■

مسأله‌ها

انتگرالهای مسائل ۱-۱۸ را حساب کنید.

۰۱ الف) $\int_0^3 \sqrt{y+1}\, dy$

ب) $\int_{-1}^0 \sqrt{y+1}\, dy$

۰۲ الف) $\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\, dr$

ب) $\int_{-1}^1 r\sqrt{1-r^2}\, dr$

۰۳ الف) $\int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x\, dx$

ب) $\int_{-\pi/4}^0 \tan x \sec^2 x\, dx$

۰۴ الف) $\int_0^1 x^3(1+x^4)^3\, dx$

ب) $\int_{-1}^1 x^3(1+x^4)^3\, dx$

۰۵ الف) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}\, dx$

ب) $\int_{-1}^0 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}\, dx$

۰۶ الف) $\int_{-1}^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}\, dx$

ب) $\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}\, dx$

۰۷ الف) $\int_0^{\sqrt{7}} x(x^2+1)^{1/3}\, dx$

ب) $\int_{-\sqrt{7}}^0 x(x^2+1)^{1/3}\, dx$

۰۸. الف) $\int_{۰}^{\pi} ۳\cos^{۲}x\sin x\,dx$

ب) $\int_{۲\pi}^{۳\pi} ۳\cos^{۲}x\sin x\,dx$

۰۹. الف) $\int_{۰}^{\pi/۶}(۱-\cos ۳x)\sin ۳x\,dx$

ب) $\int_{\pi/۶}^{\pi/۳}(۱-\cos ۳x)\sin ۳x\,dx$

۰۱۰. الف) $\int_{۰}^{\sqrt{۳}}\frac{۴x}{\sqrt{x^{۲}+۱}}\,dx$

ب) $\int_{-\sqrt{۳}}^{\sqrt{۳}}\frac{۴x}{\sqrt{x^{۲}+۱}}\,dx$

۰۱۱. الف) $\int_{۰}^{۲\pi}\frac{\cos x}{\sqrt{۲+\sin x}}\,dx$

ب) $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos x}{\sqrt{۲+\sin x}}\,dx$

۰۱۲. الف) $\int_{-\pi/۲}^{۰}\frac{\sin x}{(۳+\cos x)^{۲}}\,dx$

ب) $\int_{۰}^{\pi/۲}\frac{\sin x}{(۳+\cos x)^{۲}}\,dx$

۰۱۳. الف) $\int_{-\pi}^{\pi}x\cos(۲x^{۲})\,dx$

ب) $\int_{-\pi}^{۰}x\cos(۲x^{۲})\,dx$

۰۱۴. $\int_{۰}^{\pi^{۲}/۴}\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

۰۱۵. $\int_{۰}^{۱}\sqrt{t^{۵}+۲t}\,(۵t^{۴}+۲)\,dt$

۰۱۶. $\int_{۱}^{۴}\frac{dy}{۲\sqrt{y}(۱+\sqrt{y})^{۲}}$

۰۱۷. $\int_{۰}^{\pi/۲}\cos^{۳}۲x\sin ۲x\,dx$

۰۱۸. $\int_{-\pi/۴}^{\pi/۴}\tan^{۲}x\sec^{۲}x\,dx$

۰۱۹. الف) نمودار $y=x\sqrt{۳-x^{۲}}$ را رسم کنید.

ب) مساحت بین این خم و محور x را بیابید.

۰۲۰. انتگرال زیر را حساب کنید

$$\int_{۰}^{۲\pi}|\cos x|\,dx.$$

۰۲۱. فرض کنید $F(x)$ پادمشتقی از تابع زیر باشد

$$f(x)=\frac{\sin x}{x},\quad x\neq ۰.$$

انتگرال

$$\int_{۱}^{۳}\frac{\sin ۲x}{x}\,dx$$

را برحسب F بیان کنید.

۰۲۲. فرض کنید

$$\int_{۰}^{۱}f(x)\,dx=۳.$$

انتگرال

$$\int_{-۱}^{۰}f(x)\,dx$$

را در این دو حالت حساب کنید: (الف) f فرد است و (ب) f زوج است.

۰۲۳. فرض کنید تابع $h(x)$ زوج، و به‌ازای همهٔ x ها پیوسته باشد.

الف) نشان دهید که حاصلضرب $h(x)\sin x$ فرد است.

ب) نشان دهید که به‌ازای هرمقدار a داریم

$$\int_{-a}^{۰}h(x)\sin x\,dx=-\int_{۰}^{a}h(x)\sin x\,dx.$$

(راهنمایی: از جانشانی $u=-x$ استفاده کنید.)

پ) به کمک نتیجهٔ قسمت (ب) نشان دهید که

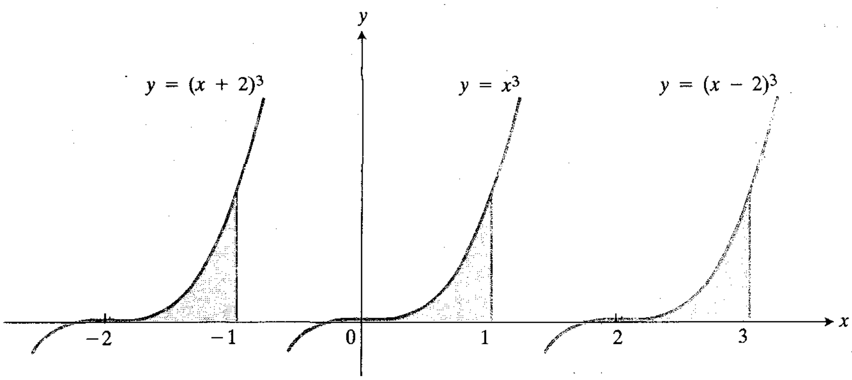
$$\int_{-a}^{a}h(x)\sin x\,dx=۰.$$

ت) نشان دهید که

$$\int_{-\pi/۴}^{\pi/۴}\sec x\sin x\,dx=۰.$$

۰۲۴. نشان دهید که

$$\int_{-a}^{a}h(x)\,dx=\begin{cases}۰ & \text{(اگر } h \text{ فرد باشد)}\\ ۲\int_{۰}^{a}h(x)\,dx & \text{(اگر } h \text{ زوج باشد).}\end{cases}$$



۲۲.۴ نواحی‌سایه‌دار قابل‌انطباق (همنهشت) اند و مساحت برابردارند. مقدمهٔ مسائل ۲۵–۲۸ را ببینید.

ویژگی انتقالی انتگرالهای معین. یکی‌از ویژگیهای اصلی‌انتگرال معین تغییرنکردن (ناوردا بودن) آن تحت عمل انتقال است. این خاصیت با معادلهٔ زیر بیان می‌شود

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a-c}^{b-c} f(x+c)\,dx\,. \qquad (۲)$$

این معادله وقتی برقرار است‌که f پیوسته باشد و برای مقادیر لازم x تعریف بشود. مثلاً داریم

$$\int_۰^۱ x^۳\,dx = \int_{-۲}^{-۱} (x+۲)^۳\,dx = \int_۲^۳ (x-۲)^۳\,dx\,.$$

شکل ۲۲.۴ را ببینید.

در هریک از توابع مسائل ۲۵–۲۷، نمودار $f(x)$ و $f(x+c)$ را باهم رسم‌کنید، و خود را متقاعد سازید که معادلهٔ (۲) درست است. سپس دوطرف معادلهٔ (۲) را حساب‌کنید.

۲۵. $f(x)=x^۲,\quad a=۰,\quad b=۱,\quad c=۱$

۲۶. $f(x)=\sin x,\quad a=۰,\quad b=\pi,\quad c=\pi/۲$

۲۷. $f(x)=\sqrt{x-۴},\quad a=۴,\quad b=۸,\quad c=۵$

۲۸. به‌کمك فرمول تغییرحدود انتگرالگیری (معادلهٔ (۱)) معادلهٔ (۲) را ثابت‌کنید.

۹.۴ قواعدی برای تقریب‌زدن انتگرالهای معین

برای محاسبهٔ انتگرالهای معین توابعی نظیر

$$\frac{\sin x}{x}\,,\quad \sin x^۲$$

و

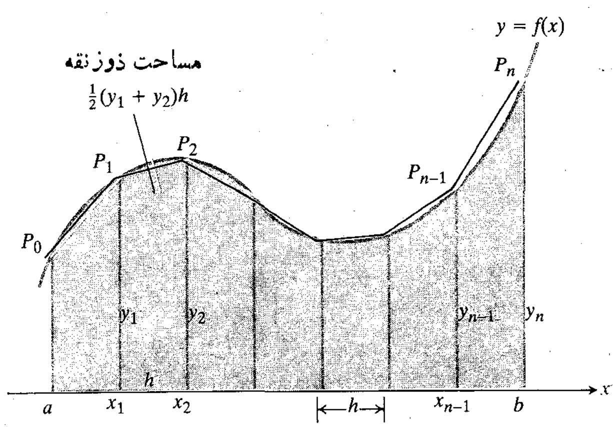
$$\sqrt{۱+x^۴}$$

که پادمشتقهایشان فرمول ساده‌ای ندارند، از روشهای عددی نظیر قاعدهٔ ذوزنقه‌ای و قاعدهٔ سیمپسون استفاده می‌کنیم. به‌کمك این قواعد همچنین می‌توانیم انتگرال یك تابع را ازجدول مقادیرش، حتی اگر فرمولی برای آن تابع دراختیار نداشته باشیم، به‌دست آوریم. چنین حالتی وقتی پیش می‌آیدکه اطلاعات ما دربارهٔ یك تابع به‌صورت مجموعه‌ای از مقادیر خاص باشدکه درآزمایشگاه یا ضمن‌کار به‌دست می‌آید.

قاعدهٔ ذوزنقه‌ای

قاعدهٔ ذوزنقه‌ای برای محاسبهٔ مقدار یك انتگرال معین برپایهٔ تقریب‌زدن ناحیهٔ بین یك‌خم و محور x به‌کمك ذوزنقه‌ها به‌جای مستطیلها استوار است (شکل ۲۳.۴). طول زیربازه‌هایی که از تقسیم بازه به‌کمك نقاط $x_۱$، $x_۲$، ...، $x_{n-۱}$ به‌دست می‌آیند ضرورتی ندارد برابر باشند، اما اگر برابر باشند فرمول حاصل ساده‌ترمی‌شود. بنا براین‌فرض می‌کنیم طول هرزیربازه چنین باشد:

$$h=\Delta x=\frac{b-a}{n}\,.$$



۲۳.۴ درقاعدهٔ ذوزنقه‌ای قطعات کوچك خم را با پاره‌خطها تقریب می‌زنیم. برای براورد مساحت قسمت سایه‌دار، مساحتهای ذوزنقه‌هایی را که از وصل‌کردن دوسراین پاره‌خطها به‌محور x ایجاد می‌شوند جمع می‌کنیم.

به‌این ترتیب مجموع مساحتهای ذوزنقه‌ها برابرند با

$$T=\frac{1}{2}(y_0+y_1)h+\frac{1}{2}(y_1+y_2)h+\cdots$$

$$+\frac{1}{2}(y_{n-2}+y_{n-1})h+\frac{1}{2}(y_{n-1}+y_n)h$$

$$=h\left(\frac{1}{2}y_0+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}+\frac{1}{2}y_n\right) \quad (1)$$

$$=\frac{h}{2}(y_0+2y_1+2y_2+\cdots+2y_{n-1}+y_n)$$

که در آن

$$y_0=f(a),\quad y_1=f(x_1),\ \ldots,\ y_{n-1}=f(x_{n-1})$$
$$y_n=f(b)\,.$$

قاعدهٔ ذوزنقه‌ای می‌گوید که «برای براوردکردن انتگرال f از a تا b، از T استفاده‌کنید».

قاعدهٔ ذوزنقه‌ای

برای تقریب‌زدن

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

از رابطهٔ

$$T=\frac{h}{2}(y_0+2y_1+2y_2+\cdots+2y_{n-1}+y_n) \quad (2)$$

استفاده‌کنید. (طول‌هریك از n زیربازه، $h=(b-a)/n$ است.)

مثال ۱ برای تقریب‌زدن انتگرال زیر از قاعدهٔ ذوزنقه‌ای با ضابطهٔ $n=4$ استفاده‌کنید

$$\int_1^2 x^2\,dx\,.$$

مقدار تقریبی به‌دست‌آمده را با مقدار دقیق انتگرال مقایسه‌کنید.

حل: مقدار دقیق انتگرال چنین است

$$\int_1^2 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\bigg]_1^2=\frac{7}{3}\,.$$

برای یافتن تقریب ذوزنقه‌ای، بازهٔ انتگرالگیری را به‌چهار زیربازه با طول برابر تقسیم می‌کنیم. مقادیر $y=x^2$ را به‌ازای نقاط انتهایی و نقاط میانی فهرست می‌کنیم. (جدول ۴.۴ را ببینید.)

جدول ۴.۴

x	$y=x^2$
1	1
$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{16}$
$\frac{6}{4}$	$\frac{36}{16}$
$\frac{7}{4}$	$\frac{49}{16}$
2	4

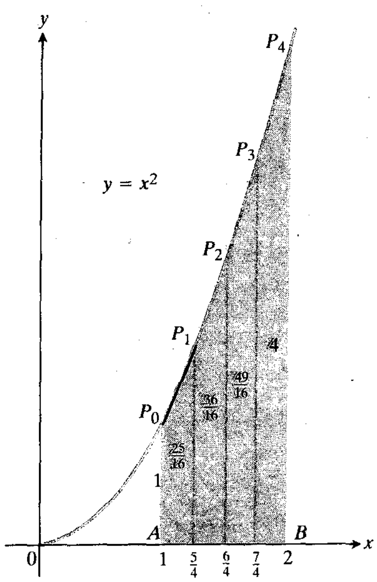
سپس رابطهٔ (۲) را به‌ازای $n=4$ و $h=1/4$ محاسبه می‌کنیم

$$T=\frac{h}{2}(y_0+2y_1+2y_2+2y_3+y_4)$$

$$=\frac{1}{8}\left(1+2\left(\frac{25}{16}\right)+2\left(\frac{36}{16}\right)+2\left(\frac{49}{16}\right)+4\right)$$

$$=\frac{75}{32}=2{,}34375\,.$$

مقدار تقریبی مساحت، حدود نیم‌درصد از مقدار واقعی‌آن بیشتر است زیرا هر ذوزنقه قدری بزرگتر از نوار نظیر زیرخم است (شکل ۲۴.۴).



۲۴.۴ تقریب ذوزنقه‌ای مساحت زیر نمودار $y=x^2$ از $x=1$ تا $x=2$ اندکی از مقدار واقعی بزرگتر است.

براورد خطا درقاعدهٔ ذوزنقه‌ای

با افزایش n و میل‌کردن‌طول زیربازه‌ها، $h=\Delta x$، به‌سمت‌صفر؛ T به‌سمت مقدار دقیق $\int_a^b f(x)\,dx$ میل می‌کند. علت این امر این است

$$T=h\left(\tfrac{1}{۲}y_۰+y_۱+y_۲+\cdots+y_{n-۱}+\tfrac{1}{۲}y_n\right)$$

$$=(y_۱+y_۲+\cdots+y_n)\,\Delta x+\tfrac{1}{۲}(y_۰-y_n)\,\Delta x \quad (۳)$$

$$=\sum f(x_k)\,\Delta x+\tfrac{1}{۲}[f(a)-f(b)]\,\Delta x\,.$$

وقتی $n\to\infty$ و $\Delta x\to ۰$ داریم

$$\sum f(x_k)\,\Delta x\to\int_a^b f(x)\,dx$$

و

$$\tfrac{1}{۲}\,[f(a)-f(b)]\,\Delta x\to ۰\,.$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty}T=\int_a^b f(x)\,dx+۰=\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

یعنی ازلحاظ نظری می‌توانیم با انتخاب nی که به اندازهٔ کافی بزرگ باشد تفاضل T و انتگرال را تا آنجاکه بخواهیم کوچك کنیم. اما واقعاً n باید چقدر بزرگ باشد تا خطا از حد معینی تجاوز نکند؟

این‌سؤال را به‌کمك‌نتیجه‌ای ازحساب‌دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته پاسخ‌می‌گوییم. بنا به‌این‌نتیجه اگر f'' روی $[a,b]$ پیوسته باشد، به‌ازای عددی چون c بین a و b داریم

$$\int_a^b f(x)\,dx=T-\frac{b-a}{۱۲}\,h^۲ f''(c)\,. \quad (۴)$$

بنابراین وقتی h به‌سمت صفر میل کند، خطا،

$$E_T=-\frac{b-a}{۱۲}\,h^۲ f''(c) \quad (۵)$$

به‌صورت مجذور h به‌سمت صفرمیل می‌کند.

نابرابری

$$|E_T|\leqslant\frac{b-a}{۱۲}\,h^۲\max|f''(x)| \quad (۶)$$

که در آن max به بازهٔ $[a,b]$ مربوط می‌شود، یك کران بالا برای اندازهٔ خطا به‌دست می‌دهد. معمولاً درعمل نمی‌توانیم مقدار دقیق $\max|f''(x)|$ را به‌دست‌آوریم و باید یك کران بالا یا «بدترین حالت» را به‌جای‌آن براوردکنیم. اگر M یك کران بالا برای مقادیر $|f''(x)|$ روی $[a,b]$ باشد، آنگاه

$$|E_T|\leqslant\frac{b-a}{۱۲}\,h^۲M\,. \quad (۷)$$

معمولاً برای براوردکردن $|E_T|$ این نابرابری را به‌کارمی‌بریم. بهترین Mی را که می‌توانیم بیابیم تعیین می‌کنیم و به‌کمك آن $|E_T|$ را براورد می‌کنیم. ممکن است این فرمول جوابهای دقیق به‌دست ندهد، اما کاراست. برای اینکه $|E_T|$ به‌ازای یك M مفروض کوچك باشد، h را کوچك می‌گیریم.

براورد خطا درقاعدهٔ ذوزنقه‌ای

اگر f'' پیوسته و M یك‌کران‌بالا برای‌مقادیر $|f''|$ روی $[a,b]$ باشد، آنگاه خطای E_T در تقریب ذوزنقه‌ای انتگرال f از a تا b درنابرابری زیرصدق می‌کند

$$|E_T|\leqslant\frac{b-a}{۱۲}\,h^۲M\,. \quad (۸)$$

مثال ۲ یك‌کران بالا برای خطای تقریبی که در مثال ۱ برای انتگرال زیر به‌دست‌آوردیم، بیابید

$$\int_۱^۲ x^۲\,dx\,.$$

حل: نخست یك‌کران بالا چون M برای اندازهٔ مشتق‌دوم $f(x)=x^۲$ روی بازهٔ $۱\leqslant x\leqslant ۲$ می‌یابیم. چون به‌ازای همهٔ xها داریم $f''(x)=۲$، با اطمینان M را برابربا ۲ می‌گیریم. به‌ازای $b-a=۱$ و $h=۱/۴$، معادلهٔ ۸ چنین می‌شود

$$|E_T|\leqslant\frac{b-a}{۱۲}\,h^۲M=\frac{۱}{۱۲}\left(\frac{۱}{۴}\right)^۲(۲)=\frac{۱}{۹۶}$$

که دقیقاً برابربا تفاضل $T=۷۵/۳۲$ از $\int_۱^۲ x^۲\,dx=۷/۳$ یعنی $۷۵/۳۲-۷/۳=۱/۹۶$ است. دراین‌مثال، توانستیم مقدار دقیق خطا را به‌دست دهیم زیرا مشتق دوم $f(x)=x^۲$ ثابت‌است و درانتخاب‌جملهٔ $f''(c)$ درمعادلهٔ (۴) تردید نداشتیم. اماهمواره این‌چنین‌بخت یار ما نیست و دراکثرموارد بهترین‌کاری که‌می‌توانیم بکنیم این است‌که تفاضل انتگرال و T را براورد کنیم. ■

مثال ۳ قرار است برای براورد مقدار انتگرال زیر با ۱۰ $(=n)$ گام قاعدهٔ ذوزنقه‌ای را به‌کار ببریم

$$\int_۰^۱ x\sin x\,dx\,.$$

یك حد بالا برای خطای حاصل از این براورد بیابید.

حل: فرمول زیر را به‌ازای $b=1$، $a=0$، و $h=1/n=1/10$ به‌کار می‌بریم

$$|E_T|\leqslant\frac{b-a}{12}h^2M$$

بنابراین

$$|E_T|\leqslant\frac{1}{12}\left(\frac{1}{10}\right)^2M=\frac{1}{1200}M.$$

عدد M می‌تواند هرکران بالایی برای مقادیر $|f''|$ روی $[0,1]$ باشد. برای انتخاب مقداری برای M، f'' را محاسبه می‌کنیم تا از میزان بزرگی آن آگاه شویم. با مشتقگیری مستقیم داریم

$$f''=\cos x+(1-x)\sin x.$$

بنابراین چون $0\leqslant x\leqslant 1$ و $|\cos x|$ و $|\sin x|$ هرگز از ۱ بزرگتر نخواهند شد، داریم

$$|f''|\leqslant|\cos x|+|1-x||\sin x|\leqslant 1+(1)(1)=2.$$

از این‌رو با اطمینان می‌توان M را برابر با ۲ برگزید. پس

$$|E_T|\leqslant\frac{1}{1200}(2)=\frac{1}{600}<0.00167.$$

خطا از 1.67×10^{-3} بیشتر نیست.

برای به‌دست‌آوردن دقت بیشتر M را تصحیح نمی‌کنیم بلکه گامهای بیشتری برمی‌داریم. مثلاً به‌ازای $n=100$ داریم $h=1/100$ و

$$|E_T|\leqslant\frac{1}{12}\left(\frac{1}{100}\right)^2(2)<1.67\times10^{-5}.$$ ■

مثال ۴ برای تقریب‌زدن

$$\ln 2=\int_1^2\frac{1}{x}\,dx$$

به‌کمك قاعدهٔ ذوزنقه‌ای، چند تقسیم باید انجام شود تا قدرمطلق خطا کمتر از 10^{-4} باشد؟

حل: برای تعیین تعداد تقسیمات، n، معادلهٔ (۸) را به‌ازای

$$b-a=2-1=1,\quad h=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}$$

$$f''(x)=\frac{d^2}{dx^2}(x^{-1})=2x^{-3}=\frac{2}{x^3}$$

به‌کار می‌بریم و به‌دست می‌آوریم

$$|E_T|\leqslant\frac{b-a}{12}h^2\max|f''(x)|=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}\right)^2\max\left|\frac{2}{x^3}\right|$$

که در آن max به‌بازهٔ $[1,2]$ مربوط می‌شود.

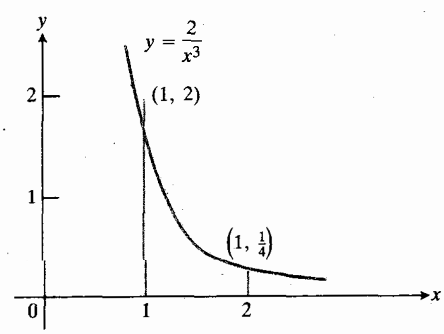
این حالت که در آن عملاً می‌توانیم $\max|f''|$ را بیابیم و مجبور نیستیم یك کران بالا به‌جای آن قرار دهیم به‌ندرت پیش می‌آید. روی بازهٔ $[1,2]$، $y=2/x^3$ به‌تدریج از ماکسیمم، $y=2$، به مینیمم، $y=1/4$، کاهش می‌یابد (شکل ۲۵.۴). بنابراین

$$|E_T|\leqslant\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot 2=\frac{1}{6n^2}.$$

پس قدرمطلق خطا درصورتی کمتر از 10^{-4} است که

$$\frac{1}{6n^2}<10^{-4},\quad \frac{10^4}{6}<n^2,\quad \frac{100}{\sqrt{6}}<n \quad \text{یا} \quad 40.83<n.$$

نخستین عدد صحیح بزرگتر از ۴۰٫۸۳ برابر است با $n=41$. با ۴۱ $(=n)$ تقسیم می‌توان تضمین کرد که اندازهٔ خطای محاسبهٔ $\ln 2$ کمتر از 10^{-4} است. برای هر n بزرگتری نیز چنین است.



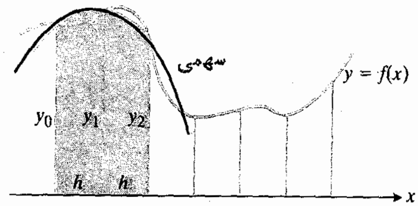
۲۵.۴ مقدار ماکسیمم تابع پیوستهٔ $y=2/x^3$ روی بازهٔ $[1,2]$ در $x=1$ به‌دست می‌آید. ■

قاعدهٔ سیمپسون

هرسه نقطه‌ای از یك صفحه را که روی یك خط راست واقع نباشند می‌توان روی یك سهمی جای‌داد. قاعدهٔ سیمپسون بر پایهٔ تقریب‌زدن خمها با سهمیها (به‌عوض ذوزنقه‌ها) استوار است. مساحت سایه‌دار زیرسهمی درشکل ۲۶.۴ چنین است

$$A_p=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2).$$

با کاربرد پیاپی این فرمول درسراسرخم پیوستهٔ $y=f(x)$ از



۲۶.۴ قاعدهٔ سیمپسون قطعات کوچکی از خم را با سهمی تقریب می‌زند.

$x=a$ تا $x=b$ براوردی از $\int_a^b f(x)\,dx$ به‌دست می‌آید که معمولاً برای یك اندازهٔ گام مفروض h، از T دقیقتر است.

فرمول A_p چنین به‌دست‌می‌آید: برای ساده‌کردن محاسبات جبری، دستگاه مختصات نشان داده شده در شکل ۲۷.۴ را به‌کار می‌بریم. اگرمقیاس محورقائم ثابت بماند، محل‌محور y هرجاکه باشد مساحت زیرسهمی همواره ثابت می‌ماند. سهمی معادله‌ای به‌صورت زیر دارد

$$y = Ax^۲ + Bx + C\,.$$

بنابراین مساحت زیرسهمی از $x=-h$ تا $x=h$ چنین است

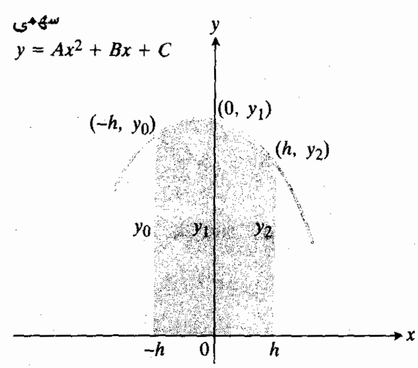
$$A_p = \int_{-h}^{h} (Ax^۲ + Bx + C)\,dx$$

$$= \frac{Ax^۳}{۳} + \frac{Bx^۲}{۲} + Cx \Big]_{-h}^{h}$$

$$= \frac{۲Ah^۳}{۳} + ۲Ch = \frac{h}{۳}(۲Ah^۲ + ۶C)\,.$$

چون خم از سه‌نقطهٔ $(-h, y_۰)$، $(۰, y_۱)$، و $(h, y_۲)$ می‌گذرد داریم

$$y_۰ = Ah^۲ - Bh + C,\quad y_۱ = C,\quad y_۲ = Ah^۲ + Bh + C$$



۲۷.۴ مساحت ناحیهٔ سایه‌دار با محاسبهٔ انتگرال از $-h$ تا h چنین به‌دست می‌آید

$$A_p = \frac{h}{۳}(y_۰ + ۴y_۱ + y_۲)\,.$$

که از آن چنین به‌دست می‌آید

$$C = y_۱$$

$$Ah^۲ - Bh = y_۰ - y_۱$$

$$Ah^۲ + Bh = y_۲ - y_۱$$

$$۲Ah^۲ = y_۰ + y_۲ - ۲y_۱\,.$$

بنابراین، مساحت A_p برحسب مختصهای $y_۰$، $y_۱$، و $y_۲$ چنین است

$$A_p = \frac{h}{۳}(۲Ah^۲ + ۶C) = \frac{h}{۳}((y_۰ + y_۲ - ۲y_۱) + ۶y_۱)$$

یا

$$A_p = \frac{h}{۳}(y_۰ + ۴y_۱ + y_۲)\,.$$

قاعدهٔ سیمپسون عبارت‌است ازبه‌کاربردن‌فرمول A_p درمورد قطعات متوالی خم $y=f(x)$ از $x=a$ تا $x=b$. هرقطعهٔ مجزایی ازخم برزیربازه‌ای از $[a,b]$ به‌پهنای $۲h$ را قوسی از سهمی‌گذرنده ازنقاط انتهایی و میانی‌زیربازه تقریب می‌زند. با افزودن مساحتهای زیرقوسهای سهمیها قاعدهٔ سیمپسون به‌دست می‌آید.

قاعدهٔ سیمپسون

برای تقریب‌زدن

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

فرمول زیررا به‌کارمی‌بریم

$$S = \frac{h}{۳}(y_۰ + ۴y_۱ + ۲y_۲ + ۴y_۳ + \cdots + ۲y_{n-۲} + ۴y_{n-۱} + y_n) \qquad (۹)$$

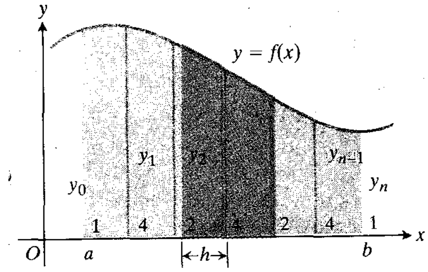
(n زوج است و $h = (b-a)/n$).

درمعادلهٔ (۹)، yها مقادیر $y=f(x)$ درنقاط

$$a,\quad x_۱ = a + h,\quad x_۲ = a + ۲h,\ \ldots,$$

$$x_{n-۱} = a + (n-۱)h,\quad b$$

هستندکه این نقاط $[a,b]$ را به n زیربازهٔ مساوی به طول $h = (b-a)/n$ تقسیم‌می‌کنند.(شکل۲۸.۴ را ببینید.) چون‌هرقوس سهموی از دوزیربازه استفاده می‌کند، برای به‌کاربردن این قاعده باید n زوج باشد.



۲۸.۴ در معادلهٔ (۹)، yها مقادیر f در نقاط تقسیم‌اند.

براورد خطا درقاعدهٔ سیمپسون

برای براوردکردن خطا درقاعدهٔ سیمپسون، با یك نتیجه از حساب دیفرانسیل وانتگرال پیشرفته کار راآغاز می‌کنیم. این‌نتیجه حاکی است‌که اگر مشتق چهارم $f^{(4)}$ پیوسته باشد، آنگاه برای نقطه‌ای مانند c بین a و b داریم

$$\int_a^b f(x)\,dx = S - \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(c). \qquad (10)$$

بنابراین، وقتی h به‌سمت صفرمیل کند، خطای

$$E_S = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(c) \qquad (11)$$

به‌صورت توان چهادم h به‌سمت صفر میل می‌کند. (این مطلب توضیحی است برای اینکه چرا قاعدهٔ سیمپسون احتمالاً نتایج بهتری از قاعدهٔ ذوزنقه‌ای به‌دست می‌دهد.)

نابرابری

$$|E_S| \leqslant \frac{b-a}{180} h^4 \max |f^{(4)}(x)| \qquad (12)$$

که درآن max به‌بازهٔ $[a, b]$ مربوط می‌شودکران بالایی برای اندازهٔ خطا به‌دست می‌دهد. معمولاً مقدار دقیق $\max |f^{(4)}(x)|$ را مانند مقدار $\max |f''|$ درفرمول خطای قاعدهٔ ذوزنقه‌ای نمی‌توان به‌دست آورد و باید به‌جای آن یك‌کران بالا قرار داد. اگر M یك‌کران بالا برای مقادیر $|f^{(4)}|$ روی بازهٔ $[a, b]$ باشد، آنگاه

$$|E_S| \leqslant \frac{b-a}{180} h^4 M. \qquad (13)$$

این فرمولی است که معمولاً برای براوردکردن خطا درقاعدهٔ سیمپسون به‌کار می‌رود. نخست مقدار مناسبی برای M می‌یابیم و به‌کمك آن خطای $|E_S|$ را براورد می‌کنیم.

براورد خطا در قاعدهٔ سیمپسون

اگر $f^{(4)}$ پیوسته و M یك‌کران بالا برای مقادیر $|f^{(4)}|$ روی $[a, b]$ باشد، آنگاه خطای E_S در تقریب‌زدن انتگرال f از a تا b به‌کمك قاعدهٔ سیمپسون، درنابرابری زیرصدق می‌کند.

$$|E_S| \leqslant \frac{b-a}{180} h^4 M. \qquad (14)$$

مثال ۵ انتگرال زیر را به‌کمك قاعدهٔ سیمپسون با ضابطهٔ $n = 4$ تقریب بزنید

$$\int_0^1 5x^4\,dx.$$

خطای این‌تقریب‌زدن را با استفاده از معادلهٔ (۱۴) براوردکنید.

حل: بازهم انتگرالی را برگزیده‌ایم‌که مقدار دقیق‌آن‌را می‌توان مستقیماً به‌دست آورد

$$\int_0^1 5x^4\,dx = x^5 \Big]_0^1 = 1.$$

برای‌یافتن تقریب سیمپسونی‌این‌انتگرال، بازهٔ انتگرالگیری را به‌چهار زیربازه تقسیم می‌کنیم و مقادیر $f(x) = 5x^4$ درنقاط انتهایی و نقاط تقسیم را فهرست می‌کنیم (جدول ۵.۴ را ببینید). معادلهٔ (۹) را به‌ازای $n = 4$ و $h = 1/4$ محاسبه‌می‌کنیم

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$= \frac{1}{12}\left(0 + 4\left(\frac{5}{256}\right) + 2\left(\frac{80}{256}\right) + 4\left(\frac{405}{256}\right) + 5\right)$$

$$= 1.00260 \quad \text{(گرد شده)}$$

جدول ۵.۴

x	$y = 5x^4$
0	0
$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{256}$
$\frac{2}{4}$	$\frac{80}{256}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{405}{256}$
1	5

برای براوردکردن خطا به‌کمك معادلهٔ (۱۴)، نخست یك کران بالا چون M برای مقدار مشتق چهارم $f(x)=5x^4$ روی بازهٔ $0 \leqslant x \leqslant 1$ می‌یابیم. چون مقدار مشتق چهارم ثابت و برابر با ۱۲۰ است، بـا اطمینان M را برابربـا ۱۲۰ بـرمی‌گزینیم. بنابراین از معادلهٔ (۱۴) به‌ازای $(b-a)=1$ و $h=1/4$ چنین به‌دست می‌آوریم

$$|E_S| \leqslant \frac{b-a}{180} h^4 M = \frac{1}{180}\left(\frac{1}{4}\right)^4 (120)$$

$$= \frac{1}{384} < 0{,}00261 . \qquad \blacksquare$$

چند جمله‌ایهای از درجهٔ پایین

اگر $f(x)$ یك چندجمله‌ای با درجهٔ کمتر از چهار بـاشد، آنگاه مشتق چهارمش صفر است و داریم

$$E_S = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(c) = -\frac{b-a}{180} h^4(0) = 0 .$$

بنابراین درتقریب‌سیمپسونی هرانتگرالی‌از f خطایی‌وجود ندارد. به دیگرسخن، اگر f ثابت، یك تابع درجهٔ اول (خطی) یـا یك چندجمله‌ای درجهٔ دوم یا سوم باشد، صرفنظر ازتعداد زیربازه‌هـا درتقسیم بازه، قاعدهٔ سیمپسون مقدار دقیق هـرانتگرالی از f را به‌دست می‌دهد.

همچنین اگر f ثابت یا یك تابع درجهٔ اول (خطی) باشد، آنگاه مشتق دومش صفر است و داریم

$$E_T = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(c) = -\frac{b-a}{12} h^2(0) = 0 .$$

بنابراین، قاعدهٔ ذوزنقه‌ای مقداردقیق هرانتگرالی از f را به‌دست می‌دهد. این‌مطلب تعجب‌آور نیست، زیرا درچنین‌حالاتی ذوزنقه‌ها کاملاً روی نمودار قرار می‌گیرند.

مثال ۶ انتگرال زیر را به‌کمك قاعدهٔ سیمپسون براوردکنید

$$\int_0^2 x^3\, dx .$$

حل: مشتق چهارم $f(x)=x^3$ صفراست، بنابراین انتظار می‌رود قاعدهٔ سیمپسون‌مقدار دقیق انتگرال‌را با هرتعداد (زوجی) از گامها به دست دهد. به ازای $n=2$ و $h=(2-0)/2=1$ داریم

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$= \frac{1}{3}((0)^3 + 4(1)^3 + (2)^3)$$

$$= \frac{12}{3} = 4 .$$

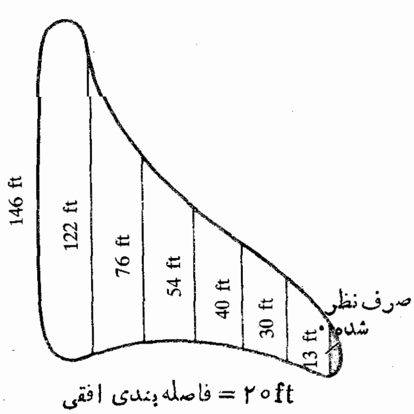
ازطرفی داریم

$$\int_0^2 x^3\, dx = \frac{x^4}{4}\Big]_0^2 = \frac{16}{4} - 0 = 4 . \qquad \blacksquare$$

عملیات روی داده‌های عددی

مثال بعدی چگونگی استفاده ازقاعدهٔ سیمپسون را دربراوردکردن انتگرال تابعی‌نشان‌می‌دهدکه مقادیرآن درآزمایشگاه یا ضمن عمل به‌دست آمده‌اند. قاعدهٔ ذوزنقه‌ای را نیز می‌تـوان به‌همین ترتیب به‌کاربرد.

مثال ۷ شکل ۲۹.۴ باتلاق کوچك شهرکی را نشان می‌دهدکـه قرار است زهکشی وسپس پرشود. عمق‌متوسط باتلاق 5 ft است. پس از اینکه باتلاق زهکشی شد حدود چند یارد مکعب خاك برای پرکردن آن لازم است؟



۲۹.۴ باتلاق درمثال ۷.

حل: برای محاسبهٔ حجم باتلاق مساحت آن را براورد، و نتیجه را در ۵ ضرب‌می‌کنیم. برای براوردکردن مساحت ازقاعدهٔ سیمپسون استفاده می‌کنیم، داریم $h=20\text{ ft}$. yها طول خطوط قائم درشکل ۲۹.۴ هستند، بنابراین

$$S=\frac{h}{۳}(y_۰+۴y_۱+۲y_۲+۴y_۳+۲y_۴+۴y_۵+y_۶)$$

$$=\frac{۲۰}{۳}(۱۴۶+۴۸۸+۱۵۲+۲۱۶+۸۰+۱۲۰+۱۳)$$

$$=\frac{۲۰}{۳}(۱۲۱۵)=۸۱۰۰\,.$$

ازاین‌رو حجم حدوداً $(۸۱۰۰)(۵)=۴۰۵۰۰\,ft^۳$ یا $۱۵۰۰\,yd^۳$ است. ■

خطاهای ناشی ازگردکردن

گرچه کاستن اندازهٔ گام، h، ازلحاظ نظری خطا را درتقریبهای سیمپسونی و ذوزنقه‌ای کم می‌کند، امـا ممکن است درعمل چنین نباشد. وقتی h خیلی کـوچك باشد، مثلاً $h=۱۰^{-۵}$، خطاهـای ناشی از گردکردن درمحاسباتی که برای حساب‌کردن S و T لازم است ممکن است آن‌قدر جمع شوند کـه دیگر فرمول خطا نتواند جوابگوی آنچه که پیش می‌آید بـاشد. اگر h را کمتر از مقدار معینی برگزینیم درعمل ممکن است خطا، به‌جـای اینکه کم شود، بیشتر شود. دربارهٔ این مطلب در این کتاب بحث نخواهد شد، اما اگر درگیر مسائلی هستید کـه به گردکردن مربوط می‌شود بـرای آشنا شدن با روشهای دیگر به کتابی در باب آنالیز عددی مراجعه کنید.

مسأله‌ها

هریك از انتگرالهای مسائل ۱ـ۶ را بـا ضابطهٔ $n=۴$ و از راه (الف) قـاعدهٔ ذوزنقه‌ای و (ب) قـاعدهٔ سیمپسون تقریب بزنید. جوابهای حاصل را با (پ) مقدار دقیق انتگرال مقایسه کنید.

۱. $\int_۰^۲ x\,dx$

۲. $\int_۰^۲ x^۲\,dx$

۳. $\int_۰^۲ x^۳\,dx$

۴. $\int_۱^۲ \frac{۱}{x^۲}\,dx$

۵. $\int_۰^۴ \sqrt{x}\,dx$

۶. $\int_۰^\pi \sin x\,dx$

۷. خطای ناشی از به‌کاربردن

الف) قاعدهٔ ذوزنقه‌ای و

ب) قاعدهٔ سیمپسون را درمحاسبهٔ مقدار زیر با ۱۰($n=$)گام براوردکنید

$$\ln ۲=\int_۱^۲ \frac{۱}{t}\,dt\,.$$

ج) اگر به‌جای ۱۰($n=$) گام، ۴($n=$) گام به‌کاربریم از هریك از این دوقاعده چه‌دقتی را می‌توان انتظار داشت؟

۸. مثال ۴ را با استفاده ازقاعدهٔ سیمپسون به‌جای‌قاعدهٔ ذوزنقه‌ای تکرار کنید.

درمسائل ۹ـ۱۴ مینیمم تعداد تقسیمات‌لازم برای‌تقریب‌زدن‌انتگرال به‌کمك (الف) قـاعدهٔ ذوزنقه‌ای، (ب) قـاعدهٔ سیمپسون را چنان براوردکنیدکه قدرمطلق خطا از $۱۰^{-۴}$ کمترشود.

۹. $\int_۰^۲ x\,dx$

۱۰. $\int_۰^۲ x^۲\,dx$

۱۱. $\int_۰^۲ x^۳\,dx$

۱۲. $\int_۱^۲ \frac{۱}{x^۳}\,dx$

۱۳. $\int_۱^۴ \sqrt{x}\,dx$

۱۴. $\int_۰^\pi \sin x\,dx$

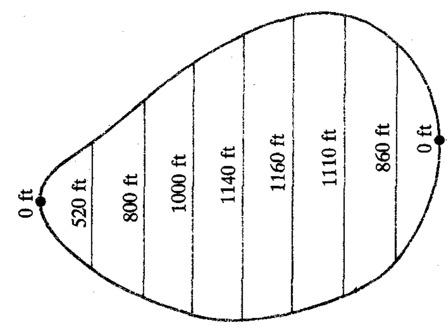
۱۵. قرار است مقدار انتگرال

$$\int_۱^۲ f(x)\,dx$$

به‌کمك قاعدهٔ سیمپسون بـا اندازهٔ خطایی‌کمتر از $۱۰^{-۵}$ براورد شود. فـرض مـی‌کنیم در سراسر بـازهٔ انتگـرالگیری داریـم $|f^{(۴)}(x)|\leqslant ۳$. طبق فرمول خطای‌قاعدهٔ سیمپسون تعدادتقسیمات بازه چه باشد تا دقت مطلوب تضمین شود؟

۱۶. فرض کنید سرپرست ماهیگیری دریاچه‌ای هستید و مسؤول تعداد ماهیهای موجود در دریـاچه. عمق متوسط دریـاچه $۲۰\,ft$ است. درنظردارید درآغازفصل درهر ۱۰۰۰ فوت‌مکعب یك‌ماهی باشد، ودرپایان فصل دست‌کم ۲۵٪ تعداد ماهیهای‌موجود درآغاز فصل ماهیگیری در دریاچه باقی بماند. اگر هـر یك از دارندگان

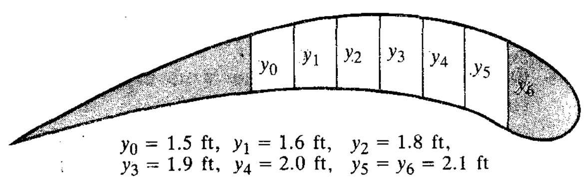
پروانهٔ ماهیگیری در تمام فصل به طور متوسط ۲۰ ماهی صید کنند ماکسیمم تعداد پروانه‌ای که می‌توان صادر کرد چقدر است؟ شکل ۳۰.۴ استخر و اندازه‌های لازم را نشان می‌دهد.



۲۰۰ ft = فاصله بندی افقی

۳۰.۴ استخر ماهی مسألهٔ ۱۶.

۱۷. ماشین‌حساب درطراحی یك هواپیمای جدید به‌مخزن سوختی نیاز است که مساحت‌سطح مقطع آن در تمام‌طول هر بال ثابت باشد. شکل ۳۱.۴ سطح مقطع این مخزن را به‌همراه اندازه‌های لازم نشان می‌دهد. مخزن باید بتواند ۵۰۰۰ lb سوخت با چگالی $42\ \mathrm{lb/ft^3}$ را درخود جای دهد. طول‌مخزن را براورد کنید.

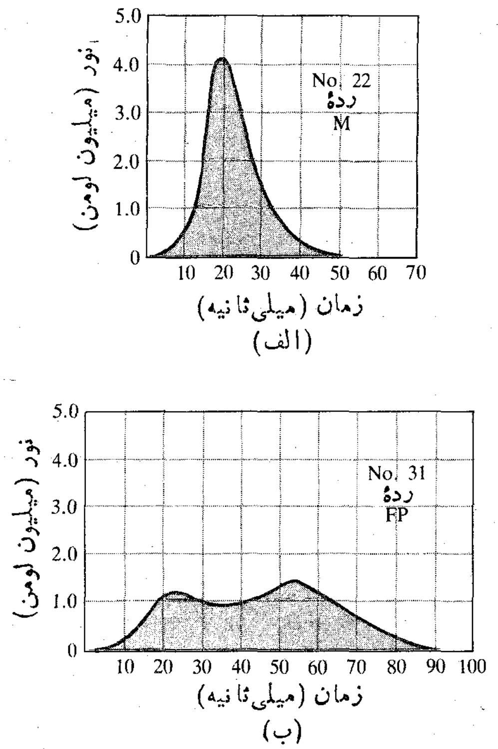


1 ft = فاصله بندی افقی

۳۱.۴ بال وسطح مقطع‌مخزن‌سوخت هواپیما درمسألهٔ ۱۷.

۱۸. ماشین‌حساب میزان نوری که لامپ‌فلاش دوربین عکاسی تولید می‌کند در زمان فلاش‌زدن تغییر می‌کند. برخی از لامپها، میزان نوری که تولید می‌کنند (برحسب لومن) مطابق شکل ۳۲.۴(الف) به‌ماکسیمم خود می‌رسد و سپس به‌سرعت از بین می‌رود. در برخی دیگر، نور تولید شده به‌جای اینکه به‌ماکسیمم خود برسد مطابق شکل ۳۲.۴ (ب) مدتی نسبتاً طولانی درسطح متوسطی باقی‌می‌ماند. برای محاسبهٔ مقدار نوری که به فیلم درون دوربین می‌رسد، باید بدانیم دریچه چه موقع باز و چه موقع بسته می‌شود. یك دریچهٔ معمولی ۲۰ میلی‌ثانیه پس‌ازفشاردادن دکمه باز می‌شود و ۵۰ ثانیه پس‌از بازشدن بسته می‌شود. A، مقدار نوری که لامپ‌فلاش دراین مدت ساطع می‌کند چنین است

$$A = \int_{20}^{70} L(t)\, dt \quad \text{لومن-میلی‌ثانیه}$$



۳۲.۴ داده‌های خروجی لامپهای‌فلاش که درجداول ۶.۴ و ۷.۴ آمده است دراین نمودارها مشخص، و با خمهای هموادی به‌هم وصل شده‌اند.

که درآن $L(t)$ نور خروجی از لامپ به‌صورت تابعی از زمان و برحسب لومن است. به‌کمك قاعدهٔ ذوزنقه‌ای و داده‌های عددی جداول ۶.۴ و ۷.۴، A، یعنی‌نوری را که هرلامپ ساطع می‌کند براورد کنید و تعیین کنید کدام لامپ نور بیشتری به‌فیلم می‌دهد.

جدول ۶.۴ نور خروجی از لامپ فلاش شمارهٔ ۲۲ (به‌میلیون لومن) برحسب زمان (به‌میلی‌ثانیه)

نور خروجی	زمان پس‌از فلاش‌زدن	نور خروجی	زمان پس‌از فلاش‌زدن
۱٫۷	۳۰	۰	۰
۰٫۷	۳۵	۰٫۲	۵
۰٫۳۵	۴۰	۰٫۵	۱۰
۰٫۲	۴۵	۲٫۶	۱۵
۰	۵۰	۴٫۲	۲۰
		۳٫۰	۲۵

جدول ۷.۴ نور خروجی لامپ فلاش شمارهٔ ۳۱ (به‌میلیون لومن) برحسب زمان (به‌میلی‌ثانیه)

زمان پس‌از فلاش‌زدن	نور خروجی	زمان پس‌از فلاش‌زدن	نور خروجی
۰	۰	۵۰	۱٫۳
۵	۰٫۱	۵۵	۱٫۴
۱۰	۰٫۳	۶۰	۱٫۳
۱۵	۰٫۷	۶۵	۱٫۰
۲۰	۱٫۰	۷۰	۰٫۸
۲۵	۱٫۲	۷۵	۰٫۶
۳۰	۱٫۰	۸۰	۰٫۳
۳۵	۰٫۹	۸۵	۰٫۲
۴۰	۱٫۰	۹۰	۰
۴۵	۱٫۱		

۰۱۹. **ماشین‌حساب** چنانکه درفصل ۱۲ خواهیم‌دید، تابع

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

به‌ازای هرمقدار x، مشتقات تمام‌مراتب را دارد. به‌خصوص‌چون نمودارش هموار است، می‌توان از قاعدهٔ سیمپسون نتایج خوبی انتظار داشت.

الف) با استفاده از این واقعیت که روی $[-\pi/2, \pi/2]$ داریم $|f^{(4)}(x)|\leqslant 1$، کران بالای خطارا در براورد مقدار انتگرال زیر به‌کمك قاعدهٔ سیمپسون با $n=4$ به‌دست آورید

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\,dx.$$

ب) انتگرال قسمت (الف) را از راه قاعدهٔ سیمپسون با $n=4$ براورد کنید.

پ) کران بالای حاصل از قسمت (الف) را به‌صورت درصدی از براورد حاصل از قسمت (ب) بیان کنید.

TOOLKIT PROGRAMS	
Integration	Integral Evaluator

پرسشها و تمرینهای مروری

۰۱. آیا یك تابع می‌تواند بیش از یك پادمشتق داشته باشد؟ اگر پاسخ مثبت است، چگونه پادمشتقها به هم مربوط می‌شوند؟ چه قضیه‌ای از فصل ۳ اساس این ارتباط است؟

۰۲. اگرشتاب جسمی که روی خط راستی‌حرکت می‌کند به‌صورت تابعی از زمان t داده‌شده باشد، برای به‌دست‌آوردن مکان جسم، $s=f(t)$، چه چیز دیگری‌را باید بدانیم؟ s را چگونه می‌توان یافت؟

۰۳. مثالی از روش جانشانی در انتگرالگیری ارائه دهید. درمورد حدود انتگرالهای معین چه می‌کنید؟

۰۴. اتحادهای مثلثاتی‌چگونه می‌توانند ما را درمحاسبهٔ انتگرالهای توابع مثلثاتی یاری رسانند؟ چند مثال ارائه‌دهید.

۰۵. انتگرالهای معین چگونه تعریف می‌شوند؟

۰۶. فرمولی برای $A(x)$، مساحت ناحیه‌ای‌که از طرف بالا به نیمدایرهٔ $y=\sqrt{4-t^2}$، ازطرف پایین به‌محور t، ازطرف‌چپ به‌محور y، و ازطرف راست به‌خط قائم $t=x$ محدود است به‌دست‌آورید. dA/dx را بیابید.

۰۷. نخستین‌قضیهٔ اساسی‌حساب دیفرانسیل و انتگرال را بیان کنید. چگونه قضیهٔ محاسبهٔ انتگرال از نخستین قضیهٔ اساسی به دست می‌آید؟

۰۸. آیا هرتابع پیوسته‌ای الزاماً مشتق تابع‌دیگری است؟ توضیح دهید.

۰۹. کدام یك از عبارتهای زیر درست وکدام‌یك نادرست است؟

الف) اگر $\int_a^b f(x)\,dx$ موجود باشد، آنگاه f مشتقپذیر است.

ب) اگر f مشتقپذیر باشد، آنگاه $\int_a^b f(x)\,dx$ موجود است.

پ) اگر f روی بازهٔ $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه $\int_a^b f(x)\,dx$ موجود است.

ت) اگر f روی $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ روی $[a, b]$ پیوسته‌است.

ث) اگر f روی $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ روی $[a, b]$ مشتقپذیر است.

۰۱۰. روشهای عددیی که برای محاسبهٔ انتگرالهای‌معین می‌شناسید کدام‌اند؟ دقت آنها چقدراست؟ گاه چگونه می‌توان به‌دقت‌افزود؟

۰۱۱. چگونگی‌ارتباط بین فرمول مجموع اویلر-مکلورن (به‌کتابی در زمینهٔ آنالیزعددی مراجعه‌کنید) وقاعدهٔ ذوزنقه‌ای‌را بیان کنید.

مسأله‌های گوناگون

معادلات دیفرانسیل مسائل ۱ـ۶ را حل کنید.

۱. $\dfrac{dy}{dx}=xy^{۲}$

۲. $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{۱+x+y+xy}$

۳. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^{۲}-۱}{y^{۲}+۱}$

۴. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-\sqrt{x}}{y\sqrt{y}}$

۵. $\dfrac{dr}{ds}=\left(\dfrac{۲+r}{۳-s}\right)^{۲}$

۶. $\dfrac{dr}{ds}=\dfrac{r^{۲}}{s^{۲}}+r^{۲}$

۷. هریك از معادلات دیفرانسیل زیر را با توجه به شرایط اولیه‌اش حل کنید

الف) $\dfrac{dy}{dx}=x\sqrt{x^{۲}-۴}$ ؛ به‌ازای $x=۲$، $y=۳$

ب) $\dfrac{dy}{dx}=xy^{۳}$ ؛ به‌ازای $x=۰$، $y=۱$

پ) $\dfrac{dy}{dx}=x^{۳}y^{۲}$ ؛ به‌ازای $x=۱$، $y=۴$

ت) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{۱}{x^{۲}}\sqrt{y+۱}$ ؛ به‌ازای $x=-۳$، $y=۳$

۸. آیا تابعی مانند $y=f(x)$ وجود دارد که هرسه شرط زیررا برآورد؟ توضیح دهید.

i) $d^{۲}y/dx^{۲}=۰$ به‌ازای هر x ی

ii) $dy/dx=۱$ به‌ازای $x=۰$

iii) $y=۰$ به‌ازای $x=۰$

۹. معادلهٔ خمی‌را به‌دست آورید که شیبش در نقطهٔ (x, y) برابر با $۳x^{۲}+۲$ باشد و از نقطهٔ $(۱, -۱)$ بگذرد.

۱۰. ذره‌ای با شتاب $d^{۲}x/dt^{۲}=-t^{۲}$ روی محور x حرکت می‌کند و در $t=۰$ در مبدأ است. این ذره حین حرکت به‌نقطهٔ $x=b$، $b>۰$، می‌رسد. اما هیچگاه از نقطهٔ b فراتر نمی‌رود. سرعت ذره را در $t=۰$ تعیین کنید.

۱۱. ذره‌ای با شتاب $a=\sqrt{t}-(۱/\sqrt{t})$ حرکت می‌کند. بنا به‌فرض در $t=۰$ سرعت ذره $v=۴/۳$ و مکان آن $s=-۴/۱۵$ است. مطلوب است تعیین

الف) سرعت v برحسب t، و

ب) مکان s برحسب t.

۱۲. شتاب ذره‌ای در لحظهٔ t برابر با $۲t+۳$ و سرعت آن در $t=۰$ برابر با ۴ است. سرعت را به‌صورت تابعی از زمان تعیین کنید و فاصلهٔ بین مکانهای ذره در $t=۰$ و $t=۴$ را بیابید.

۱۳. ذره‌ای با شتاب $d^{۲}x/dt^{۲}=-۴x$ روی‌محور x حرکت می‌کند. اگر ذره از حالت سکون از نقطه $x=۵$ به‌حرکت درآید، سرعتش را وقتی که نخستین بار به $x=۳$ می‌رسد بیابید.

۱۴. از ته گودالی به‌عمق 16 ft خاك را با بیل و با سرعت اولیهٔ 48 ft/sec به بیرون می‌ریزیم. خاك درلحظهٔ خروج از گودال چه سرعتی دارد؟

معادلات مسائل ۱۵ـ۲۰ را با توجه به شرایط اولیه‌شان حل کنید.

۱۵. $dy/dx=x\sqrt{۱+x^{۲}}$، به‌ازای $x=۰$، $y=-۲$.

۱۶. $dy/dx=۱/(y\sqrt{x})+(\sec x\tan x)/y$، به ازای $x=۰$، $y=\sqrt{۶}$.

۱۷. $\sqrt{x}\,y(dy/dx)=x+۱$، به‌ازای $x=۱$، $y=۲$.

۱۸. $du/dv=۲u^{۲}(۴v^{۳}+۴v^{-۳})$، $u>۰$، $v>۰$؛ به‌ازای $v=۱$، $u=۱$.

۱۹. $dy/dx=x\sqrt{۹y+x^{۲}y}$، به‌ازای $x=۰$، $y=۳۶$.

۲۰. $dy/dx=۲۷\csc^{۲}۲y\sqrt{۹x+۱۶}$، بـه‌ازای $x=۱$، $y=۰$.

۲۱. شتاب گرانش در نزدیکی سطح زمین $32\ \text{ft/sec}^{2}$ است. سنگی با سرعت 96 ft/sec ازسطح زمین در امتداد قائم به‌طرف بالا پرتاب می‌شود. ارتفاع سنگ پس از t ثانیه چقدر است؟ سنگ تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟ (ازمقاومت هوا چشم بپوشید.)

۲۲. فرض کنید ترمزهای یك اتومبیل شتاب ثابت‌منفی $k\ \text{ft/sec}^{2}$ ایجاد می‌کنند.

الف) k چقدر باشد تا اتومبیلی که با سرعت 60 mph (88 ft/sec) حرکت می‌کند پس از طی 100 ft از نقطه‌ای که ترمز گرفته می‌شود بایستد؟

ب) با همین‌مقدار k اتومبیلی که سرعتش 30 mph است چه مسافتی را طی می‌کند تا بایستد؟

۲۳. جسمی که باسرعت ۱۶ ft/sec درحال‌حرکت است ناگهان تحت تأثیرشتاب‌کندشونده‌ای قرار می‌گیرد. شتاب با ریشهٔ دوم سرعت متناسب است. جسم پس از ۴ ثانیه می‌ایستد.

الف) سرعت جسم، ۲ ثانیه پس از اینکه تحت تأثیر شتاب کندشونده قرار می‌گیرد چقدر است؟

ب) جسم پس از طی چه‌مسافتی می‌ایستد؟

۲۴. توابع $f(x)$ و $g(x)$ پیوسته ـ مشتق‌پذیرند و در روابط $f'(x)=g(x)$ و $f''(x)=-f(x)$ صدق می‌کنند. فرض می‌کنیم $h(x)=f^2(x)+g^2(x)$. اگر $h(0)=5$، $h(10)$ را بیابید.

تقریب‌زدن مجموعهای متناهی به‌کمك انتگرال

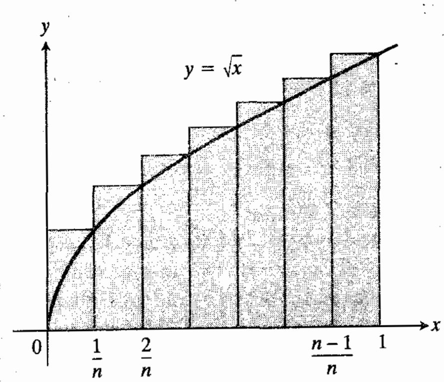
در بسیاری از کاربردهای حساب دیفرانسیل و انتگرال، برعکس روش‌معمول‌استفاده از مجموعهای‌متناهی برای تقریب‌زدن‌انتگرالها، از انتگرالها برای تقریب‌زدن مجموعهای متناهی بهره می‌گیریم. به‌مثال زیر توجه کنید.

مثال مجموع ریشه‌های دوم نخستین n عدد صحیح مثبت $(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n})$ را براورد کنید.

حل: شکل ۳۳.۴ را ببینید. انتگرال

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_0^1=\frac{2}{3}$$

حد مجموعهای زیر است



۳۳.۴ ارتباط‌دادن مستطیلهای محیطی به‌انتگرال $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$، به براورد مجموع

$$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\dots+\sqrt{n}$$

می‌انجامد. مقدمهٔ مسأله‌های ۲۵ــ۲۸ را ببینید.

$$S_n=\sqrt{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{2}{n}}\cdot\frac{1}{n}+\dots+\sqrt{\frac{n}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}}{n^{3/2}}.$$

بنابراین وقتی n بزرگ باشد، S_n به ۲/۳ نزدیك خواهد شد و داریم

$$\text{مجموع ریشه‌های دوم}=\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}$$
$$=S_n\cdot n^{3/2}\approx\frac{2}{3}n^{3/2}.$$

جدول زیر نشان می‌دهد که تقریب حاصل تا چه حد می‌تواند مناسب باشد.

n	مجموع ریشه‌ها	$(2/3)n^{3/2}$	خطای نسبی
۱۰	۲۲٫۴۶۸	۲۱٫۰۸۲	۱٫۳۸۶/۲۲٫۴۶۸ ≈ ٪۶
۵۰	۲۳۹٫۰۴	۲۳۵٫۷۰	٪۱٫۴
۱۰۰	۶۷۱٫۴۶	۶۶۶٫۶۷	٪۰٫۷
۱۰۰۰	۲۱۰۹۷	۲۱۰۸۱	٪۰٫۰۷

■

۲۵. نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^5+2^5+3^5+\dots+n^5}{n^6}$$

برابر با

$$\int_0^1 x^5\,dx$$

است. با محاسبهٔ انتگرال مقدار حد را به‌دست‌آورید.

۲۶. (مسألهٔ ۲۵ را ببینید.) مطلوب است تعیین

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}[1^3+2^3+3^3+\dots+n^3].$$

۲۷. فرض‌کنید $f(x)$ تابعی پیوسته باشد. حد زیر را به صورت يك انتگرال معین بیان کنید

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\dots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right].$$

۲۸. با استفاده از نتیجهٔ مسألهٔ ۲۷ مطلوب است تعیین

الف) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{16}}[1^{15}+2^{15}+3^{15}+\dots+n^{15}]$

ب) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\dots+\sqrt{n}}{n^{3/2}}$

پ)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\dots+\sin\frac{n\pi}{n}\right]$$

دربارهٔ حدهای زیرچه می‌توان گفت؟

ت) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{17}}[1^{15}+2^{15}+3^{15}+\dots+n^{15}]$

ث) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{15}}[1^{15}+2^{15}+3^{15}+\dots+n^{15}]$

۲۹. الف) نشان دهید که A_n، مساحت یك n ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع r چنین است.

$$A_n=\frac{nr^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}.$$

ب) حد A_n را وقتی که $n\to\infty$ بیابید. آیا این جواب با آنچه که دربارهٔ مساحت دایره می‌دانیم سازگار است؟

۳۰. فرض کنید

$$S_n=1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

مجموع نخستین n عدد صحیح باشد.

الف) به‌کمك استقرای ریاضی نشان دهید که

$$S_n^{(2)}=S_1+S_2+\dots+S_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{2\times 3}.$$

ب) به‌کمك استقرای ریاضی نشان دهید که

$$S_n^{(3)}=S_1^{(2)}+S_2^{(2)}+\dots+S_n^{(2)}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2\times 3\times 4}.$$

پ) فرض کنید به‌ازای هر $k>1$ داریم

$$S_n^{(k)}=S_1^{(k-1)}+\dots+S_n^{(k-1)}.$$

فرمولی برای $S_n^{(k)}$ حدس بزنید.

انتگرالهای مسائل ۳۱–۴۲ را حساب کنید.

۳۱. $\int_0^{\pi}\cos 4x\sin 4x\,dx$

۳۲. $\int_1^4\frac{dt}{t\sqrt{2t}}$

۳۳. $\int_{-1}^{0}\frac{12\,dx}{(2-3x)^2}$

۳۴. $\int_{-1}^{1}x\cos(1-x^2)\,dx$

۳۵. $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+3\sin^2 x}}\,dx$

۳۶. $\int_1^2\frac{x^3+1}{x^2}\,dx$

۳۷. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}15\sin^4 3x\cos 3x\,dx$

۳۸. $\int_1^4\frac{(1+\sqrt{u})^{1/2}}{\sqrt{u}}\,du$

۳۹. $\int_0^1\frac{dr}{\sqrt[3]{(7-5r)^2}}$

۴۰. $\int_0^1 t^{1/3}(1+t^{4/3})^{-7}\,dt$

۴۱. $\int_0^1\pi x^2\sec^2(\pi x^3/3)\,dx$

۴۲. $\int_0^{\pi/4}\cot^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$

۴۳. مطلوب است تعیین

$$\int_{-1}^{3}f(x)\,dx$$

با این شرط که

$$f(x)=\begin{cases}3-x & x\leqslant 2\\ x/2 & x>2.\end{cases}$$

۴۴. مساحت محصور بین محور x، خم $y=f(x)$ و خطوط $x=1$ و $x=b$ به‌ازای هر $b>1$ برابر است با $\sqrt{b^2+1}-\sqrt{2}$. $f(x)$ را بیابید.

۴۵. مطلوب است تعیین

الف) $$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\frac{du}{u+\sqrt{u^2+1}}$$

ب) $$\lim_{x\to 2}\left[\frac{x}{x-2}\int_2^x f(t)\,dt\right].$$

۴۶. فرض می‌کنیم رابطهٔ بین x و y چنین است

$$x=\int_0^y \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\,dt\,.$$

نشان‌دهید که d^2y/dx^2 با y متناسب است و ثابت تناسب را بیابید.

۴۷. ثابت کنید که

$$\int_0^x\left(\int_0^u f(t)\,dt\right)du=\int_0^x f(u)(x-u)\,du\,.$$

(راهنمایی: انتگرال طرف راست را به صورت تفاضل دو انتگرال بیان کنید. سپس نشان دهید مشتقهای دوطرف معادلهٔ اصلی نسبت به x برابرند.)

۴۸. نشان دهید که

$$y(x)=\frac{1}{a}\int_0^x f(t)\sin a(x-t)\,dt$$

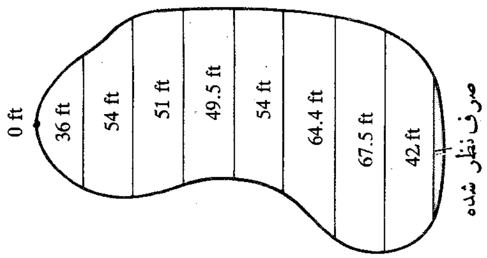
جوابی برای معادلهٔ دیفرانسیل زیر است

$$y''+a^2y=f(x),\quad y(0)=y'(0)=0\,.$$

(راهنمایی:

$$\sin(ax-at)=\sin ax\cos at-\cos ax\sin at.)$$

۴۹. برای ایجاد یك پارکینگ جدید در یك شهر، قطعه‌زمینی که در شکل ۳۴۰۴ دیده می‌شود درنظر گرفته شده‌است. اگر هزینهٔ پاکسازی و اسفالت قطعه‌زمین به‌ترتیب از قرار هر فوت مربع ۱۰ر۰ دلار و ۰۰ر۲ دلار باشد، آیا می‌توان با ۱۱۰۰۰ دلار این قطعه زمین را به‌صورت پارکینگ درآورد؟



۳۴۰۴ محل‌پارکینگ درمسألهٔ ۴۹.

۵۰. ماشین‌حساب تابع خطای

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

را باید به‌طور عددی محاسبه کرد، زیرا عبارت ساده‌ای برای پادمشتق e^{-t^2} وجود ندارد.

الف) به‌کمك قاعدهٔ سیمپسون با ضابطهٔ $n=10$، $\operatorname{erf}(1)$ را براورد کنید.

ب) روی بازهٔ $[0,1]$ داریم

$$\left|\frac{d^4}{dt^4}e^{-t^2}\right|\leqslant 12\,.$$

یك کران بالا برای قدرمطلق خطای براورد درقسمت (الف) به‌دست آورید.

۵

کاربرد انتگرال معین

چشم‌انداز

اهمیت حساب انتگرال ازاین واقعیت ناشی می‌شود که بسیاری از چیزهایی را که مایلیم بدانیم می‌توانیم با انتگرال محاسبه کنیم. مساحت رویه‌های محدود به خمها، حجم اجسام سه‌بعدی، طول خمها، مساحت رویه‌های خمیده، گشتاورهای لختی، جذر میانگین مربع ولتاژها، نیروهای وارد برسدها نمونه‌هایی هستند که همگی را می‌توان به‌طور طبیعی به‌عنوان حد مجموعهای متناهی تعریف کرد. هر یك ازاین مجموعها، مجموع ریمانی تابعی پیوسته است که فرمولش از متنی که درآن محاسبه انجام می‌شود معلوم می‌شود. بنابراین حد هریك ازاین مجموعها وجود دارد ومی‌توان آن را با استفاده از قضیهٔ محاسبهٔ انتگرال به صورت انتگرال معین محاسبه کرد. دراین فصل به‌این مطالب و محاسبات دیگری که مبتنی بر قضایای حساب انتگرال‌اند نظری می‌افکنیم.

بسیاری ازسازه‌ها وسیستمهای مکانیکی موردبحث درمهندسی و فیزیك رفتاری از خود نشان می‌دهند که گویی همهٔ جرمشان در یك نقطه به‌نام مرکز جرم متمرکز است. ما باید بدانیم چگونه محل این نقطه به‌دست می‌آید. این مسأله یك مسألهٔ کاملاً ریاضی است واز راه انتگرالگیری قابل حل است. در بخش ۸.۵، فرمولهای انتگرالی مربوط به‌یافتن مرکزجرم سیمها، میله‌های نازك، ورقه‌های تخت نازك را به‌دست می‌آوریم. در ارائهٔ مطالب فرض براین بوده است که خواننده با مطالب مهندسی یا فیزیکی آشنا نیست و هرجا به این مطالب اشاره شود شرح آنهارا نیز می‌آوریم. یافتن مرکز جرم اجسام سه‌بعدی معمولاً نیاز به انتگرالگیریهای مکرر دارد و ما دراین مورد مجبوریم منتظر بمانیم تا درفصل ۱۸ با چگونگی انجام این محاسبات خاص آشنا شویم.

۱.۵ تغییر خالص مکان، و مسافتی که یك جسم متحرك می‌پیماید.

برای تعیین $s(t)$، تغییرخالص مکان جسمی که روی یك خط از لحظهٔ $t=a$ تالحظهٔ $t=b$ حرکت می‌کند، ازتابع سرعت جسم، $v(t)$، از a تا b انتگرال می‌گیریم. این عمل عکس عملی است که در بخشهای ۸.۱ و ۱.۲ انجام دادیم، درآن دو بخش برای یافتن سرعت از تابع مکان جسم مشتق می‌گرفتیم.

برای یافتن کل مسافت پیموده شده توسط جسمی که روی یك خط به‌عقب وجلو حرکت می‌کند به‌عوض سرعت جسم، $v(t)$، از مقدار سرعت[1]، $|v(t)|$، انتگرال می‌گیریم. این بخش علت درستی این‌کار و روش انجام محاسبات را نشان می‌دهد.

تغییرخالص مکان

اگرجسمی روی خطی حرکت‌کند وسرعتش، $v(t)$، تابعی پیوسته

---

۱. دراین‌کتاب، فقط درمواردی‌که بیم ابهام می‌رود لفظ «مقدار» به‌کلمهٔ «سرعت» اضافه شده و درغیراین موارد، ازمتن معلوم است‌که با بردار سرعت سروکار داریم یا با مقدارسرعت.ـم.

از زمـان باشد، به‌کمك انتگرالگیری می‌توان تابع مکان جسم را که شامل یك ثابت نامشخص C است به‌دست آورد

$$s(t)=\int v(t)\,dt=F(t)+C \qquad (۱)$$

که درآن F پاد مشتقی از v است. برای یافتن تغییرخالص مکان جسم درهر فاصلهٔ زمانی‌خاص از $t=a$ تا $t=b$، $s(a)$ را از $s(b)$ کم می‌کنیم

$$\begin{aligned} s(b)-s(a)&=(F(b)+C)-(F(a)+C)\\ &=F(b)-F(a)\\ &=\int_a^b v(t)\,dt. \end{aligned}$$

بنابراین تغییرخالص مکان جسم برابراست با انتگرال سرعت جسم از a تا b.

$$\text{تغییرخالص مکان} = \int_a^b v(t)\,d(t). \qquad (۲)$$

در فیزیك تغییرخالص مکان را **جا به‌جایی** می‌نامند.

مثال ۱ سرعت جسمی‌که روی یك‌خط حرکت می‌کند چنین‌است

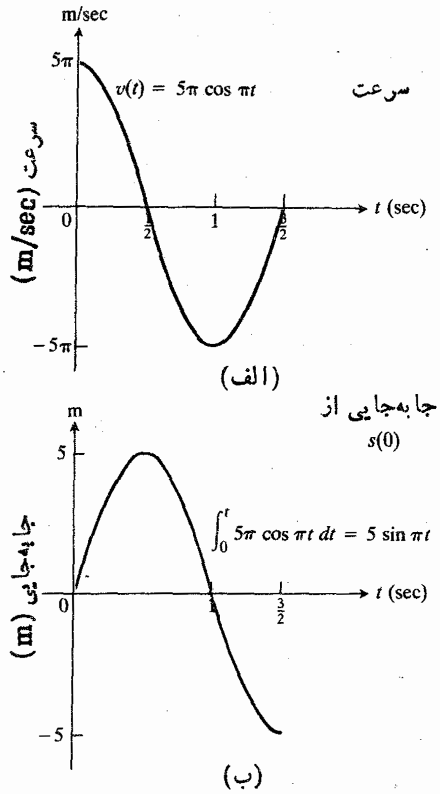
$$v(t)=5\pi\cos\pi t \text{ m/sec}.$$

تغییرخالص مکان جسم را ازلحظهٔ $t=0$ تا **لحظهٔ** $t=3/2$ بیابید.

حل: بنا به‌تساوی (۲) تغییرخالص چنین است

$$\int_0^{3/2} 5\pi\cos\pi t\,dt=5\sin\pi t\Big]_0^{3/2}=5(-1-0)$$
$$=-5.$$

بنابراین حاصل حرکت جسم از $t=0$ تـا $t=3/2$، ۵ متـر جا به‌جایی آن به‌سمت چپ است. شکل ۱.۵ را ببینید. ■



۱۰۵ (الف) سرعت و (ب) جا به‌جایی جسم در مثالهای ۱ و ۲. در ابتدا سرعت و جا به‌جایی نظیرش مثبت‌اند. اما جسم در $t=1/2$ می‌ایستد و سپس به طرف چپ حرکت می‌کند. سرانجام جسم درلحظهٔ $t=3/2$ در فاصلهٔ ۵ متری سمت چپ نقطهٔ شروع قرار می‌گیرد.

توجه کنیدکه برای حل مثال ۱ ضرورتی نداشت $s(t)$ را تعیین‌کنیم. این بینیازی به یافتن $s(t)$ جالب است زیرا براساس اطلاعات مفروض تنها می‌توانیم بگوییم به‌ازای مقدار خاصی از C داریم $s(t)=5\sin\pi t+C$. بـرای تعیین C بـاید s را به‌ازای مقدار خاصی از t بدانیم. البته ندانستن مقدار C اشکالی درمحاسبهٔ تغییرخالص s از $t=0$ تا $t=3/2$ به‌وجودنمی‌آورد، زیرا C ضمن محاسبات حذف می‌شود

$$s\left(\tfrac{3}{2}\right)-s(0)=\left(5\sin\tfrac{3}{2}\pi+C\right)-(5\sin 0+C)$$
$$=5\sin\tfrac{3}{2}\pi=-5.$$

بنابراین حتی اگـر دقیقاً ندانیم‌که ذره درکجا قراردارد، فرمول انتگرال درتساوی (۲) تغییرخالص مکان ذره را به‌دست می‌دهد.

مسافت پیموده شده

اگرجهت حرکت جسمی ضمن حرکتش روی یك خط عوض‌شود، تغییرخالص مکان جسم ازکل مسافتی‌که می‌پیماید کمترخواهد شد. مثلاً اگرجسمی ازمکان اولیه‌اش ۵ متر به‌طرف جلو وسپس ۵ متر به‌طرف عقب حرکت‌کند، تغییرخالص‌مکانش‌صفراست در حالی‌که مسافتی را کـه می‌پیماید ۱۰ متر است. برای محاسبهٔ کل مسافت پیموده شده به‌کمك انتگرال باید به‌گونه‌ای عمل کنیم‌که مسافات پیموده شده درحرکت به‌جلو وعقب همدیگر را خنثی نکنند. بدین منظور از قدرمطلق سرعت از a تا b انتگرال می‌گیریم.

$$\text{(۳)}\qquad \int_a^b |v(t)|\, dt = \text{کل مسافت پیموده شده روی یك خط}$$

مثال ۲ سرعت جسمی که روی یك خط حرکت می‌کند چنین است

$$v(t) = ۵\pi \cos \pi t \text{ m/sec.}$$

کل مسافتی راکه جسم از $t=۰$ تا $t=۳/۲$ می‌پیماید بیابید.

حل: نمودار v را رسم می‌کنیم تامحل تغییر علامت مشخص شود (شکل ۱.۵ الف). بنابه تساوی (۳) داریم

$$\int_۰^{۳/۲} |۵\pi \cos \pi t|\, dt = \text{کل مسافت پیموده شده}$$

$$= \int_۰^{۱/۲} ۵\pi \cos \pi t\, dt + \int_{۱/۲}^{۳/۲} -۵\pi \cos \pi t\, dt$$

$$= ۵ \sin \pi t \Big]_۰^{۱/۲} - ۵ \sin \pi t \Big]_{۱/۲}^{۳/۲}$$

$$= ۵(۱-۰) - ۵(-۱-۱)$$

$$= ۵ + ۱۰$$

$$= ۱۵.$$

جسم ضمن حرکت ۵ متر بـه طرف جلو و ۱۰ متر به طرف عقب می‌رود و درمجموع ۱۵ متر را می‌پیماید. چنانکه درمثال ۱ دیدیم تغییرخالص مکان جسم ۵ مترجابه‌جایی به‌طرف چپ است. ■

مسأله‌ها

در مسائل ۱ـ۸، v سرعت جسمی (برحسب m/sec) است کـه روی یك خـط حرکت می‌کند. (الف) نمودار v را رسم کنید و تعیین‌کنید سرعت در چه قسمتهایی مثبت و در چه قسمتهایی منفـی است. سپس (ب) کل مسافتی را که جسم درفاصلهٔ زمانی مفروض می‌پیماید و (پ) تغییرخالص مکان جسم را بیابید.

۱. $v = ۵\pi \cos \pi t,\quad ۰ \leqslant t \leqslant ۲$

۲. $v = \sin \pi t,\quad ۰ \leqslant t \leqslant ۲$

۳. $v = ۴۹ - ۹{,}۸t,\quad ۰ \leqslant t \leqslant ۱۰$

۴. $v = ۸ - ۱{,}۶t,\quad ۰ \leqslant t \leqslant ۱۰$

۵. $v = ۶(t-۱)(t-۲),\quad ۰ \leqslant t \leqslant ۲$

۶. $v = ۶(t-۱)(t-۲),\quad ۰ \leqslant t \leqslant ۳$

۷. $v = ۶ \sin ۳t,\quad ۰ \leqslant t \leqslant \pi/۲$

۸. $v = ۴ \cos ۲t,\quad ۰ \leqslant t \leqslant \pi$

در مسائل ۹ـ۱۲ سرعت، $v = f(t)$ m/sec، جسمی در فـاصلهٔ زمانی $a \leqslant t \leqslant b$ ومکان اولیهٔ آن، $s(a)$، داده شده‌است. مطلوب است تعیین
الف) مکان $s(t)$ به‌صورت تابعی از t،
ب) کل مسافتی‌که جسم از $t=a$ تـا $t=b$ می‌پیماید، و
پ) تغییرخالص مکان جسم
تغییرخالص درقسمت (پ) را هم به‌کمك انتگرال وهم مستقیماً از فرمول $s(t)$ که درقسمت (الف) به‌دست می‌آید محاسبه‌کنید.

۹. $v = \cos t,\quad ۰ \leqslant t \leqslant ۲\pi,\quad s(۰) = ۰$

۱۰. $v = -\sin t,\quad ۰ \leqslant t \leqslant ۲\pi,\quad s(۰) = ۱$

۱۱. $v = ۵\pi \cos \pi t,\quad ۰ \leqslant t \leqslant ۳/۲,\quad s(۰) = ۵$

۱۲. $v = \sin \pi t,\quad ۰ \leqslant t \leqslant ۳/۲,\quad s(۰) = ۰$

در مسائل ۱۳ـ۱۶، a شتاب جسمی (برحسب متر برمجذور ثانیه یا $\text{m/sec}^۲$) است کـه روی یك خط از لحظهٔ $t=۰$ تـا لحظهٔ $t=۲$ حرکت می‌کند. سرعت جسم‌در $t=۰$، $v(۰)$ است. تغییر خـالص مکان جسم را در ایـن فاصلهٔ زمانی بیابید. (راهنمایی: نخست فرمولی برای $v(t)$ بیابید.)

۱۳. $a = -۴\pi^۲ \cos ۲\pi t,\quad v(۰) = ۲$

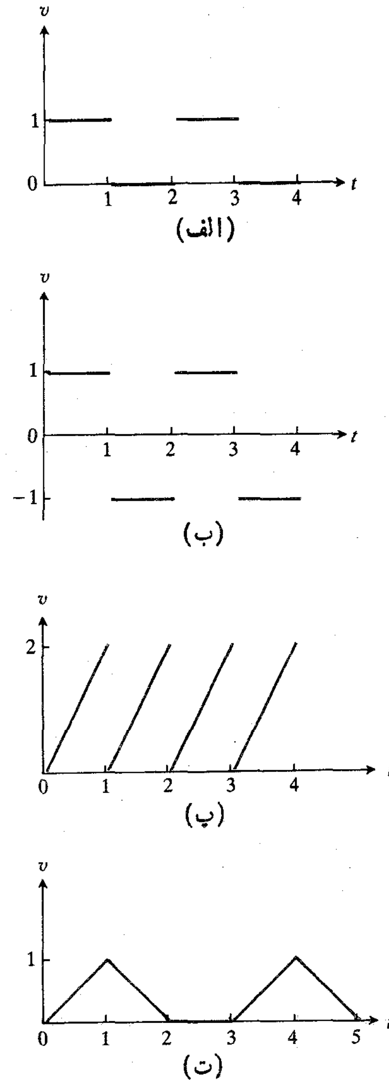
۱۴. $a = ۹{,}۸ + \sin \pi t,\quad v(۰) = ۰$

۱۵. $a = g\ (\text{ثابت}),\quad v(۰) = ۰$

۱۶. $a = \sqrt{۴t+۱},\quad v(۰) = -۱۳/۳$

۱۷. شکل ۲.۵ نمودارهای سرعت چهارجسم را نشان می‌دهدکه درفواصل زمانی گوناگونی روی خطوط راستی حرکت می‌کنند. مطلوب است کل مسافتی که هر جسم می‌پیماید و تغییرخالص مکان آن.

۱۸. **ماشین حساب** جدول۱.۵ سرعت یك اتومبیل را ۱۰ ثانیه به ۱۰ ثانیه از لحظهٔ شروع حرکت تـا ۲ دقیقه پس از آن نشان می‌دهد. مسافتی را کـه اتومبیل می‌پیماید به‌کمك قاعدهٔ سیمپسون بیابید. نتایجی را کـه به‌دست می‌آورید بـا نتایج حاصل از نمودارهای شکل ۸.۰۱ مقایسه‌کنید.



۲۰۵ نمودارهای سرعت در مسألهٔ ۱۷. زمـان برحسب ثانیه و سرعت برحسب متر بر ثانیه‌است.

جدول۱۰۵ سرعت یك اتـومبیل دریك جابه‌جایی ۲ دقیقه‌ای

سرعت (mph)	زمان (sec)	سرعت (mph)	زمان (sec)
۶۶	۷۰	۰	۰
۶۶	۸۰	۳۲	۱۰
۵۸	۹۰	۵۱	۲۰
۴۰	۱۰۰	۵۷	۳۰
۶	۱۱۰	۵۴	۴۰
۰	۱۲۰	۶۴	۵۰
		۶۶	۶۰

TOOLKIT PROGRAMS

Derivative Grapher   Super * Grapher
Integral Evaluator

۲۰۵ مساحت نواحی بین خمها

دراین بخش، نشان می‌دهیم که مساحت نواحی بین خمها درصفحه چگونه محاسبه می‌شود.

فرض می‌کنیم روی $a\leqslant x\leqslant b$، $y=f_1(x)$ و $y=f_2(x)$ پیوسته‌اند و داریم $f_1(x)\geqslant f_2(x)$. به این ترتیب مطابق شکل ۳۰۵ از a تـا b نمودار f_1 بالای نمودار f_2 قرار می‌گیرد. مساحت ناحیهٔ محدود به‌دو نمودار و خطوط قائم $x=a$ و $x=b$ را به‌طریق زیر تعریف می‌کنیم.

نخست بـازهٔ $a\leqslant x\leqslant b$ را بـه n زیـر بـازه بـه طول $\Delta x=(b-a)/n$ تقسیم می‌کنیم. بدین منظور مانند کاری که در تعریف مجموعهای ریمـان در فصل ۴ کردیم، روی بازهٔ نقـاط $a=x_0$، x_1، x_2، . . .، x_{n-1}، $x_n=b$ رامشخص می‌کنیم. سپس ناحیهٔ بین خمها را با مستطیلهای قائم که از یك خم تـا خم دیگر امتداد دارند تقریب می‌زنیم. مطابق شکل ۳۰۵ برای هر زیربازه یك مستطیل درنظرمی گیریم. مساحت یك مستطیل نمونه چنین‌است

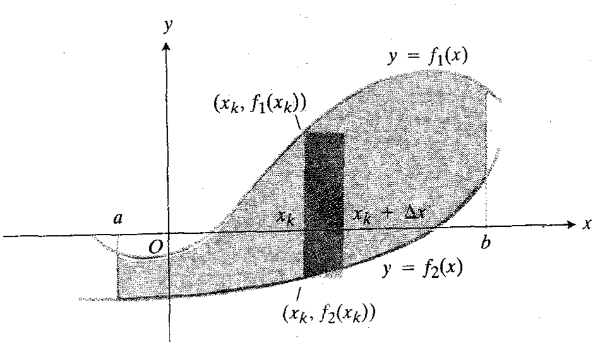
$$(f_1(x_k)-f_2(x_k))\Delta x.$$

مجموع مساحات n مستطیل چنین است

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(f_1(x_k)-f_2(x_k))\Delta x.$$

وقتی که $n\to\infty$، مجموع S_n به‌موجب قضیهٔ وجود انتگرال در بخش ۵۰۴ به‌حد زیرمی گراید

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\int_a^b (f_1(x)-f_2(x))\,dx.$$



۳۰۵ مساحت بین دو خم را می‌توان با جمع‌کردن مساحت نوارهای مستطیلی که از یك خم تا خم دیگرامتداد دارند تقریب زد. مساحت نواری‌کـه در این شکل دیده می‌شود برابراست با $(f_1(x_k)-f_2(x_k))\Delta x$.

این حد، مقداری است که ما آن را مساحت ناحیهٔ بین خمها از a تا b تعریف می‌کنیم.

تعریف

مساحت ناحیهٔ بین دو خم

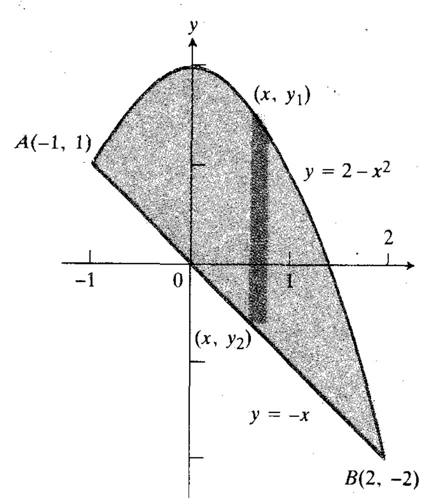
اگر در سراسر بازهٔ $a\leqslant x\leqslant b$ داشته‌باشیم $f_۱(x)\geqslant f_۲(x)$، مساحت ناحیهٔ بین نمودارهای $f_۱$ و $f_۲$ از a تا b برابر است با انتگرال $(f_۱(x)-f_۲(x))$ از a تا b.

$$\text{مساحت} = \int_a^b (f_۱(x)-f_۲(x))\,dx. \qquad (۱)$$

راهی برای به‌خاطرسپردن فرمول تساوی (۱) این است‌که فکر کنیم مساحت نوارهای قائم، $(f_۱(x)-f_۲(x))\,dx$، را در امتداد محور x از $x=a$ تا $x=b$، به کمك انتگرال جمع می‌کنیم. دراین نماد، دیفرانسیل dx نقش دوگانه‌ای ایفا می‌کند، یعنی هم پهنای نوارمستطیلی وهم متغیرانتگرالگیری درانتگرال را نشان می‌دهد.

مثال ۱ مساحت ناحیه‌ای را که از بالا به‌سهمی $y=۲-x^۲$ و از پایین به‌خط $y=-x$ محدود است بیابید.

حل: برای یافتن مساحت، باید نقاط شروع و پایان ناحیه را تعیین‌کنیم. بنابراین سهمی و خط را باهم رسم می‌کنیم (شکل ۴.۵). حدود انتگرالگیری انتگرال مساحت در تساوی (۱) مختصهای x نقاط تقاطع سهمی و خط‌اند. این مختصها را از حل



۴.۵ مساحت ناحیهٔ بین $y=۲-x^۲$ و $y=-x$ را می‌توان باانتگرالگیری از مساحت یك نوار قائم روی بازهٔ از $x=-۱$ تا $x=۲$ به‌دست آورد.

دستگاه معادلات $y=۲-x^۲$ و $y=-x$ نسبت به x به دست می‌آوریم

$$۲-x^۲=-x$$

$$x^۲-x-۲=۰$$

$$(x-۲)(x+۱)=۰$$

$$x=-۱, \qquad x=۲.$$

حدود انتگرالگیری ۱ــ و ۲ هستند.

به‌ازای همهٔ مقادیر x بین ۱ــ و ۲، سهمی $y=۲-x^۲$ بالای خط $y=-x$ قرار دارد. بنابراین در تساوی (۱) باید $f_۱(x)$ را برابر $۲-x^۲$ و $f_۲(x)$ را برابر $-x$ اختیارکنیم

$$\text{مساحت}=\int_{-۱}^{۲}((۲-x^۲)-(-x))\,dx$$

$$=\int_{-۱}^{۲}(۲-x^۲+x)\,dx$$

$$=\left[۲x-\frac{x^۳}{۳}+\frac{x^۲}{۲}\right]_{-۱}^{۲}$$

$$=\left[۴-\frac{۸}{۳}+\frac{۴}{۲}\right]-\left[-۲+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}\right]$$

$$=۶-\frac{۹}{۳}+\frac{۳}{۲}=۳+\frac{۳}{۲}=\frac{۹}{۲}. \qquad \blacksquare$$

گاه چنانکه در مثال بعدی خواهیم دید برای یافتن یك مساحت آسانتراست‌که به‌عوض انتگرالگیری ازمساحت نوارهای قائم روی بازه‌ای واقع برمحور x، از نوارهای افقی روی بازه‌ای واقع برمحور y انتگرال بگیریم.

مثال ۲ مساحت ناحیه‌ای را بیابیدکه از طرف راست به‌خط $y=x-۲$، ازطرف چپ به‌سهمی $x=y^۲$، واز پایین به‌محور x محدود است.

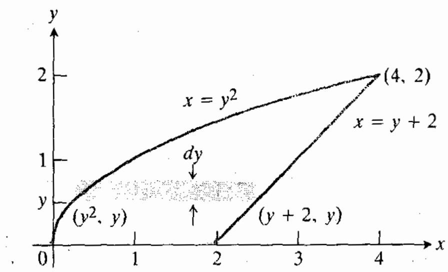
حل: روش ۱. انتگرالگیری نسبت به y. شکل ناحیه را رسم می‌کنیم (شکل ۵.۵). مختصهای y نقاط تقاطع سهمی وخط را می‌توان ازحل دستگاه معادلات $y=x-۲$ و $x=y^۲$ نسبت به y به‌دست آورد. با قراردادن معادلهٔ $x=y^۲$ در $y=x-۲$ چنین به‌دست می‌آید

$$y=y^۲-۲$$

$$y^۲-y-۲=۰$$

$$(y-۲)(y+۱)=۰$$

$$y=۲, \qquad y=-۱.$$



۵.۵ مساحت نوار افقی برابراست با $(y+2-y^2)\,dy=$عرض × طول.

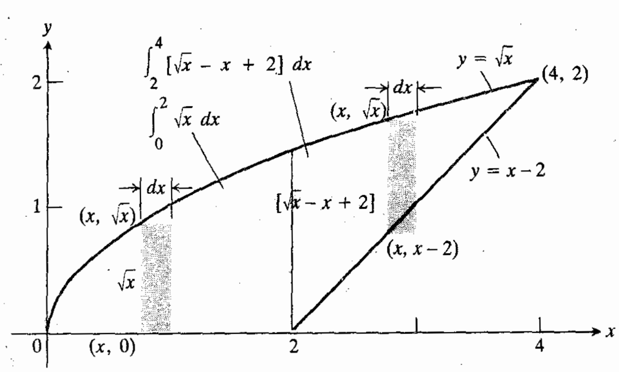
ازاین دوجواب تنها $y=2$، نقطهٔ $(4, 2)$ یعنی نقطهٔ تقاطع واقع در ربع اول راکه ناحیه درآن قراردارد، به‌دست می‌دهد.

حال یك نوارافقی نازك را درنظر می‌گیریم که از سهمی واقع درطرف چپ ناحیه تا خط واقع درطرف راست آن کشیده شده‌است. این‌نوار از نقطهٔ (y^2, y) تانقطهٔ $(y+2, y)$ امتداد دارد. طول نوار $y+2-y^2$ و عرض آن dy است. بنا براین مساحت نوار برابراست با $(y+2-y^2)\,dy$. مساحت ناحیهٔ بین خمها را با انتگرالگیری از $(y+2-y^2)\,dy$ از $y=0$ تا $y=2$ به‌دست می‌آوریم

$$\text{مساحت}=\int_0^2 (y+2-y^2)\,dy=\left[\frac{y^2}{2}+2y-\frac{y^3}{3}\right]_0^2$$

$$=2+4-\frac{8}{3}=\frac{10}{3}.$$

روش ۲. انتگرالگیری نسبت به x (شکل ۶.۵). در این مورد انتگرالگیری نسبت به x به‌آسانی انتگرالگیری نسبت به y نیست زیرا به‌جای یك انتگرال با دو انتگرال سروکار خواهیم داشت. با حرکت دادن یك نوار قائم در سراسرناحیه، از $x=0$ تا $x=4$، فرمول طول‌نوار در $x=2$ عوض می‌شود. طول نوار درسمت چپ $x=2$ برابر با $\sqrt{x}-0=\sqrt{x}$ و درسمت راست



۶.۵ مساحت این ناحیه را می‌توان به‌صورت مجموع دو انتگرال نشان داده شده بیان کرد.

$x=2$ برابر با $\sqrt{x}-(x-2)=\sqrt{x}-x+2$ است. برای یافتن مساحت قسمت چپ نقطهٔ $x=2$، انتگرال $\sqrt{x}$ را از $x=0$ تا $x=2$ محاسبه می‌کنیم. برای یافتن مساحت سمت راست، انتگرال $(\sqrt{x}-x+2)$ را از $x=2$ تا $x=4$ حساب می‌کنیم. سپس برای یافتن مساحت کل ناحیه، نتایج را باهم جمع می‌کنیم

$$\text{مساحت}=\int_0^2 \sqrt{x}\,dx+\int_2^4 (\sqrt{x}-x+2)\,dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^2+\left[\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_2^4$$

$$=\frac{2}{3}(2)^{3/2}+\left(\frac{2}{3}(4)^{3/2}-\frac{16}{2}+8\right)$$

$$-\left(\frac{2}{3}(2)^{3/2}-\frac{4}{2}+4\right)$$

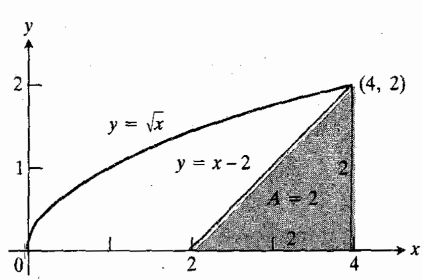
$$=\frac{2}{3}(8)-2$$

$$=\frac{10}{3}.$$

روش ۳. تفریق مساحات (شکل ۷.۵). (این روش به علت شکل هندسی این مسألهٔ خاص سریعترین روش است.) مساحتی که می‌خواهیم حساب کنیم، تفاضل مساحت مثلث با قاعدهٔ ۲ و ارتفاع ۲ است از مساحت ناحیهٔ بین محور x و خم $y=\sqrt{x}$، روی بازهٔ $0\leqslant x\leqslant 4$:

$$\text{مساحت}=\int_0^4 \sqrt{x}\,dx-\frac{1}{2}(2)(2)=\frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_0^4-2$$

$$=\frac{2}{3}(8)-2=\frac{10}{3}.$$



۷.۵ مساحت ناحیهٔ بدون سایه تفاضل مساحت مثلث از مساحت زیر خم $y=\sqrt{x}$ روی بازهٔ $0\leqslant x\leqslant 4$ نیزهست.

مثال ۲ نشان می‌دهد که گاه یافتن مساحت یك ناحیه به‌کمك انتگرالگیری نسبت به y ساده‌تر است تا به کمك انتگرالگیری نسبت به x. بنابراین بهتراست قبلاً ناحیه را بررسی کنیم تا روشن شود کدام روش، در صورتی که هردو روش را بتوان به‌کاربرد، آسانتر است. همان‌طورکه در روش ۳ی مثال بالا دیدیم شکل ناحیه نیزممکن‌است نشان دهد که چگونه از هندسه برای‌ساده کردن محاسبات استفاده کنیم.

مسأله‌ها

در مسائل ۱-۲۴، مساحت ناحیهٔ محصور بین خمها و خطوط داده شده را بیابید.

۱. خم $y=x^2-2$ وخم $y=2$

۲. محور x وخم $y=2x-x^2$

۳. محور y وخم $x=y^2-y^3$

۴. خم $x=y^2$ وخط $x=4$

۵. خم $y=2x-x^2$ وخط $y=-3$

۶. خم $y=x^2$ وخط $y=x$

۷. خم $x=3y-y^2$ وخط $x+y=3$

۸. خمهای $y=x^4-2x^2$ و $y=2x^2$

۹. خم $x=y^2$ وخط $x=y+2$

۱۰. خم $y=x^4$ وخط $y=8x$

۱۱. خمهای $x=y^3$ و $x=y^2$

۱۲. خم $x=y^3$ وخط $y=x$

۱۳. خم $y=x^2-2x$ وخط $y=x$

۱۴. خم $x=10-y^2$ وخط $x=1$

۱۵. خمهای $x=y^2$ و $x=-2y^2+3$

۱۶. خمهای $y=x^2$ و $y=-x^2+4x$

۱۷. خط $y=x$ وخم $y=2-(x-2)^2$

۱۸. خمهای $y=7-2x^2$ و $y=x^2+4$

۱۹. خمهای $y=4-4x^2$ و $y=x^4-1$

۲۰. خمهای $y=x^2/4$ و $y=x^4/16$

۲۱. خم $y=\cos x$ وخط $y=-1$ روی $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$

۲۲. خمهای $y=\cos(\pi x/2)$ و $y=1-x^2$

۲۳. خم $y=\sin(\pi x/2)$ وخط $y=x$

۲۴. خمهای $y=\sec^2 x$، $y=\tan^2 x$ وخطوط $x=-\pi/4$ و $x=\pi/4$

۲۵. مساحت ناحیهٔ «مثلثی» واقع در ربع اول و محصور بین محور y وخمهای $y=\sin x$ و $y=\cos x$ را بیابید.

۲۶. مساحت ناحیهٔ واقع‌در ربع‌اول ومحصور بین $y=\sqrt{4-x}$ و $x=0$ و $y=0$ را بیابید.

۲۷. مساحت ناحیه‌ای را بیابید که از راست به‌خط $x+y=2$، ازچپ به‌خم $y=x^2$، واز پایین به‌محور x محدود است.

۲۸. مساحت ناحیه‌ای را بیابید که از راست به‌خط $y=x-6$، ازچپ به‌خم $y=\sqrt{x}$، واز پایین به‌خط $y=1$ محدود است.

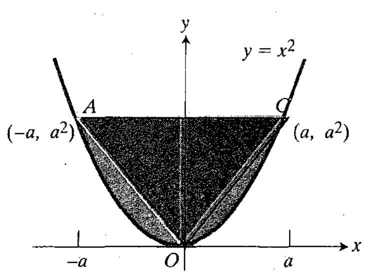
۲۹. مساحت ناحیهٔ بین $y=3-x^2$ و $y=1$ را از طریق (الف) انتگرالگیری نسبت به x و (ب) انتگرالگیری نسبت به y بیابید.

۳۰. مطلوب است مساحت ناحیهٔ محصور بین خم $y=\sin|x|$ و محور x روی بازهٔ $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$.

۳۱. مطلوب است مساحت ناحیهٔ محصور بین $y=\cos x$ و $y=\sin x$ روی بازهٔ $\pi/4\leqslant x\leqslant 5\pi/4$.

۳۲. مساحت ناحیهٔ بین‌خم $y=x^2$ وخط $y=4$ راخط $y=c$ به‌دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.
الف) c را با انتگرالگیری نسبت به y بیابید. (در این روش c یکی از حدود انتگرالگیری می‌شود.)
ب) c را با انتگرالگیری نسبت‌به x بیابید. (دراین روش c درعبارت انتگرالده قرار می گیرد.)

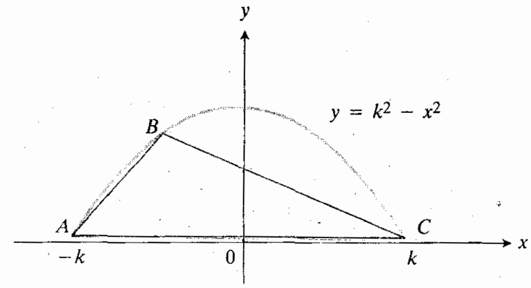
۳۳. درشکل ۸.۵ مثلث AOC دیده می‌شود که در ناحیهٔ سایه‌دار محاط است. این ناحیه از قطع کردن سهمی $y=x^2$ توسط خط $y=a^2$ به‌دست آمده‌است. حد نسبت مساحت مثلث بـه مساحت ناحیهٔ سهموی را وقتی‌که a به‌سمت صفرمیل کند بیابید.



۸.۵ شکل مسألهٔ ۳۳.

۳۴. نشان دهید که مساحت بزرگترین مثلثی که می توان در ناحیهٔ

سهموی شکل ۹.۵ محاط کرد به‌طوری که قاعده‌اش روی محور x و رأسش روی سهمی باشد، سه چهارم مساحت ناحیه است.



۹.۵ مثلث محاطی مسألهٔ ۳۴. رأس B درچه نقطه‌ای باشد تا مساحت $\triangle ABC$ ماکسیمم شود؟ وقتی که رأس B دراین نقطه قرارگرفت مثلث چه بخشی ازناحیهٔ سهموی را اشغال می‌کند؟

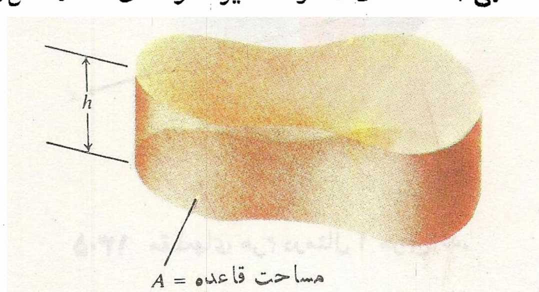
TOOLKIT PROGRAMS
Integral Evaluator   Super * Grapher

۳.۵ محاسبهٔ حجم به‌روش برش دادن. حجم اجسام دورانی

اکنون که می‌توانیم مساحت بسیاری از نواحی مسطح را حساب کنیم، می‌توانیم روش تشکیل مجموعهای ریمان را تعمیم دهیم و حجم اجسامی راکه این نواحی سطح مقطعهای آنها هستند به‌دست آوریم. دراین بخش حجم این اجسام را تعریف می‌کنیم و روش محاسبهٔ آنها را شرح می‌دهیم. همچنین چگونگی محاسبهٔ حجم نوع خاصی از اجسام، به‌نام اجسام دورانی را بررسی می‌کنیم.

روش برش دادن

در وهلهٔ اول‌حجم استوانه‌ای راکه مساحت قاعدهٔ آن A وارتفاعش h است به صورت Ah تعریف می‌کنیم. این تعریف تعمیمی است از فرمول زیر (درهندسهٔ فضایی) در مورد استوانه‌های مستدیر به استوانه‌هایی با قاعده‌های دلخواه، نظیراستوانه‌ای که درشکل ۱۰.۵



۱۰.۵ حجم استوانه‌ای نظیراین استوانه معمولاً به‌صورت Ah تعریف می‌شود.

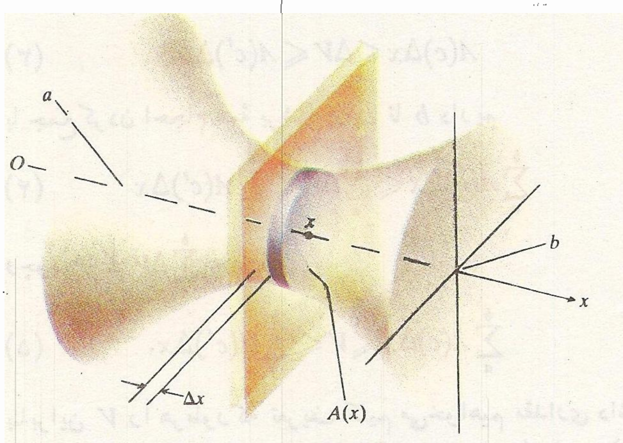
دیده می‌شود.

$$\text{ارتفاع} \times \text{قاعده} = \text{حجم}$$

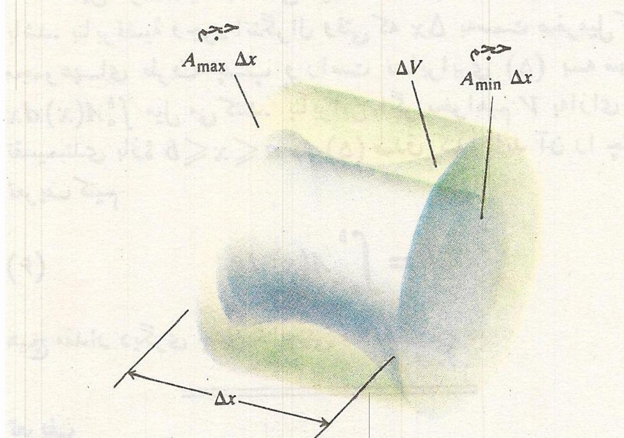
اکنون فرض کنید می‌خواهیم حجم جسمی را محاسبه کنیم که در شکل ۱۱.۵ دیده می‌شود. جسم به صفحاتی محدود است که در a و b برمحور x عمودند وشکلش بین این دو صفحه تغییر می‌کند. بدیهی است که این جسم حجمی دارد، اماچگونه این‌حجم را محاسبه‌کنیم و یا حتی آن را تعریف کنیم؟

فرض می‌کنیم جسم را صفحاتی عمود برمحور x قطع‌کنند و بـه صورت برشهای نازکی به ضخامت Δx درآورند. به‌این ترتیب V، حجم جسم، برابربا مجموع حجمهای این برشها است. اما چگونه می‌توان ΔV، حجم یك برش، را به‌دست آورد؟

هرطورکه ΔV را تعریف کنیم، میل داریم کـه این جسم حداقل برابر $A_{\min}\Delta x$ باشد، یعنی برابر بـا حجم استوانه‌ای که قاعدهٔ آن سطح مقطعی از برش با کمترین مساحت است. درشکل ۱۲.۵ این استوانه همان استوانهٔ کوچك داخل برش‌است. همچنین



۱۱.۵ حجم جسم برابراست با مجموع احجام برشهایی با ضخامت Δx.



۱۲.۵ این جسم کـه بـه‌شکل تـرومپت است بین دواستوانه قراردارد که احجامشان قابل‌محاسبه‌است.

میل داریم ΔV از $A_{\max}\Delta x$ بزرگتر نباشد که این مقدار برابر حجم استوانه‌ای است که قاعدهٔ آن سطح مقطعی از برش با بیشترین مساحت است. این استوانه درشکل ۱۲.۵ استوانهٔ بزرگی است که برش را در بردارد. آنچه ما می‌خواهیم، با استفاده از نماد چنین است

$$A_{\min}\Delta x \leqslant \Delta V \leqslant A_{\max}\Delta x\,. \qquad (۱)$$

حجم کوچکترین استوانه — حجم بزرگترین استوانه

اگرمساحت سطح مقطع جسم در حالت عمود برمحور x تابعی پیوسته چون $A(x)$ باشد، مقدار آن در بازهٔ $[x,\,x+\Delta x]$ در نقطه‌ای چون c مینیمم و در نقطه‌ای چون c' ماکسیمم است. یعنی

$$A_{\min}\Delta x = A(c)\Delta x,\quad A_{\max}\Delta x = A(c')\Delta x. \qquad (۲)$$

با این جانشانیها رابطهٔ (۱) چنین می‌شود

$$A(c)\Delta x \leqslant \Delta V \leqslant A(c')\Delta x. \qquad (۳)$$

با جمع کردن احجام همهٔ برشها از a تا b داریم

$$\sum_a^b A(c)\Delta x \leqslant \sum_a^b \Delta V \leqslant \sum_a^b A(c')\Delta x \qquad (۴)$$

وچون $\sum_a^b \Delta V = V$ ، داریم

$$\sum_a^b A(c)\Delta x \leqslant V \leqslant \sum_a^b A(c')\Delta x. \qquad (۵)$$

بنابراین V را هرطورکه تعریف کنیم می‌خواهیم مقداری داشته باشد که به‌ازای هرتقسیمبندی بازهٔ $a\leqslant x\leqslant b$ در نابرابری (۵) صدق کند.

این شرط دقیقاً به‌ما می‌گوید که V چه مقداری باید داشته باشد. بنابرقضیهٔ وجود انتگرال وقتی‌که Δx به‌سمت صفرمیل کند مجموعهای طرف چپ و راست نابرابری (۵) به سوی $\int_a^b A(x)\,dx$ میل می‌کنند. بنابراین اگر بخواهیم V به‌ازای هر تقسیمبندی بازهٔ $a\leqslant x\leqslant b$ در (۵) صدق کند، باید آن را چنین تعریف کنیم

$$V = \int_a^b A(x)\,dx. \qquad (۶)$$

هیچ مقدار دیگری چنین خاصیتی را ندارد.

تعریف

حجم جسمی که مساحت سطح مقطع آن $A(x)$ است از $x=a$ تا $x=b$ چنین به‌دست می‌آید

$$\text{حجم} = \int_a^b A(x)\,dx. \qquad (۶)$$

برای استفاده از این تعریف مادام که انتگرال وجود دارد لازم نیست که $A(x)$ پیوسته باشد.

مراحل عملی لازم برای محاسبهٔ حجم اجسام به‌کمك تساوی (۶) اینها هستند.

مرحلهٔ ۱: شکل جسم و یك سطح مقطع نمونهٔ آن را می‌کشیم.

مرحلهٔ ۲: $A(x)$ را می‌یابیم.

مرحلهٔ ۳: حدود انتگرالگیری را تعیین می‌کنیم.

مرحلهٔ ۴: انتگرال می‌گیریم.

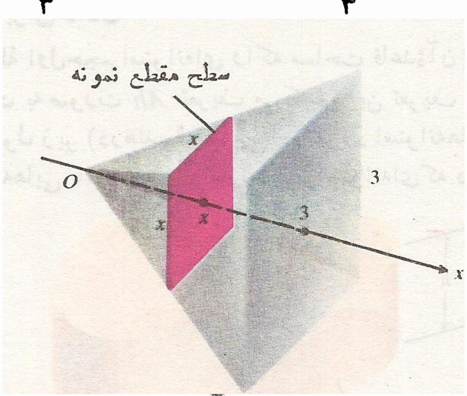
مثال ۱ قاعدهٔ هرمی به‌ارتفاع ۳ متر، مربعی است به‌ضلع ۳ متر. سطح مقطعی از هرم که عمود بر ارتفاع است و x واحد از رأس هرم فاصله دارد مربعی است به‌ضلع x واحد. حجم هرم را بیابید.

حل: هرم را چنان رسم می‌کنیم که ارتفاعش برمحور x و رأسش برمبدأ منطبق باشد. سپس یك سطح مقطع نمونه را می‌کشیم (شکل ۱۳.۵). چون سطح مقطع مربعی به ضلع x متر است، مساحتش برابر است با $A(x)=x^۲$. حجم هرم برابر است با انتگرال $A(x)$ از $x=۰$ تا $x=۳$.

$$\text{حجم} = \int_۰^۳ A(x)\,dx = \int_۰^۳ x^۲\,dx = \frac{x^۳}{۳}\Big]_۰^۳ = ۹\,.$$

حجم برابر $۹\ \mathrm{m}^۳$ است که با مقدار زیر که از فرمول حجم هرم درهندسهٔ فضایی به‌دست می‌آید یکی است.

$$V = \frac{۱}{۳}(\text{مساحت قاعده})(\text{ارتفاع}) = \frac{۱}{۳}(۹)(۳) = ۹\,.$$



۱۳.۵ مقطعهای هرم درمثال ۱ مربع‌اند.

مثال ۲ ازاستوانهٔ مستدیرقائمی به‌شعاع r به‌وسیلهٔ دوصفحه، گوهٔ خمیده‌ای می‌بریم. یکی از صفحات برمحوراستوانه عمود است و

دیگری با اولی زاویه حادهٔ α می‌سازد و آن را در مرکز استوانه قطع می‌کند. حجم گوه را بیابید.

راه حل ۱: مقطعهای عمود بر محور y. گوه و یك مقطع نمونهٔ عمود برمحور y را رسم می‌کنیم (شکل ۱۴.۵). سطح مقطع مثلثی است با مساحت

$$A=\frac{۱}{۲}xh.$$

برای اینکه A را برحسب y بیان کنیم، از رابطهٔ مثلثاتی

$$h=x\tan\alpha$$

و رابطهٔ زیر (قضیهٔ فیثاغورس) استفاده می‌کنیم

$$x^۲=r^۲-y^۲.$$

بنابراین داریم

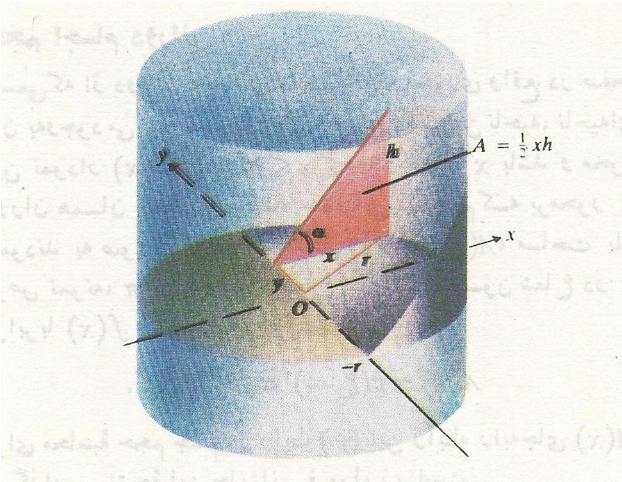
$$A(y)=\frac{۱}{۲}xh=\frac{۱}{۲}x(x\tan\alpha)=\frac{۱}{۲}(r^۲-y^۲)\tan\alpha.$$

حجم گوه برابراست با انتگرال $A(y)$ از $-r$ تا r.

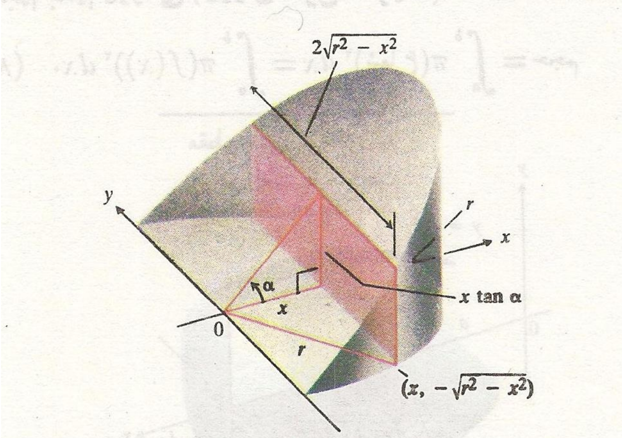
$$\begin{aligned}V=\int_{-r}^{r}A(y)\,dy&=\frac{۱}{۲}\tan\alpha\int_{-r}^{r}(r^۲-y^۲)\,dy\\&=\frac{۱}{۲}\tan\alpha\left[r^۲y-\frac{y^۳}{۳}\right]_{y=-r}^{y=r}\\&=\frac{۱}{۲}\tan\alpha\left[\left(r^۳-\frac{r^۳}{۳}\right)-\left(-r^۳+\frac{r^۳}{۳}\right)\right]\\&=\frac{۱}{۲}\tan\alpha\left[\frac{۲}{۳}r^۳+\frac{۲}{۳}r^۳\right]\\&=\frac{۲}{۳}r^۳\tan\alpha.\end{aligned}$$

راه حل ۲: مقطعهای عمود برمحور x. در راه‌حل ۱، استفاده از مقطعهای عمود برمحور y اختیاری بود. اگر از مقطعهای عمود برمحور x استفاده کنیم نتایجی به‌دست می‌آوریم که به‌همان اندازهٔ راه‌حل ۱ مناسب‌اند (شکل ۱۵.۵). این مقاطع مستطیل‌اند و مساحت آنها چنین به‌دست می‌آید

$$A(x)=(\text{ارتفاع})(\text{پهنا})=(x\tan\alpha)(۲\sqrt{r^۲-x^۲}).$$



۱۴.۵ گوهٔ خمیده را می‌توان به‌صورت برشهای مثلثی برید.



۱۵.۵ وقتی گوهٔ مثال ۲ را درجهت عمود بر محور x برش دهیم، مقاطع، مستطیل‌اند.

حجم گوه برابر است با انتگرال $A(x)$ از $x=۰$ تا $x=r$:

$$\text{حجم}=\int_{۰}^{r}A(x)\,dx=۲\tan\alpha\int_{۰}^{r}x\sqrt{r^۲-x^۲}\,dx. \quad (۷)$$

برای محاسبهٔ انتگرال، ازجانشانیهای زیر استفاده می‌کنیم

$$u^۲=r^۲-x^۲,\qquad -u\,du=x\,dx.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\text{حجم}&=۲\tan\alpha\int_{r}^{۰}-u\sqrt{u^۲}\,du\\&=۲\tan\alpha\int_{۰}^{r}u^۲\,du\qquad (u\geqslant ۰ \text{ زیرا } \sqrt{u^۲}=u)\\&=۲\tan\alpha\left.\frac{u^۳}{۳}\right]_{۰}^{r}\\&=\frac{۲}{۳}r^۳\tan\alpha.\end{aligned}$$

■

حجم اجسام دورانی

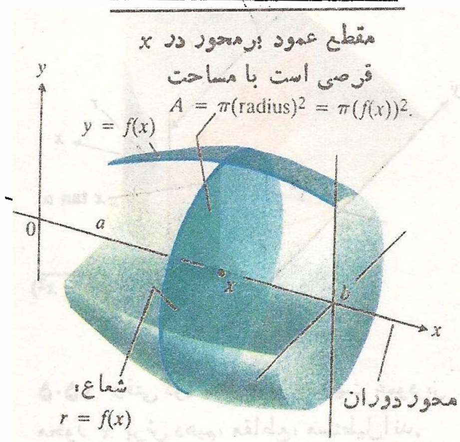
جسمی‌که از دوران ناحیه‌ای مسطح حول محوری واقع در صفحهٔ آن به‌وجود می‌آید جسم دورانی نام‌دارد. اگراین ناحیه، ناحیه‌ای بین نمودار $y=f(x)$، $a\leqslant x\leqslant b$، و محور x باشد و محور دوران همان محور x باشد، مقطعهایی از جسم‌که برمحور x عمودند به صورت قرص‌اند (شکل ۱۶.۵). $A(x)$، مساحت یك قرص نمونه، π برابرمجذور شعاع آن است. چون شعاع در x برابر با $f(x)$ است داریم

$$A(x)=\pi(\text{شعاع})^{۲}=\pi(f(x))^{۲}.$$

برای محاسبهٔ حجم جسم در رابطهٔ (۶) این رابطه رابه‌جای $A(x)$ می‌گذاریم. نتیجهٔ این جانشانی فرمول زیراست.

حجم جسم دورانی (دوران حول محور x)

$$\text{حجم}=\int_a^b \pi(\text{شعاع})^{۲}\,dx=\int_a^b \pi(f(x))^{۲}\,dx. \quad (۸)$$



۱۶.۵ جسمی که از دوران ناحیه محدود به $y=f(x)$، محور x وخطوط $x=a$ و $x=b$ حول محور x به‌دست می‌آید.

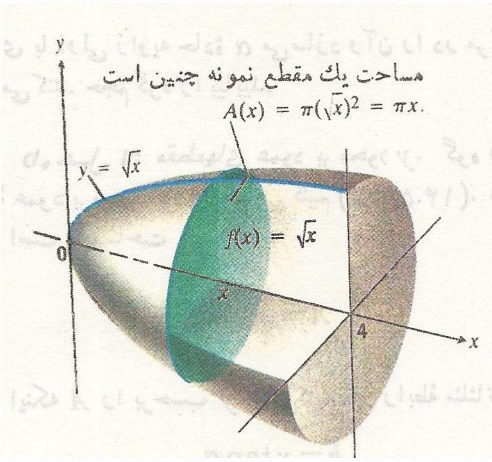
مثال ۳ خم $y=\sqrt{x}$، $0\leqslant x\leqslant ۴$ حول محور x دوران می‌کند وجسم شکل ۱۷.۵ را به‌وجود می‌آورد. حجم این جسم را بیابید.

حل: شعاع قرص مقطع در x برابراست با $\sqrt{x}$. بنا براین حجم جسم چنین به‌دست می‌آید

$$\text{حجم}=\int_a^b \pi(\text{شعاع})^{۲}\,dx=\int_0^{۴} \pi(\sqrt{x})^{۲}\,dx$$

$$=\pi\int_0^{۴} x\,dx$$

$$=\pi\frac{x^{۲}}{۲}\Big]_0^{۴}=۸\pi.$$



۱۷.۵ برشی عمود برمحور جسم دورانی درمثال۳.

مثال ۴ نیمدایرهٔ $y=\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}$ حول محور x دوران می‌کند و یك کره به‌دست می‌آید. حجم این کره را بیابید.

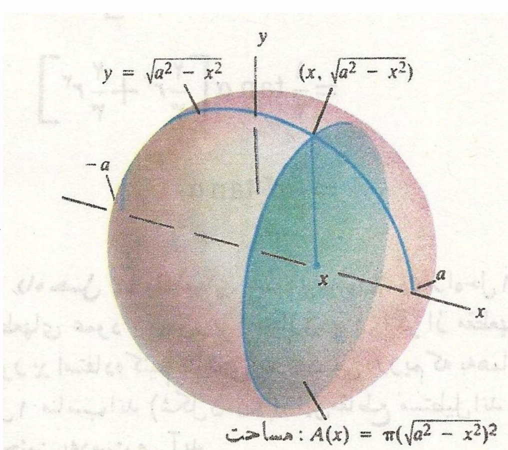
حل: کره و یك قرص مقطع نمونه را رسم می‌کنیم (شکل ۱۸.۵). شعاع قرص برابراست با $y=\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}$. بنابراین حجم کره چنین به‌دست می‌آید

$$\text{حجم}=\int_{-a}^{a} \pi(\text{شعاع})^{۲}\,dx$$

$$=\int_{-a}^{a} \pi(\sqrt{a^{۲}-x^{۲}})^{۲}\,dx$$

$$=\pi\int_{-a}^{a}(a^{۲}-x^{۲})\,dx=\pi\left[a^{۲}x-\frac{x^{۳}}{۳}\right]_{-a}^{a}=\frac{۴}{۳}\pi a^{۳}.$$

این نتیجه نیزمانند مثال۱ با فرمول حجم مربوطه درهندسهٔ فضایی مطابقت دارد.



۱۸.۵ این کره از دوران نیمدایرهٔ $y=\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}$ حول محور x به‌وجود می‌آید.

مثال ۵ حجم جسمی را که از دوران ناحیهٔ محدود به $y=\sqrt{x}$ و خطوط $y=1$ و $x=4$ حول خط $y=1$ به‌وجود می‌آید بیابید.

حل: شکل جسم و یک مقطع نمونه را رسم می‌کنیم (شکل ۱۹.۵). مساحت سطح مقطع در x چنین است

$$A(x)=\pi(\text{شعاع})^2=\pi(\sqrt{x}-1)^2.$$

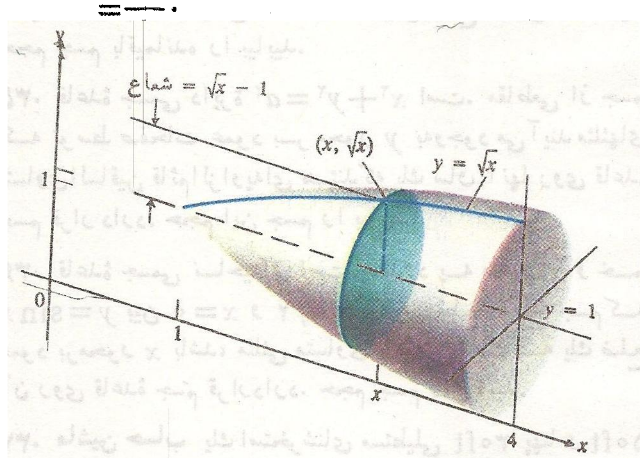
حجم جسم برابر است با انتگرال A از $x=1$ تا $x=4$

$$\text{حجم}=\int_1^4 \pi(\text{شعاع})^2\,dx=\int_1^4 \pi(\sqrt{x}-1)^2\,dx$$

$$=\pi\int_1^4 (x-2\sqrt{x}+1)\,dx$$

$$=\pi\left[\frac{x^2}{2}-\frac{4}{3}x^{3/2}+x\right]_1^4$$

$$=\frac{7\pi}{\ }.$$



۱۹.۵ این جسم از دوران ناحیهٔ محدود به $y=\sqrt{x}$، $x=4$، و $y=1$ حول خط $y=1$ به‌وجود می‌آید. ■

مسأله‌ها

حجم اجسام دورانی

درمسائل ۱–۱۰، حجم اجسامی را تعیین کنید که از دوران نواحی محدود به‌خطوط و خمهای داده شده حول محور x به‌وجود می‌آیند.

۱. $x+y=2,\ x=0,\ y=0$

۲. $y=\sin x,\ y=0,\ 0\leqslant x\leqslant \pi$

۳. $y=x-x^2,\ y=0$

۴. $y=-3x-x^2,\ y=0$

۵. $y=x^2-2x,\ y=0$

۶. $y=x^3,\ x=2,\ y=0$

۷. $y=x^4,\ x=1,\ y=0$

۸. $y=\sqrt{\cos x},\ 0\leqslant x\leqslant \pi/2,\ x=0,\ y=0$

۹. $y=\sec x,\ x=-\pi/4\ \ x=\pi/4,\ y=0$

۱۰. $y=x^3+1,\ x=2,\ y=0$

درمسائل ۱۱–۱۶، حجم اجسامی را تعیین کنید که از دوران نواحی محدود به‌خطوط و خمهای داده شده حول محور y به‌وجود می‌آیند.

۱۱. $y=x/2,\ x=0,\ y=2$

۱۲. $x=\sqrt{4-y},\ x=0,\ y=0$

۱۳. $x=1-y^2,\ x=0$

۱۴. $x=y^{3/2},\ x=0,\ y=3$

۱۵. $xy=1,\ x=0,\ y=1,\ y=2$

۱۶. $x=2/(y+1),\ x=0,\ y=0,\ y=1$

۱۷. حجم جسمی را که از دوران طاق $y=2\sin 2x$، $0\leqslant x\leqslant \pi/2$ حول محور x به‌دست می‌آید تعیین کنید.

۱۸. مطلوب است حجم جسمی که از دوران ناحیهٔ واقع در ربع اول و محدود به $y=\tan x$ و خط $x=\pi/3$ حول محور x به‌وجود می‌آید.

۱۹. مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ محدود به $y=\sqrt{x}$ وخطوط $y=2$ و $x=0$ حول

الف) محور x

ب) خط $y=2$.

۲۰. ناحیه‌ای از بالا به‌سهمی $y=3-x^2$ و از پایین به خط $y=-1$ محدود است. حجم جسمی را که از دوران این ناحیه حول خط $y=-1$ به‌وجود می‌آید بیابید.

۲۱. حجم جسمی را بیابید که از دوران ناحیهٔ محدود به خم $y=x^2$، خط $y=1$، و محور y حول خط $y=1$ به‌وجود می‌آید.

۲۲. مطلوب است حجم جسمی که از دوران ناحیهٔ محدود به $y=x^{3/2}$، محور x، و خط $x=1$ حول خط $x=1$ به‌وجود می‌آید.

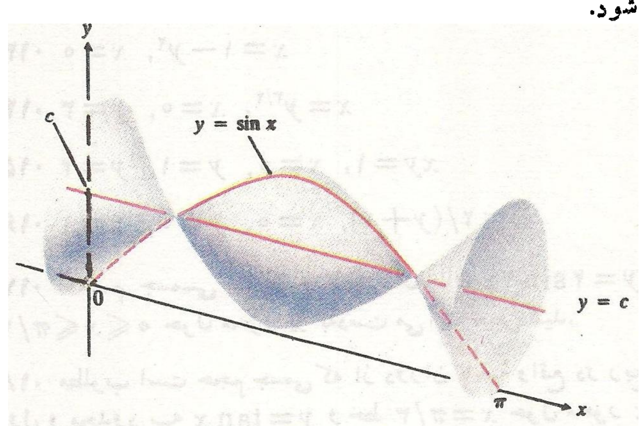
۲۳. حجم جسمی را بیابید که از دوران ناحیهٔ محدود به $y=\cos x$، $-\pi\leqslant x\leqslant \pi$، وخط $y=-1$ حول خط $y=-1$ به‌وجود می‌آید.

۲۴. حجم جسمی را بیابید که از دوران ناحیهٔ محدود به $y = x^{2/3}$، محور x، وخط $x = 1$ حول خط $x = 1$ به‌وجود می‌آید.

۲۵. ناحیه‌ای از پایین به سهمی $y = 3x^2 + 1$ و از بالا به‌خط $y = 4$ محدود است. حجم جسمی را که از دوران این ناحیه حول خط $y = 4$ به‌وجود می‌آید تعیین کنید.

۲۶. حجم جسمی را بیابید که از دوران ناحیهٔ محدود به $y = \sin x$ وخطوط $x = 0$، $x = \pi$، و $y = 2$ حول خط $y = 2$ به‌وجود می‌آید.

۲۷. طاق $y = \sin x$، $0 \leqslant x \leqslant \pi$ حول خط $y = c$ دوران می‌کند و جسمی را به وجود می‌آورد که در شکل ۲۰.۵ دیده می‌شود. مقدار c راچنان بیابید که حجم جسم به‌وجودآمده مینیمم شود.



۲۰.۵ درمسألهٔ ۲۷ خواسته شده که c را چنان بیابید که این حجم مینیمم شود.

۲۸. به‌کمك انتگرالگیری حجم جسمی را بیابید که از دوران مثلثی به‌رئوس $(0, 0)$، $(h, 0)$، (h, r) حول
الف) محور x
ب) محور y
به‌وجود می‌آید.

۲۹. الف) کاسه‌ای به‌شکل یك نیمکره به‌شعاع a است. این کاسه تا ارتفاع h آب دارد. حجم آب درون کاسه را بیابید.
ب) (آهنگهای وابسته) آب به درون کاسه‌ای که به‌شکل نیمکره‌ای به شعاع 5 ft است با آهنگ $0.2\ \mathrm{ft^3/sec}$ می‌ریزد. سرعت افزایش سطح آب را در کاسه وقتی که ارتفاع آب آن 4 ft است بیابید.

۳۰. یك توپ فوتبال امریکایی حجمی دارد که تقریباً برابرحجم جسمی است که‌ازدوران ناحیهٔ‌محدود به بیضی $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ (a و b ثابت‌اند) حول محور x به وجود می‌آید. حجم توپ را بیابید.

سایرحجمها

۳۱. رأس هرمی درمبدأ قراردارد وقاعدهٔ آن در $x = 4$ برمحور x عمود است. مقطعهایی از هرم که عمود برمحور xاند، مربعهایی هستند که قطرهایشان ازخم $y = -5x^2$ شروع و به‌خم $y = 5x^2$ ختم می‌شوند. حجم هرم را بیابید.

۳۲. صفحاتی عمود برمحور x جسمی را قطع می‌کنند و مقاطعی دایره‌ای به‌وجود می‌آورند که قطرهایشان ازخم $y = x^2$ تا خط $y = 8 - x^2$ امتداد دارند. جسم بین نقاط تقاطع این دوخم قرار دارد. حجم آن را بیابید.

۳۳. قاعدهٔ جسمی دایرهٔ $x^2 + y^2 = a^2$ است. مقاطعی از جسم که توسط صفحات عمودبرمحور x ایجاد می‌شوند مربعهایی هستند که یك ضلع آنها درقاعدهٔ جسم قرار دارد. حجم جسم را بیابید.

۳۴. برروی کره‌ای به‌شعاع a دو دایرهٔ عظیمه واقع در دوصفحهٔ عمود برهم را مشخص می‌کنیم. بخشی ازکره را چنان می‌تراشیم که هرمقطع مسطحی از جسم باقیمانده که عمود برقطر مشترك دو دایرهٔ عظیمه باشد، مربعی باشد با رئوس واقع براین دو دایره. حجم جسم باقیمانده را بیابید.

۳۵. قاعدهٔ جسمی دایرهٔ $x^2 + y^2 = a^2$ است. مقاطعی از جسم که توسط صفحات عمود بر محور y به‌وجود می‌آیند مثلثهای متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه‌ای هستند که یك ساق آنها روی قاعدهٔ جسم قرار دارد. حجم این جسم را بیابید.

۳۶. قاعدهٔ جسمی ناحیه‌ای است محدود به محور x و خم $y = \sin x$ بین $x = 0$ و $x = \pi/2$. هرمقطع مسطح جسم که عمود برمحور x باشد، مثلثی متساوی‌الاضلاع است که یك ضلع آن روی قاعدهٔ جسم قراردارد. حجم جسم را بیابید.

۳۷. **ماشین حساب** یك استخرشنای مستطیلی 30ft پهنا و 50ft درازا دارد. جدول زیرعمق h (برحسب ft) آب را درفاصلهٔ x فوتی از یك سراستخر ۵ فوت به‌دست می‌دهد.

x(ft)	h(ft)	x(ft)	h(ft)
۰	۶٫۰	۳۰	۱۱٫۵
۵	۸٫۲	۳۵	۱۱٫۹
۱۰	۹٫۱	۴۰	۱۲٫۳
۱۵	۹٫۹	۴۵	۱۲٫۷
۲۰	۱۰٫۵	۵۰	۱۳٫۰
۲۵	۱۱٫۰		

به‌کمك قاعدهٔ ذوزنقه‌ای حجم آب درون استخررا براوردکنید.

۴.۵ محاسبهٔ حجم بـه‌کمك واشرهـا و پوسته‌هـای استوانه‌ای

در بخش پیش حجم اجسام دورانیی را بـه دست آوردیـم کـه می‌توانستیم آنها را به قرصهای عمود برمحور دوران تقسیم کنیم. اما همهٔ اجسام دورانی را نمی‌توان چنین تقسیم کرد؛ ودر مواردی که نتوان این‌کار را انجام داد، از دو روشی که دراین بخش عرضه می‌شود بهره می‌گیریم. دراین روشها ابتدا ناحیه‌ای را کـه قرار است دوران کند با نوارهای مستطیلی باریکی می‌پوشانیم، سپس حجم شکلهای حاصل از دوران این نوارها را جمع می‌کنیم. اگر نوارها برمحور دوران عمود باشند، شکلهای حاصل از دوران بـه شکل واشرند. اگر نوارها بـا محور دوران موازی باشند، اشکال حاصل از دوران به‌شکل پوسته‌های استوانه‌ای‌اند. درهردوحالت، مجموع حجمهای اجسام حاصل از دوران نوارها مجموع ریمانی متناظر با انتگرالی‌است که مقدار آن برابرحجم جسم دورانی‌است. حال فرمول این انتگرالها را می‌یابیم و چگونگی کاربردشان را تشریح می‌کنیم.

واشرها

مطلب را با مثالی آغاز می‌کنیم.

مثال ۱ ناحیهٔ محدود به‌خم $y=x^۲+۱$ و خط $y=-x+۳$ حول محور x دوران می‌کند و جسمی را ایجاد می‌کند که درشکل ۲۱.۵ دیده می‌شود. حجم این جسم را بیابید.

حل: با دوران این ناحیه حول محور x، نوار قائمی کـه پهنای آن Δx است و درشکل ۲۱.۵ (الف) دیده می‌شود دوران می‌کند و واشرشکل ۲۱.۵ (ب) را به‌وجود می‌آورد. واشر قرص نازکی است که سوراخی درمیان دارد. حجم واشر برابراست بـا حاصلضرب مساحت رویهٔ آن، $A(x)$، درضخامتش، Δx.

مساحت قرص: $\pi(\text{شعاع خارجی})^۲=\pi(-x+۳)^۲$

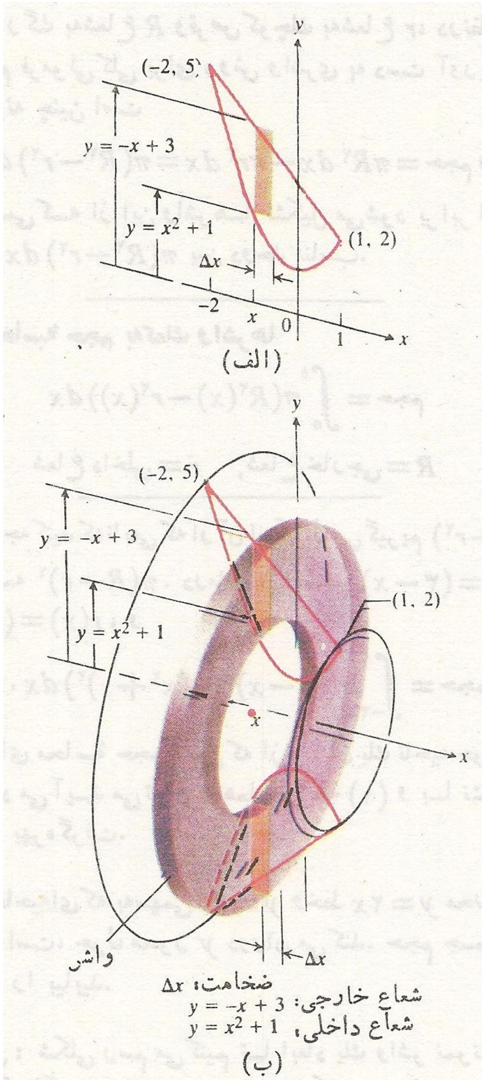
مساحت سوراخ: $\pi(\text{شعاع داخلی})^۲=\pi(x^۲+۱)^۲$

مساحت واشر: $A(x)=\pi(-x+۳)^۲-\pi(x^۲+۱)^۲$

$$=\pi(۸-۶x-x^۲-x^۴)$$

حجم واشر: $A(x)\Delta x=$ ضخامت $\times$ مساحت رویه

حجم جسم حاصل‌از دوران ناحیه رابا جمع‌کردن حجمهای همهٔ واشرها از $x=-۲$ تا $x=۱$ تقریب می‌زنیم. سپس برای به‌دست‌آوردن حجم جسم، حد مجموع حجمهای واشرها را وقتی



(ب)

۲۱.۵ وقتی‌که ناحیهٔ محدود به‌خط $y=-x+۳$ وسهمی $y=x^۲+۱$ درقسمت (الف) دوران کند جسم قسمت (ب) به‌وجود می‌آید. از دوران نوار سایه‌دار یك واشر بـه وجود می‌آید کـه شعاع خارجی‌اش $y=-x+۳$ وشعاع داخلی‌اش $y=x^۲+۱$ است.

که Δx به‌سمت صفرمیل کند حساب می‌کنیم

$$\text{حجم}=\lim\sum_{-۲}^{۱}\pi(۸-۶x-x^۲-x^۴)\Delta x$$

$$=\int_{-۲}^{۱}\pi(۸-۶x-x^۲-x^۴)\,dx$$

$$=\pi\left[۸x-۳x^۲-\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۵}{۵}\right]_{-۲}^{۱}=\frac{۱۱۷\pi}{۵}\,. \quad ■$$

اگـر یك واشرنمونه را تفاضل دو قرص به ضخامت dx،

قرص بزرگ به‌شعاع R وقرص کوچك به‌شعاع r، درنظر بگیریم می‌توانیم فرمولی کلی برای روش واشری به دست آوریم. حجم واشرنمونه چنین است

$$\text{حجم واشر} = \pi R^2\,dx - \pi r^2\,dx = \pi(R^2 - r^2)\,dx.$$

حجم جسمی که از این واشرها تشکیل می‌شود برابر است با انتگرال $\pi(R^2-r^2)\,dx$ بین دوحد مناسب.

فرمول محاسبهٔ حجم به‌کمك واشرها

$$\text{حجم} = \int_a^b \pi\left(R^2(x) - r^2(x)\right)dx \qquad (1)$$

$R =$ شعاع خارجی , $r =$ شعاع داخلی

توجه کنید که تابعی که از آن انتگرال می‌گیریم $\pi(R^2-r^2)$ است و نه $\pi(R-r)^2$. درمثال ۱ داشتیم $R(x)=(3-x)$، $r(x)=(x^2+1)$، و

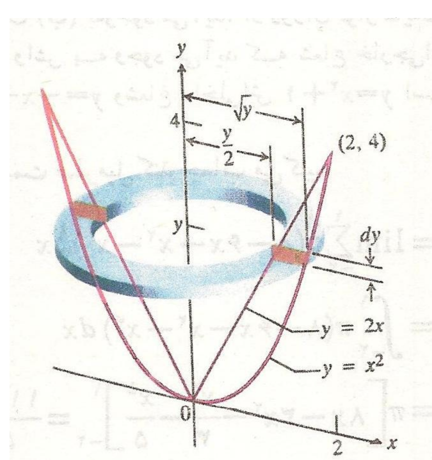
$$\text{حجم} = \int_{-2}^{1} \pi\left((3-x)^2-(x^2+1)^2\right)dx.$$

برای محاسبهٔ حجم‌جسمی که از دوران یك ناحیه حول‌محور y به‌وجود می‌آید می‌توان ازهمان رابطهٔ (۱) و با نشاندن y به‌جای x بهره گرفت.

مثال ۲ ناحیه‌ای که به‌سهمی $y=x^2$ وخط $y=2x$ محدود ودر ربع اول است، حول محور y دوران می‌کند. حجم جسم حاصل از دوران را بیابید.

حل: شکلی رسم می‌کنیم تا ابعاد یك واشر نمونه و نیز حدود انتگرالگیری را تشخیص دهیم (شکل ۲۲٫۵). داریم

شعاع خارجی: $R(y)=\sqrt{y}$



۲۲٫۵ حجم واشر برابر است با $\pi(R^2-r^2)\,dy=\pi\left((\sqrt{y})^2-(y/2)^2\right)dy$.

شعاع داخلی: $r(y)=\frac{y}{2}$

حجم جسم:

$$\int_0^4 \pi(R^2-r^2)\,dy = \int_0^4 \pi\left((\sqrt{y})^2-\left(\frac{y}{2}\right)^2\right)dy$$

$$= \pi\int_0^4 \left(y-\frac{y^2}{4}\right)dy$$

$$= \pi\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{12}\right]_0^4 = \frac{8}{3}\pi. \qquad \blacksquare$$

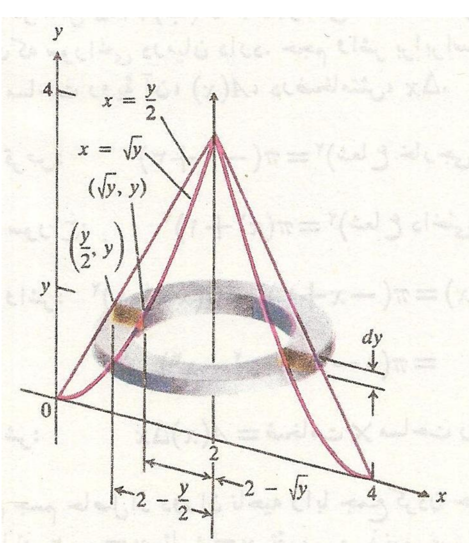
هر گاه محور یك‌جسم دورانی هیچ یك ازمحورهای مختصات نباشد، بازهم از همین قاعده برای محاسبهٔ حجم بهره می گیریم: فرمولهای شعاع خارجی R و شعاع داخلی r را می‌یابیم و از $\pi(R^2-r^2)$ بین حدود مناسب انتگرال می گیریم.

مثال ۳ حجم جسمی را بیابید که از دوران ناحیهٔ بین سهمی $y=x^2$ و خط $y=2x$ حول خط $x=2$ ایجاد می‌شود.

حل: شکلی رسم می‌کنیم تا شعاعهای یك واشر نمونه و حدود انتگرالگیری را تعیین‌کنیم (شکل ۲۳٫۵). داریم

شعاع خارجی: $R(y)=\left(2-\frac{y}{2}\right)$

شعاع داخلی: $r(y)=2-\sqrt{y}$



۲۳٫۵ شعاعهای داخلی وخارجی واشر (همواره) از محور دوران اندازه‌گرفته می‌شود.

$$\text{حجم جسم:} \quad \int_{0}^{4}\pi(R^2-r^2)\,dy$$

$$=\int_{0}^{4}\pi\left(\left(2-\frac{y}{2}\right)^2-(2-\sqrt{y})^2\right)dy$$

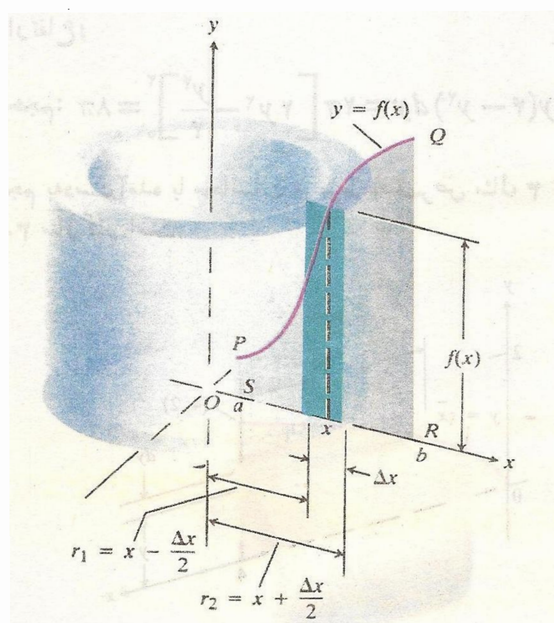
$$=\int_{0}^{4}\pi\left(\frac{y^2}{4}-3y+4\sqrt{y}\right)dy=\frac{8}{3}\pi\,. \quad \blacksquare$$

پوسته‌های استوانه‌ای

اگر نوارهای مستطیلی تقریب‌زنندهٔ ناحیه‌ای‌که حول یك محور دوران می‌کند با آن محور موازی باشند، اجسام حاصل به‌شکل پوسته‌های استوانه‌ای خواهند بود نه به‌شکل واشر. گاه کارکردن با پوسته‌های استوانه‌ای آسانتر ازکارکردن با واشرهاست زیرا فرمول مربوط به آنها شامل جملات توان دوم نمی‌شود. این‌فرمول به‌روش زیر به‌دست می‌آید.

فرض‌کنید ناحیهٔ $PQRS$ درشکل ۲۴.۵ حول محور y دوران‌کند وجسمی‌را به‌وجودآورد. ناحیه را با نوارهای مستطیلی موازی محور y از $x=a$ تا $x=b$ تقریب می‌زنیم و سپس با جمع‌کردن حجم پوسته‌های استوانه‌ای حاصل از دوران نوارها حجم جسم را براورد می‌کنیم.

شکل ۲۴.۵ یك نوار نمونه به پهنای Δx را نشان می‌دهد. نقطهٔ x وسط قاعدهٔ نواراست و ارتفاع نوار $f(x)$ است. پوستهٔ



۲۴.۵ جسم حاصل از دوران $PQRS$ حول محور y را با تعدادی پوستهٔ استوانه‌ای نظیر پوستهٔ مشخص شده دراین شکل تقریب می‌زنیم.

استوانه‌ای‌حاصل از دوران نوار حول‌محور y دارای شعاع‌داخلی $x-(\Delta x/2)$، شعاع خارجی $x+(\Delta x/2)$، و ارتفاع $f(x)$ است.

قاعدهٔ این پوسته حلقه‌ای است محدود به دودایره هم‌مرکز. ابعاد و مساحت حلقه چنین است

$$\text{شعاع داخلی:} \quad r_1=x-\frac{\Delta x}{2}$$

$$\text{شعاع خارجی:} \quad r_2=x+\frac{\Delta x}{2}$$

$$\text{مساحت حلقه:} \quad \Delta A=\pi r_2^2-\pi r_1^2=\pi(r_2^2-r_1^2)$$

$$=\pi(r_2+r_1)(r_2-r_1)$$

$$=\pi(2x)(\Delta x) \qquad (2)$$

$$=2\pi x\,\Delta x\,.$$

حجم پوستهٔ استوانه‌ای، ΔV، برابر است با حاصلضرب مساحت قاعدهٔ ($2\pi x\,\Delta x$) درارتفاع ($f(x)$) آن. پس

$$\text{حجم پوسته:} \quad \Delta V=2\pi x f(x)\,\Delta x\,. \qquad (3)$$

مجموع حجمهای پوسته‌های استوانه‌ای حاصل‌از دوران نوارهایی که ناحیهٔ $PQRS$ را از a تا b می‌پوشانند، چنین است

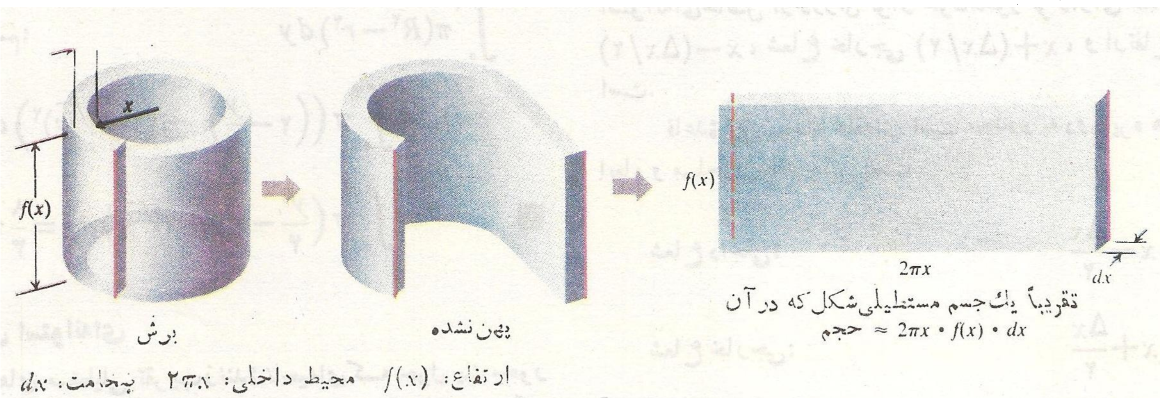
$$S_n=\sum_a^b \Delta V=\sum_a^b 2\pi x f(x)\,\Delta x\,. \qquad (4)$$

حجم جسم حاصل از دوران $PQRS$ حول محور y، حد مجموع S_n است وقتی‌که Δx به‌سمت‌صفرمیل‌می‌کند. این‌حد همان‌انتگرال $2\pi x f(x)$ نسبت به x از a تا b است.

فرمول محاسبهٔ حجم به‌کمك پوسته‌های استوانه‌ای به شعاع داخلی x و ارتفاع $f(x)$

$$\text{حجم}=\int_a^b 2\pi(\text{شعاع})(\text{ارتفاع})\,dx=\int_a^b 2\pi x f(x)\,dx\,. \qquad (5)$$

راه ساده‌ای برای به‌خاطرسپردن رابطهٔ (۵) این است‌که تصورکنیم‌که یك پوستهٔ استوانه‌ای به‌محیط متوسط $2\pi x$، ارتفاع $f(x)$، و ضخامت dx در امتداد مولدی از استوانه بریده مانند یك ورقهٔ قوطی پهن شود (شکل ۲۵.۵). ورقه مکعب‌مستطیلی‌است به ابعاد $2\pi x$ در $f(x)$ در dx. بنابراین حجم آن حدود $2\pi x f(x)\,dx$ است. تساوی (۵) حاکی است‌که حجم‌جسم برابر است با انتگرال $2\pi x f(x)\,dx$ از $x=a$ تا $x=b$.



۲۵۰۵ چگونگی به‌خاطرسپردن فرمول انتگرال درمورد پوسته‌های استوانه‌ای.

مثال ۴ ناحیهٔ محدود به $y=\sqrt{x}$، $y=0$، و $x=4$ حول محور y دوران می‌کند. حجم جسم حاصل را بیابید.

حل: شکلی رسم می‌کنیم تا شعاع و ارتفاع یک پوستهٔ استوانه‌ای نمونه و نیز حدود انتگرالگیری را تعیین کنیم (شکل ۲۶۰۵). داریم

شعاع: x

ارتفاع: $f(x)=\sqrt{x}$

حجم: $\int_0^4 2\pi(\text{شعاع})(\text{ارتفاع})\,dx$

$$=\int_0^4 2\pi x\sqrt{x}\,dx$$

$$=2\pi\int_0^4 x^{3/2}\,dx=2\pi\left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^4=\frac{128\pi}{5}.$$

برای محاسبهٔ حجم جسم حاصل از دوران یک ناحیه حول محور x (به‌جای محور y)، از رابطهٔ (۵) با جانشانی y به‌جای x بهره می‌گیریم.

مثال ۵ ناحیهٔ محدود به $y=\sqrt{x}$، $y=0$، و $x=4$ حول محور x دوران می‌کند. حجم جسم حاصل را بیابید.

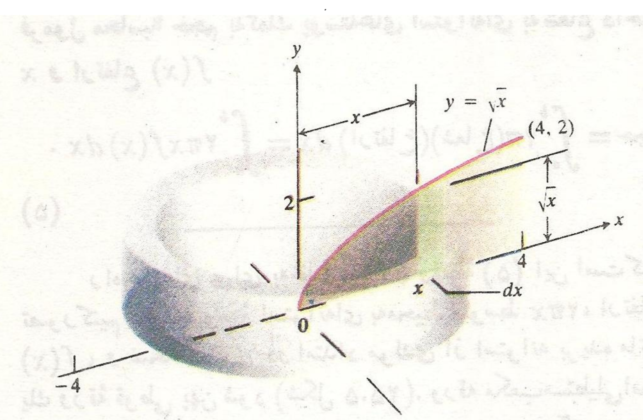
حل: برای تعیین ابعاد یک استوانهٔ نمونه وحدود انتگرالگیری شکلی رسم می‌کنیم (شکل ۲۷۰۵). داریم

شعاع: y

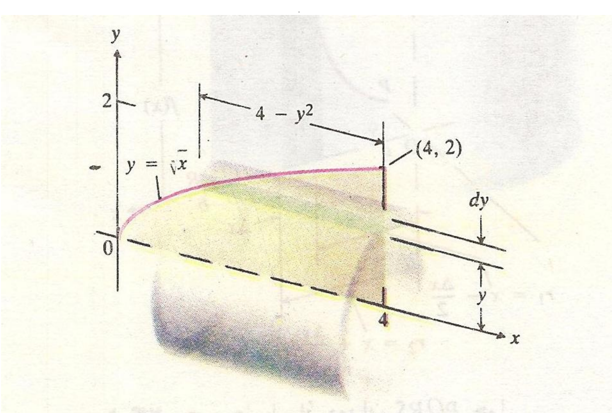
ارتفاع: $4-y^2$

حجم: $\int_0^2 2\pi y(4-y^2)\,dy=2\pi\left[2y^2-\frac{y^4}{4}\right]_0^2=8\pi$

حجم به‌دست‌آمده با محاسبات مربوط به قرص مثال ۳ از بخش ۳۰۵ سازگار است.



۲۶۰۵ پوستهٔ استوانه‌ای و حدود انتگرالگیری درمثال ۴. ■



۲۷۰۵ پوستهٔ استوانه‌ای و حدود انتگرالگیری درمثال ۵. ■

چیزی‌که اثبات نکرده‌ایم و نخواهیم‌کرد این است‌که محاسبهٔ حجم اجسام دورانی با هر سه روش ارائه شده همواره به‌نتایج یکسانی منجر می‌شود. درمثال بعد از هر سه روش استفاده می‌کنیم و خواهید دیدکه نتایج یکسان‌اند.

مثال ۶ قرص محدود به دایرهٔ $x^{۲}+y^{۲}=a^{۲}$ حول محور y دوران، و جسمی‌کروی ایجاد می‌کند. سوراخی به‌قطر a درامتداد محور y در درون‌کره ایجاد می‌کنیم. حجم کرهٔ سوراخدار را بیابید.

حل: کرهٔ سوراخدار را می‌توانستیم با دوران بخشی از قرص‌که درطرف راست خط $x=a/۲$ قراردارد ایجادکنیم (شکل ۲۸.۵ الف). بنابراین با سه‌روش می‌توان حجم را یافت: قرصها، واشرها، پوسته‌های استوانه‌ای. دراین مثال از هرسه‌روش می‌توان استفاده کرد.

روش ۱: قرصها و تفریق. شکل ۲۸.۵ (ب) کرهٔ سوراخدار را نشان می‌دهد. سوراخ یك استوانهٔ مستدیر است که قاعده‌هایش به‌شکل عرقچین است. نقشهٔ ما این است که حجم سوراخ را از حجم کره‌کم کنیم. اگر دوعرقچین را با صفحاتی عمود برمحور y در $y=a\sqrt{۳}/۲$ و $y=-a\sqrt{۳}/۲$ جدا کنیم مسأله ساده می‌شود. پس از جداکردن عرقچینها جسم باقیمانده حجمی‌چون $v_۱$ دارد. ازحجم این‌جسم حجم استوانهٔ مستدیرقائم به‌شعاع $a/۲$ و ارتفاع $۲(a\sqrt{۳}/۲)=a\sqrt{۳}$ راکم می‌کنیم. حجم‌این‌استوانه با قاعده‌های تخت چنین است

$$V_۲=\pi\left(\frac{a}{۲}\right)^{۲}(a\sqrt{۳})=\frac{\pi\sqrt{۳}}{۴}a^{۳}.$$

حجم مطلوب ازمحاسبهٔ $V=V_۱-V_۲$ به‌دست می‌آید.

برای یافتن $V_۱$، می‌دانیم‌که این‌مقدار حجم جسم دورانیی است که مقاطع عمود برمحور y آن به شکل قرص‌اند. شعاع یك قرص‌نمونه $\sqrt{a^{۲}-y^{۲}}$ است. بنابراین

$$V_۱=\int_{-a\sqrt{۳}/۲}^{a\sqrt{۳}/۲}\pi(\text{شعاع})^{۲}\,dy$$

$$=\int_{-a\sqrt{۳}/۲}^{a\sqrt{۳}/۲}\pi(a^{۲}-y^{۲})\,dy$$

$$=\pi\left[a^{۲}y-\frac{y^{۳}}{۳}\right]_{-a\sqrt{۳}/۲}^{a\sqrt{۳}/۲}=\frac{۳\pi\sqrt{۳}}{۴}a^{۳}.$$

از این‌رو

$$V=V_۱-V_۲=\frac{۳\pi\sqrt{۳}}{۴}a^{۳}-\frac{\pi\sqrt{۳}}{۴}a^{۳}=\frac{\pi\sqrt{۳}}{۲}a^{۳}.$$

روش ۲: واشرها. کرهٔ سوراخدار جسم دورانیی است‌که مقاطع عمود برمحور y آن واشرند. (شکل ۲۸.۵ پ). شعاعهای یك واشرنمونه چنین‌اند

شعاع خارجی: $R=\sqrt{a^{۲}-y^{۲}}$

شعاع داخلی: $r=\frac{a}{۲}.$

بنابراین حجم جسم چنین است

$$V=\int_{-a\sqrt{۳}/۲}^{a\sqrt{۳}/۲}\pi(R^{۲}-r^{۲})\,dy$$

$$=\int_{-a\sqrt{۳}/۲}^{a\sqrt{۳}/۲}\pi\left(a^{۲}-y^{۲}-\frac{a^{۲}}{۴}\right)dy$$

$$=\pi\left[\frac{۳a^{۲}y}{۴}-\frac{y^{۳}}{۳}\right]_{-a\sqrt{۳}/۲}^{a\sqrt{۳}/۲}=\frac{\pi\sqrt{۳}}{۲}a^{۳}.$$

روش ۳: پوسته‌های استوانه‌ای. حجم کرهٔ سوراخدارمطابق شکل ۲۸.۵ (ت) با مجموع حجمهای تعدادی پوستهٔ استوانه‌ای برابر است. شعاع یك‌پوستهٔ نمونه، x و ارتفاع آن $۲\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}$ است. بنابراین حجم جسم چنین است

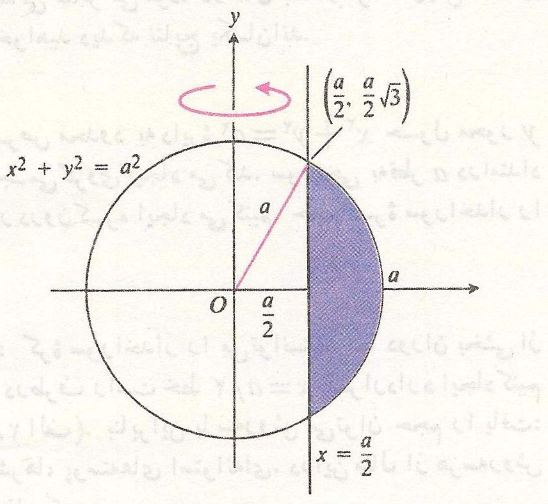
$$V=\int_{x=a/۲}^{a}۲\pi(\text{شعاع})(\text{ارتفاع})\,dx$$

$$=\int_{a/۲}^{a}۴\pi x\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}\,dx$$

$$=۴\pi\left[-\frac{۱}{۳}(a^{۲}-x^{۲})^{۳/۲}\right]_{a/۲}^{a}$$

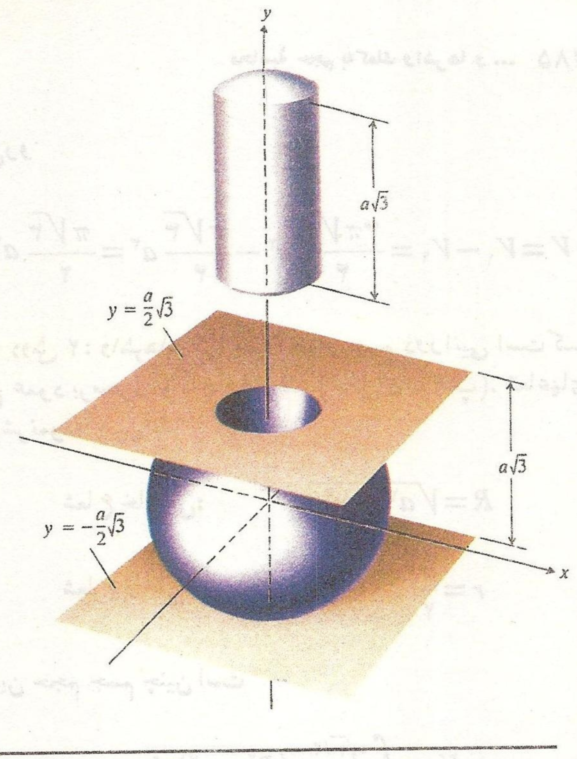
$$=\frac{۴\pi}{۳}\left(a^{۲}-\frac{a^{۲}}{۴}\right)^{۳/۲}=\frac{۴\pi}{۳}\left(\frac{۳a^{۲}}{۴}\right)^{۳/۲}=\frac{\pi\sqrt{۳}}{۲}a^{۳}.\qquad\blacksquare$$

درجدول ۱.۵ روشهای یافتن حجم با استفاده از واشرها و پوسته‌ها آمده‌است.



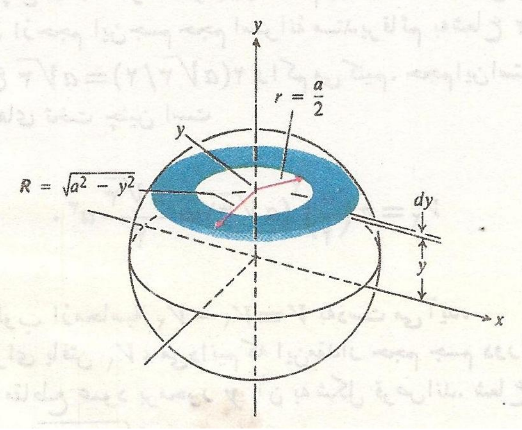
(الف)

حجم کرهٔ سوراخدار برابر حجم جسمی است که از دوران ناحیهٔ سایه‌دار حول محور y به‌دست می‌آید.



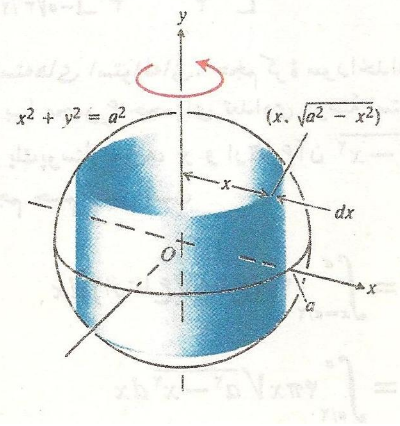
(ب)

به‌کمک روش قرصها می‌توان حجم سوراخ را محاسبه و آن را از حجم کره کم کرد.



(پ)

به‌کمک روش واشرها می‌توان حجم کرهٔ سوراخدار را مستقیماً به‌دست آورد به‌این‌ترتیب که این حجم را با مجموع حجمهای تعدادی واشر عمود بر محور y برابر می‌گیریم.

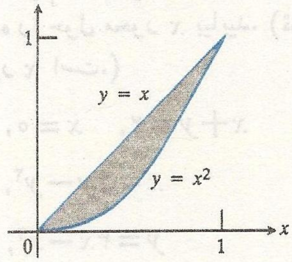


(ت)

به‌کمک روش استوانه‌ها می‌توان حجم کرهٔ سوراخدار را مستقیماً محاسبه کرد به این ترتیب که این حجم را با مجموع حجمهای تعدادی پوستهٔ استوانه‌ای موازی با محور y برابر می‌گیریم.

۲۸۰۵ (الف) ناحیه بین $x=a/2$ تا $x=a$ حجم دورانی‌را ایجاد می‌کند، (ب) کرهٔ سوراخ‌شده، (پ) برش‌مقطعی کرهٔ سوراخدار، (ت) پر‌کردن حجم با پوسته‌های استوانه‌ای.

جدول ۱۰۵ واشرها و پوسته‌ها



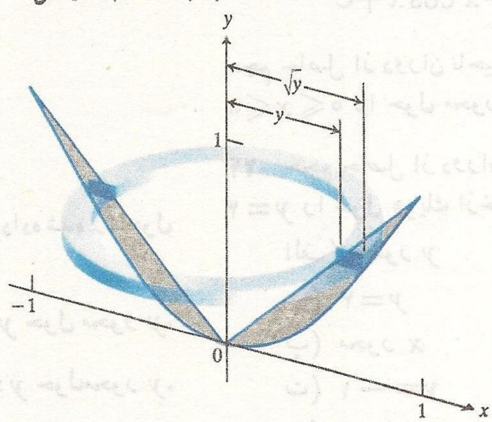
ناحیهٔ محدود به

$y = x, \qquad y = x^2 \quad (x = \sqrt{y})$

دوران حول محور y	دوران حول محور x

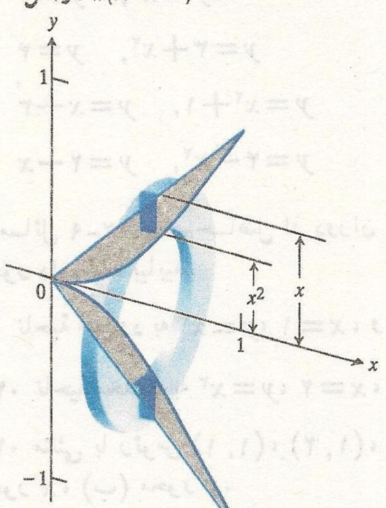
مستطیل عمود بر محور: با استفاده از واشرها

واشر: $\pi(R^2 - r^2)\, dy$



$$V = \int_{y=0}^{y=1} \pi((\sqrt{y})^2 - (y)^2)dy = \frac{\pi}{6}$$

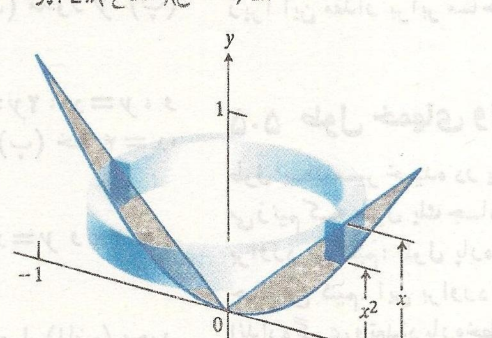
واشر: $\pi(R^2 - r^2)\, dx$



$$V = \int_{x=0}^{x=1} \pi((x)^2 - (x^2)^2)dx = \frac{2\pi}{15}$$

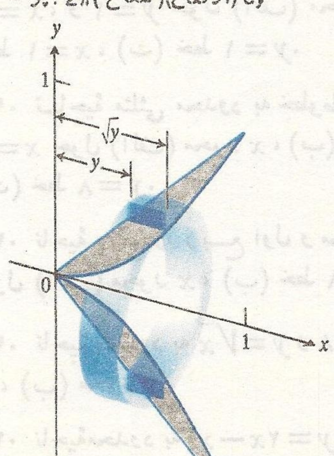
مستطیل موازی با محور: با استفاده از پوسته‌ها

پوسته: 2π (شعاع) (ارتفاع) dx



$$V = \int_{x=0}^{x=1} 2\pi(x)(x - x^2)dx = \frac{\pi}{6}$$

پوسته: 2π (شعاع) (ارتفاع) dy



$$V = \int_{y=0}^{y=1} 2\pi(y)(\sqrt{y} - y)dy = \frac{2\pi}{15}$$

مسأله‌ها

درمسائل ۱ــ۸ حجم حاصل از دوران ناحیهٔ محدود به‌خمها و خطوط داده‌شده را حول محور x بیابید. (تذکر: $x=0$ محور y و $y=0$ محور x است.)

۱. $x+y=2,\quad x=0,\quad y=0$

۲. $x=2y-y^2,\quad x=0$

۳. $y=3x-x^2,\quad y=x$

۴. $y=x,\quad y=1,\quad x=0$

۵. $y=x^2,\quad y=4$

۶. $y=3+x^2,\quad y=4$

۷. $y=x^2+1,\quad y=x+3$

۸. $y=4-x^2,\quad y=2-x$

درمسائل ۹ــ۲۲ حجم‌حاصل از دوران ناحیهٔ داده‌شده را حول محور داده‌شده بیابید.

۹. ناحیهٔ محدود به $y=x^4$، $x=1$، و $y=0$ حول محور y.

۱۰. ناحیهٔ محدود به $y=x^3$، $x=2$، و $y=0$ حول‌محور y.

۱۱. مثلثی با رئوس $(1,1)$، $(2,1)$، و $(2,2)$ حول (الف) محور x، (ب) محور y.

۱۲. ناحیهٔ واقع در ربع اول و محدود به خم $x=y-y^3$ و محور y حول (الف) محور x، (ب) محور y.

۱۳. ناحیهٔ واقع در ربع اول و محدود به‌خم $x=y-y^3$، $x=1$، و $y=1$ حول (الف) محور x، (ب) محور y، (پ) خط $x=1$، (ت) خط $y=1$.

۱۴. ناحیهٔ مثلثی محدود به خطوط $2y=x+4$، $y=x$، و $x=0$ حول (الف) محور x، (ب) محور y، (پ) خط $x=4$، (ت) خط $y=8$.

۱۵. ناحیهٔ واقع در ربع اول و محدود به $y=x^3$ و $y=4x$ حول (الف) محور x، (ب) خط $y=8$.

۱۶. ناحیهٔ محدود به $y=\sqrt{x}$ و $y=x^2/8$ حول (الف) محور x، (ب) محور y.

۱۷. ناحیهٔ‌محدود به $y=2x-x^2$ و $y=x$ حول (الف) محور y، (ب) خط $x=1$.

۱۸. ناحیهٔ محدود به $y=\sqrt{x}$، $y=2$، $x=0$ حول (الف) محور x، (ب) محور y، (پ) خط $x=4$، (ت) خط $y=2$.

۱۹. ناحیهٔ‌محدود به‌محور y وخمهای $y=\cos x$ و $y=\sin x$، $0\leqslant x\leqslant \pi/4$، حول محور x.

۲۰. ناحیهٔ‌محدود به $y=0$ وخم $y=8x^2-8x^3$، $0\leqslant x\leqslant 1$، حول محور y.

۲۱. ناحیهٔ‌میان‌خمهای $y=2x^2$ و $y=x^4-2x^2$ حول‌محور y.

۲۲. ناحیهٔ واقع در ربع‌اول و محدود به $y=x^2$، $x+y=2$، و محور x، حول محور x.

۲۳. به‌کمك پوسته‌های استوانه‌ای و فرمول

$$\int x\sin x\,dx=\sin x-x\cos x+C$$

حجم حاصل از دوران ناحیهٔ محدود به $y=0$ و خم $y=\sin x$، $0\leqslant x\leqslant \pi$ را حول محور y بیابید.

۲۴. حجم حاصل از دوران ناحیهٔ محدود به‌خم $y=x^2$، و خط $y=4$ را حول هریك ازخطوط زیر بیابید.

الف) محور y

ب) $y=4$

پ) محور x

ت) $y=-1$

ث) $x=2$

۲۵. حجم جسم حاصل از دوران قرص $x^2+y^2\leqslant a^2$ را حول خط $x=b$ $(b>a)$ بیابید. (راهنمایی:

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\pi a^2/2$$

زیرا این مقدار برابر مساحت نیمدایره‌ای به‌شعاع a است.)

۵.۵ طول خمهای واقع درصفحه

طول یك مسیر خمیده در یك صفحه را به همان طریقی تقریب می‌زنیم که طول یك جادهٔ خمیده را روی نقشه به‌کمك خطکش براورد می‌کنیم: طول پاره‌خطهایی را که دوسر آنها روی خم است جمع می‌کنیم. این براورد همواره حدی از دقت دارد که به‌دقت اندازه‌گیری و تعداد پاره‌خطها بستگی دارد. به‌کمك‌حساب‌دیفرانسیل و انتگرال می‌توان این‌کار را بهتر انجام داد زیرا می‌توانیم پاره‌خطها را هرچه بخواهیم کوچك بگیریم، به‌طوری که‌خط‌شکسته‌ای که از پاره‌خطها پدید می‌آید، هرچه بیشتر برخم منطبق باشد. با انجام دادن چنین‌کاری طولهای این خطهای شکسته به عددی میل می‌کنند که می‌توان آن را با یك انتگرال محاسبه کرد. دراین‌بخش این انتگرال را به‌دست می‌آوریم

فرمول اصلی دکارت

فرض می‌کنیم نمودار $y=f(x)$ از $x=a$ تا $x=b$ خمی‌ باشد که محاسبهٔ طولش مطلوب ماست (شکل ۲۹.۵). این خم را به n قطعه تقسیم و نقاط تقسیم پیاپی را بههم وصل می‌کنیم تا تعدادی پاره‌خط به‌دست آید. طول یك پاره‌خط نمونه چون PQ چنین است

$$\sqrt{(\Delta x_k)^۲+(\Delta y_k)^۲}.$$

طول خم از $x=a$ تا $x=b$ را با مجموع زیر تقریب می‌زنیم

$$\sum_{k=۱}^{n}\sqrt{(\Delta x_k)^۲+(\Delta y_k)^۲}. \qquad (۱)$$

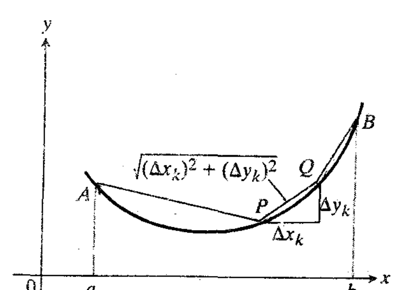
انتظار می‌رود که وقتی تعداد پاره‌خطها به‌بینهایت و طول هر یك از آنها به‌صفر میل کند، تقریب بهتر شود. همچنین می‌خواهیم نشان دهیم که مجموع فوق به‌حدی محاسبه‌پذیر میل می‌کند. برای اثبات این موضوع آن را به‌صورتی می‌نویسیم که بتوان قضیهٔ وجود انتگرال را به‌کار برد.

فرض می‌کنیم f مشتقی‌دارد که درهر نقطه از $[a, b]$ پیوسته است. در این صورت، بنا به‌قضیهٔ مقدار میانگین نقطه‌ای مانند (c_k, d_k) روی‌خم و بین P و Q وجود دارد که در آن مماس برخم موازی وتر PQ است. یعنی

$$f'(c_k)=\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} \quad \text{یا} \quad \Delta y_k=f'(c_k)\,\Delta x_k .$$

مجموع موجود در عبارت (۱) با این جانشانی به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\sum_{k=۱}^{n}\sqrt{(\Delta x_k)^۲+(f'(c_k)\Delta x_k)^۲}$$
$$=\sum_{k=۱}^{n}\sqrt{۱+(f'(c_k))^۲}\,\Delta x_k . \qquad (۲)$$



۲۹.۵ قوس AB با خط شکستهٔ $APQB$ تقریب‌زده می‌شود. طول قوس به‌صورت حد طولهای این خطوط شکسته‌که پیاپی ظریفتر می‌شوند (تعداد پاره‌خطها درهرخط شکسته بیشتر می‌شود) تعریف می‌شود.

اکنون مشاهده می‌شود که این مجموع، انتگرال زیر را تقریب می‌زند

$$\int_a^b\sqrt{۱+(f'(x))^۲}\,dx. \qquad (۳)$$

بنا بر این حد مجموع وقتی که تقسیمات ظریفتر و ظریفتر می‌شوند برابر با این انتگرال است. پس‌طول خم را از a تا b به‌صورت انتگرال $\sqrt{۱+(f'(x))^۲}$ از a تا b تعریف می‌کنیم. معمولاً y' را جای $f'(x)$ قرارمی‌دهند و فرمول انتگرال را ساده می‌کنند.

تعریف

طول خم $y=f(x)$ از $x=a$ تا $x=b$

$$L=\int_a^b\sqrt{۱+(y')^۲}\,dx . \qquad (۴)$$

مثال ۱ طول خم زیر را از $x=۰$ تا $x=۱$ بیابید.

$$y=\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}x^{۳/۲}-۱ .$$

حل: طول را از معادله (۴) محاسبه می‌کنیم

$$y=\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}x^{۳/۲}-۱$$

$$y'=\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}\cdot\frac{۳}{۲}x^{۱/۲}=۲\sqrt{۲}x^{۱/۲}$$

$$۱+(y')^۲=۱+(۲\sqrt{۲}x^{۱/۲})^۲=۱+۸x$$

$$L=\int_۰^۱\sqrt{۱+(y')^۲}\,dx=\int_۰^۱\sqrt{۱+۸x}\,dx$$

$$=\frac{۲}{۳}\cdot\frac{۱}{۸}(۱+۸x)^{۳/۲}\Big]_۰^۱=\frac{۱۳}{۶}. \qquad \blacksquare$$

فرمول پارامتری

برای محاسبهٔ طول خمی‌که با معادلات پارامتری مشخص می‌شود فرمول بسیارمفیدی وجود دارد. فرض‌کنید معادلات عبارت‌اند از

$$x=g(t), \quad y=h(t), \quad a\leqslant t\leqslant b$$

و نقطهٔ $P(x(t), y(t))$ وقتی‌که t از a تا b می‌رود دقیقاً یك‌بار خم را طی می‌کند. برای‌تقسیم‌بندی‌خم، به‌جای تقسیم‌بندی‌محور x،

بازهٔ $a\leqslant t\leqslant b$ را تقسیم‌بندی می‌کنیم. به‌این‌ترتیب خم مانند شکل ۳۰.۵ تقسیم‌بندی می‌شود. چنانکه در شکل دیده می‌شود مختصات دو نقطهٔ پیاپی P و Q عبارت‌اند از $P(g(t_k), h(t_k))$ و $Q(g(t_{k+1}), h(t_{k+1}))$. بنابراین طول پاره‌خط PQ را می‌توان به کمك قضیهٔ فیثاغورس چنین محاسبه کرد

$$\sqrt{(g(t_{k+1})-g(t_k))^2+(h(t_{k+1})-h(t_k))^2}.$$

(این فرمول را به‌زودی ساده می‌کنیم)

اگر مشتقات اول g و h موجود و در $a\leqslant t\leqslant b$ پیوسته باشند، بنابه‌قضیهٔ مقدار میانگین داریم

$$\begin{aligned} g(t_{k+1})-g(t_k)&=g'(t_k')\,\Delta t_k \\ h(t_{k+1})-h(t_k)&=h'(t_k'')\,\Delta t_k\,. \end{aligned} \tag{۵}$$

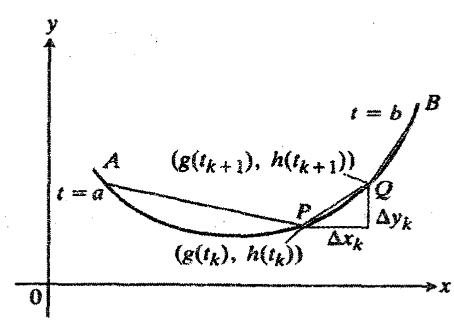
که در آنها t_k' و t_k'' مقادیر مناسبی‌اند که بین t_k و t_{k+1} انتخاب می‌شوند. بنابراین مجموع طولهای پاره‌خطهای تقریب‌زنندهٔ خم به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(g'(t_k'))^2+(h'(t_k''))^2}\,\Delta t_k\,. \tag{۶}$$

این مجموع، مجموع ریمان تابعی نیست زیرا ضرورت ندارد نقاط t_k' و t_k'' یکی باشند. اما قضیه‌ای به نام قضیهٔ بلیس[1] (که در کتابهای پیشرفته‌تر اثبات می‌شود) ما را مطمئن می‌سازد که مجموعها همگرایند و مقدار آنها برابر انتگرال زیر است

طول خم پارامتری $x=x(t)$، $y=y(t)$، $a\leqslant t\leqslant b$

$$L=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\,. \tag{۷}$$



۳۰.۵ اگر خم با معادلات پارامتری $x=g(t)$، $y=h(t)$، $a\leqslant t\leqslant b$ مشخص شود آنگاه $\Delta x_k=g(t_{k+1})-g(t_k)$، $\Delta y_k=h(t_{k+1})-h(t_k)$ و طول PQ چنین است

$$\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2}$$
$$=\sqrt{(g(t_{k+1})-g(t_k))^2+(h(t_{k+1})-h(t_k))^2}.$$

مثال ۲ مکان‌ذرهٔ $P(x, y)$ درزمان t عبارت‌است از $x=\sin^2 t$، $y=\cos^2 t$. این ذره بین $t=0$ و $t=\pi/2$ چه مسافتی را می‌پیماید.

حل: مسافتی را که ذره از $t=0$ تا $t=\pi/2$ می‌پیماید از رابطهٔ (۷) به‌دست می‌آوریم

$$x=\sin^2 t \qquad y=\cos^2 t$$

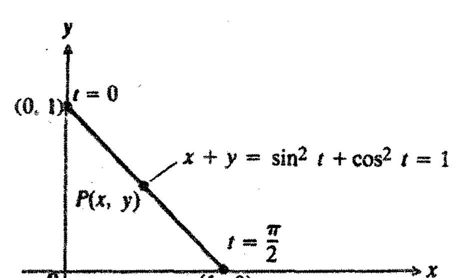
$$\frac{dx}{dt}=2\sin t\cos t \qquad \frac{dy}{dt}=-2\cos t\sin t$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt&=\int_0^{\pi/2}\sqrt{8\sin^2 t\cos^2 t}\,dt \\ &=\int_0^{\pi/2}\sqrt{2}\cdot 2\sin t\cos t\,dt \\ &=\sqrt{2}\cdot\sin^2 t\Big]_0^{\pi/2} \\ &=\sqrt{2}\,.\end{aligned}$$

دراین‌حالت درستی نتایج را می‌توان از راه هندسی بررسی کرد. چون به‌ازای همه مقادیر t داریم

$$x+y=\sin^2 t+\cos^2 t=1$$

مطابق شکل ۳۱.۵ مسیر ذره پاره‌خط $x+y=1$ است که از $(0, 1)$ که درآن $t=0$ تا $(1, 0)$ که درآن $t=\pi/2$ امتداد



۳۱.۵ مسیری که ذرهٔ $P(x, y)$ می‌پیماید، مکان P در زمان t با دواسط $x=\sin^2 t$، $y=\cos^2 t$، $0\leqslant t\leqslant\pi/2$ مشخص می‌شود.

1. Bliss's Theorem

دارد. طول این پاره‌خط چنین است

$$\sqrt{(0-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}\,.$$ ■

فرمول دیفرانسیلی ساده

معمولاً رابطهٔ

$$L=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

را به‌جای مشتقات با دیفرانسیلها نمایش می‌دهند. از لحاظ صوری این عمل چنین انجام می‌شود که مشتقات را به‌صورت خارج‌قسمتهای دیفرانسیلها درنظر می‌گیرند و dt را به‌صورت dt^2 به‌زیر رادیکال می‌آورند و به‌این ترتیب دیفرانسیلهای مخرج را حذف می‌کنند

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\sqrt{\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}}\,dt$$

$$=\sqrt{\frac{dx^2}{dt^2}dt^2+\frac{dy^2}{dt^2}dt^2}$$

$$=\sqrt{dx^2+dy^2}\,.$$

درنتیجه فرمول طول خم به‌صورت زیر درمی‌آید

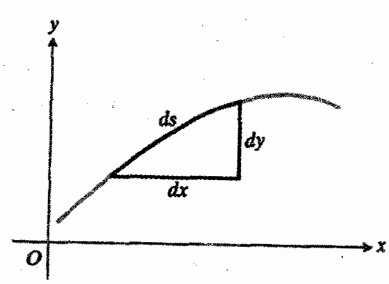
$$L=\int\sqrt{dx^2+dy^2}\,. \tag{۸}$$

البته قبل از انجام انتگرالگیری در رابطهٔ ۸ باید dx و dy را برحسب یکی از متغیرها بیان و حدود مناسبی برای انتگرالگیری تعیین کرد.

رابطهٔ (۸) را باز هم می‌توان کوتاهتر کرد. dx و dy را می‌توان دوضلع مثلث کوچکی درنظر گرفت که وتر آن

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2} \tag{۹}$$

دیفرانسیل طول قوسی است که می‌توان از آن بین حدود مناسبی انتگرال گرفت وطول خم را به‌دست آورد (شکل ۳۲۰۵). به‌این



۳۲۰۵ نمودادی برای به‌خاطرسپردن رابطهٔ $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$.

ترتیب رابطهٔ (۸) چنین می‌شود

$$L=\int ds\,. \tag{۱۰}$$

مثال ۳ نشان دهید که به‌کمك فرمول $L=\int ds$ می‌توان محیط یك دایره به‌شعاع r را تعیین کرد.

حل: معادلات پارامتری دایره را می‌نویسیم

$$x=r\cos t,\quad y=r\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

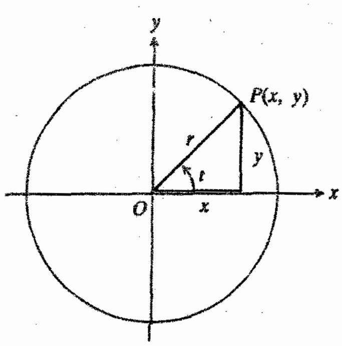
(شکل ۳۳۰۵). بنابراین

$$dx=-r\sin t\,dt,\quad dy=r\cos t\,dt$$

$$ds^2=dx^2+dy^2=r^2(\sin^2 t+\cos^2 t)\,dt^2=r^2\,dt^2$$

و

$$L=\int ds=\int_{t=0}^{t=2\pi} r\,dt=rt\Big]_0^{2\pi}=2\pi r\,.$$



۳۳۰۵ در مثال ۳ محیط این دایره را بدین‌ترتیب محاسبه می‌کنیم که محیط دایره را طول مسیری درنظرمی‌گیریم که نقطهٔ P از $t=0$ تا $t=2\pi$ می‌پیماید. ■

ناپیوستگی dy/dx

درنقطه‌ای از یك خم که dy/dx وجود ندارد، ممکن است dx/dy موجود باشد و شاید بتوان با یك یا چندبار استفاده از فرمول زیر که همان رابطهٔ (۴) با تعویض x و y است طول خم را یافت

$$L=\int_c^d \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy\,. \tag{۱۱}$$

مثال ۴ طول خم $y=x^{۲/۳}$ را بین $x=-۱$ و $x=۸$ بیابید.

حل: خم را رسم می‌کنیم (شکل ۳۴.۵) و مشتقش را می‌آزماییم

$$\frac{dy}{dx}=\frac{۲}{۳}x^{-۱/۳}.$$

چون مشتق در مبدأ بینهایت می‌شود، طول خم را، به‌جای رابطهٔ (۴)، از رابطهٔ (۱۱) به‌دست‌می‌آوریم. معادله $y=x^{۲/۳}$ را نسبت به x حل می‌کنیم و چنین نتیجه می‌گیریم

$$x=\pm y^{۳/۲}$$

$$\frac{dx}{dy}=\pm\frac{۳}{۲}y^{۱/۲}$$

$$۱+\left(\frac{dx}{dy}\right)^{۲}=۱+\left(\pm\frac{۳}{۲}y^{۱/۲}\right)^{۲}=۱+\frac{۹}{۴}y.$$

طول قسمتی از خم که بین $A(-۱,۱)$ و مبدأ قرار دارد برابر است با

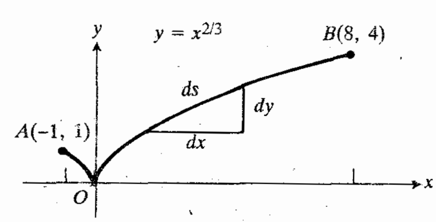
$$L_{۱}=\int_{۰}^{۱}\sqrt{۱+\frac{۹}{۴}y}\,dy.$$

طول قسمتی از خم که بین مبدأ و $B(۸,۴)$ قرار دارد چنین است

$$L_{۲}=\int_{۰}^{۴}\sqrt{۱+\frac{۹}{۴}y}\,dy.$$

طول کل خم عبارت است از $L=L_{۱}+L_{۲}$.

برای محاسبهٔ L باید از دو انتگرال جداگانه استفاده کنیم زیرا معادلهٔ $y=x^{۲/۳}$، x را به‌صورت دو تابع جداگانه از y تعریف می‌کند. قوس AO را فرمول $x=-y^{۳/۲}$، $۰\leqslant y\leqslant ۱$ وقوس OB را فرمول $x=+y^{۳/۲}$، $۰\leqslant y\leqslant ۴$ مشخص می‌کند.



۳۴.۵ به‌منظور محاسبهٔ طول $y=x^{۲/۳}$ بین A و B، برای قسمت از A تا O از $x=-y^{۳/۲}$ و برای قسمت از O تا B از $x=y^{۳/۲}$ استفاده می‌کنیم و دوبار رابطهٔ (۱۱) را به‌کار می‌بریم. دلیل این کار درمثال ۴ تشریح می‌شود.

برای محاسبهٔ انتگرالهای $L_{۱}$ و $L_{۲}$، جانشانیهای

$$u=۱+\frac{۹}{۴}y,\quad du=\frac{۹}{۴}dy,\quad dy=\frac{۴}{۹}du$$

را به‌کارمی‌بریم و چنین به‌دست می‌آوریم

$$\int\left(۱+\frac{۹}{۴}y\right)^{۱/۲}dy=\frac{۴}{۹}\int u^{۱/۲}\,du=\frac{۸}{۲۷}u^{۳/۲}+C$$

و

$$L=\frac{۸}{۲۷}\left(۱+\frac{۹}{۴}y\right)^{۳/۲}\Big]_{۰}^{۱}+\frac{۸}{۲۷}\left(۱+\frac{۹}{۴}y\right)^{۳/۲}\Big]_{۰}^{۴}$$

$$=\frac{۱}{۲۷}\left(۱۳\sqrt{۱۳}+۸۰\sqrt{۱۰}-۱۶\right)\approx ۱۰٫۵\,.$$

برای اطمینان از اینکه درمحاسبات خطا پیش نیامده‌است، می‌توان مجموع طول وترهای AO و OB را محاسبه و درستی نتایج را بررسی کرد

$$AO+OB=\sqrt{۱+۱}+\sqrt{۶۴+۱۶}$$

$$=\sqrt{۲}+\sqrt{۸۰}\approx ۱۰٫۴$$

بنابراین به‌نظرمی‌رسد جوابهای به‌دست‌آمده معقول است. ■

مبدأ درخم شکل ۳۴.۵ یك‌نقطهٔ بازگشت است. دراین‌نقطه شیب بینهایت می‌شود. چنانچه می‌خواستیم برای این خم خاص رابطهٔ (۴) را به‌دست آوریم، درمی‌یافتیم که برای هروتری چون PQ که برنقطه بازگشت پل می‌زند نمی‌توانیم مرحله‌ای را که نیاز به‌قضیه مقدار میانگین دارد طی‌کنیم. اما قضیهٔ مقدارمیانگین را می‌توان درمورد وتری‌که به نقطه بازگشت منتهی می‌شود یا ازآن آغاز می‌شود به‌کاربرد، زیرا دراین قضیه مشتق‌پذیربودن در نقاط انتهایی ضرورت ندارد. بنابراین فرمولی‌که به‌جای رابطهٔ (۴) به‌دست خواهد آمد شامل دوانتگرال است: یکی طول از A تا O و دیگری طول از O تا B را به‌دست می‌دهد. قاعدهٔ معمول دراین موارد چنین است: هرگاه خمی یك یا چند نقطهٔ بازگشت داشته باشد، طول آن را با انتگرالگیری از خم بین هر دونقطهٔ بازگشت و جمع نتایج به‌دست می‌آوریم. (برای مثال، راه محاسبهٔ طول خم درمسأله ۷ همین است.)

مسأله‌ها

درمسائل ۱ـ۶ طول خمها را بیابید.

۱. $y=(۱/۳)(x^{۲}+۲)^{۳/۲}$ از $x=۰$ تا $x=۳$

۲. $y=x^{۳/۲}$ از $(۰,۰)$ تا $(۴,۸)$

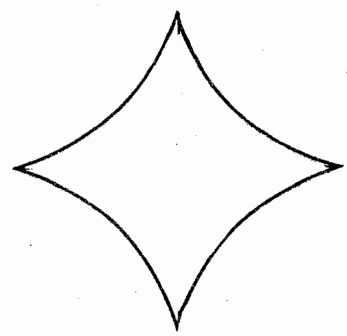
۳. $9x^2=4y^3$ از $(0,0)$ تا $(2\sqrt{3},3)$

۴. $y=(x^3/3)+1/(4x)$ از $x=1$ تا $x=3$

۵. $x=(y^4/4)+1/(8y^2)$ از $y=1$ تا $y=2$

۶. $(y+1)^2=4x^3$ از $x=0$ تا $x=1$

۷. خم $x=a\cos^3 t$، $y=a\sin^3 t$، $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ در شکل ۳۵.۵ از چهار قطعهٔ مساوی تشکیل می‌شود که در نقاط بازگشت روی محورهای مختصات تلاقی می‌کنند. چون شکل این خم شبیه ستاره است گاه آن‌را اختروار‌ه می‌نامند. طول کل این خم را بیابید.



۳۵.۵ اخترو‌ارهٔ $x=a\cos^3 t$، $y=a\sin^3 t$، $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. وقتی t از ۰ به 2π می‌رود، نقطهٔ P خم را درجهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت می‌پیماید. مسألهٔ ۷ را ببینید.

۸. مطلوب است طول خم

$$y=\int_0^x \sqrt{\cos 2t}\,dt$$

از $x=0$ تا $x=\pi/4$.

۹. مطلوب است مسافتی که ذرهٔ $P(x,y)$ بین $t=0$ و $t=\pi$ می‌پیماید درصورتی که مکان آن در زمان t برابر باشد با

$$x=\cos t,\quad y=t+\sin t.$$

(راهنمایی: $\sqrt{2+2\cos t}=2\sqrt{(1+\cos t)/2}$).

۱۰. مطلوب است طول خم

$$x=t-\sin t,\quad y=1-\cos t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

(راهنمایی: $\sqrt{2-2\cos t}=2\sqrt{(1-\cos t)/2}$).

۱۱. مطلوب است مسافتی که ذرهٔ $P(x,y)$ بین $t=0$ و $t=\pi/2$ می‌پیماید درصورتی که مکان آن در زمان t به‌صورت زیر معین شود

$$x=a\cos t+at\sin t,\quad y=a\sin t-at\cos t$$

که در آن a ثابتی مثبت است.

۱۲. مطلوب است مسافتی که ذرهٔ $P(x,y)$ بین $t=0$ و $t=4$ می‌پیماید درصورتی که مکان آن در زمان t چنین باشد

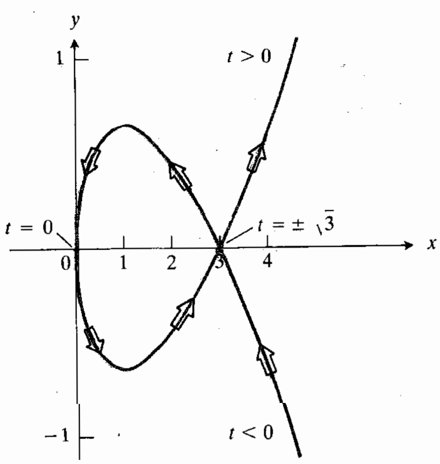
$$x=\frac{t^2}{2},\quad y=\frac{1}{3}(2t+1)^{3/2}.$$

۱۳. مکان ذرهٔ $P(x,y)$ در زمان t چنین است

$$x=\frac{1}{3}(2t+3)^{3/2},\quad y=\frac{t^2}{2}+t.$$

مسافتی را که ذره بین $t=0$ و $t=3$ می‌پیماید بیابید.

۱۴. مطلوب است طول طوق در خم $x=t^2$، $y=(t^3/3)-t$ (شکل ۳۶.۵).



۳۶.۵ خم $x=t^2$، $y=(t^3/3)-t$ در مسألهٔ ۱۴. پیکانها جهت افزایش t را نشان می‌دهند.

۱۵. طول بخشی از خم $x^2=5y^3$ را که درون دایرهٔ $x^2+y^2=6$ قرار دارد بیابید.

۱۶. طول خم $y=mx+b$ را بین $x=0$ و $x=c$ تعیین کنید.

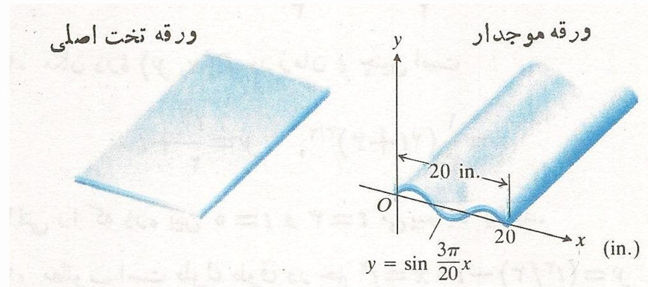
۱۷. نمودار هر تابعی چون $y=f(x)$، $a\leqslant x\leqslant b$، معادلات پارامتریی به‌صورت $x=x$، $y=f(x)$، $a\leqslant x\leqslant b$ دارد. نشان دهید که رابطه‌های (۴) و (۷) نتایج یکسانی درمورد چنین تابعی به‌دست می‌دهند.

۱۸. **ماشین‌حساب** قرار است شرکتی برای ساختن سقف از ورقه‌های

آهنی موجداری مطابق شکل ۳۷.۵ استفاده کند. معادلهٔ مقاطع ورقه‌های موجدار چنین است

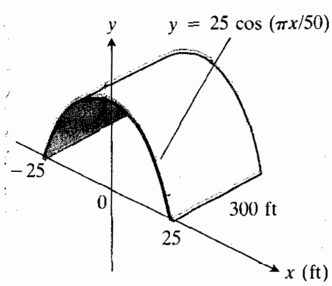
$$y=\sin\frac{3\pi}{20}x,\quad 0\leqslant x\leqslant 20\text{ in}\ .$$

شرکت برای تولید ورقه‌های موجدار، ورقه‌های تخت را بدون ایجاد کشیدگی در آنها پرس می‌کند. پهنای هر ورقهٔ تخت چقدر باید باشد؟ برای تقریب‌زدن طول خم سینوسی از قاعدهٔ سیمپسون با $n=10$ استفاده کنید.



۳۷.۵ پهنای ورقهٔ تخت اصلی چقدر باید باشد؛ مسأله ۱۸ را ببینید.

۱۹. ماشین‌حساب بهشرکتی پیشنهاد می‌شود که در مناقصهٔ مربوط به ساخت تونلی که درشکل ۳۸.۵ دیده می‌شود، شرکت کند. تونل



۳۸.۵ تونل مسألهٔ ۱۹ (شکل مقیاس دقیقی ندارد).

۳۰۰ ft طول دارد و عرض کف آن ۵۰ ft است. مقطع تونل به‌شکل یك طاق از خم $y=25\cos(\pi x/50)$ است. در پایان کار قرار است رویهٔ داخلی تونل (بدون احتساب کف) آب‌بندی شود. هر فوت‌مربع از مادهٔ آب‌بندی‌کننده ۱٫۷۵ دلار قیمت دارد. هزینهٔ مادهٔ آب‌بندی چقدر است؟ (راهنمایی: برای یافتن طول خم کسینوسی از انتگرالگیری عددی استفاده کنید.)

> **TOOLKIT PROGRAMS**
> Integral Evaluator   Super * Grapher
> Parametric Equations

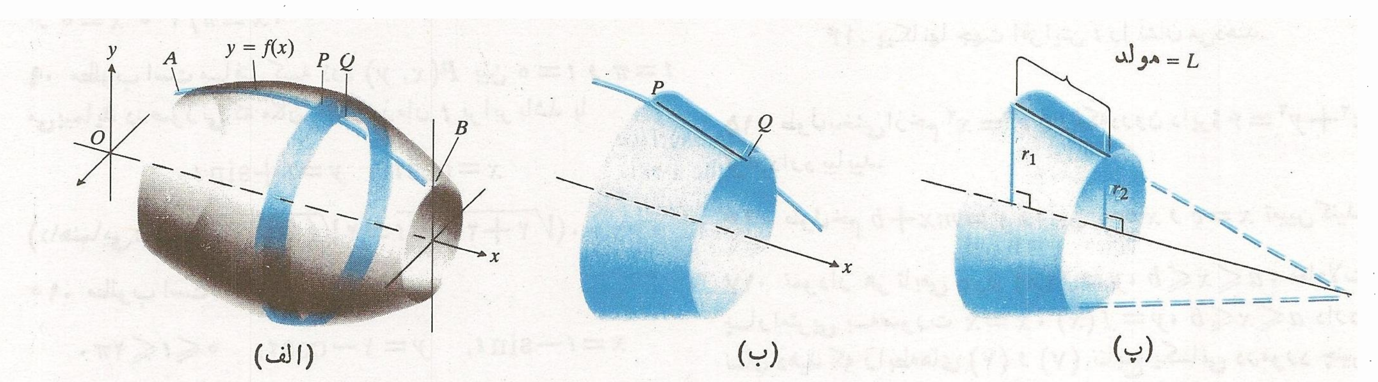
۶.۵ مساحت رویه‌های دورانی

هنگامی‌که طناب‌بازی می‌کنید، طناب رویه‌ای را می‌روبد. چنین به‌نظر می‌رسد که مساحت رویه به‌طول طناب و شعاع دوران هرقطعه از آن بستگی داشته‌باشد. دراین بخش ارتباط میان مساحت یك‌رویهٔ دورانی با طول و شعاع خمی‌که آن را ایجاد می‌کند بررسی می‌شود.

تعریف مساحت رویه و فرمول دکارت

فرض‌کنید خمی چون AB مطابق شکل ۳۹.۵ (الف) حول محور x دوران می‌کند و رویه‌ای پدید می‌آورد. اگر AB را با یك خط‌شکستهٔ محاط درخم نظیرخط‌شکسته‌ای‌که برای‌تعریف‌طول‌قوس در بخش ۵.۵ به‌کار بردیم تقریب بزنیم، هرقطعهٔ PQ از خط شکسته مخروط ناقصی به‌وجود می‌آورد که محورش برمحور x منطبق‌است (تصویر بزرگ‌شدهٔ مخروط ناقص درشکل ۳۹.۵ ب دیده‌می‌شود). مطابق شکل ۳۹.۵ (پ) شعاع قاعده‌های مخروط ناقص را با r_1 و r_2 و مولدآن را با L نشان‌می‌دهیم. بنا براین A، مساحت‌جانبی این مخروط ناقص، برابراست با

$$A=\pi(r_1+r_2)L\,. \qquad (1)$$



۳۹.۵ (الف) رویه‌ای‌که از دوران خم AB حول محور x ایجاد می‌شود مجموعه‌ای است ازنوارهایی نظیرآنچه‌که قوس PQ ایجاد می‌کند. (ب) پاره‌خط PQ با دوران یك‌مخروط ناقص به‌وجود می‌آورد. (پ) ابعاد مهم مخروط ناقص.

مجموع مساحات جانبی این مخروطهای ناقص که از دوران قطعات خط شکستهٔ محاطی از A تا B به‌وجود می‌آیند تقریبی است از S، مساحت رویه‌ای که از دوران خم AB ایجاد می‌شود. این تقریب به‌طریق زیر به‌یك فرمول انتگرالی برای S منجر می‌شود.
فرض می‌کنیم (x, y) مختصات P و $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ مختصات Q باشد. به‌این ترتیب ابعاد مخروط ناقص حاصل از دوران پاره‌خط PQ چنین است

$$r_۱=y,\quad r_۲=y+\Delta y,\quad L=\sqrt{(\Delta x)^۲+(\Delta y)^۲}\,. \qquad (۲)$$

بنا به‌رابطهٔ (۱)، مساحت جانبی مخروط ناقص چنین است

$$\begin{aligned}\text{مساحت جانبی مخروط ناقص} &= \pi(r_۱+r_۲)L \\ &= \pi(۲y+\Delta y)\sqrt{(\Delta x)^۲+(\Delta y)^۲}\,.\end{aligned} \qquad (۳)$$

با جمع کردن مساحات مخروطهای ناقص روی بازهٔ $[a, b]$ از چپ به‌راست داریم

$$\begin{aligned}\text{مجموع مساحات مخروطهای ناقص} &= \sum_{x=a}^{b}\pi(۲y+\Delta y)\sqrt{(\Delta x)^۲+(\Delta y)^۲} \\ &= \sum_{a}^{b}۲\pi\left(y+\tfrac{۱}{۲}\Delta y\right)\sqrt{۱+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^۲}\,\Delta x\,.\end{aligned} \qquad (۴)$$

اگر y و dy/dx توابع پیوسته‌ای از x باشند، می‌توان نشان داد که (دراینجا این کار را انجام نمی‌دهیم) حد این مجموع چنین است

$$S=\int_a^b ۲\pi y\sqrt{۱+\left(\frac{dy}{dx}\right)^۲}\,dx\,. \qquad (۵)$$

برای به‌دست آوردن این حد از $\Delta y(۱/۲)$ در رابطهٔ (۴) چشم پوشیده‌ایم. به‌این ترتیب مساحت رویه را برابر با مقدار انتگرال زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف
مساحت رویه

مساحت رویه‌ای که از دوران خم $y=f(x)$، $a\leqslant x\leqslant b$ حول محور x ایجاد می‌شود چنین است

$$S=\int_a^b ۲\pi y\sqrt{۱+(y')^۲}\,dx\,. \qquad (۶)$$

مثال ۱ مطلوب است مساحت رویهٔ حاصل از دوران خم

$$y=\sqrt{x},\qquad ۰\leqslant x\leqslant ۲$$

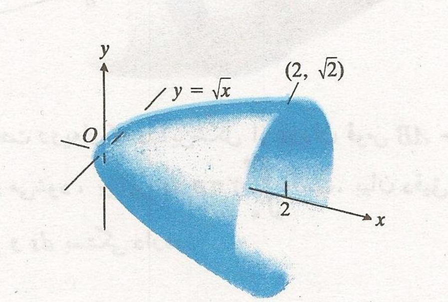
حول محور x بیابید (شکل ۴۰.۵).

حل: برای به‌دست آوردن مساحت رویه، رابطهٔ (۶) را به ازای $y=\sqrt{x}$، $a=۰$، و $b=۲$ به‌کار می‌بریم

$$y=\sqrt{x},\quad y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{۱+(y')^۲}=\sqrt{۱+\frac{۱}{۴x}}=\sqrt{\frac{۴x+۱}{۴x}}=\frac{\sqrt{۴x+۱}}{۲\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned}\int_۰^۲ ۲\pi y\sqrt{۱+(y')^۲}\,dx &= \int_۰^۲ ۲\pi\sqrt{x}\,\frac{\sqrt{۴x+۱}}{۲\sqrt{x}}\,dx \\ &= \pi\int_۰^۲\sqrt{۴x+۱}\,dx \\ &= \pi\cdot\frac{۲}{۳}\cdot\frac{۱}{۴}(۴x+۱)^{۳/۲}\Big]_۰^۲ \\ &= \frac{\pi}{۶}(۲۷-۱)=\frac{۱۳\pi}{۳}\,.\end{aligned}$$



۴۰.۵ مساحت این رویه درمثال ۱ محاسبه می‌شود.

■

صورتهای دیگر انتگرال

اگر محور دوران محور y باشد، به‌جای فرمول (۶) از فرمول زیر استفاده می‌کنیم

$$S=\int_c^d ۲\pi x\sqrt{۱+\left(\frac{dx}{dy}\right)^۲}\,dy\,. \qquad (۷)$$

اگر معادلات خمی که رویه را ایجاد می‌کنند به‌صورت پارامتری باشند، مثلاً به‌این ترتیب که x و y توابعی از متغیر سومی چون t باشند که از a تا b تغییر می‌کند، آنگاه برای محاسبهٔ S

می‌توان از فرمول زیر بهره گرفت

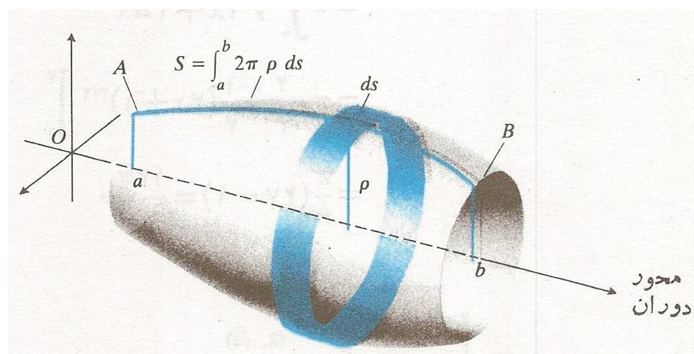
$$S=\int_a^b 2\pi\rho\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\,. \qquad (8)$$

در این فرمول، ρ فاصلهٔ محور دوران از جزء طول قوس است و به‌صورت تابعی از t بیان می‌شود.

همهٔ فرمولهای مربوط به مساحت رویه‌ها به‌صورت زیرند

$$S=\int 2\pi(\text{شعاع})(\text{پهنای نوار})=\int 2\pi\rho\,ds \qquad (9)$$

که در آن، ρ شعاع دوران جزء طول قوس ds (شکل ۴۱.۵) است. اگر بخواهید تنها یك فرمول درمورد مساحت رویه به خاطر بسپارید، این فرمول مناسب است. دراین‌صورت، درهرمسألهٔ خاص باید تابع شعاع، ρ، و دیفرانسیل طول قوس، ds، را برحسب یك متغیر بیان کرده و حدود انتگرالگیری را مشخص کنید.



۴۱.۵ مساحت رویه‌ای که دراین‌شکل از دوران قوس AB حول محور دوران ایجاد می‌شود، برابر $\int_a^b 2\pi\rho\,ds$ است. بیان دقیق آن بسته فرمولهای ρ و ds بستگی دارد.

مثال ۲ پاره‌خط

$$x=\sin^2 t,\quad y=\cos^2 t,\quad 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$$

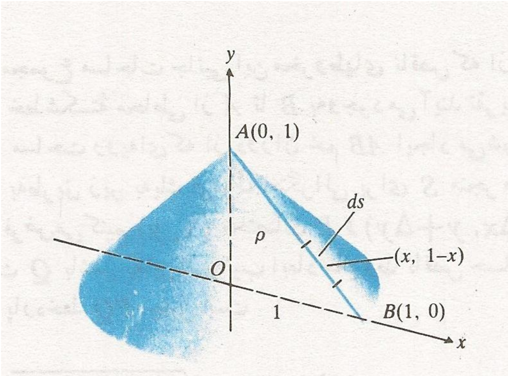
از مثال ۲ در بخش ۵.۵ حول محور y دوران می‌کند و مخروطی به‌وجود می‌آورد. مساحت رویهٔ حاصل را بیابید.

حل: شکل ۴۲.۵ را ببینید. از رابطهٔ (۸) استفاده می‌کنیم. فاصلهٔ محور دوران تا یك جزء نمونه از قوس ds چنین است

$$\rho=x=\sin^2 t\,.$$

اگر در رابطهٔ ۸ از این رابطه و نیز از روابط

$$\frac{dx}{dt}=2\sin t\cos t,\qquad \frac{dy}{dt}=-2\cos t\sin t$$



۴۲.۵ از دوران پاره‌خط AB حول محور y یك مخروط به‌دست می‌آید.

استفاده کنیم داریم

$$\int_a^b 2\pi\rho\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{\pi/2} 2\pi\sin^2 t\sqrt{8\sin^2 t\cos^2 t}\,dt$$

$$=4\pi\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\sin^3 t\cos t\,dt$$

$$=4\pi\sqrt{2}\,\frac{1}{4}\sin^4 t\Big]_0^{\pi/2}$$

$$=\pi\sqrt{2}\,(1-0)$$

$$=\pi\sqrt{2}\,.$$

دراین‌مورد، برای‌محاسبهٔ مساحت رویه می‌توان از فرمول مساحت جانبی یك مخروط نیز بهره گرفت

$$\text{مساحت جانبی مخروط}=\frac{\text{محیط قاعده}}{2}\times\text{طول مولد}=\pi\sqrt{2}\,.$$

■

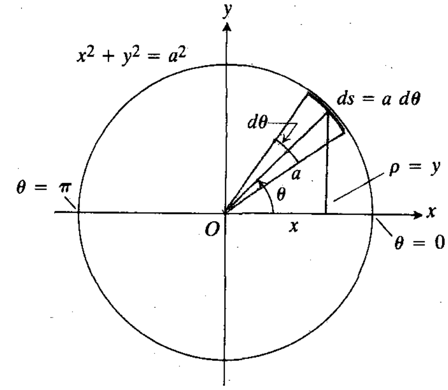
مثال ۳ مطلوب است مساحت کره‌ای که از دوران دایره $x^2+y^2=a^2$ حول محور x به‌وجود می‌آید (شکل ۴۳.۵).

حل: نیمهٔ بالایی این دایره کل کره را ایجاد می‌کند. معادلات این نیمدایره اینها هستند

$$x=a\cos\theta,\quad y=a\sin\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi\,.$$

بنابراین

$$dx=-a\sin\theta\,d\theta,\quad dy=a\cos\theta\,d\theta$$



۴۳۰۵ برای به‌دست آوردن مساحت رویهٔ کره‌ای که از دوران دایرهٔ $x^2+y^2=a^2$ حول محور x به‌وجود می‌آید، θ را از ۰ تا π تغییر می‌دهیم. نیمهٔ بالایی دایره، کل کره را ایجاد می‌کند.

و

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$$
$$=\sqrt{a^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta}\,d\theta=a\,d\theta\,.$$

و

$$\rho=y=a\sin\theta$$

اکنون از رابطهٔ (۹) چنین به‌دست می‌آید

$$S=\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}2\pi\rho\,ds=\int_0^{\pi}2\pi a\sin\theta\,a\,d\theta$$
$$=2\pi a^2\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta$$
$$=2\pi a^2\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi}$$
$$=2\pi a^2(1+1)=4\pi a^2\,.$$
■

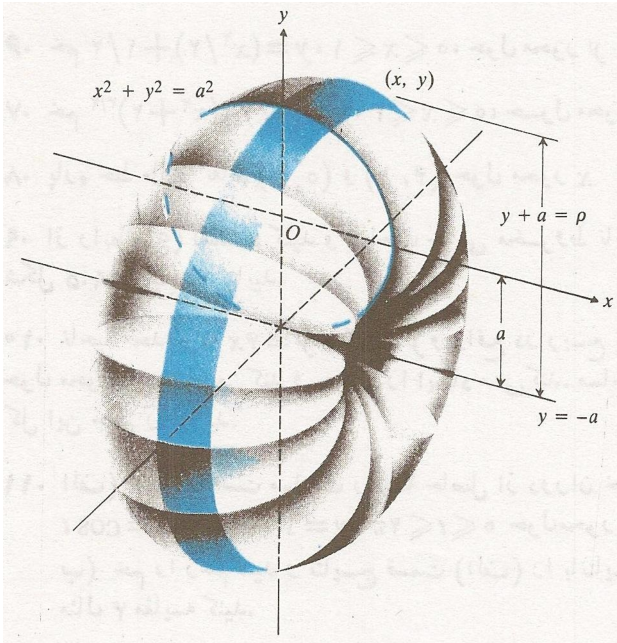
مثال ۴ دایرهٔ $x^2+y^2=a^2$ را حول خط $y=-a$ که در نقطهٔ $(0,-a)$ بر دایره مماس است دوران می‌دهیم. مطلوب است مساحت رویهٔ ایجاد شده. شکل ۴۴۰۵ را ببینید.

حل: در اینجا باید کل دایره را در نظر گرفت. یعنی باید θ را از ۰ تا 2π تغییر داد. شعاع دوران چنین است

$$\rho=y+a$$

و داریم

$$2\pi\rho\,ds=2\pi(y+a)a\,d\theta=2\pi(a\sin\theta+a)a\,d\theta$$
$$=2\pi a^2(\sin\theta+1)\,d\theta\,.$$



۴۴۰۵ از دوران دایرهٔ $x^2+y^2=a^2$ حول خط $y=-a$ جسمی نظیر این شکل ایجاد می‌شود. مساحت رویهٔ این جسم در مثال ۴ محاسبه می‌شود.

از این‌رو بنا به رابطهٔ (۹) داریم

$$S=\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}2\pi\rho\,ds=\int_0^{2\pi}2\pi a^2(\sin\theta+1)\,d\theta$$
$$=2\pi a^2\Big[-\cos\theta+\theta\Big]_0^{2\pi}$$
$$=2\pi a^2((-1+2\pi)-(-1+0))$$
$$=4\pi^2a^2\,.$$
■

مسأله‌ها

درمسائل ۱–۸، مساحت رویهٔ حاصل از دوران خم داده شده را حول محور داده شده بیابید.

۱. خم $y=x^3$، $0\leqslant x\leqslant 1$، حول محور x

۲. خم $y=x^2$، $0\leqslant x\leqslant 2$، حول محور y

۳. خم $y=(x^3/3)+1/(4x)$، $1\leqslant x\leqslant 3$، حول خط $y=-1$

۴. خم $y=(x^3/6)+1/(2x)$، $1\leqslant x\leqslant 3$، حول محور x

۵. خم $x=(y^4/4)+1/(8y^2)$، $1\leqslant y\leqslant 2$، حول محور x

۶. خم $y=(x^۲/۲)+۱/۲$، $۰\leqslant x\leqslant ۱$، حول محور y

۷. خم $y=(۱/۳)(x^۲+۲)^{۳/۲}$، $۰\leqslant x\leqslant ۳$، حول محور y

۸. پاره خط مار بر نقاط $(۰, ۴)$ و $(۲, ۱)$ حول محور x

۹. از رابطهٔ (۶) استفاده کنید و مساحت جانبی مخروط ناقص شکل ۳۹.۵ (پ) را بیابید.

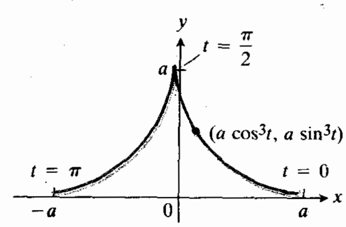
۱۰. ناحیهٔ محدود به $y=۴x$ و $y=x^۳$ و واقع در ربع اول حول محور x دوران می‌کند و جسمی را ایجاد می‌کند. مساحت کل این جسم را بیابید.

۱۱. الف) مطلوب است مساحت رویهٔ حاصل از دوران خم $x=\cos t$، $y=۱+\sin t$، $۰\leqslant t\leqslant ۲\pi$ حول‌محور x.

ب) خم را رسم کنید و نتایج قسمت (الف) را با نتایج مثال ۴ مقایسه کنید.

۱۲. مطلوب است مساحت رویهٔ حاصل از دوران خم $x=t^۲$، $y=t$، $۰\leqslant t\leqslant ۱$، حول محور x.

۱۳. مطلوب‌است مساحت رویهٔ حاصل‌از دوران $x=a\cos^۳ t$، $y=a\sin^۳ t$، $۰\leqslant t\leqslant \pi$حول محور x (شکل۴۵.۵ را ببینید).

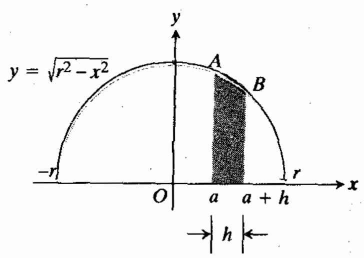


۴۵.۵ خم $x=a\cos^۳ t$، $y=a\sin^۳ t$، $۰\leqslant t\leqslant\pi$ در مسألهٔ ۱۳.

۱۴. مطلوب است مساحت رویهٔ حاصل از دوران خم زیر حول محور y

$$x=t+۱,\quad y=\frac{t^۲}{۲}+t,\quad ۰\leqslant t\leqslant ۴.$$

۱۵. آیا می‌دانستید که اگر کره‌ای را به برشهایی با پهنای مساوی تقسیم کنیم، مساحت جانبی همهٔ برشها برابرند؟ برای پی بردن به‌دلیل این مطلب، فرض‌کنید نیمدایرهٔ $y=\sqrt{r^۲-x^۲}$ در شکل ۴۶.۵ حول محور x دوران می‌کند و کره‌ای را به‌وجود می‌آورد. نیز فرض‌کنید AB قوسی از نیمدایره باشدکه در بالای بازه‌ای به‌طول h واقع بر محور x قرار دارد. نشان دهیدکه مساحتی که از دوران AB ایجاد می‌شود به‌محل بازه بستگی‌ندارد. (البته به‌طول بازه بستگی دارد.)



۴۶.۵ نیمدایرهٔ مربوط به مسألهٔ ۱۵.

۷.۵ مقدار میانگین یك تابع

همهٔ ما با روش یافتن مقدار میانگین تعدادی متناهی از داده‌ها آشناییم. مثلاً اگر $y_۱$، $y_۲$، ...، y_n نمرات n شاگرد یك‌كلاس باشد، میانگین نمرات کلاس برابر است با

$$y_{\text{av}}=\frac{y_۱+y_۲+\cdots+y_n}{n}. \qquad (۱)$$

وقتی تعداد داده‌ها نامتناهی باشد، مثلاً وقتی‌که y تابعی پیوسته چون $f(x)$ روی بازه‌ای چون $a\leqslant x\leqslant b$ باشد، رابطهٔ (۱) را نمی‌توان به‌کار برد، زیرا این معادله به‌صورت مبهم ∞/∞ درمی‌آید. در چنین حالتی مقدار میانگین y نسبت به x را با انتگرال زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف

مقدار میانگین یك تابع

مقدار میانگین $y=f(x)$ نسبت به x برابر است با

$$y_{\text{av}}=\frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (۲)$$

تساوی (۲) یك تعریف است و بنابراین نیازی به‌اثبات ندارد. اما بحثی دربارهٔ آن می‌تواند در توضیح این مطلب که چرا این‌فرمول خاص برای‌تعریف میانگین به‌کارمی‌رود سودمند باشد. راه رسیدن به‌این فرمول چنین است: ازکل «جامعهٔ» مقادیر x، $a\leqslant x\leqslant b$، «نمونه» ای چون $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n که توزیعی یکنواخت دارد و $a<x_۱<\cdots<x_n=b$، برمی‌گزینیم. سپس به‌کمك رابطهٔ (۱) میانگین مقادیر تابع

$$y_۱=f(x_۱),\quad y_۲=f(x_۲),\quad \ldots,\quad y_n=f(x_n)$$

متناظر با این xهای نمونه را محاسبه می‌کنیم. داریم

$$\frac{y_۱+y_۲+\cdots+y_n}{n}=\frac{f(x_۱)+f(x_۲)+\cdots+f(x_n)}{n}. \qquad (۳)$$

چون باید xها یکنواخت باشند، فاصلهٔ بین آنها را Δx می‌گیریم. پس

$$x_۲-x_۱=x_۳-x_۲=\cdots=x_n-x_{n-۱}=\Delta x$$

و

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}.$$

حال در رابطهٔ (۳) در مخرج به جای n، کسر $(b-a)/\Delta x$ را قرار می‌دهیم

$$\frac{f(x_۱)+f(x_۲)+\cdots+f(x_n)}{(b-a)/\Delta x}$$
$$=\frac{f(x_۱)\Delta x+f(x_۲)\Delta x+\cdots+f(x_n)\Delta x}{b-a}.$$

اکنون اگر n بزرگ و Δx کوچك باشد، عبارت

$$f(x_۱)\Delta x+f(x_۲)\Delta x+\cdots+f(x_n)\Delta x$$
$$=\sum_{k=۱}^{n} f(x_k)\Delta x$$

تقریباً برابر $\int_a^b f(x)\,dx$ می‌شود. در واقع حد این عبارت وقتی که $n\to\infty$ دقیقاً برابر است با

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_۱)\Delta x+f(x_۲)\Delta x+\cdots+f(x_n)\Delta x}{b-a}$$
$$=\frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

این عبارت همان عبارتی است که بنا به‌تساوی (۲) تعریف مقدار میانگین y است.

مثال ۱ مقدار میانگین تابع $y=\sqrt{x}$ نسبت به x از $x=۰$ تا $x=۴$ چنین است

$$y_{\text{av}}=\frac{۱}{۴}\int_۰^۴\sqrt{x}\,dx=\frac{۱}{۴}\cdot\frac{۲}{۳}x^{۳/۲}\Big]_۰^۴$$
$$=\frac{۱}{۶}\times ۸=\frac{۴}{۳}.$$

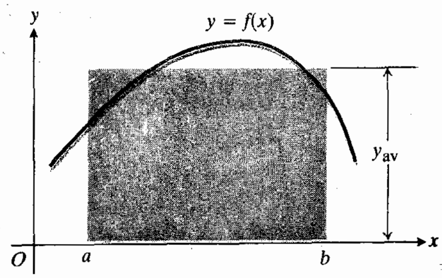
■

مثال ۲ (این مثال یك تعبیر هندسی از رابطهٔ (۲) به‌ازای $f\geqslant ۰$ است.)

اگر طرفین رابطهٔ (۲) را در $b-a$ ضرب کنیم داریم

$$y_{\text{av}}\cdot(b-a)=\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (۴)$$

طرف راست رابطهٔ (۴) مساحت بین خم $y=f(x)$ و محور x از $x=a$ تا $x=b$ است. طرف چپ این تساوی را می‌توان به‌عنوان مساحت مستطیلی به‌ارتفاع y_{av} و قاعدهٔ $b-a$ تعبیر کرد. بنابراین رابطهٔ (۴) تعبیری هندسی از y_{av} به عنوان ارتفاع خم $y=f(x)$ به‌دست می‌دهد که می‌تواند درساختن مستطیلی به‌کار رود که قاعده‌اش بازهٔ $[a,b]$ و مساحتش برابر مساحت زیر خم باشد (شکل ۴۷.۵).



۴۷.۵ تعبیری از
$$y_{\text{av}}=\left[\frac{۱}{(b-a)}\right]\int_a^b f(x)\,dx$$
با درنظرگرفتن انتگرال به‌عنوان مساحت به‌دست می‌آید.

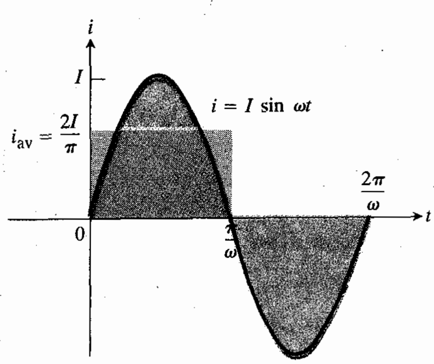
■

ازمقادیرمیانگین درمحاسبهٔ ولتاژ و جریان مؤثر درمدارهای الکتریکی استفاده می‌کنیم.

مثال ۳ جریان الکتریکی برق شهر، جریان متناوبی است که معادلهٔ آن را می‌توان با یك تابع سینوسی بیان کرد

$$i=I\sin\omega t. \qquad (۵)$$

شکل ۴۸.۵ نمودار این تابع را نشان می‌دهد. رابطهٔ (۵) جریان i را برحسب آمپر به‌صورت تابعی از زمان برحسب ثانیه بیان



۴۸.۵ مقدار میانگین یك جریان سینوسی درنیم‌سیکل برابر $۲I/\pi$ و در یك سیکل کامل برابر صفر است.

می‌کند. دامنهٔ I مقدار جریان ماکسیمم و $2\pi/\omega$ دورهٔ تناوب است.
مقدار میانگین i در نیم‌سیکل چنین است

$$i_{\text{av}}=\frac{1}{\pi/\omega-0}\int_{0}^{\pi/\omega} I\sin\omega t\,dt$$

$$=\frac{I\omega}{\pi}\int_{0}^{\pi/\omega}\sin\omega t\,dt=\frac{I\omega}{\pi}\left[-\frac{\cos\omega t}{\omega}\right]_{0}^{\pi/\omega}$$

$$=\frac{I}{\pi}(-\cos\pi+\cos 0)=\frac{2}{\pi}I\,.$$

مقدار میانگین i در یك سیکل کامل (i_{av}) چنین است

$$i_{\text{av}}=\frac{\omega}{2\pi}\int_{0}^{2\pi/\omega}I\sin\omega t\,dt=0\,.$$

اگر جریان را با یك گالوانومتر با پیچك متحرك معمولی اندازه بگیریم، این وسیله جریان را صفر نشان می‌دهد.

برای اندازه‌گیری جریان مؤثر از وسیله‌ای استفاده می‌کنیم که جذر مقدار میانگین مربع جریان یعنی

$$I_{\text{rms}}=\sqrt{(i^{2})_{\text{av}}}\tag{6}$$

را اندازه بگیرد. اندیس rms به‌معنی «جذر میانگین مربع» است. چون مقدار میانگین $i^{2}=I^{2}\sin^{2}\omega t$ در یك سیکل کامل برابر است با

$$(i^{2})_{\text{av}}=\frac{\omega}{2\pi}\int_{0}^{2\pi/\omega}I^{2}\sin^{2}\omega t\,dt=\frac{I^{2}}{2}\,.\tag{7}$$

پس جریان مؤثر (rms) چنین است

$$I_{\text{rms}}=\sqrt{\frac{I^{2}}{2}}=\frac{I}{\sqrt{2}}\,.\tag{8}$$

به‌همین ترتیب مقدار جذر میانگین مربع ولتاژ سینوسی $v=V\sin\omega t$ چنین است

$$V_{\text{rms}}=\frac{V}{\sqrt{2}}\,.\tag{9}$$

مقادیری که در مورد ولتاژها و جریانهای برق شهر اعلام می‌شود همواره مقادیر rms (مؤثر) اند. بنابراین «۱۱۵ ولت ac» به معنی این است که ولتاژ rms برابر ۱۱۵ ولت است. مقدار ماکسیمم ولتاژ از رابطهٔ (۹) به‌دست می‌آید

$$V=\sqrt{2}\,V_{\text{rms}}=\sqrt{2}\times 115\approx 163 \quad \text{ولت}$$

که به‌مقدار قابل ملاحظه‌ای بیشتر از ولتاژ مؤثر است. ■

مثال ۴ مسافتی که جسم‌متحرکی با سرعت $|v(t)|$ روی‌خط‌راستی از لحظهٔ $t=a$ تا لحظهٔ $t=b$ می‌پیماید چنین است

$$\text{مسافت پیموده‌شده}=\int_{a}^{b}|v(t)|\,dt\,.$$

بنابراین، سرعت میانگین (متوسط) این حرکت چنین است

$$\text{سرعت میانگین}=\frac{\text{مسافت پیموده‌شده}}{b-a}=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}|v(t)|\,dt\,.$$

از این‌رو، سرعت متوسط برابر مقدار میانگین $|v(t)|$ روی $[a,b]$ است. ■

□ میانگین موجودی روزانه

از مفهوم مقدار میانگین در نظریه‌های اقتصادی برای بررسی میانگین موجودی روزانه استفاده‌می‌شود. اگر $I(x)$ تعداد رادیوها یا کفشها یا هرکالای دیگری باشد که کارخانه‌ای در روز x در اختیار دارد، آنگاه

$$I_{\text{av}}=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}I(x)\,dx$$

را **میانگین موجودی روزانه** آن کالا درمدت $a\leqslant x\leqslant b$ می‌نامند. هزینه‌های محل انبارکردن، آب و برق و گاز و تلفن، بیمه، و نگهداری، بخش عمده‌ای از هزینه‌های انبارداری است، و موجودی روزانهٔ کارخانه می‌تواند نقش مهمی در تعیین این هزینه‌ها داشته باشد.

مثال ۵ فرض کنید به‌عمده‌فروشی هر ۳۰ روز یکبار ۱۲۰۰ صندوق شکلات می‌رسد. او شکلاتها را به‌میزان ثابت به خرده‌فروشها می‌فروشد، و x روز پس از رسیدن محموله تعداد صندوقهای موجود برابر است با $I(x)=1200-40x$. میانگین موجودی روزانه را بیابید. همچنین مطلوب است میانگین هزینه روزانهٔ نگهداری شکلاتها به‌فرض اینکه هزینهٔ نگهداری یك صندوق برابر ۳ ریال در روز باشد.

حل: میانگین موجودی روزانه چنین است

$$I_{\text{av}}=\frac{1}{30-0}\int_{0}^{30}(1200-40x)\,dx$$

$$=\frac{1}{30}\left[1200x-20x^{2}\right]_{0}^{30}=600\,.$$

میانگین هزینهٔ روزانهٔ نگهداری شکلاتها برابر است با حاصلضرب هزینهٔ نگهداری یك صندوق شکلات در میانگین موجودی روزانه. پس

$$\text{میانگین هزینهٔ روزانهٔ نگهداری شکلاتها}=3\times 600=1800$$

یعنی برابر ۱۸۰۰ ریال در روز است. ■

مسأله‌ها

درمسائل ۱ـ۴، مقدار میانگین تابع‌مفروض $f(x)$ را نسبت به x در دامنهٔ مفروض بیابید. در هرمورد $y=f(x)$ را رسم کنید و مستطیلی بکشیدکه ارتفاعش میانگین مختصهای y باشد.

۱. الف) $\sin x,\quad ۰\leqslant x\leqslant \pi/۲$

ب) $\sin x,\quad ۰\leqslant x\leqslant ۲\pi$

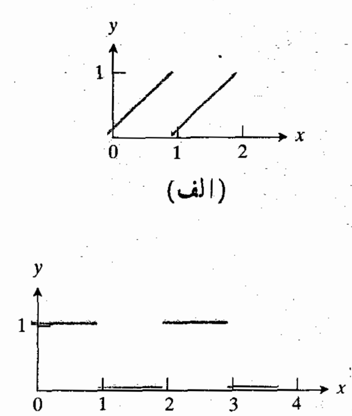
۲. الف) $\sin^۲ x,\quad ۰\leqslant x\leqslant \pi/۲$

ب) $\sin^۲ x,\quad \pi\leqslant x\leqslant ۲\pi$

۳. $\sqrt{۲x+۱},\quad ۴\leqslant x\leqslant ۱۲$

۴. $۱/۲+(۱/۲)\cos ۲x,\quad ۰\leqslant x\leqslant \pi$

۵. مقادیرمیانگین توابع رسم‌شده درشکل ۴۹.۵ را بیابید.



۴۹.۵ نمودارهای مسألهٔ ۵.

۶. انتگرال موجود در رابطهٔ (۷) مثال ۳ را محاسبه‌کنید.

۷. نشان دهیدکه مقدار جذر میانگین مربع ولتاژ $v=V\sin\omega t$ در مثال ۳ برابر است با $V_{\text{rms}}=V/\sqrt{۲}$.

۸. اگرجریان الکتریکی برق شهر ۲۰ آمپر (rms) باشد، مقدار ماکسیمم (دامنهٔ) این‌جریان چقدراست؟

۹. به‌یك‌انبار هر ۳۰ روز ۴۵۰ صندوق‌کالامی‌رسد. تابع‌موجودی (تعداد صندوقهای موجود به‌صورت تابعی‌از روز) عبارت‌است از $I(x)=۴۵۰-x^۲/۲$. میانگین موجودی روزانه را بیابید. اگرهزینهٔ نگهداری یك‌صندوق کالا ۲ ریال در روز باشد میانگین هزینهٔ روزانهٔ نگهداری را بیابید.

۱۰. به‌یك انبار هر ۶۰ روز ۶۰۰ صندوق‌کالا می‌رسد. تعداد صندوقهای موجود، x روز پس از رسیدن هر محموله عبارت‌است از $I(x)=۶۰۰-۲۰\sqrt{۱۵x}$. میانگین روزانهٔ موجودی را بیابید. اگرهزینهٔ نگهداری هرصندوق ۱/۲ ریال باشد، میانگین هزینهٔ روزانهٔ نگهداری را بیابید.

۱۱. **ماشین‌حساب** مقدار میانگین‌تابع دمای

$$f(x)=۳۷\sin\left[\frac{۲\pi}{۳۶۵}(x-۱۰۱)\right]+۲۵$$

را برای یك‌سال (۳۶۵ روز) محاسبه‌کنید (مثال ۲ بخش ۶.۲ را ببینید). یك راه برای براورد میانگین دمای هوای سالانه در فربانکز آلاسکا همین است. طبق آمار رسمی‌سازمان ملی‌هواشناسی آمریکا، میانگین معمولی دمای هوای روزانه در سال ۲۵٫۷°F است‌که اندکی بیشتر از مقدار میانگین $f(x)$ است. شکل ۲۶.۲ علت این‌امر را نشان می‌دهد.

۱۲. **ماشین‌حساب**

الف) به‌کمك قاعده ذوزنقه‌ای میانگین نور خروجی لامپ فلاش نمرهٔ ۲۲ درمسألهٔ ۱۸ بخش۹.۴ را درمدت از $t=۰$ تا $t=۶۰$ میلی‌ثانیه برحسب‌لومن بیابید. اطلاعات موردنیاز را ازجدول ۶.۴ به‌دست‌آورید.

ب) یك‌لامپ‌چراغ برق ۶۰ وات بانوری‌برابر با ۷۶۵ لومن چه‌مدت باید روشن باشد تا نوری‌که (برحسب لومن) در میلی‌ثانیه تولید می‌کند برابر لامپ فلاش نمرهٔ ۲۲ قسمت الف شود.

۱۳. سقوط از حالت سکون بر زمین. اگر مسافت برحسب فوت و زمان برحسب‌ثانیه اندازه‌گیری شود، معادلات‌حرکت جسمی‌که‌از حالت سکون درخلأ ونزدیك سطح زمین‌سقوط می‌کندچنین‌است

$$s=۱۶t^۲،\quad v=۳۲t\quad \text{و}\quad v=۸\sqrt{s}.$$

جسم در ۲ ثانیهٔ نخست، ۶۴ ft سقوط می‌کند.

الف) $v=۳۲t$ را به‌ازای $۰\leqslant t\leqslant ۲$ و $v=۸\sqrt{s}$ را به‌ازای $۰\leqslant s\leqslant ۶۴$ رسم‌کنید.

ب) سرعت متوسط جسم را نسبت به‌زمان در ۲ ثانیهٔ اول سقوط بیابید.

پ) سرعت متوسط جسم‌را نسبت به مسافت در ۲ ثانیهٔ اول سقوط بیابید.

۱۴. سقوط از حالت سکون برماه. جسمی از حالت سکون و واقع درنزدیك سطح ماه برآن‌سقوط می‌کند. درماه شتاب گرانش ۱٫۶۲ $m/sec^۲$ است. معادلات حرکت جسم عبارت است از

$$s=۰٫۸۱t^۲،\quad v=۱٫۶۲t\quad \text{و}\quad v=\sqrt{۳٫۲۴s}.$$

دراین معادلات، s برحسب متر، t برحسب ثانیه، و v برحسب متر بر ثانیه است. مسافت طی شده دوثانیه پس‌از رها شدن ازحالت سکون برابر است با $s = ۰٫۸۱(۲)^۲ = ۳٫۲۴\,\mathrm{m}$.

الف) نمودار $v = ۱٫۶۲t$ را به‌ازای $۰ \leqslant t \leqslant ۲$ و نمودار $v = \sqrt{۳٫۲۴s}$ را به‌ازای $۰ \leqslant s \leqslant ۳٫۲۴$ رسم کنید.

ب) سرعت متوسط جسم را نسبت به زمان در ۲ ثانیهٔ اول سقوط بیابید.

پ) سرعت متوسط جسم را نسبت به مسافت در ۲ ثانیهٔ اول سقوط بیابید.

۱۵. فرض می‌کنیم تابع f بر $[a, b]$ مشتقپذیر است. درفصل ۱ آهنگ متوسط تغییر f در $[a, b]$ را با عبارت زیرتعریف کردیم

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

و آهنگ لحظه‌ای تغییر f در x را با $f'(x)$ تعریف کردیم. در این بخش مقدار میانگین یك تابع را تعریف کردیم. برای اینکه تعریف جدید میانگین باتعریف قدیمی‌آن سازگار باشد بهتراست مقدار میانگین f' در $[a, b]$ را چنین تعریف کنیم

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

نشان دهیدکه این تعریف با تعریف قبلی سازگار است.

۸.۵ گشتاور و مرکز جرم

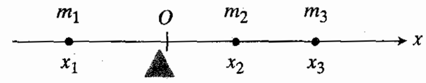
در تحلیل سازه‌ها وسیستمهای مکانیکی در مهندسی و فیزیك، غالباً جرم آنها را چنان درنظرمی‌گیرندکه گویی دریك نقطه متمرکز ند. این نقطه را مرکز جرم می‌نامند. رفتار سیاره‌ای کـه دورخورشید می‌گردد مانند رفتار یك جرم نقطه‌ای است که حول جرم نقطه‌ای دیگر می‌گردد. وقتی کـه صفحه‌ای تخت را روی نوك انگشتمان به‌حالت تعادل درمی‌آوریم،نوك انگشت درمرکز جرم صفحه قرار می‌گیرد. وقتی‌که میله‌ای نازك و بلند را روی لبهٔ چاقویی به‌حالت تعادل درمی‌آوریم، تیغهٔ چاقو درست زیر مرکز جرم میلـه قرار می‌گیرد. الاکلنگ روی مـرکز جرمش به‌حالت تعادل مـی‌رسد. آچاری‌که در حال سقوط است ممکن است حول مرکـز جرمش دوران‌کند، اما خود مرکز جرم در امتـداد یك خط راست سقوط می‌کند(شکل ۵۰.۵).

باید روش تعیین مرکز جرم راکه اساساً یك مسألهٔ ریاضی است بـدانیم. در این بخش چگونگـی حل این مسألـه را نشان می‌دهیـم و مـرکز جرم تعدادی از شکلهای متداول را بـه‌دست می‌آوریم ولی دراینجا تنها به‌اشکال یك یا دو بعدی می‌پردازیـم. اشکال سه بعدی راکه معمولاً نیاز به انتگرالگیریهای پیچیده‌تری دارند درفصل ۱۸ بررسی می‌کنیم.

۵۰.۵ تصویری ازیك آچار در حال سقوط که مرکز جرمش با یك ضربدر مشخص شده است. هرچند آچار ضمن سقوط می‌چرخـد، اما مرکز جرمش در امتداد یك خط راست سقوط می‌کند. این مطلب را می‌توانید بـا استفاده ازیك خط‌کش تحقیق کنید.

جرمهای روی یك خط

اگر مطابق شکل ۵۱.۵ سه جرم m_1، m_2، و m_3 روی محـور x باشند و نقطهٔ اتکای محور در مبدأ باشد،این سیستم ممکن‌است در حالت تعادل باشد ویا نباشد. هرکدام ازاین جرمها نیرویی برابر $m_i g$ (حاصلضرب جـرم در شتاب گرانش) به‌طـرف پایین وارد



۵۱۰۵ جرمهای روی محور x.

می‌آورد وهریك ازاین نیروها تمایل دارد محـور را حـول مبدأ بچرخاند. این کیفیت را **گشتاور نیرو** می‌نامندکـه بنا به‌تعـریف بـرابـر است با حاصلضرب نیروی $m_i g$ در x_i یعنی در فاصلهٔ علامتدار جرم تا مبدأ. فاصلهٔ x_i در مورد جرمهای سمت چپ مبدأ منفی و در مورد جـرمهای سمت راست مبدأ مثبت است. بنا براین جـرمهای سمت چپ و راست مبـدأ گشتاورهای مخالـف ایجاد می‌کنند.

کل گشتاور نیرو، یا تمایل سیستم به‌گردش حول مبدأ برابر است با مجموع $m_1gx_1+m_2gx_2+m_3gx_3$. اگر این مجموع برابر صفر باشد سیستم متعادل ودرغیراین صورت نامتعادل است.

$$\text{گشتاور} = m_1gx_1+m_2gx_2+m_3gx_3 \qquad (۱)$$

اگر از g فاکتور بگیریم، گشتاور نیرو چنین می‌شود

$$\underset{\text{ویژگی محیط}}{g}(\underbrace{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}_{\text{ویژگی سیستم}}) = g\sum m_i x_i \,. \qquad (۲)$$

بنا براین، گشتاور بـرابـر است با حاصلضرب شتاب گـرانش g (ویـژگـی محیطـی کـه سیستم درآن قـرار دارد) در مقـدار $m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3$ (ویژگی خود سیستم که ثابت است و به محیط بستگی ندارد.)

مقدار $m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3$ که از این پس به صورت $\sum m_i x_i$ نوشته می‌شود **گشتاور سیستم حول مبدأ** نام دارد

$$M_O = \text{گشتاور حول مبدأ} = \sum m_i x_i \,.$$

در هر جایی‌که سیستم قـرار داشته‌باشد، درماه، در مـریخ، یا در زمین، گشتاور یکسان است.

درچه نقطهٔ $\bar{x}$ی از محور، کل جرم، $\sum m_i$، را قرار دهیم تاهمان گشتاور نیرو را ایجاد کند؟ برای یافتن این محل دوگشتاور را مساوی قرارمی‌دهیم ومعادلهٔ حاصل‌را نسبت به $\bar{x}$ حل می‌کنیم.

$$\bar{x}\sum m_i g = \sum x_i m_i g \qquad (۳)$$

یا

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i m_i g}{\sum m_i g}$$

$$= \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}$$ (از g فاکتور می‌گیریم و آن را ازصورت ومخرج حذف می‌کنیم)

$$= \frac{\sum x_i m_i}{M} \qquad (M=\sum m_i)$$

$$= \frac{\text{گشتاور سیستم}}{\text{جرم سیستم}} \,.$$

به‌دونکته باید توجه‌کرد: نخست، بـرای محاسبهٔ $\bar{x}$ گشتاورسیستم حول مبدأ را برجرم سیستم تقسیم می‌کنیم. دوم، نبودن g حاکی است‌که $\bar{x}$ یك ویژگی ذاتی سیستم است وبه‌محیط بستگی ندارد.

اهمیت $\bar{x}$ دراین‌است‌که این‌کمیت **مرکز جرم سیستم** است. سیستم وقتی متعادل می‌شود که نقطهٔ اتکا در $\bar{x}$ قرار گیرد. گشتاور هرکدام ازجرمها حول $\bar{x}$ برابراست با $m_i g(x_i-\bar{x})$ یعنی برابر است با حاصلضرب وزن $m_i g$ در فاصلهٔ علامتدار جرم m_i از $\bar{x}$ یعنی $x_i-\bar{x}$. بنا به‌محاسبات زیرمجموع این گشتاورها صفر است

$$\text{گشتاور حول } \bar{x} = \sum m_i g(x_i-\bar{x})$$

$$= g\left(\sum m_i x_i - \bar{x}\sum m_i\right)$$

$$= g\left(\sum m_i x_i - \bar{x}M\right)$$

$$= g\left(\sum m_i x_i - \frac{\sum m_i x_i}{M}M\right)$$

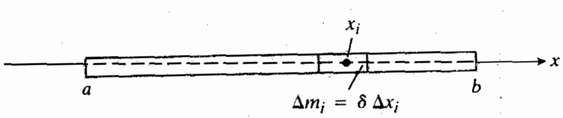
$$= g(0) = 0 \,.$$

سیمها و میله‌های باریك

در بسیاری از کاربردها، می‌خواهیم مرکز جرم یك‌سیم یا میله راست، یا نوار فلزی باریك را پیدا کنیم. درچنین مواردی‌کـه می‌تـوان فرض‌کرد توزیع‌جرم پیوسته‌است، چنانکه خواهیم دید علائم‌جمع درفرمولهای مرکزجرم به‌علائم انتگرال تبدیل می‌شود.

نوار باریك وبلندی را درنظر بگیرید‌که مطابق شکل ۵۲۰۵ به‌قطعات‌کوچکی با جرم Δm_i تقسیم شده‌است.هرقطعه طولی برابر Δx واحد دارد و فاصله‌اش ازمبدأ تقریباً به‌اندازهٔ x_i واحداست. اولاً مرکزجرم نوار، $\bar{x}$، حدوداً همان مرکزجرم سیستم جرمهای Δm_i است

$$\bar{x} \approx \frac{\text{گشتاور سیستم}}{\text{جرم سیستم}} \,. \qquad (۴)$$



۵۲۰۵ برای به‌دست آوردن فرمولی برای‌گشتاور یك‌نوار باریك حول مبدأ محور x ، نخست‌نوار را به‌صورت‌سیستمی متشکل از جرمهای کوچك درنظرمی‌گیریم.

ثانیاً، گشتاور هر قطعه از نوار حول مبدأ تقریباً برابر $x_i\Delta m_i$ است. بنابراین گشتاور کل سیستم جرمها حول مبدأ تقریباً برابر مجموع $x_i\Delta m_i$ هاست.

$$\text{گشتاور سیستم} \approx \sum x_i \Delta m_i \, . \qquad (۵)$$

ثالثاً، اگر چگالی نوار در x_i را $\delta(x_i)$ (برحسب جرم در واحد طول) بگیریم، آنگاه Δm_i تقریباً برابر $\delta(x_i)\,\Delta x$ (جرم در واحد طول ضربدر طول) می‌شود

$$\Delta m_i \approx \delta(x_i)\,\Delta x \, . \qquad (۶)$$

از ترکیب این سه رابطه داریم

$$\bar{x} \approx \frac{\text{گشتاور سیستم}}{\text{جرم سیستم}} \approx \frac{\sum x_i \Delta m_i}{\sum \Delta m_i} \approx \frac{\sum x_i \delta(x_i)\,\Delta x}{\sum \delta(x_i)\,\Delta x} \qquad (۷)$$

مجموعهای کسر آخر رابطهٔ (۷) مجموعهای تقریب‌زنندهٔ انتگرال‌اند. وقتی تقسیمبندی نوار ظریفتر شود و طول Δx به‌صفر میل کند، تقریبها بهتر می‌شوند و به‌رابطهٔ زیر می‌انجامند

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x\delta\, dx}{\int_a^b \delta\, dx} \, . \qquad (۸)$$

از این فرمول برای محاسبهٔ $\bar{x}$ استفاده می‌کنیم.

گشتاور، جرم، و مرکز جرم یك میله، سیم، یا نوار باریك واقع در امتداد محور x

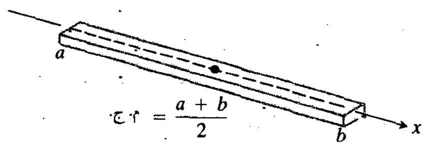
گشتاور حول مبدأ: $$M_O = \int_a^b x\delta\, dx$$

جرم: $$M = \int_a^b \delta\, dx \qquad (۹)$$

مرکز جرم: $$\bar{x} = \frac{M_O}{M}$$

اگر چگالی جسم ثابت نباشد و نسبت به x تغییر کند، آنگاه در روابط (۹) مقدار δ تابعی از x است که باید درمحاسبهٔ انتگرالها آن را منظور کرد. اما چنانچه چگالی δ ثابت باشد مثلاً درمورد نواری که عرض وضخامت یکنواختی‌دارد و جنس سراسر آن یکی است، آنگاه، ثابت δ را می‌توان از انتگرالها خارج کرد و در محاسبهٔ $\bar{x}$ آن را حذف کرد.

مثال ۱ نوار باریکی با چگالی یکنواخت (یعنی‌ثابت) در امتداد محور x از $x=a$ تا $x=b$ قرار می‌گیرد (شکل ۵۳۰۵). نشان دهید مرکز جرم این نوار در وسط آن است.



۵۳۰۵ مرکز جرم یك نوار یا میلهٔ یکنواخت در وسط آن است.

حل: چون چگالی δ ثابت است، روابط (۹) به صورت زیر درمی‌آید

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x\delta\, dx}{\int_a^b \delta\, dx} = \frac{\delta\int_a^b x\, dx}{\delta\int_a^b dx} = \frac{\int_a^b x\, dx}{\int_a^b dx}$$

$$= \frac{\left.\frac{x^۲}{۲}\right]_a^b}{\left. x\right]_a^b} = \frac{\frac{۱}{۲}(b^۲-a^۲)}{(b-a)} = \frac{a+b}{۲} \, .$$

بنابراین مرکز جرم یك نوار (یا میله یاسیم) یکنواخت در وسط آن است. ■

مثال ۲ میله‌ای‌فلزی که یك‌سرش درمبدأ و سردیگرش در $x=۱۰$ است ازچپ به‌راست ضخیم می‌شود به‌طوری که چگالی، یعنی‌جرم درهرواحد طول‌آن، ثابت نیست بلکه برابر است با

$$\delta(x) = ۱ + \frac{x}{۱۰}\,\mathrm{kg/m} \, .$$

مرکزجرم میله را بیابید.

حل: گشتاور میله حول مبدأ چنین است

$$M_O = \int_۰^{۱۰} x\delta\, dx = \int_۰^{۱۰} x\left(۱+\frac{x}{۱۰}\right) dx$$

$$= \left.\frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۳}{۳۰}\right]_۰^{۱۰} = ۵۰ + \frac{۱۰۰}{۳} = \frac{۲۵۰}{۳}\,\mathrm{kg\cdot m} \, .$$

جرم میله برابر است با

$$M = \int_۰^{۱۰} \delta\, dx = \int_۰^{۱۰}\left(۱+\frac{x}{۱۰}\right) dx$$

$$= \left. x + \frac{x^۲}{۲۰}\right]_۰^{۱۰} = ۱۰ + ۵ = ۱۵\,\mathrm{kg} \, .$$

مرکزجرم میله درنقطهٔ زیر قراردارد

$$\bar{x}=\frac{M_0}{M}=\frac{۲۵۰}{۳}\times\frac{۱}{۱۵}=\frac{۵۰}{۹}\approx ۵٫۵۶\ \mathrm{m}. \qquad \blacksquare$$

جرمهای گسترده در یك صفحه

فرض کنید تعدادی‌متناهی‌جرم دراختیار داریم که درصفحهٔ مختصات قراردارند. جرم m_i درنقطهٔ (x_i, y_i) قراردارد (شکل ۵۴.۵ را ببینید). کل جرم سیستم برابراست با

$$\text{جرم سیستم:} \qquad M=\sum m_i$$

هرکدام از جرمهای m_i حول هردومحور گشتاوری ایجاد می‌کند. گشتاور m_i حول‌محور x، $m_i y_i$؛ وحول محور y، $m_i x_i$ است. گشتاورهای کل سیستم حول دومحور اینها هستند

$$\text{گشتاور حول محور } x\text{:} \qquad M_x=\sum m_i y_i$$

$$\text{گشتاور حول محور } y\text{:} \qquad M_y=\sum m_i x_i$$

مختص x مرکزجرم سیستم بنا به‌تعریف چنین است

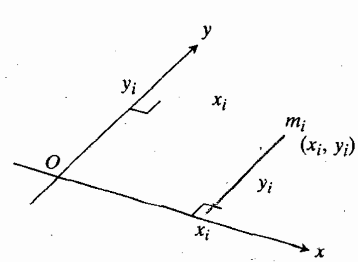
$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}. \tag{۱۰}$$

درحالت یك‌بعدی اگر x را برابر $\bar{x}$ برگزینیم سیستم حول خط $x=\bar{x}$ به‌حالت تعادل درمی‌آید (شکل ۵۵.۵).

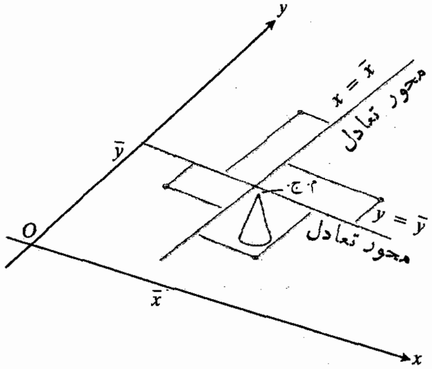
مختص y مرکزجرم سیستم بنا به‌تعریف چنین است

$$\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}. \tag{۱۱}$$

اگر y را برابر $\bar{y}$ برگزینیم، سیستم‌حول خط $y=\bar{y}$ نیز به‌حالت تعادل درمی‌آید. گشتاورهای نیرویی‌که اجرام حول خط $y=\bar{y}$ وارد می‌آورند یکدیگر را خنثی می‌کنند. بنابراین ازجهت مسألهٔ تعادل، رفتار سیستم مانند وقتی است که همهٔ جرمش درنقطه‌ای چون $(\bar{x}, \bar{y})$، به‌نام مرکزجرم سیستم، متمرکز باشد.



۵۴.۵ جرم m_i حول هر یك از محورها گشتاوری دارد.

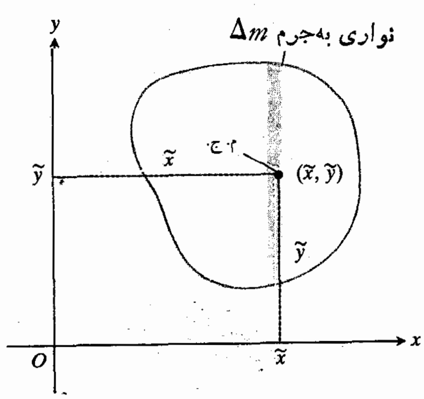


۵۵.۵ آرایه‌ای دوبعدی از اجرام که حول مرکز جرمش تعادل دارد.

ورقه‌های نازك

دربسیاری ازکاربردها، باید مرکز جرم یك ورقهٔ تخت نازك نظیر یك قرص آلومینیمی یا یك‌ورقهٔ فولادی مثلثی‌شکل‌را بیابیم. دراین موارد، فرض می‌کنیم توزیع جرم پیوسته باشد، و فرمولهایی‌که برای محاسبهٔ $\bar{x}$ و $\bar{y}$ به‌کار می‌روند به‌صورت انتگرالی باشند و نه مجموعهای متناهی. این انتگرالها از راه زیر به‌دست می‌آیند.

فرض کنید ورقه‌ای‌که در صفحهٔ xy قراردارد به نوارهای نازك و موازی با یکی از محورها (درشکل ۵۶.۵، موازی‌محور y) تقسیم می‌شود. مرکز جرم یك نوار نمونه، $(\tilde{x}, \tilde{y})$ است. (علامت ~ روی x و y تیلدا نام دارد و لذا $\tilde{x}$ را «x تیلدا» می‌خوانند.) فرض می‌کنیم جرم نوار، Δm، در $(\tilde{x}, \tilde{y})$ متمرکز است. بنابراین گشتاور نوار حول محور y برابراست با $\tilde{x}\,\Delta m$،



۵۶.۵ یك ورقه به‌نوارهای نازك موازی با محور y تقسیم می‌شود. گشتاوری‌که یك نوار نمونه حول هرکدام ازمحورها ایجاد می‌کند برابر گشتاوری‌است که جرم آن، Δm، ایجاد می‌کند، با این فرض‌که این جرم درمرکز جرم نوار، $(\tilde{x}, \tilde{y})$، متمرکز باشد.

وگشتاور آن حول‌محور x برابراست با $\tilde{y}\,\Delta m$. از این‌رو روابط (۱۰) و (۱۱) به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\sum \tilde{x}\,\Delta m}{\sum \Delta m},\quad \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\sum \tilde{y}\,\Delta m}{\sum \Delta m} \tag{۱۲}$$

مانند حالت تک‌بعدی، مجموعهای واقع در صورت و مخرج این رابطه‌ها مجموعهای تقریب‌زنندهٔ انتگرالهایند و وقتی پهنای نوارها نازک و نازکترشود به‌این انتگرالها میل می کنند. این انتگرالها را به‌صورت نمادین‌چنین می نویسیم

$$\bar{y}=\frac{\int \tilde{y}\,dm}{\int dm} \quad \text{و} \quad \bar{x}=\frac{\int \tilde{x}\,dm}{\int dm} \tag{۱۳}$$

درمثالهای زیرروش محاسبهٔ این انتگرالها آمده است.

گشتاورها، جرم، و مرکزجرم یك ورقهٔ نازك واقع درصفحهٔ xy

گشتاورحول محور x: $M_x=\int \tilde{y}\,dm$

گشتاورحول محور y: $M_y=\int \tilde{x}\,dm$

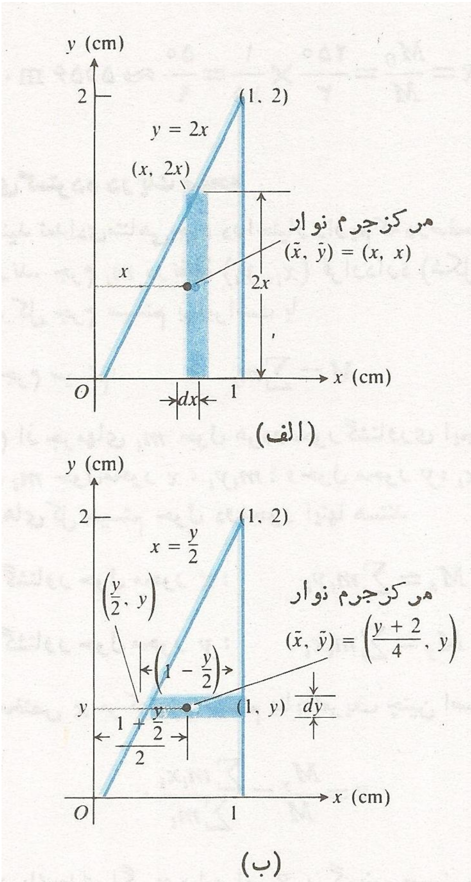
جرم: $M=\int dm$ (۱۴)

مرکزجرم: $\bar{x}=\frac{M_y}{M},\quad \bar{y}=\frac{M_x}{M}$

برای محاسبهٔ این‌انتگرالها، شکل‌ورقه را درصفحهٔ‌مختصات رسم می‌کنیم و نواری از جرم را که موازی یکی از محورهـای مختصات بـاشد مشخص می کنیم. سپس جرم dm نوار، Δm، و مختصات مرکز جرم نـوار، $(\tilde{x},\tilde{y})$ را برحسب x یـا y بیان می‌کنیم. سرانجام از $\tilde{y}\,dm$، $\tilde{x}\,dm$، و dm بین حـدودی کـه به‌محل ورقه درصفحه بستگی دارد انتگرال می گیریم.

مثال ۳ ورقهٔ مثلثی‌شکلی که درشکل ۵۷۰۵ دیده می‌شود به‌خطوط $y=0$، $y=2x$، و $x=1$ محدود است. چگالی ایـن ورقـه یکنواخت و برابراست‌با $\delta=3\ \mathrm{gm/cm^2}$. مطلوب‌است (الف) گشتاور M_y ورقه حول محور y، (ب) جرم ورقه، M، و (پ) مختص x مرکزجرم ورقه.

حل: روش ۱. نوارهای قائم (شکل ۵۷۰۵ الف)



۵۷۰۵ دوراه برای محاسبهٔ گشتاور نیروی M_y ورقهٔ مثلثی مثال ۳.

الف) گشتاور M_y: نوارقائم نمونه ویژگیهای زیررا دارد

مرکزجرم (م.ج.): $(\tilde{x},\tilde{y})=(x,x)$

طول: $2x$

عرض: dx

مساحت: $dA=2x\,dx$

جرم: $dm=\delta\,dA=3\cdot 2x\,dx=6x\,dx$

فاصلهٔ م. ج. ازمحور y: $\tilde{x}=x$.

گشتاور نوار حول محور y برابراست با

$$\tilde{x}\,dm=x\cdot 6x\,dx=6x^2\,dx.$$

بنا براین، گشتاور ورقه حول محور y چنین است

$$M_y=\int \tilde{x}\,dm=\int_0^1 6x^2\,dx=2x^3\Big]_0^1=2\ \mathrm{gm\cdot cm}.$$

ب) جرم ورقه:

$$M=\int dm=\int_0^1 6x\,dx=3x^2\Big]_0^1=3\,\mathrm{gm}.$$

پ) مختص x مرکزجرم ورقه:

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{2\,\mathrm{gm}\cdot\mathrm{cm}}{3\,\mathrm{gm}}=\frac{2}{3}\,\mathrm{cm}.$$

با انجام محاسبات مشابهی می‌توان M_x و $\bar{y}=M_x/M$ را نیز یافت.

روش ۲. نوارهای افقی (شکل ۵۷.۵ ب)

الف) گشتاور M_y: نوارافقی نمونه مشخصات زیر را دارد

م. ج.: $(\tilde{x},\tilde{y})=\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{y}{2}\right),y\right)=\left(\frac{y+2}{4},y\right)$

طول: $1-\frac{y}{2}=\frac{2-y}{2}$

عرض: dy

مساحت: $dA=\frac{2-y}{2}dy$

جرم: $dm=\delta\,dA=3\cdot\frac{2-y}{2}dy$

فاصلهٔ م. ج. ازمحور y: $\tilde{x}=\frac{y+2}{4}$

گشتاور نوار حول محور y برابراست با

$$\tilde{x}\,dm=\frac{y+2}{4}\cdot 3\cdot\frac{2-y}{2}dy=\frac{3}{8}(4-y^2)\,dy.$$

گشتاور ورقه حول محور y چنین‌است

$$M_y=\int\tilde{x}\,dm=\int_0^2\frac{3}{8}(4-y^2)\,dy=\frac{3}{8}\left[4y-\frac{y^3}{3}\right]_0^2$$

$$=\frac{3}{8}\left(\frac{16}{3}\right)=2\,\mathrm{gm}\cdot\mathrm{cm}.$$

ب) جرم ورقه:

$$M=\int dm=\int_0^2\frac{3}{2}(2-y)\,dy$$

$$=\frac{3}{2}\left[2y-\frac{y^2}{2}\right]_0^2=\frac{3}{2}[4-2]=3\,\mathrm{gm}.$$

پ) مختص x مرکزجرم ورقه:

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{2\,\mathrm{gm}\cdot\mathrm{cm}}{3\,\mathrm{gm}}=\frac{2}{3}\,\mathrm{cm}.$$

با انجام محاسبات مشابهی می‌توان M_x و $\bar{y}$ را یافت. ■

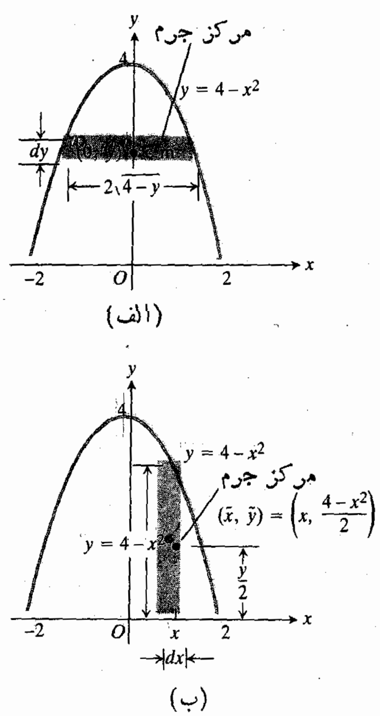
مثال ۴ مطلوب است مرکز جرم یك ورقهٔ نازك همگن (چگالی δ ثابت است) که ناحیهٔ محدود به‌سهمی $y=4-x^2$ ومحور x را می‌پوشاند. شکل ۵۸.۵ را ببینید.

حل: چون ورقه حول محور y متقارن است وچگالـی آن ثابت است، مرکز جرم روی محور y قـرار دارد. یعنی $\bar{x}=0$. بنابراین تنها باید $\bar{y}=M_x/M$ را بیابیم.

اگر بخواهیم مسأله را به‌کمك نوارهای‌افقی (شکل ۵۸.۵ الف) محاسبه‌کنیم با انتگرالگیری دشوار

$$M_x=\int_0^4 2\delta y\sqrt{4-y}\,dy.$$

روبرو می‌شویم. لذا مسأله را به‌کمك نوارهای قائم حل می‌کنیم (شکل ۵۸.۵ ب).



۵۸.۵ حل مثال۴ به‌کمك (الف) نوارهای افقی بـه یك انتگرالگیری دشوار منجـر می‌شود، لذا مسأله را به‌کمك (ب) نوارهای قائم حل می‌کنیم.

مشخصات یك نوار قائم نمونه چنین است

مرکز جرم (م.ج.): $(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(x, \frac{۴-x^۲}{۲}\right)$

طول: $۴-x^۲$

عرض: dx

مساحت: $dA=(۴-x^۲)\,dx$

جرم: $dm=\delta\, dA=\delta(۴-x^۲)\,dx$

فاصلهٔ م.ج. ازمحور x: $\tilde{y}=\frac{۴-x^۲}{۲}$

گشتاور نوار حول محور x چنین است

$$\tilde{y}\,dm=\frac{۴-x^۲}{۲}\cdot\delta(۴-x^۲)\,dx=\frac{\delta}{۲}(۴-x^۲)^۲\,dx\,.$$

گشتاور ورقه حول محور x چنین است

$$M_x=\int\tilde{y}\,dm=\int_{-۲}^{۲}\frac{\delta}{۲}(۴-x^۲)^۲\,dx=\frac{۲۵۶}{۱۵}\delta\,.\quad(۱۵)$$

جرم ورقه چنین است

$$M=\int dm=\int_{-۲}^{۲}\delta(۴-x^۲)\,dx=\frac{۳۲}{۳}\delta\,.\quad(۱۶)$$

بنا بر این

$$\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\frac{۲۵۶}{۱۵}\delta}{\frac{۳۲}{۳}\delta}=\frac{۸}{۵}\,.$$

مرکز جرم ورقه برابر است با

$$(\bar{x},\bar{y})=\left(۰,\frac{۸}{۵}\right).$$ ■

مثال ۵ (چگالی متغیر) مطلوب است مرکز جرم ورقهٔ مثال ۴ اگر چگالی آن در هر نقطه‌ای چون (x, y) با $x^۲$ یعنی با مجذور فاصلهٔ آن نقطه تا محور y متناسب باشد.

حل: تابع چگالی چنین است

$$\delta=kx^۲$$

که در آن k ثابت است. دراین حالت نیز توزیع جرم حول محور y متقارن است. پس

$$\bar{x}=۰$$

روابط (۱۵) و (۱۶) به‌ازای $\delta=kx^۲$ به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$M_x=\int\tilde{y}\,dm=\int_{-۲}^{۲}\frac{\delta}{۲}(۴-x^۲)^۲\,dx$$

$$=\int_{-۲}^{۲}\frac{kx^۲}{۲}(۴-x^۲)^۲\,dx=\frac{۱۰۲۴}{۱۰۵}k$$

$$M=\int dm=\int_{-۲}^{۲}\delta(۴-x^۲)\,dx$$

$$=\int_{-۲}^{۲}kx^۲(۴-x^۲)\,dx=\frac{۱۲۸}{۱۵}k\,.$$

بنا بر این

$$\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{۱۰۲۴}{۱۰۵}\times\frac{۱۵}{۱۲۸}=\frac{۸}{۷}\,.$$

مرکزجرم جدید ورقه چنین‌است

$$(\bar{x},\bar{y})=\left(۰,\frac{۸}{۷}\right)\,.$$ ■

مثال ۶ نشان‌دهیدکه مرکزجرم یك ورقهٔ نازك همگن مثلثی‌شکل به‌قاعدهٔ b و ارتفاع h محل تقاطع‌میانه‌های آن است.

حل: یادآوری می‌شودکه میانه‌های یك‌مثلث یکدیگررا در نقطه‌ای در درون مثلث قطع می‌کنندکه فاصله‌اش از نقطهٔ وسط هرضلع، یك سوم میانهٔ نظیرآن ضلع است. برای حل این‌مسأله نشان‌می‌دهیم که مرکزجرم همین‌نقطه‌است. بدین‌منظور نشان‌می‌دهیم که فاصلهٔ مرکز جرم از هرضلع، یك سوم فاصلهٔ آن ضلع از رأس مقابل است.

یکی از اضلاع مثلث را چنان روی‌محور x قرارمی‌دهیم‌که رأس مقابلش روی‌قسمت مثبت محور y قرار گیرد (شکل ۵۹.۵). جرم یك نوار افقی نمونه برابراست با

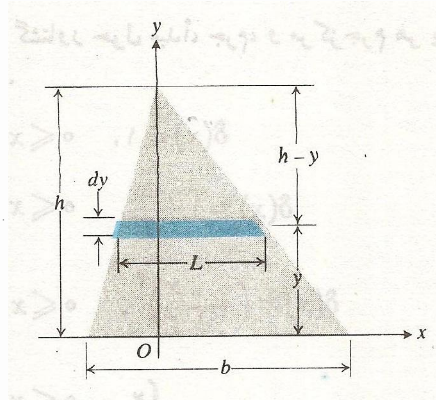
$$dm=\delta\,dA=\delta L\,dy$$

که درآن δ چگالی و L پهنای مثلث درفاصلهٔ y از ضلع منطبق‌بر محور x است. بنا به‌تشابه مثلثها داریم

$$\frac{L}{b}=\frac{h-y}{h}\quad\text{یا}\quad L=\frac{b}{h}(h-y)\,.$$

بنا براین

$$dm=\delta\frac{b}{h}(h-y)\,dy\,.$$



۵۹.۵ ابعاد و متغیرهایی که درمحاسبهٔ جرم یك ورقه نازك مثلثی‌شکل به‌کارمی‌روند.

برای‌مختص y مرکزجرم نوارداریم $y=\tilde{y}$. برای کل ورقه‌داریم

$$\bar{y}=\frac{\int y\,dm}{\int dm}=\frac{\int_{0}^{h}\delta\,\frac{b}{h}\,y(h-y)\,dy}{\int_{0}^{h}\delta\,\frac{b}{h}\,(h-y)\,dy}=\frac{1}{3}h.$$

بنا براین فاصلهٔ مرکز جرم تا قاعده یك سوم فاصلهٔ قاعده تا رأس مقابل است. اگر دوضلع دیگررا به‌نوبت‌قاعده مثلث درنظربگیریم نتایج مشابهی به‌دست‌می‌آید؛ پس مرکزجرم برمحل تقاطع‌میانه‌ها قراردارد. ■

مثال ۷ یك‌سیم نازك همگن به‌صورت یك نیمدایره به‌شعاع a درآمده است. مرکزجرم آن را بیابید.

حل: فرض می‌کنیم معادلهٔ نیمدایره، $y=\sqrt{a^{2}-x^{2}}$ باشد (شکل ۶۰.۵). در این صورت، جرم یك قطعه نمونهٔ کوچك آن چنین است

$$dm=\delta\,ds$$

که درآن ds جزیی از طول قوس نیمدایره است و

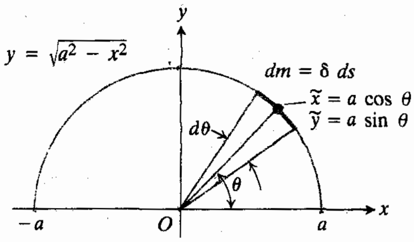
$$\delta=\frac{M}{L}=\frac{M}{\pi a}$$

جرم درواحد طول سیم است. برحسب زاویهٔ مرکزی θ (طبق‌معمول برحسب رادیان) داریم

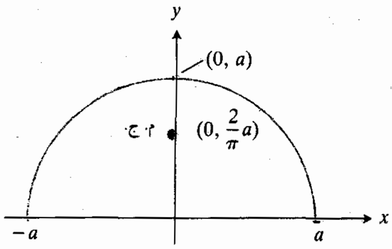
$$ds=a\,d\theta$$

و

$$\tilde{x}=a\cos\theta,\quad \tilde{y}=a\sin\theta.$$



(الف)



(ب)

۶۰.۵ (الف) ابعاد و متغیرهایی که درمحاسبهٔ جرم یك سیم نیمدایره‌ای‌شکل به‌کار می‌روند. (ب) سیم و مرکزجرمش.

بنا براین

$$\bar{x}=\frac{\int \tilde{x}\,dm}{\int dm}=\frac{\int_{0}^{\pi} a\cos\theta\,\delta\,a\,d\theta}{\int_{0}^{\pi}\delta\,a\,d\theta}$$

$$=\frac{\delta a^{2}\Big[\sin\theta\Big]_{0}^{\pi}}{\delta a\Big[\theta\Big]_{0}^{\pi}}=0$$

$$\bar{y}=\frac{\int \tilde{y}\,dm}{\int dm}=\frac{\int_{0}^{\pi} a\sin\theta\,\delta\,a\,d\theta}{\int_{0}^{\pi}\delta\,a\,d\theta}$$

$$=\frac{\delta a^{2}\Big[-\cos\theta\Big]_{0}^{\pi}}{\delta a\Big[\theta\Big]_{0}^{\pi}}=\frac{2}{\pi}a.$$

از این‌رو مرکزجرم برمحور y واقع است و فاصلهٔ آن تا مبدأ $2/\pi$ (حدود دوسوم) فاصله‌مبدأ با نقطهٔ $(0, a)$ است. بایدداتست که مرکزجرم روی خود سیم نیست. ■

گرانیگاه (مرکزثقل)، مرکزوار، همگنی، و یکنواختی

هنگام مطالعه کتابهای دیگرممکن است با واژه‌های مختلفی درارتباط با مفهوم مرکزجرم روبرو شوید.

وقتی فیزیکدانان ازآثار گرانش بر یك سیستم اجرام بحث می‌کنند ممکن است به جای اصطلاح مرکز جرم از اصطلاح **گرانیگاه (مرکزثقل)** نام برند.

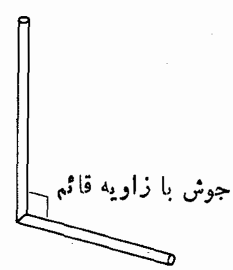
ماده‌ای که چگالی آن، δ، ثابت است مادهٔ **همگن**، **یکنواخت**، یا با **چگالی یکنواخت** نیز نامیده می‌شود.

هرگاه تابع چگالی ثابت باشد، ازصورت ومخرج فرمولهای $\bar{x}$ و $\bar{y}$ حذف می‌شود. تقریباً همهٔ مثالهای این بخش چنین بودند. وقتی چگالی δ ثابت است ازنظر $\bar{x}$ و $\bar{y}$ مثل آن است که δ برابر ۱ باشد. بنا براین دراین حالت، محل مرکز جرم یکی از ویژگیهای هندسی جسم است و به‌جنس ماده‌ای که جسم ازآن ساخته شده‌است بستگی ندارد. دراین‌موارد بهتراست مرکزجرم را **مرکزوار**[1] شکل بنامیم ومثلاً بگوییم «مرکزوار یك مثلث یا یك مخروط صلب‌را بیابید». درچنین مواردی δ را برابر ۱ می‌گیریم و $\bar{x}$ و $\bar{y}$ را مانند آنچه گذشت، ازتقسیم گشتاورها برجرمها، به‌دست می‌آوریم.

مسأله‌ها

۱. دوبچه به‌وزنهای ۸۰ پوند و ۱۰۰ پوند روی یك الاکلنگ درحالت تعادل‌اند. اگرفاصلهٔ بچهٔ ۸۰ پوندی ازنقطهٔ اتکا ۵ فوت باشد، فاصله بچهٔ ۱۰۰ پوندی ازنقطه اتکا چقدر است؟

۲. دومیلهٔ نازك یکنواخت با طولهای مساوی را تحت‌زاویه قائمه به‌یکدیگرجوش می‌دهیم (شکل ۶۱.۵). مرکزجرم جسم حاصل را به‌کمك نتیجهٔ مثال ۱ به‌دست آورید. آیا اندازهٔ زاویهٔ بین دومیله تأثیری درنتیجه دارد؟



۶۱.۵ میله‌های جوش خورده مورد بحث در مسألهٔ ۲.

درمسائل ۳ـ۶، توابع چگالی میله‌های نازکی به‌طول L که روی قسمت مثبت محور x قرارداردند و یك‌سرآنها درمبدأ است داده شده‌است. گشتاور حول مبدأ، جرم، و مرکزجرم هر یك از میله‌ها را بیابید.

۳. $\delta(x)=1,\quad 0\leqslant x\leqslant L$

۴. $\delta(x)=1+\dfrac{x}{L},\quad 0\leqslant x\leqslant L$

۵. $\delta(x)=\left(1+\dfrac{x}{L}\right)^2,\quad 0\leqslant x\leqslant L$

۶. $\delta(x)=\begin{cases}2 & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{L}{2}\\ 1 & \dfrac{L}{2}\leqslant x\leqslant L\end{cases}$

۷. مختص y مرکزجرم ورقهٔ مثال ۳ را بیابید.

۸. مطلوب است مرکزجرم ورقهٔ سهموی مثال۴، اگرتابع‌چگالی آن به‌عوض ثابت بودن برابربا $\delta(x)=3x$ باشد.

درمسائل ۹ـ۲۰ مرکز جرم یك ورقهٔ نازك همگن را درناحیه داده شده بیابید.

۹. ناحیهٔ محدود به‌محور y، و خم $x=y-y^3$، $0\leqslant y\leqslant 1$

۱۰. ناحیهٔ محدود به‌خم $y=x^2$ و خط $y=4$

۱۱. ناحیهٔ محدود به‌خم $y=x-x^2$ و خط $x+y=0$

۱۲. ناحیهٔ محدود به‌خم $x=y^2-y$ و خط $y=x$

۱۳. ربع اول دایرهٔ $x^2+y^2=a^2$

۱۴. ناحیهٔ محدود به‌سهمی $y=h^2-x^2$ و محور x

۱۵. ناحیهٔ «مثلثی‌شکل» واقع در ربع اول و بین دایرهٔ $x^2+y^2=a^2$ و خطوط $x=a$ و $y=a$

۱۶. ناحیهٔ بین‌محور x وخم $y=\sin x$ از $x=0$ تا $x=\pi$. (راهنمایی: dA را برابر $y\,dx$، و $\tilde{y}$ را برابر $(1/2)y$ بگیرید.)

۱۷. ناحیهٔ بین محور y و خم $x=2y-y^2$

۱۸. ناحیهٔ محدود به‌محور x و نیمدایرهٔ $y=\sqrt{a^2-x^2}$. نتیجه را با نتیجهٔ مثال ۷ مقایسه کنید.

۱۹. ناحیهٔ محدود به‌خمهای $y=2x^2-4x$ و $y=2x-x^2$

۲۰. ناحیه‌ای که ازبالا به $y=1-x^n$، n زوج، وازپایین به‌محور x محدودواست. وقتی‌که $n\to\infty$، مرکزوار درکجاواقع‌می‌شود؟

---

۱. «مرکزوار» را دربرابر centroid آورده‌ایم تا اشکال واژه‌های «مرکز جرم» و «گرانیگاه» را که درآنها مفاهیم فیزیکی مستتر است، نداشته باشد. [م]

درمسائل ۲۱–۲۴ به‌کمك نتیجهٔ مثال ۶ مرکزوار مثلثهایی‌را بیابید که رئوسشان داده شده‌است.

۲۱. (۰, ۳)، (۱, ۰)، (−۱, ۰)

۲۲. (۱, ۰)، (۰, ۱)، (۰, ۰)

۲۳. (۰, ۳)، (۳, ۰)، (۰, ۰)

۲۴. (۰, c)، (b, ۰)، (a, ۰)

۲۵. سیمی با چگالی ثابت روی خم $y=\sqrt{x}$ از (۰, ۰) تا (۲, $\sqrt{۲}$) قراردارد. مطلوب است گشتاور آن حول محور x. نتیجه را با محاسبات مربوط به‌مساحت رویه درمثال ۱ بخش ۶.۵ مقایسه‌کنید.

۲۶. سیمی با چگالی ثابت روی خم $y=x^3$ از (۰, ۰) تا (۱, ۱) قراردارد. مطلوب است گشتاور آن حول محور x. نتیجه را با محاسبات خواسته شده درمسألهٔ ۱ بخش ۶.۵ مقایسه‌کنید.

۲۷. چگالی یك ورقهٔ مثلثی‌شکل به‌قاعدهٔ b سانتیمتر و ارتفاع h سانتیمتر با ریشهٔ دوم فاصله از قاعده متناسب است. مرکزجرم این ورقه درچه‌فاصله‌ای از قاعده قراردارد؟

۲۸. درمسألهٔ ۲۷ فرض می‌کنیم‌که چگالی ورقه با مجذور فاصله از قاعده متناسب باشد. دراین حالت مرکزجرم درچه فاصله‌ای از قاعده قراردارد؟

۲۹. ورقهٔ نازکی واقع درربع‌اول به‌خم $y=x^2$ و خط $y=x$ محدود می‌شود. چگالی این ورقه برابر است با $\delta(x)=12x$. مطلوب‌است مرکزجرم ورقه.

۳۰. میله‌ای‌یکنواخت به‌طول ۱ متر به‌شکل‌یك مخروط ناقص‌است. قطر قاعده‌های این مخروط ناقص ۱ و ۲ سانتیمتر است. مرکزجرم این میله درچه‌فاصله‌ای ازقاعده بزرگترش قراردارد؟

۳۱. مطلوب است مرکزجرم سیم مثال ۷ به‌فرض‌اینکه چگالی‌آن برابرباشد با $\delta=k\sin\theta$ (k ثابت است).

۹.۵ کار

ما معمولاً هرروز اصطلاح کار را برای توصیف فعالیتهای بدنی و فکری به‌کار می‌بریم. اما معنی علمی این اصطلاح ظریفتر است و به مواردی اطلاق می‌شود‌که نیرویی به‌جسمی وارد و باعث جابه‌جایی آن شود.

هرگاه به‌جسمی نیروی ثابت F اعمال‌شود و جسم درجهت اعمال نیرو روی خطی راست به‌اندازهٔ d جابه‌جا شود، بنا به‌تعریف **کار** انجام شده عبارت است از

$$W=Fd. \qquad (۱)$$

واحد کار در سیستم SI نیوتن-متر و در سیستم انگلیسی فوت-پوند است. کار واحدهای دیگری نیز دارد. (برای برداشتن سیبی از روی میز حدود ۱ نیوتن نیرو لازم است.) بی‌درنگ می‌توان دریافت‌که آنچه‌که ما آن را کار می‌نامیم با آنچه‌که این فرمول ازآن حکایت دارد فرق می‌کند. اگر اتومبیلی را هل دهیم هم به‌زعم خودمان و هم بنابه رابطهٔ (۱) کار انجام می‌دهیم. اما اگر جلوی حرکت اتومبیلی را بگیریم، معادلهٔ (۱) حاکی است‌که هرچقدر این‌عمل دشوار یا طولانی باشد،ابداً کاری‌انجام نمی‌شود.

اگر نیروی F مانند وقتی که فنری را می‌فشاریم تغییر کند، دیگر نمی‌توان برای محاسبهٔ کار انجام شده رابطهٔ $W=Fd$ را مستقیماً به‌کار برد. اما این رابطه را می‌توان برای محاسبهٔ مقدار تقریبی کار انجام شده درفاصله‌ای کوتاه به‌کار برد. به‌این ترتیب راهی برای محاسبهٔ کار انجام شده به صورت یك انتگرال پیش روی ما قرار می‌گیرد. دراین بخش می‌بینیم که این انتگرال چیست ونحوهٔ استفاده ازآن درموارد عملی‌کدام است و نیز نحوهٔ فرمولبندی انتگرالهای دیگری راکه در محاسبهٔ کار برای موارد دیگر به‌کار می‌روند، خواهیم دید.

انتگرال نیرو-فاصله برای کار

نخست فرض می‌کنیم نیرو در امتداد خطی که ما آن را محور x درنظر می‌گیریم تغییرات پیوسته‌ای داشته باشد. می‌خواهیم کار را در طول بازهٔ از $x=a$ تا $x=b$ به‌دست آوریم. فرض می‌کنیم بازه طبق معمول به‌تعدادی زیر بازه به‌طول Δx تقسیم شده باشد. نقطه‌ای چون c_i را در هریك از این زیربازه‌ها برمی‌گزینیم و مجموع زیر را تشکیل می‌دهیم

$$\sum_a^b F(c_i)\,\Delta x\,.$$

چون $F(c_i)\,\Delta x$ کار انجام شده توسط F در زیربازهٔ iام را تقریب می‌زند، مجموع فوق کار انجام شده توسط F از a تا b را تقریب می‌زند. اگر F پیوسته باشد، با میل‌کردن Δx به‌صفر، مجموع به‌انتگرال F از a تا b میل می‌کند. بنابراین کاری راکه F انجام می‌دهد به‌صورت مقدار انتگرال آن از a تا b تعریف می‌کنیم.

تعریف

کاری که نیرویی چون $F(x)$ روی محور x از $x=a$ تا $x=b$ انجام می‌دهد عبارت است‌از

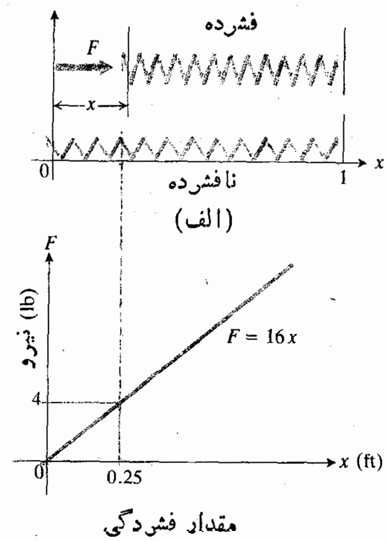
$$W=\int_a^b F(x)\,dx\,. \qquad (۲)$$

قانون هوک در مورد فنرها: $F=kx$

در اغلب فنرها محدوده‌ای هست که در آن محدوده نیروی F لازم برای کشیدن یا فشردن فنر (نسبت به‌حالت طبیعی) با رابطهٔ خطی زیر قابل تقریب زدن است.

$$F=kx. \qquad (۳)$$

در این فرمول x تغییر طول فنر نسبت به طول اولیه، یعنی نسبت به‌طول آن در حالت غیرفشرده، و k مشخصهٔ ثابت فنر، به‌نام **ثابت فنر** است (شکل ۶۲.۵ الف). فراتر از این محدوده، فلزی که فنر از آن ساخته شده است اعوجاج پیدا می‌کند و دیگر رابطهٔ (۳) توصیف قابل اطمینانی از عملکرد فنر به‌دست نمی‌دهد. در این بخش فرض می‌کنیم که فنرها هرگز تا این حد کشیده یا فشرده نمی‌شوند. رابطهٔ (۳) را **قانون هوک** می‌نامند.



۶۲.۵ نیروی F لازم برای فشردن یک فنر، به‌طور خطی افزایش می‌یابد.

مثال ۱ مطلوب است کار لازم (برحسب فوت-پوند) برای فشردن فنری با ثابت $k=۱۶$ به‌طوری که طول آن از ۱ ft (طول طبیعی) به ۰٫۷۵ ft برسد.

حل: شکل ۶۲.۵ یک فنر نافشرده را نشان می‌دهد که در امتداد محور x است و سر متحرک آن درمبدأ وسر ثابت آن در $x=۱\ \text{ft}$ قرار دارد. بدین ترتیب می‌توانیم نیروی لازم برای فشردن فنر از ۰ تا x را به کمک فرمول $F=۱۶x$ توصیف کنیم. اگر مقدار فشردگی فنر از ۰ به ۰٫۲۵ ft برسد، نیرو از

$$F(۰)=۱۶(۰)=۰\ \text{lb}$$

به

$$F(۰٫۲۵)=۱۶(۰٫۲۵)=۴\ \text{lb}$$

تغییر می‌کند. کاری که F در این بازه انجام می‌دهد چنین است

$$\text{کار}=\int_۰^{۰٫۲۵} F(x)\,dx=\int_۰^{۰٫۲۵} ۱۶x\,dx=۴x^۲\Big]_۰^{۰٫۲۵}$$

$$=۰٫۲۵\ \text{ft}\cdot\text{lb}. \quad \blacksquare$$

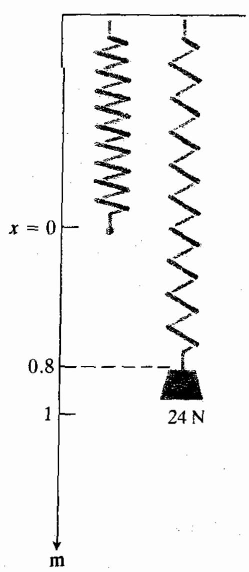
مثال ۲ طول اولیهٔ فنری عبارت است از $L=۱$ m. این فنر بر اثر اعمال نیرویی برابر ۲۴ نیوتن کشیده می‌شود وطولش به ۱٫۸ m می‌رسد. ثابت فنر را بیابید. برای اینکه طول این فنر به ۳ m برسد چه مقدار کار باید انجام شود؟ برای اینکه طول فنر از ۲ m به ۳ m برسد چه مقدار کار لازم است؟ نیروی ۴۵ نیوتنی طول فنر را چقدر افزایش می‌دهد؟

حل: ثابت فنر را از رابطهٔ (۳) به دست می‌آوریم. نیروی ۲۴ نیوتنی طول فنر را به‌اندازه ۰٫۸ m افزایش می‌دهد، پس

$$۲۴=k(۰٫۸) \quad \text{یا} \quad k=۳۰.$$

به منظور یافتن کار لازم برای افزایش طول فنر به‌میزان ۲ m، فرض می‌کنیم فنر مطابق شکل ۶۳.۵ به‌موازات محور x آویزان است. به‌این ترتیب نیروی لازم برای کشیدن فنر به‌اندازهٔ x متر از مبدأ عبارت است از

$$F(x)=kx=۳۰x.$$



۶۳.۵ یک وزنهٔ ۲۴ نیوتنی طول این فنر را به‌اندازه ۰٫۸ m افزایش می‌دهد.

وکاری‌که برای افزایش طول فنر به‌اندازهٔ ۲ m لازم است چنین به‌دست می‌آید

$$W=\int_0^2 30x\,dx=15x^2\Big]_0^2=60\ \mathrm{N\cdot m}.$$

کاری‌که برای کشیدن فنری به طول ۲ m و رساندن آن به طول ۳ m لازم است برابر کاری است که نیروی کشانندهٔ F، $F(x)=30x$، از $x=1$ تا $x=2$ (و نه‌از $x=2$ تا $x=3$) انجام می‌دهد:

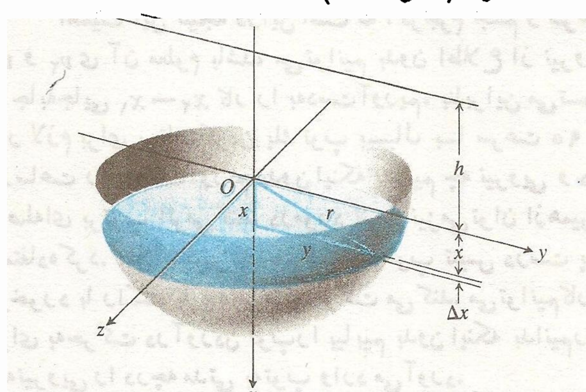
$$W=\int_{x=1}^{x=2}30x\,dx=15x^2\Big]_1^2=45\ \mathrm{N\cdot m}.$$

نیروی ۴۵ نیوتنی طول فنر را چقدر افزایش می‌دهد؟ در معادلهٔ $F=30x$ به‌جای F مقدار ۴۵ را قرار می‌دهیم. داریم $45=30x$ یا $x=1.5$ m. برای این‌محاسبه انتگرالگیری لازم نیست. ■

تخلیهٔ مایعات درون مخازن

حال، نمونهٔ دیگری را درنظر می‌گیریم که درآن، کار از انتگرالی به‌دست می‌آید که از به‌کاربردن فرمول $W=Fd$ درمورد قطعات کوچك حاصل می‌شود.

مثال ۳ مطلوب است مقدار کار لازم برای پمپ‌کردن آب درون مخزنی به‌شکل نیمکره.به‌شعاع r فوت و رساندن آن به‌ارتفاع h فوت ازبالای مخزن (شکل ۶۴.۵).



۶۴.۵ درمحاسبهٔ کار لازم برای پمپ‌کردن آب‌درون ظرف فرض می‌کنیم که آب هر یك از برشها در یك لحظه پمپ می‌شود.

حل: محورهای مختصات را مطابق شکل ۶۴.۵ درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم صفحات عمود برمحور x و واقع بین $x=0$ و $x=r$ آب درون مخزن را به برشهای نازکی تقسیم کرده است. برش‌نمونهٔ بین‌صفحات‌واقع در x و $x+\Delta x$ دارای حجم ΔV است که تقریباً برابر است با

$$\Delta V\approx \pi y^2\,\Delta x=\pi(r^2-x^2)\,\Delta x\ \mathrm{ft}^3.$$

نیرویی‌که برای بالابردن این برش لازم‌است برابر وزن‌آن است:

$$w\,\Delta V\approx \pi w(r^2-x^2)\,\Delta x\ \mathrm{lb}$$

که درآن w وزن یك فوت مکعب آب است. فاصله‌ای که این‌نیرو درطول آن باید اعمال شود تقریباً برابر $(x+h)$ فوت است؛ بنابراین، Δw، کار لازم برای بالابردن یك برش تقریباً برابر است با

$$\Delta W\approx \pi w(r^2-x^2)(x+h)\,\Delta x$$ فوت پوند.

پس کل‌کار چنین است

$$\begin{aligned} W&=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_0^r \pi w(r^2-x^2)(x+h)\,\Delta x\\ &=\int_0^r \pi w(x+h)(r^2-x^2)\,dx\\ &=\int_0^r x\cdot\pi w(r^2-x^2)\,dx+hw\int_0^r \pi(r^2-x^2)\,dx\\ &=M_y+hwV\\ &=\bar{x}wV+hwV\\ &=wV(\bar{x}+h)\ \mathrm{ft\cdot lb}.\end{aligned}$$

دراین رابطه، wV وزن‌کل آبی است‌که مخزنی به‌حجم V وقتی که‌کاملاً پراست درون خود دارد. انتگرال اول کار لازم را برای بالابردن‌آب از سطحی‌که مرکزجرمش درآن قرار دارد تا سطح $x=0$ به‌دست می‌دهد. انتگرال دوم، کار لازم برای بالابردن‌آب به‌ارتفاع h را به‌دست می‌دهد. محاسبهٔ عملی انتگرالها به فرمول زیرمی‌انجامد

$$W=\frac{2}{3}\pi r^3 w\left(\frac{3}{8}r+h\right).$$ ■

فرمول $W=wV(\bar{x}+h)$ که درمثال ۳ به‌دست‌آمد به‌شکل مخزن یا نوع مایع درون آن بستگی‌ندارد (مسألهٔ ۲۰ را ببینید). از این‌فرمول می‌توان درحل‌مسائل‌مربوط به‌پمپ‌کردن بهره‌گرفت.

کار لازم برای تخلیهٔ یك مخزن

کار لازم برای تخلیه‌کردن مایعی به‌حجم V و وزن مخصوص w از درون یك‌مخزن و رساندن آن به‌ارتفاع h ازسطح اولیهٔ مایع از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

کار $=wV(\bar{x}+h)$. (۴)

مقدار $wV\bar{x}$، کار لازم برای بالا بردن مایع از سطحی که مرکز جرمش در آن قرار دارد تا سطح مایع و مقدار wVh، کار لازم برای بالابردن مایع به‌اندازهٔ h واحد دیگر است.

مثال ۴ مخزنی استوانه‌ای که قطر قاعدهٔ آن ۱۰ ft و ارتفاعش ۲۰ ft است به‌صورت افقی مدفون شده و فاصلهٔ لبهٔ بالایی آن تا سطح زمین ۶ ft است. مخزن پر از گازوئیل با وزن مخصوص ۴۲ $\text{lb/ft}^۳$ است. برای پمپ کردن گازوئیل تا ارتفاع ۲ فوتی بالای سطح زمین چه مقدار کار لازم است؟.

حل: پیش از پمپ کردن، مرکز جرم گازوئیل روی محور مخزن یعنی در فاصلهٔ ۱۱ = ۵ + ۶ فوتی زیر سطح زمین قرار دارد. وزن گازوئیل برابر است با

$$wV = ۴۲\pi(۵)^۲(۲۰) = ۲۱۰۰۰\pi\ \text{lb}.$$

مقدار کار لازم برای بالا بردن گازوئیل از محل مرکز جرمش تا بالای مخزن برابر است با

$$wV\bar{x} = (۲۱۰۰۰\pi)(۵) = ۱۰۵۰۰۰\pi\ \text{ft}\cdot\text{lb}.$$

مقدار کار لازم برای بالابردن گازوئیل از لبهٔ بالایی مخزن تا ارتفاع ۲ فوتی در بالای سطح زمین، یعنی انتقالی به اندازهٔ ۸ = ۲ + ۶ فوت، چنین است

$$wVh = (۲۱۰۰۰\pi)(۸) = ۱۶۸۰۰۰\pi\ \text{ft}\cdot\text{lb}.$$

کل کار لازم برابر مجموع این دو مقدار است:

$$W = ۱۰۵۰۰۰\pi + ۱۶۸۰۰۰\pi = ۲۷۳۰۰۰\pi\ \text{ft}\cdot\text{lb}.$$

■

☐ کار و انرژی جنبشی

از رابطهٔ (۲) می‌توان به قضیهٔ کار-انرژی جنبشی در علم مکانیک رسید.

قضیه

قضیهٔ کار - انرژی جنبشی

کاری که نیروی وارد بر یک جسم انجام می‌دهد، برابر تغییر انرژی جنبشی آن جسم است.

برای اثبات قضیه فرض می‌کنیم نیرو در امتداد محور x از x_1 تا x_2 اعمال می‌شود. همچنین از سه مطلب زیر بهره می‌گیریم

۱. معادلهٔ کار: $W=\int_{x_1}^{x_2}F(x)\,dx$

۲. تعریف انرژی جنبشی: $K=\frac{۱}{۲}mv^۲$

۳. قانون دوم حرکت نیوتن: $F=m\frac{dv}{dt}$.

قاعدهٔ زنجیری را به‌صورت زیر به‌کار می‌بریم

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$$

و انتگرال کار را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_1}^{x_2}F(x)\,dx=\int_{x_1}^{x_2}m\frac{dv}{dt}\,dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2}mv\frac{dv}{dx}\,dx \\ &= \int_{v_1}^{v_2}mv\,dv \qquad \left(\text{سرعتهای جسم } v_1 \text{ و } v_2 \text{ در } x_1 \text{ و } x_2 \text{ هستند}\right) \qquad (۵) \\ &= \frac{۱}{۲}mv^۲\Big]_{v_1}^{v_2} \\ &= \frac{۱}{۲}mv_2^۲-\frac{۱}{۲}mv_1^۲. \end{aligned}$$

بنابراین، کاری که F انجام می‌دهد برابر انرژی جنبشی جسم در x_2 منهای انرژی جنبشی آن در x_1 است، یعنی

$$\text{کار}=\Delta K.$$

اهمیت این نتیجه در این است که اگر جرم جسم و سرعتهای v_1 و v_2 آن معلوم باشد، می‌توانیم بدون اطلاع از نیروی F و جابه‌جایی x_2-x_1 کار را به‌دست آوریم. بنابراین می‌توانیم کار لازم برای پرتاب کردن یک توپ بیسبال با سرعت ۹۰ مایل درساعت را به‌دست آوریم بدون اینکه بدانیم چه نیرویی و در چه فاصله‌ای بر توپ اثر می‌کند. درمورد تنیس نیز می‌توان از همین ایده استفاده کرد. مثلاً اگر بدانیم که یک توپ تنیس درست پس از برخورد با راکت با چه سرعتی حرکت می‌کند، می‌توانیم کار لازم برای به‌حرکت درآوردن توپ را بیابیم بدون اینکه بدانیم راکت چه نیرویی را در چه مدتی به‌توپ وارد می‌آورد.

مثال ۵ یک توپ تنیس ۲ اونسی پس از برخورد با راکت با سرعت ۱۶۰ ft/sec (حدود ۱۰۹ mph) به‌حرکت در می‌آید. مطلوب است کار لازم برای رساندن توپ به این سرعت برحسب فوت-پوند.

حل: در رابطهٔ (۵) به جای v_1، ۰ و به‌جای v_2، ۱۶۰ و به‌جای m جرم توپ را قرارمی‌دهیم. جرم توپ از تقسیم وزن آن برحسب پوند به ۳۲ یعنی شتاب گرانش به دست می‌آید. جرم

به‌دست‌آمده برحسب واحد مهندسی اسلاگ است

$$\text{اسلاگ } \frac{۱}{۲۵۶} = \frac{۱}{۳۲} \times \frac{۱}{۸} = \text{جرم}, \quad \text{lb} \frac{۱}{۸} = ۲\,\text{oz} = \text{وزن}$$

بنابه‌رابطهٔ (۵) داریم

$$\text{کار} = \frac{۱}{۲} m v_۲^۲ - \frac{۱}{۲} m v_۱^۲$$

$$= \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲۵۶}\right)(۱۶۰)^۲ - ۰$$

$$= ۵۰\,.$$

بنابراین برای به‌حرکت درآوردن توپ ۵۰ ft • lb کار لازم است. ■

مسأله‌ها

۱. برای اینکه طول فنری به اندازهٔ ۰٫۴ m افزایش‌یابد نیرویی به‌اندازهٔ ۶ نیوتن لازم است. برای اینکه طول همین فنر به‌اندازهٔ ۰٫۲ m افزایش‌یابد چقدرکار لازم است؟

۲. نیرویی برابر ۹۰ نیوتن به‌فنری وارد می‌شود و طول آن را ۱ m افزایش می‌دهد. برای اینکه افزایش طول همین فنر ۵ m باشد چقدرکار لازم است؟

۳. طول اولیهٔ فنری ۱۰ in است. نیرویی ۸۰۰ پوندی به فنر وارد می‌شود و طول آن را به اندازهٔ ۱۴ in افزایش می‌دهد.
الف) ثابت فنر را بیابید.
ب) برای اینکه طول فنر از ۱۰ in به ۱۲ in برسد چقدر کار لازم است؟
پ) نیروی ۱۶۰۰ پوندی چقدرطول فنر را افزایش‌می‌دهد؟

۴. نیرویی ۱۰۰۰۰ پوندی فنری را می‌فشارد و طولش را از ۱۲ in به ۱۱ in می‌رساند. برای اینکه فنر فشرده شود و طولش
الف) از ۱۲ in به ۱۱٫۵ in برسد،
ب) از ۱۱٫۵ in به ۱۱ in برسد، چه مقدار کار لازم‌است؟

۵. طول طبیعی فنری ۲ ft است. نیرویی یك‌پوندی بر‌فنروارد می‌شود و طول آن را ۵ ft افزایش می‌دهد (از ۲ ft به ۷ ft می‌رساند). این نیرو چه‌مقدارکار انجام‌می‌دهد؟ اگر نیروی ۲ پوندی به‌فنر اعمال شود طول فنرچقدر خواهد شد؟

۶. اگر شخصی به‌وزن ۱۵۰ پوند روی وزن‌سنجی بایستد، وزن‌سنج به‌اندازهٔ ۱٫۱۶ in فشرده می‌شود. اگر وزن‌سنج رفتاری شبیه فنر داشته باشد چه مقدار کار لازم است تا نسبت به‌طول عادی‌اش ۱٫۸ in فشرده شود؟ چه وزنه‌ای برای این مقدار فشردگی لازم است؟

۷. دوالکترون با نیرویی که نسبت معکوس با مجذور فاصله‌شان دارد یکدیگر را دفع می‌کنند.
الف) فرض می‌کنیم یك‌الکترون در نقطهٔ (۱, ۰) روی‌محور x ثابت نگهداشته می‌شود. مطلوب است کار لازم برای جابه‌جا کردن الکترون دوم در امتداد محور x از نقطهٔ (۱, ۰ −) تا مبدأ.
ب) فرض‌می‌کنیم هردوالکترون‌درنقاط (۱, ۰ −) و (۱, ۰) روی‌محور x ثابت‌اند. مطلوب‌است‌کارلازم برای‌جابه‌جا کردن یك‌الکترون‌سوم درامتداد محور x ازنقطهٔ (۵, ۰) تا (۳, ۰).

۸. فرض می‌کنیم که بتوان چاهی ازسطح زمین تا مرکززمین حفر کرد. اگر ذره‌ای به‌جرم m در این چاه سقوط‌کند نیرویی برابر $mg(r/R)$ به‌آن وارد می‌شود. r فاصلهٔ ذره تا مرکز زمین، R شعاع زمین، و g شتاب گرانش درسطح زمین است. اگرذره از سطح زمین تامرکز زمین سقوط‌کند چه‌مقدار کاربروی آن انجام می‌شود؟

۹. کیسه شنی که وزن آن در ابتدا ۱۴۴ پوند است با آهنگ ثابت ۳ ft/min به‌بالا برده می‌شود. کیسه شن سوراخ است و شن با آهنگ یکنواختی می‌ریزد به‌طوری‌که وقتی‌کیسه به ارتفاع ۱۸ ft می‌رسد نیمی از شنها ریخته است. برای بالا بردن کیسه به‌این ارتفاع چه‌مقدار کار لازم است؟

۱۰. اگر مخزن استوانه‌ای مورد بحث در مثال ۴ به‌طور قائم در زیرزمین قرار گیرد و نه افقی، و فاصلهٔ قاعدهٔ بالایی‌آن از سطح زمین یك فوت باشد، مقدارکارلازم برای پمپ‌کردن همهٔ گازوئیل درون مخزن را حساب کنید. کار را از دو روش محاسبه کنید: (الف) با روش برشی مثال ۳ و (ب) با استفاده از رابطهٔ (۴)، جوابها را با نتیجهٔ مثال ۴ مقایسه‌کنید.

۱۱. برای مکیدن مایع درون ظرفی مخروطی‌شکل (که درآغاز پر است و قاعدهٔ آن دربالا قرار دارد) از نی استفاده می‌شود. سربالایی نی همواره π اینچ بالاتر ازبالای ظرف قراردارد. وزن مخصوص مایع ۴۸ lb/ft^۳ است. کار لازم برای مکیدن‌کل مایع را برحسب شعاع و ارتفاع مخروط به‌دست‌آورید.

۱۲. یك‌مخزن استوانه‌ای قائم به‌ارتفاع ۳۰ ft و قطر ۲۰ ft تا ارتفاع ۲۰ فوتی‌نفت (به‌وزن‌مخصوص ۵۱٫۲ پوند برفوت‌مکعب) دارد. برای پمپ‌کردن این‌مقدار نفت و رساندن‌آن به‌سطح بالایی مخزن چه مقدارکار لازم است؟

۱۳. از دوران خم $y = x^۲$، $۰ \leqslant x \leqslant ۴$، حول محور y یك ظرف سهموی‌شکل ایجاد می‌شود. مخزنی آهنی به‌این‌شکل و پراز آب است (ابعاد به‌متر‌ند). برای پمپ‌کردن آب درون این‌ظرف

و رساندن آن به‌بالای ظرف چقدر کار لازم است؟ (یك مترمکعب آب حدود ۹۸۰۰ نیوتن وزن دارد.)

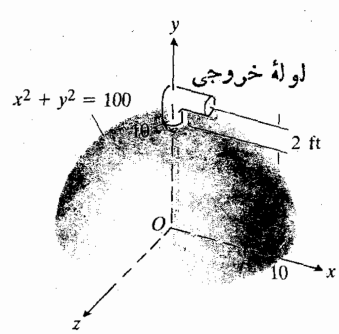
۱۴. فرض می‌کنیم درنیمی از مخزن مثال ۴ مایع وجـود دارد. برای خالی کردن آن چه مقدار کار لازم است؟

۱۵. مخزنی به‌شکل مخروط است وقاعدهٔ مخروط دربالا و رأس آن در پایین قراردارد. شعاع قاعـده ۱۰ ft و ارتفاع‌آن ۸ ft است. اگر این مخزن پراز آب باشد (هرفوت مکعب آب حدود ۶۲٫۵ پوند وزن دارد) برای پمپ کـردن همهٔ آب درون مخزن و رساندن آن به‌ارتفاع ۶ فوتی بالای قاعده چقدرکار لازم‌است؟

۱۶. اگر مخزن مسألهٔ ۱۵ تا ارتفاع ۵ فوتی آب داشته باشد و بخواهیم آب را تنها بـه قاعدهٔ ظـرف بـرسانیم چقدر کار لازم است؟

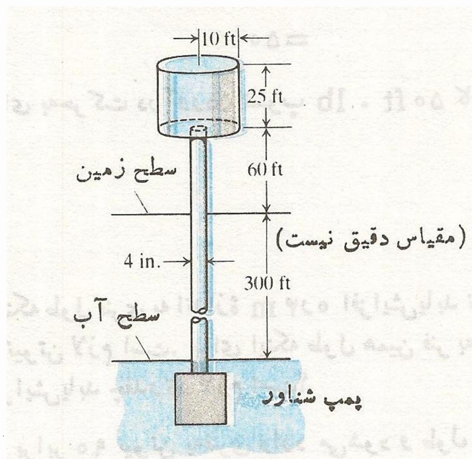
۱۷. مخزن یك‌کامیون حمل‌آب ۸۰۰ گالن ظرفیت دارد. رانندهٔ کامیون مخزن را پرازآب می‌کند وبا سرعت ثابت از پای‌کوهی بالا می‌رود. پس‌از ۵۰ دقیقه به قله‌که در ارتفاع ۴۷۵۰ فوتـی نسبت به‌پای‌کوه قراردارد می‌رسد ودرمی‌یابدکه به‌علت نشت‌آب ازمخزن تنها نیمی از آب باقـی مانده‌است. اگـر آب باآهنگ یکنواخت نشت‌کرده باشد چه مقدار کاربرای حمل‌آب ورساندن آن به‌قله انجام شده است؟ (کار انجام شده روی کامیون و راننده را در نظر نگیرید. وزن مخصوص آب ۸ پوند برگالن امریکایی است.)

۱۸. قـرار است مخـزن شکل ۶۵.۵ تخلیه وتعمیر شود. مخزن، نیمکره‌ای به‌شعاع ۱۰ ft و پراز بنزین به چگالـی ۵۶ lb/ft^3 است. شرکتی برای تخلیهٔ مخزن به‌ازای هرفوت-پونـد کار ۱٫۲ ریال مطالبه‌کرده است. کار لازم برای تخلیهٔ مایع درون مخزن و رساندن آن به‌لولهٔ خروجی‌که درارتفاع ۲ ft بالای مخزن قرار دارد چقـدر است؟ آیـا بـا در اختیار داشتن ۵۰۰۰۰۰ ریال می‌توان به‌کمك این شرکت مخزن را تخلیه‌کرد؟



۶۵.۵ مخزن مسألهٔ ۱۸.

۱۹. مردم شهری تصمیم‌می‌گیرند برای افزایش ذخیرهٔ آب شهر، چاهی حفرکنند. از مهندسی خـواسته می‌شود یك مخزن هوایـی طراحی‌کند تافشار لازم برای توزیع آب تأمین شود. سیستمی‌که مهندس طرح می‌کند، درشکل ۶۶.۵ دیده می‌شود. چاه ۳۰۰ فوت عمق دارد. آب از راه یك لولـهٔ ۴ اینچی بالا می‌رود، وازکف مخزن استوانه‌ای وارد آن می‌شود. مخزن استوانه‌ای ۲۰ ft قطر و ۲۵ ft ارتفاع دارد. کف مخـزن در ارتفاع ۶۰ فوتـی بالای سطح زمین است. پمپ از نوع شناور است و در زیر سطح آب درون چاه قرار می‌گیرد و درهر ثانیه ۱۶۵۰ فوت-پوند کارانجام می‌دهد، مخزن در بار اول پس‌از چه مدتی پرمی‌شود؟ (در محاسبهٔ کار، کار لازم برای پرشدن لوله را نیز منظورکنید.)



۶۶.۵ مخزن آب در مسألهٔ ۱۹.

۲۰. ثابت‌کنیدکه صرف‌نظر ازشکل مخزن شکل ۶۲.۵، کل کار انجام شده برابر مجموع دوجمله است: یکی

$$W_1 = hw\int dV$$

که عبارت است ازکل‌کار انجام شده برای بالا بردن‌کل مایع (با چگالی w) به‌ارتفاع h، ودیگری

$$W_2 = w\int x\,dV$$

که عبارت است از کار انجام شده بـرای بالابـردن‌کل مایع (با چگالی w) به‌ارتفاعی‌که برابراست باارتفاع اولیهٔ گرانیگاه مایع.

۲۱. کار و انرژی جنبشی. برای پرتاب‌کردن یك توپ بیسبال با سرعت اولیهٔ ۹۰ مایل برساعت چه مقدارکار برحسب فوت-پوند لازم‌است؟ (وزن توپ برابر است با ۰٫۳۱۲۵ lb = (اونس)۵، جرم برابراست با حاصل تقسیم وزن بر g، و $g = 32\ ft/sec^2$)

۲۲. کار و انرژی جنبشی. بـرای پرتاب‌کـردن یك تـوپ‌گلف ۱٫۶ اونسی باسرعت اولیهٔ ۱۲۰ ft/sec چه مقدار کار برحسب فوت-پوند لازم است؟

۱۰.۵ نیروی هیدرواستاتیکی

معمولاً قسمت پایین سد را ضخیمتر ازقسمت بالای آن می‌سازند زیرا فشاری که ازطرف آب به سد وارد می‌شود با زیاد شدن عمق افزایش می‌یابد. هرچه عمق آب بیشتر باشد، سد باید محکمتر باشد. نکتهٔ قابل ملاحظه این است که فشار آب درهر نقطه‌ای از سد تنها به‌عمق آن نقطه بستگی دارد و به حجم آب پشت سد بستگی ندارد. فشار آب (برحسب پوند برفوت مربع) وارد بر سد درهر نقطه‌ای به‌عمق h را می‌توان همواره از فرمول سادهٔ زیر به‌دست آورد.

$$p=۶۲٫۵h$$

که درآن ۶۲٫۵ وزن مخصوص آب برحسب پوند برفوت مربع است. ازاین فرمول می‌توان درمورد هرسدی استفاده کرد.

فرمول $p=۶۲٫۵h$ حالت خاصی است از فرمول کلیتر

$$p=wh\,.$$

این فرمول فشار وارد بردیواره‌های یك مخزن راکه حاوی سیالی به‌وزن‌مخصوص w است، درعمق h به‌دست می‌دهد. وزن مخصوص چند سیال برحسب پوند برفوت مکعب ازاین قرار است

گازوئیل	۴۲
جیوه	۸۴۹
شیر	۶۴٫۵
روغن زیتون	۵۷
آب دریا	۶۴
آب	۶۲٫۵

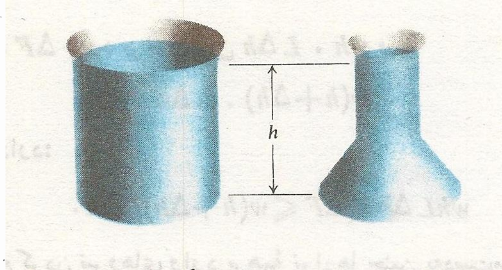
دراین بخش، چگونگی استفاده از فرمول $p=wh$ در محاسبهٔ نیروی کل وارد از یك مایع ساکن بر دیواره‌های یك مخزن بررسی‌می‌شود. چنین نیرویی‌را نیروی **هیدرواستاتیکی** می‌نامند.

نیرویی‌که سیال بر دیواره‌ها وارد می‌کند

مخزنی را درنظر بگیرید که کف آن تخت است و تا ارتفاع h آب دارد. نیرویی‌که وزن آب برکف مخزن وارد می‌کند چنین است

$$F=whA \qquad (۱)$$

که درآن w وزن مخصوص آب و A مساحت کف مخزن است. البته واحدهای کمیتهای رابطهٔ (۱) باید سازگار باشند. مثلاً اگر h برحسب متر، A برحسب متر مربع، و w برحسب نیوتن بر متر مکعب باشد، F برحسب نیوتن است. این نیرو به شکل دیواره‌های مخزن بستگی ندارد. اگر درشکل ۶۷.۵ مساحات کف



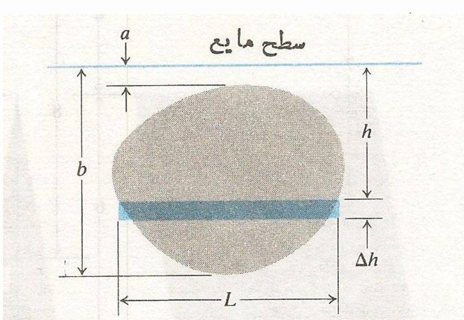
۶۷.۵ نیروهای هیدرواستاتیکی وارد بر کف این مخازن برابرند.

دومخزن مساوی باشد ونیز ارتفاع مایع درهر دومخزن یکی‌باشد، نیروی وارد برکف هر دوی آنها برابر است. به‌این‌ترتیب **فشار**، یا **نیرو بر واحد سطح** وارد برکف هردو مخزن چنین است

$$p=\frac{F}{A}=\frac{whA}{A}=wh. \qquad (۲)$$

حال نیروهایی را درنظر می‌گیریم که از آب، نظیر آب درون یك مخزن یا آب پشت سد، ناشی می‌شوند. بنا به‌اصل پاسکال، فشار $p=wh$ در عمق (h) یك سیال در همهٔ جهات یکسان است. اگرصفحه‌ای تخت به‌طورافقی درسیال قرار گیرد، نیروی به‌طرف پایین ناشی ازفشار سیال بر وجه بالایی صفحه از رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آید. اما اگر صفحه به‌طور قائم در سیال قرار گیرد، فشار وارد برآن درعمقهای مختلف فرق می‌کند ودیگر نمی‌توان از معادلهٔ (۱) استفاده کرد زیرا ضریب h در عمقهای مختلف تفاوت می‌کند.

برای غلبه بر این مشکل صفحه را با نوارهای نازك مستطیل شکلی که موازی سطح آب باشند تقریب می‌زنیم (شکل ۶۸.۵). طول یك نوار نمونه L واحد وعرض آن Δh واحد است. مساحت آن $L\Delta h$ است ولبهٔ بالایی آن در عمق h قرار دارد. فشار وارد برنوار از wh تا $w(h+\Delta h)$ تغییرمی کند. ازاین‌رو، بنابه‌رابطهٔ (۱)



۶۸.۵ صفحه‌ای که به‌صورت قائم وارد سیال شده است. نیرویی‌که سیال بریکی از وجوه نوار مستطیلی وارد می‌کند تقریباً برابر $whL\Delta h$ است، که در آن w وزن مخصوص (وزن در واحد حجم) سیال است.

نیروی ΔF وارد بر نوار بین $wh \cdot L\Delta h$ و

$$w(h+\Delta h) \cdot L\Delta h$$

قرار دارد:

$$whL\,\Delta h \leqslant \Delta F \leqslant w(h+\Delta h)L\,\Delta h. \qquad (۳)$$

با جمع کردن نیروهای وارد برهمهٔ نوارها چنین به‌دست‌می‌آوریم

$$\sum whL\,\Delta h \leqslant \sum \Delta F \leqslant \sum w(h+\Delta h)L\,\Delta h. \qquad (۴)$$

اگر Δh به‌صفر میل کند، معادلهٔ نیروی F وارد بر یك وجه صفحه چنین است

$$F=\int_a^b whL\,dh = w\int_a^b hL\,dh. \qquad (۵)$$

عمق مرکزجرم صفحه برابر است با

$$\bar{h}=\frac{\int_a^b hL\,dh}{\int_a^b L\,dh}.$$

بنابراین

$$\int_a^b hL\,dh=\bar{h}\int_a^b L\,dh=\bar{h}(\text{مساحت صفحه})=\bar{h}A \qquad (۶)$$

و رابطهٔ (۵) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$F=w\bar{h}A. \qquad (۷)$$

تساوی (۷) حاکی است که نیروی وارد بریکی از وجوه صفحه‌ای که به‌طور قائم وارد یك سیال می‌شود برابر نیروی وارد برهمان صفحه است وقتی که تمامی مساحت آن درعمق $\bar{h}$ باشد. درمورد بسیاری ازشکلها، مقدار $\bar{h}$ را می‌توان از جداول موجود به‌دست‌آورد وسپس به‌کمك رابطهٔ(۷) مقدار F را یافت. البته‌کسی که این جداول را تهیه‌کرده است انتگرالهایی‌نظیر انتگرال‌معادلهٔ (۵) را محاسبه‌کرده ومرکزجرم را به‌دست‌آورده است. ما به‌شما توصیه می‌کنیم که فعلاً با اندیشیدن به‌مراحلی که منجر به‌رابطهٔ (۵) می‌شود F را از راه انتگرالگیری به‌دست‌آورید و سپس درستی نتایج را درمواردی‌که انجام‌آن ساده است، به‌کمك معادلهٔ (۷) بررسی کنید.

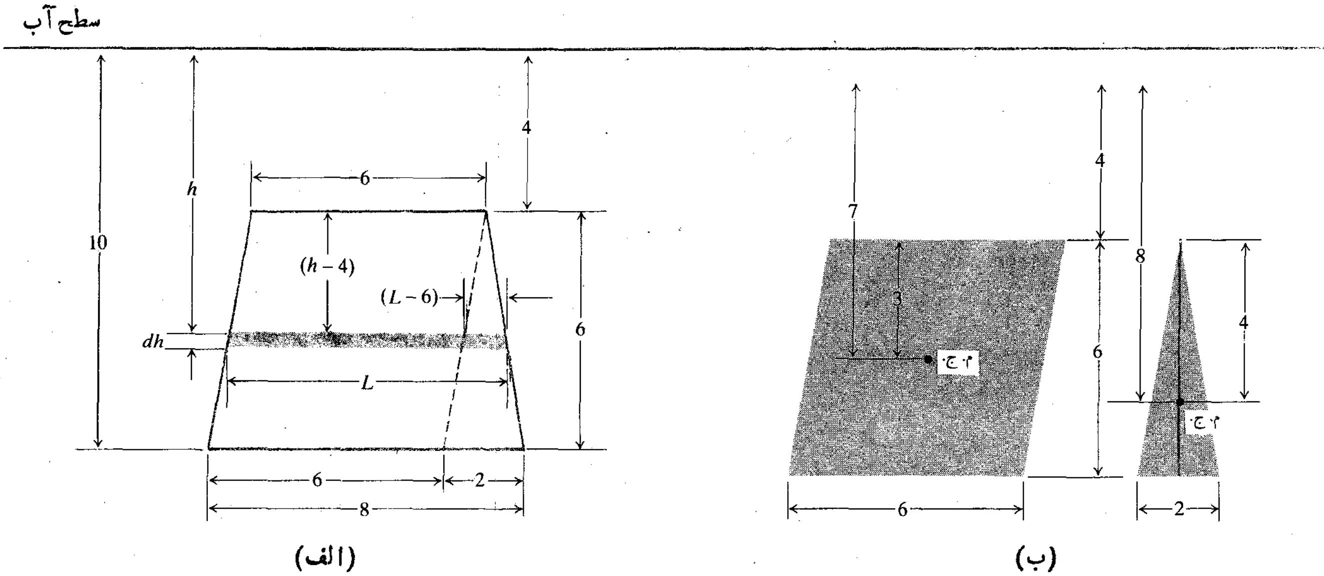
مثال ۱ یك ذوزنقهٔ‌متساوی‌الساقین را به‌طورقائم واردآب‌می‌کنیم به‌طوری‌که قاعدهٔ بالایی‌آن ۴ ft و قاعدهٔ پایینی آن ۱۰ ft زیر سطح‌آب قرار گیرد. طول‌قاعده‌های بالایی و پایینی‌به‌ترتیب ۶ ft و ۸ ft هستند. نیروی‌کل وارد بر یکی از وجوه این ذوزنقه را بیابید.

حل: درشکل ۶۹.۵ (الف) با توجه به‌تشابه مثلثها داریم

$$\frac{L-۶}{۲}=\frac{h-۴}{۶}.$$

پس

$$L=\frac{h+۱۴}{۳}.$$



۶۹.۵ (الف) ذوزنقهٔ مثال ۱ که به‌طور قائم به‌زیرآب فرورفته است. (ب) ذوزنقه به یك متوازی‌الاضلاع و یك مثلث متساوی‌الساقین تقسیم شده‌است. مرکزوارهای حاصل با م. ج. (مرکزجرم) مشخص شده‌اند.

بنابراین نیرو برابر است با

$$F=\int_{۴}^{۱۰} whL\,dh=\int_{۴}^{۱۰} wh\left(\frac{h+۱۴}{۳}\right)dh$$

$$=\frac{w}{۳}\left[\frac{h^{۳}}{۳}+۷h^{۲}\right]_{۴}^{۱۰}=۳۰۰w.$$

چون درمورد آب $w=۶۲٫۵\ \mathrm{lb/ft^{۳}}$ است، پس

$$F=(۳۰۰)(۶۲٫۵)=۱۸۷۵۰\ \mathrm{lb}.$$

برای بررسی صحت این نتیجه به کمک رابطهٔ (۷)، ذوزنقه را به یک متوازی‌الاضلاع و یک مثلث تقسیم می‌کنیم (شکل ۶۹.۵ ب). درمورد متوازی‌الاضلاع داریم

$$\bar{h}_{۱}=۷ \quad ، \quad A_{۱}=۳۶ \quad \text{و} \quad F_{۱}=wh_{۱}A_{۱}=۲۵۲w.$$

درمورد مثلث داریم

$$\bar{h}_{۲}=۸ \quad ، \quad A_{۲}=۶ \quad \text{و} \quad F_{۲}=wh_{۲}A_{۲}=۴۸w.$$

پس درمورد ذوزنقه داریم

$$F=F_{۱}+F_{۲}=۳۰۰w. \qquad \blacksquare$$

مسأله‌ها

۱. دووجه قائم یک آبشخور، مثلثهای متساوی‌الساقین وارونه‌ای به‌قاعدهٔ ۴ ft و ارتفاع ۳ ft هستند. اگر آبشخور پر از آب به‌وزن مخصوص $۶۲٫۵\ \mathrm{lb/ft^{۳}}$ باشد چه نیرویی بر هریک از وجوه قائم آن وارد می‌شود؟

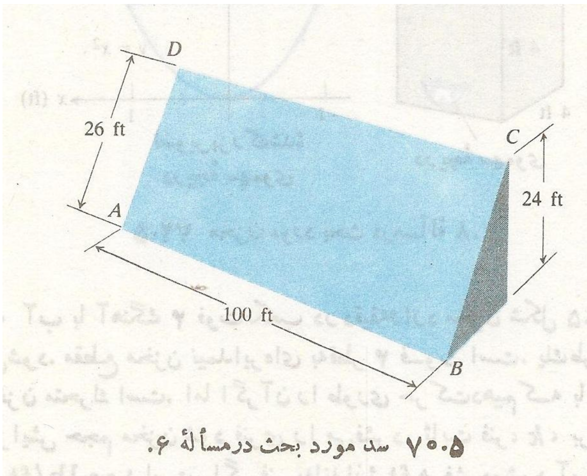
۲. مطلوب است محاسبهٔ نیرو درمسألهٔ قبل اگر سطح آب ۱ ft پایین برود.

۳. ورقهٔ مثلثی‌شکل ABC را به‌طور قائم درآب فرو می‌کنیم. ضلع AB، به‌طول ۴ ft، در ۱ فوتی زیرسطح آب قرار می‌گیرد و رأس C، ۵ ft زیر AB است. نیروی کل وارد بر یکی از وجوه ورقه را بیابید.

۴. مطلوب است نیروی وارد بر یکی از وجوه مثلث ABC در مسألهٔ ۳ اگر بازهم AB، ۱ فوت زیر سطح آب باشد، اما مثلث ۱۸۰° حول AB دوران کند و رأس C، درفاصلهٔ ۴ فوتی بالای سطح آب قرار گیرد.

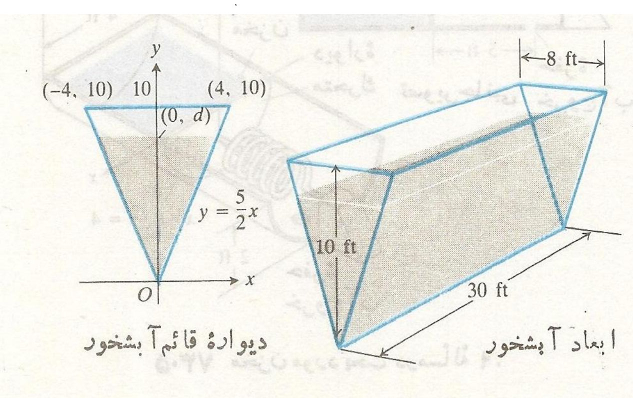
۵. یک ورقهٔ نیمدایره‌ای به‌قطر ۲ ft به‌طور قائم وارد آب می‌شود و قطرش درسطح آب قرار می‌گیرد. نیروی وارد بر یکی از وجوه ورقه را بیابید.

۶. وجه سدی یک مستطیل $(ABCD)$ به ابعاد $AB=CD=۱۰۰\ \mathrm{ft}$، $AD=BC=۲۶\ \mathrm{ft}$ است. صفحهٔ $ABCD$ چنانکه در شکل ۷۰.۵ دیده می‌شود به‌جای اینکه قائم باشد مایل است و لبهٔ بالایی آن ۲۴ ft بالاتر از کف سد است. مطلوب است نیرویی که فشار آب بر سد وارد می‌کند درصورتی که سطح آب همتراز با لبهٔ بالایی سد باشد.



۷۰.۵ سد مورد بحث درمسألهٔ ۶.

۷. هر کدام از وجوه آبشخور شکل ۷۱.۵ چنان طراحی شده‌است که بتواند نیروی ۶۶۶۷ پوندی را تحمل کند. با توجه به این محدودیت چند فوت مکعب آب می‌توان در این مخزن جای داد؟ فرض کنید $w=۶۲٫۵\ \mathrm{lb/ft^{۳}}$.

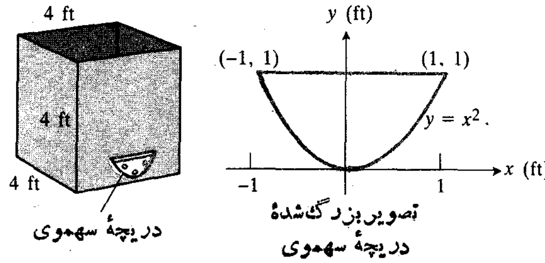


۷۱.۵ آبشخور مورد بحث درمسألهٔ ۷.

۸. از مخزن فلزی مکعب‌شکلی که درشکل ۷۲.۵ می‌بینید برای ذخیره کردن مایعات استفاده می‌شود. این مخزن یک دریچهٔ تخلیهٔ سهموی‌شکل دارد (شکل ۷۲.۵ ب تصویر بزرگ‌شدهٔ آن را نشان می‌دهد) که به کمک تسمه‌هایی درجای خود محکم شده‌است. دریچه چنان طراحی شده‌است که می‌تواند بدون گسیختگی نیروی ۱۶۰ پوند را تحمل کند. چگالی مایعی که قرار است درمخزن نگهداری شود $۵۰\ \mathrm{lb/ft^{۳}}$ است.

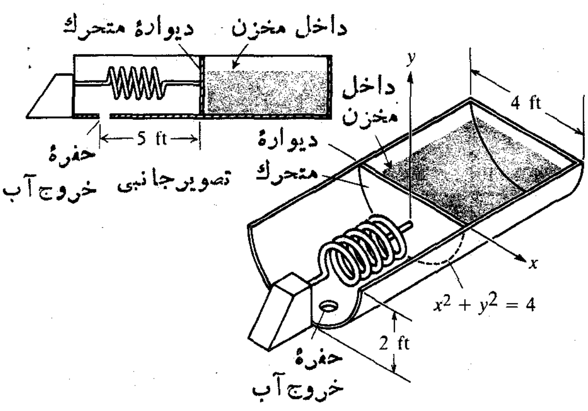
الف) هرگاه ارتفاع مایع درمخزن ۲ ft باشد چه‌نیرویی به‌دریچه وارد می‌شود؟

ب) حداکثر ارتفاع مایع درمخزن چقدر می‌تواند باشد تا نیروی وارد بر دریچه ازحد مجاز بیشتر نشود؟



۷۲.۵ مخزن مورد بحث درمسألهٔ ۸.

۹. آب با آهنگ ۴ فوت‌مکعب در دقیقه‌وارد مخزن شکل ۷۳.۵ می‌شود. مقطع مخزن نیمدایره‌ای به‌قطر ۴ فوت است. یك‌طرف مخزن متحرك است. اما اگرآن را طوری حرکت‌دهیم که باعث افزایش حجم مخزن شود فنری را می‌فشرد. ثابت فنر، k، برابر با ۱۰۰ lb/ft است. اگر فنر به‌اندازهٔ ۵ ft فشرده شود آب از حفره‌ای‌واقع در ته‌مخزن با آهنگ ۵ $\mathrm{ft}^3/\mathrm{min}$ خارج می‌شود. آیا هیچگاه آب از مخزن سرریز خواهدکرد؟



۷۳.۵ مخزن مورد بحث درمسألهٔ ۹.

پرسشها و تمرینهای مروری

۱. کاربردهای انتگرالگیری مورد بحث دراین فصل را نام‌ببرید.

۲. چگونه مساحت ناحیه‌ای راکه ازبالا به‌خم $y=f_1(x)$، از پایین به‌خم $y=f_2(x)$، و ازطرفین به $x=a$ و $x=b$ محدود می‌شود تعریف و محاسبه می‌کنید؟ مثالی بیاورید.

۳. چگونه حجم اجسام دورانی را تعریف و محاسبه می‌کنید؟ مثالهایی بیاورید.

۴. چگونه طول یك‌خم‌واقع درصفحه‌را تعریف ومحاسبه‌می‌کنید؟ مثالهایی بیاورید.

۵. چگونه مساحت یك رویهٔ دورانی را تعریف ومحاسبه می‌کنید؟ مثالهایی بیاورید.

۶. مقدار میانگین یك تابع روی یك‌بازه چیست؟ مثالی بیاورید.

۷. چگونه گشتاور و مرکزجرم تعریف ومحاسبه می‌شود؟ مثالهایی بیاورید.

۸. کاری را که یك نیروی متغیر در امتداد یك خط مستقیم انجام می‌دهد تعریف کنید. مثالی بیاورید.

۹. چگونه مقدارکار لازم برای پمپ‌کردن مایع درون یك‌مخزن را محاسبه می‌کنید؟ مثالی بیاورید.

۱۰. چگونه نیروی هیدرواستاتیکی وارد بر یك‌وجه ورقه‌ای را که به‌صورت قائم وارد یك مایع می‌شود تعریف می‌کنید؟ مثالی بیاورید.

مسأله‌های گوناگون

۱. تابع $v=3t^2-15t+18$، سرعت (ft/sec) جسمی‌را که روی خطی حرکت می‌کند به‌صورت تابعی از زمان و به‌ازای $0\leqslant t\leqslant 3$ به‌دست می‌دهد. کل مسافتی را که جسم می‌پیماید و نیز تغییرخالص مکان آن را بیابید.

۲. تابع $v=t^3-3t^2+2t$، سرعت (m/sec) جسمی را که روی خطی حرکت می‌کند به‌صورت تابعی از زمان و به‌ازای $0\leqslant t\leqslant 2$ به‌دست می‌دهد. کل مسافتی را که جسم می‌پیماید و نیز تغییرخالص مکان آن را بیابید.

درمسائل ۳-۱۸، مساحت ناحیهٔ محدود به‌خمها و خطهای داده‌شده را بیابید.

۳. $y=2-x^2,\quad y=-x$

۴. $y=x,\quad y=1/x^2,\quad x=2$

۵. $y=x,\quad y=1/\sqrt{x},\quad x=2$

۶. $y=x+1,\quad y=3-x^2$

۷. $y=2x^2,\quad y=x^2+2x+3$

۸. $x=2y^2,\quad x=0,\quad y=3$

۹. $4x=y^2-4,\quad 4x=y+16$

۱۰. $y=x,\quad y=x^3,\quad -1\leqslant x\leqslant 1$

۱۱. $y=\sin x,\quad y=\sqrt{۲}x/۲$

۱۲. $y=\sin x,\quad y=x,\quad ۰\leqslant x\leqslant \pi/۲$

۱۳. $y^۲=۹x,\quad y=۳x^۲/۸$

۱۴. $y=x\sqrt{۲x^۲+۱},\quad x=۰,\quad x=۲$

۱۵. $y^۲=۴x$ و $y=۴x-۲$

۱۶. $y=۲-x^۲$ و $y=x^۲-۶$

۱۷. $y=|\cos x|,\quad y=۱,\quad ۰\leqslant x\leqslant \pi$

۱۸. $y=۲\sin x$، $y=\sin ۲x$، و $۰\leqslant x\leqslant ۲\pi$

۱۹. نقاط ماکسیمم و مینیمم‌خم $y=x^۳-۳x^۲$ را بیابید و کل مساحت ناحیه‌ای را که به این خم و محور x محدود می‌شود تعیین کنید.

۲۰. مطلوب است مساحت ناحیه‌ای از ربع اول که به خم $x^{۱/۲}+y^{۱/۲}=a^{۱/۲}$ محدود می‌شود.

۲۱. ناحیه‌ای که از بالا به‌محور x و ازپایین به‌خم $y=x^۲-۲x$ محدود است، حول محور y دوران می‌کند. حجم جسم حاصل را بیابید.

۲۲. ناحیه‌ای که به‌خم $y=۲\tan x$، محور x، و خطوط $x=-\pi/۴$ و $x=\pi/۴$ محدود است، حول محور x دوران می‌کند. حجم جسم حاصل را بیابید.

۲۳. در اثر دوران ناحیهٔ محدود به‌خم $y=f(x)$، محور x، و خطوط $x=a$ ، $x=b$ حول محور x جسمی ایجاد می‌شود‌که حجمش به‌ازای هر bی بزرگتر از a برابر است با $b^۲-ab$. مطلوب است $f(x)$.

۲۴. مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ محدود به‌خمها و خطوط داده‌شده در زیر، حول خط مشخص شده.

الف) $y=x^۲$، $y=۰$، $x=۳$ حول محور x

ب) $y=x^۲$، $y=۰$، $x=۳$، حول خط $x=-۳$

پ) $y=x^۲$، $y=۰$، $x=۳$، حول محور y؛ نخست نسبت به x و پس از آن نسبت به y انتگرال بگیرید.

ت) $x=۴y-y^۲$، $x=۰$، حول محور y

ث) $x=۴y-y^۲$، $x=۰$، حول محور x .

۲۵. ناحیهٔ محدود به‌خم $y^۲=۴x$ و خط راست $y=x$ حول محور x دوران می‌کند و جسمی را ایجاد می‌کند. حجم جسم را بیابید.

۲۶. ناحیهٔ محدود به‌خم $y^۲=۴ax$، خط $x=a$، ومحور x را رسم‌کنید. مطلوب است حجم اجسام حاصل از دوران این ناحیه حول (الف) محور x ، (ب) خط $x=a$ ، (پ) محور y.

۲۷. ناحیهٔ محدود به‌خم $y=x/\sqrt{x^۳+۸}$، محور x، و خط $x=۲$ حول محور y دوران می‌کند و جسمی ایجاد می‌شود. حجم جسم را بیابید.

۲۸. مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ وسیعتر محدود به $y^۲=x-۱$، $x=۳$، و $y=۱$ حول محور y.

۲۹. ناحیهٔ محدود به خم $y^۲=۴ax$ و خط $x=a$ حول خط $x=۲a$ دوران می‌کند وجسمی‌ایجاد می‌شود. حجم‌جسم‌را بیابید.

۳۰. یك‌جسم پیچشی چنین‌ایجاد می‌شود: یك‌خط ثابت L درفضا و مربعی به‌ضلع s درصفحه‌ای عمود بر L مفروض است. رأسی‌از مربع روی L است. وقتی‌که این‌رأس به‌اندازهٔ h روی L جابه‌جا می‌شود، مربع یك دور کامل حول محور L دوران می‌کند. حجم جسمی را که در اثر این حرکت ایجاد می‌شود بیابید. اگر رأس به‌همان اندازهٔ قبلی‌روی L جابه‌جاشود،ومربع دو دورکامل بچرخد حجم جسم حاصل چقدر خواهد بود؟

۳۱. مطلوب‌است حجم‌جسم‌حاصل ازدوران ناحیهٔ محدود به‌محور x و یکی از قوسهای خم $y=\sin ۲x$ حول محور x .

۳۲. سوراخ گردی به‌شعاع $\sqrt{۳}$ ft درجسمی کروی به‌شعاع ۲ ft ایجاد می‌شود به‌طوری‌که محور سوراخ از مرکز کره می‌گذرد. حجم جسم جدا شده را بیابید.

۳۳. مقطع یك جسم درهرصفحهٔ عمود برمحور x دایره‌ای است به‌قطر AB به‌قسمتی‌که A روی خم $y^۲=۴x$ و B روی خم $x^۲=۴y$ قرار دارد. حجم جسم واقع بین نقاط تقاطع خمها را بیابید.

۳۴. قاعدهٔ جسمی ناحیهٔ محدود به $y^۲=۴ax$ و $x=a$ است. هر مقطع عمود برمحور x مثلثی متساوی‌الساقین است. حجم جسم را بیابید.

۳۵. حجم جسمی‌که در اثر دوران خم پیوستهٔ $y=f(x)$، $۰\leqslant x\leqslant a$ حول محور x ایجاد می‌شود به‌ازای هر aای برابر با $a^۲+a$ است. مطلوب است $f(x)$.

۳۶. فرض‌کنید f تابعی پیوسته است و این خاصیت را دارد‌که به‌ازای هر aی بزرگتراز صفر حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ محدود به‌محور x و نمودار f از $x=۰$ تا $x=a$ برابراست‌با $\pi a^۳$. مطلوب است $f(x)$.

۳۷. طول خمهای زیر را بیابید

الف) $y=۲\sqrt{۷}x^{۳/۲}-۱,\quad ۰\leqslant x\leqslant ۱$

ب) $y=(2/3)x^{3/2}-(1/2)x^{1/2},\quad 0\leqslant x\leqslant 4$

پ) $x=(3/5)y^{5/3}-(3/4)y^{1/3},\quad 0\leqslant y\leqslant 1$

۳۸. فرض کنید f به‌ازای $x\geqslant 0$ تابعی مشتقپذیر از x است و $a=f(0)$. نیز فرض کنید $s(x)$ طول خم $y=f(x)$ از $(0,a)$ تا $(x,f(x))$ را نشان می‌دهد.

الف) اگر به‌ازای ثابتی چون C داشته‌باشیم، $s(x)=Cx$، $f(x)$ را بیابید. مقادیر مجاز C کدام‌اند؟

ب) آیا $s(x)$ می‌تواند به ازای هر n بزرگتر از یك برابر با x^n باشد؟ توضیح دهید.

۳۹. مطلوب است مساحت رویهٔ حاصل از دوران

الف) خم مورد بحث درمسألهٔ ۳۷ (ب) حول محور y؛

ب) خم‌موردبحث درمسألهٔ ۳۷ (پ) حول خط $y=-1$.

۴۰. مطلوب است مساحت رویهٔ حاصل از دوران خم

$$x=t^{2/3},\quad y=\frac{t^2}{2},\quad 0\leqslant t\leqslant 2$$

حول محور x.

۴۱. قضیهٔ مقدار میانگین درمورد انتگرالها. قضیهٔ مقدار میانگین را درمورد انتگرالها ثابت کنید. این قضیه حاکی است که اگر تابعی چون f در هر نقطه‌ای از بازه‌ای مانند $a\leqslant x\leqslant b$ پیوسته باشد، آنگاه دست‌کم یك نقطه چون c دراین بازه وجود دارد به قسمی که

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

(راهنمایی: نشان دهیدکه

$$\min f\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\max f$$

و قضیه مقدار میانی را به‌کار ببرید.)

۴۲. مقدار میانگین $y=\sqrt{ax}$ را روی بازهٔ از $x=0$ تا $x=a$ به‌دست آورید.

۴۳. گیریم AB قطر دایره‌ای به‌شعاع a باشد. تعدادی وتر بر AB عمود می‌شود وآن را به‌پاره خطهایی به‌طول مساوی تقسیم می‌کند. مطلوب است حد میانگین طولهای این وترها وقتی تعداد آنها به‌بینهایت میل کند.

(راهنمایی:

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{\pi a^2}{2}$$

زیرا این انتگرال مساحت نیمدایره‌ای به شعاع a را بـه‌دست می‌دهد.)

۴۴. مطلوب است حل مسألهٔ ۴۳ بااین فرض که وترها دایره را به‌کمانهایی باطول مساوی تقسیم‌کنند.

۴۵. درمسألهٔ ۴۳ به‌جای طول وترها مربع طـول آنهارا درنظر بگیرید ومسأله را حل‌کنید.

۴۶. درمسألهٔ ۴۴ به‌جای طول وترها مربع طول آنها را در نظر بگیرید ومسأله را حل‌کنید.

۴۷. نقطه‌ای روی‌خط راستی بنابه ضابطهٔ $s=120t-16t^2$ از $t=0$ تا $t=3$ حرکت می‌کند.

الف) مطلوب است مقدار میانگین سرعت دراین سه ثانیه نسبت به‌زمان. (نتیجه را با سرعت متـوسط $\Delta s/\Delta t$ دراین بازهٔ زمانی مقایسه‌کنید.)

ب) مطلـوب است مقـدارمیانگین سرعت دراین سه ثانیه نسبت به‌مسافت s.

۴۸. فرض کنید مساحت زیـر خم $y=f(x)$ از ۰ تا x برابر است با

$$A=(1+3x)^{1/2}-1,\quad x\geqslant 0\,.$$

الف) مطلـوب است آهنگ تغییر میانگین A نسبت به x وقتی‌که x از ۱ تا ۸ افزایش می‌یابد.

ب) مطلوب است آهنگ تغییر لحظه‌ای A نسبت به x در $x=5$.

پ) مطلوب است $f(x)$.

ت) مطلوب است مقدار میانگین f نسبت به x وقتی x از ۱ تا ۸ افزایش می‌یابد.

۴۹. مطلوب است مرکز جرم یك ورقـهٔ نازك همگن کـه ناحیهٔ محدود به‌خمهای $y^2=8x$ و $y=x^2$ را می‌پوشاند.

۵۰. مطلوب است مرکزجرم یك ورقهٔ همگن کـه ناحیهٔ واقع در ربع اول و محدود به‌خم $4y=x^2$، محور y، و خط $y=4$ را می‌پوشاند.

۵۱. مطلوب‌است مرکزجرم یك‌ورقهٔ همگن‌نازك محدود به‌خمهای $y^2=x$ و $x=2y$.

۵۲. مطلوب است مرکزجرم یك ورقهٔ نازك با چگالی ثابت δ و محدود به‌خم $y=4x-x^2$ و خط $2x-y=0$.

۵۳. مطلوب است مرکزجرم یك‌ورقهٔ نازك همگن‌که در ربع‌اول واقع و به‌خم $y=x^2$، محور x، و خط $x=1$ محدود است.

۵۴. فرض‌کنید چگالی یك ورقهٔ فلزی نازك به مساحت A، ثابت

و برابر با δ باشد. نشان دهید چنانچه گشتاورش حول محور y برابر با M باشد، گشتاورش حول خط $x=b$ برابر با $M-b\,\delta A$ است. توضیح دهید چرا این نتیجه نشان می‌دهد که مرکز جرم یکی از خواص فیزیکی جسم است و به دستگاه مختصاتی که برای یافتن محل آن به کار می‌رود بستگی ندارد.

۵۵. فرض کنید a عدد ثابت مثبتی است. مطلوب است مرکز جرم یک ورقهٔ نازک محدود به خم $y^2=4ax$ و خط $x=a$ اگر چگالی در (x, y) با (الف) x، (ب) y تناسب مستقیم داشته باشد.

۵۶. مطلوب است مرکزوار ناحیهٔ واقع در ربع اول و محدود به دو دایرهٔ هم‌مرکز و محورهای مختصات، با این فرض که شعاع دایره‌ها a و b، $b>a>0$، و مرکز آنها مبدأ باشد. حدهای مختصات مرکزوار را وقتی که a به b میل می‌کند تعیین کنید. در معنای این نتیجه بحث کنید.

۵۷. مطلوب است مرکزوار قوسی از خم $x=a\cos^3 t$، $y=a\sin^3 t$ که در ربع اول واقع است.

۵۸. از گوشهٔ مربعی به ضلع ۱۲ اینچ قطعهٔ مثلثی‌شکلی بریده می‌شود که مساحتش برابر با ۳۶ اینچ مربع است. اگر مرکزوار ناحیهٔ باقیمانده از یکی از اضلاع مربع اصلی ۷ اینچ فاصله داشته باشد، از اضلاع دیگر چقدر فاصله دارد؟

۵۹. مخزنی به‌شکل یک مخروط مستدیر قائم است که رأسش در پایین و قاعده‌اش در بالا قرار دارد. ارتفاع مخروط ۱۰ ft و شعاع قاعده‌اش ۵ ft است. مخزن پر از مایعی است با چگالی $60\ \text{lb/ft}^3$. مطلوب است کار لازم برای پمپ کردن مایع درون مخزن و رساندن آن به ارتفاع ۲ فوتی بالای مخزن. اگر توان موتور پمپ ۱/۲ اسب بخار باشد، چه مدت طول می‌کشد تا مخزن خالی شود؟ (یک اسب بخار ۵۵۰ فوت-پوند بر ثانیه است.)

۶۰. ذره‌ای به‌جرم M در لحظهٔ $t=0$ از حال سکون و با شتاب ثابت a به‌حرکت درمی‌آید و تحت تأثیر نیروی متغیر $F(t)=t^2$ از $x=0$ به $x=h$ می‌رود. کار انجام‌شده را بیابید.

۶۱. اگر ذره‌ای به‌جرم M در $(x, 0)$ باشد، نیرویی به اندازهٔ k/x^2 آن را به مبدأ جذب می‌کند. اگر ذره از $x=b$ شروع به‌حرکت کند و تنها تحت تأثیر همین نیرو قرار گیرد، چه مقدار کار لازم است تا این جسم از $x=a$ به $x=b$، $0<a<b$، برسد؟

۶۲. نیروی جاذبهٔ گرانشی در زیر سطح زمین با فاصله از مرکز زمین نسبت مستقیم دارد. جسمی که وزنش در سطح زمین w پوند است در فاصلهٔ r فوتی زیر سطح قرار دارد؛ برای آوردن آن به‌سطح زمین چه‌مقدار کار لازم است؟

۶۳. مخزنی به‌شکل یک استوانهٔ مستدیر قائم است؛ ارتفاعش ۲۰ ft و قطر قاعده‌اش ۸ ft و محورش به‌صورت افقی است. این مخزن تا نیمه حاوی روغن‌زیتون به‌وزن مخصوص $57\ \text{lb/ft}^3$ است. برای خالی کردن روغن از راه لوله‌ای که در ته مخزن قرار دارد و رساندن آن به ارتفاع ۶ فوتی بالای مخزن چه‌مقدار کار لازم است؟

۶۴. فرض کنید پیستونی، گاز درون استوانهٔ مستدیری را که مساحت سطح مقطع آن A است فشرده می‌سازد.

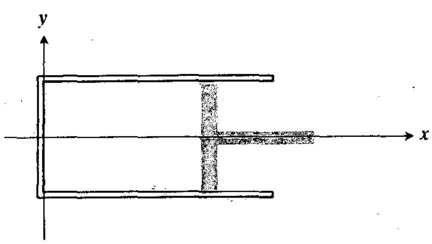
الف) اگر p فشار گاز برحسب پوند بر اینچ مربع و V حجم آن برحسب اینچ مکعب باشد، نشان دهید کاری که برای فشردن گاز و رساندن آن از حالت (p_1, V_1) به حالت (p_2, V_2) لازم است از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\text{کار} = \int_{(p_1, V_1)}^{(p_2, V_2)} p\,dV.$$

(راهنمایی: مطابق مختصات شکل ۷۴.۵ داریم $dV = A\,dx$. نیرویی که در برابر پیستون قرار دارد برابر است با pA.)

ب) به‌کمک انتگرال قسمت (الف) کار لازم برای فشردن گاز و رساندن حجم آن از $V_1 = 243\ \text{in}^3$ به $V_2 = 32\ \text{in}^3$ را بیابید. داریم $p_1 = 50\ \text{lb/in}^3$ و رابطهٔ بین p و V چنین است:

$$pV^{1.4} = \text{ثابت}$$



۷۴.۵ سیلندر و پیستون مورد بحث در مسألهٔ ۶۴.

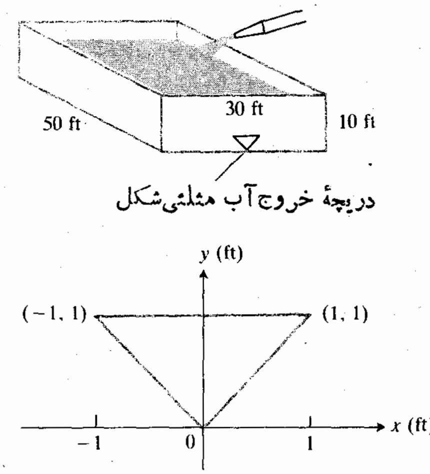
۶۵. دریچهٔ خروجی سدی تخت و قائم است. شکل این دریچه نظیر ناحیهٔ سهموی محدود به‌خم $y=4x^2$ و خط $y=4$ است (واحدها به‌فوت‌اند). رأس دریچه ۵ ft زیر سطح آب قرار دارد. نیروی هیدرواستاتیکی وارد به دریچه را بیابید. (از $w=62.5\ \text{lb/ft}^3$ استفاده کنید.)

۶۶. آب با آهنگ $1000\ \text{ft}^3/\text{hr}$ وارد استخر شنای شکل ۷۵.۵ می‌شود.

الف) پس از گذشت ۹ ساعت از وارد شدن آب به استخر، نیروی وارد به دریچهٔ خروجی مثلثی‌شکل چقدر است؟

ب) اگر طراحی دریچه به‌گونه‌ای باشد که دریچه بتواند

در برابر نیروی ۵۲۰ پوندی مقاومت کند تا چه ارتفاعی می‌توان دراستخر آب ریخت بدون اینکه به‌دریچه صدمه‌ای برسد؟



۷۵.۵ استخرشنای مورد بحث درمسألهٔ ۶۶.

۶۷. ورقهٔ مثلثی‌شکل ABC به‌صورت قائم وارد آب می‌شود. ضلع AB که طول آن ۴ ft است ۶ فوت زیرسطح آب قرار می‌گیرد، و رأس C در ۲ فوتی زیرسطح آب است. آب‌چه‌نیرویی بریکی از وجوه این‌ورقه وارد می‌آورد؟

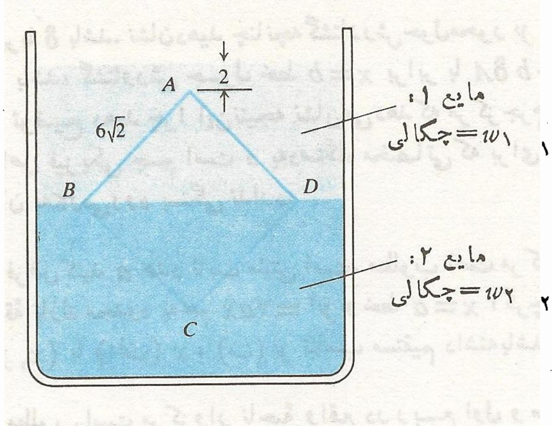
۶۸. سدی به‌شکل یک‌ذوزنقهٔ قائم است. طول دوقاعدهٔ آن به‌ترتیب ۲۰۰ و ۱۰۰ فوت است. قاعدهٔ بزرگتر در بالا قراردارد. ارتفاع سد ۲۰ ft است. هرگاه سطح آب پشت سد همتراز لبهٔ بالایی آن باشد، نیروی هیدرواستاتیکی وارد برسد را بیابید.

۶۹. بنا به‌تعریف، **مرکزفشار** بریک صفحهٔ درون آب نقطه‌ای است که در آن‌می‌توان کل نیرو را اعمال کرد بدون‌اینکه گشتاور کل آن حول هیچ محوری درصفحه تغییرکند. مطلوب است عمق مرکز فشار وارد بر

الف) یک مستطیل قائم به ارتفاع h و پهنای b هرگاه ضلع بالایی آن درسطح آب باشد،

ب) یک مثلث قائم به‌ارتفاع h و قاعدهٔ b هرگاه رأس مقابل b به‌اندازهٔ a فوت و قاعدهٔ b به اندازهٔ $a+h$ فوت زیرسطح آب باشد.

۷۰. ظرفی حاوی دومایع مخلوط نشدنی با وزن مخصوص w_1 و w_2، $w_1 < w_2$، است. ورقهٔ مربعی‌شکل $ABCD$ که‌طول هرضلع آن $6\sqrt{2}$ ft است وارد ظرف می‌شود به‌قسمی که قطر ACی آن برسطح آزاد عمود است؛ بالاترین نقطهٔ مربع یعنی A، ۲ فوت زیرسطح آزاد، و BD برسطح بین دومایع منطبق است. شکل ۷۶.۵ را ببینید. مطلوب است نیروی وارد بریک‌وجه این ورقه.



۷۶.۵ ورقهٔ مورد بحث درمسألهٔ ۷۰.

قضایای پاپوس

درقرن سوم، یک‌یونانی اسکندرانی به‌نام پاپوس دوفرمول کشف کرد که مرکزجرم اجسام دورانی را به‌رویه و حجمشان مربوط می‌سازند. این فرمولهای ساده که به‌خاطرسپردنشان نیز آسان است درمواردی می‌توانند جایگزین محاسبات طولانی‌شوند.

قضیهٔ ۱ اگرناحیه‌ای ازیک‌صفحه حول‌محوری واقع درآن صفحه که ناحیه را قطع نمی‌کند یک‌بار دوران کند، حجم جسم حاصل برابراست با حاصلضرب مساحت ناحیه در مسافتی‌که مرکزجرم ناحیه می‌پیماید. با استفاده ازنماد داریم

$$V = ۲\pi \bar{y} A\,.$$

قضیهٔ ۲ اگرقوسی از یک‌خم واقع دریک صفحه حول‌خطی درآن صفحه‌که آن‌قوس‌را قطع نمی‌کند یک‌بار دوران‌کند، مساحت رویهٔ حاصل برابراست باحاصلضرب طول قوس درمسافتی‌که مرکزجرم قوس می‌پیماید. با استفاده ازنماد داریم

$$S = ۲\pi \bar{y} L\,.$$

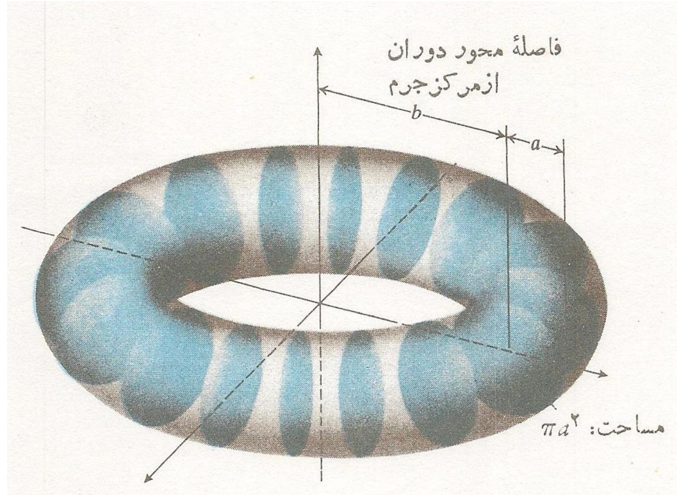
مثال ۱ حجم چنبرهٔ حاصل از دوران دایره‌ای به‌شعاع a حول محوری واقع درصفحهٔ دایره و به‌فاصله b، $b \geqslant a$، از مسرکزش (شکل ۷۷.۵ را ببینید)، چنین است

$$V = (۲\pi b)(\pi a^۲) = ۲\pi^۲ b a^۲\,. \quad ■$$

مثال ۲ مساحت رویهٔ چنبرهٔ مثال ۱ چنین است

$$S = (۲\pi b)(۲\pi a) = ۴\pi^۲ b a\,. \quad ■$$

۷۱. ناحیهٔ مربعی‌شکلی با رئوس (۲, ۰)، (۲, ۰)، (۴, ۲)، و (۲, ۴) حول محور x دوران می‌کند. حجم و مساحت رویهٔ جسم حاصل را بیابید.



۷۷.۵ حجم جسم حاصل از دوران قرص برابراست با $(2\pi b)(\pi a^2)$.

۷۲. به‌کمك قضیهٔ اول پاپوس، حجم جسم حاصل ازدوران مثلث محدود به‌محورهای مختصات و خط $2x+y=6$ را حول‌خط $x=5$ بیابید. (آیا چگونگی‌یافتن مرکزجرم یك ورقهٔ مثلثی‌شکل همگن را به‌خاطرمی‌آورید؟)

۷۳. حجم جسمی را که از دوران دایرهٔ $(x-2)^2+y^2=1$ حول محور x به‌دست می‌آید بیابید.

۷۴. به‌کمك قضایای پاپوس مساحت جانبی و حجم یك مخروط مستدیرقائم را بیابید.

۷۵. به‌کمك قضیهٔ دوم پاپوس و این مطلب که مساحت کره‌ای به‌شعاع a برابر $4\pi a^2$ است، مرکزجرم نیمدایرهٔ $y=\sqrt{a^2-x^2}$ را بیابید.

۷۶. مرکزجرم‌نیمدایرهٔ $y=\sqrt{a^2-x^2}$، چنانکه درمسألهٔ ۷۵ به‌دست‌آمد، درنقطهٔ $(0, 2a/\pi)$ قراردارد. مساحت رویهٔ حاصل از دوران این نیمدایره را حول خط $y=a$ بیابید.

۷۷. به‌کمك قضیهٔ اول پاپوس و این‌مطلب که حجم کره‌ای به‌شعاع a برابر با $V=(4/3)\pi a^3$ است مرکزجرم‌ناحیهٔ محدود به‌محور x و نیمدایرهٔ $y=\sqrt{a^2-x^2}$ را بیابید.

۷۸. مرکز جرم ناحیهٔ محدود به‌محور x و نیمدایرهٔ $y=\sqrt{a^2-x^2}$، چنانکه در مسألهٔ ۷۷ به‌دست آمد، درنقطهٔ $(0, 4a/3\pi)$ قراردارد.حجم جسم حاصل‌از دوران این ناحیه را حول خط $y=-a$ بیابید.

۷۹. مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ مورد بحث درمسألهٔ ۷۸ حول خط $y=x-a$.

۸۰. مرکز جرم نیمدایرهٔ $y=\sqrt{a^2-x^2}$، چنانکه درمسألهٔ ۷۵ به‌دست‌آمد، درنقطهٔ $(0, 2a/\pi)$ قراردارد. مطلوب‌است مساحت رویهٔ حاصل از دوران نیمدایره حول خط $y=x-a$.

۶

تابعهای متعالی

چشم‌انداز

اگر $y=f(x)$ اندازهٔ کمیتی باشد که با زمان تغییر می‌کند، آنگاه معادلهٔ $dy/dt=ky$ یا

$$y'=ky \qquad (k \text{ ثابت}) \tag{۱}$$

حاکی است که درهر لحظهٔ t، آهنگ تغییر y متناسب است بامقدار y موجود. بسته به‌تابع f، این آهنگ ممکن است تغییرات گوناگونی را توصیف کند. از جمله: اتلاف حرارت جسمی که به‌یك محیط خنك کننده وارد می‌شود (نقرهٔ داغی که درآب فرو می‌رود)، تغییر جریان دریك مدار الکتریکی که با باتری‌کار می‌کند، یا فروپاشی یك عنصر رادیواکتیو مثل کربن ۱۴ (تعداد اتمهایی که درهرواحد زمان تجزیه‌می‌شود متناسب است با تعداد اتمهای رادیواکتیوی که باقی می‌ماند).

دراین فصل خواهیم‌دید که یکی از جوابهای $y'=ky$ تابع نمایی

$$y=e^{kt} \qquad (e\approx ۲٫۷۱۸۲۸) \tag{۲}$$

است که یکی از توابع موسوم به‌توابع متعالی است. نام «متعالی» را اویلر برای توصیف اعدادی انتخاب کرد که ریشهٔ یك معادلهٔ چندجمله‌ای نیستند. اویلر می‌گوید که این اعداد «متعالیتر از آن‌اند که روشهای جبری درموردشان کارساز باشد». امروزه، تابعی چون $y=f(x)$ را متعالی نامند اگر درمعادلهٔ به‌صورت

$$P_n(x)y^n+\dots+P_۱(x)y+P_۰(x)=۰ \tag{۳}$$

که درآن ضرایب $P_۰(x)$، $P_۱(x)$، ...، $P_n(x)$ چندجمله‌ایهایی برحسب xاند، صدق نکند.

تابعی که در معادله‌ای نظیر (۳) صدق کند، جبری نام دارد. مثلاً، $y=۱/\sqrt{(x+۱)}$ جبری است زیرا در معادلهٔ $(x+۱)y^۲-۱=۰$ صدق می‌کند. در اینجاضرایب عبارت‌انداز چندجمله‌ایهای $P_۲(x)=x+۱$، $P_۱(x)=۰$، و $P_۰(x)=-۱$. چندجمله‌ایها، و توابع گویا جبری هستند. تمام حاصلجمعها، حاصلضربها، خارج‌قسمتها، توانها، و ریشه‌های توابع جبری نیز جبری‌اند.

شش تابع اصلی مثلثاتی، متعالی‌اند. توابع مثلثاتی‌معکوس، و توابع نمایی و لگاریتمی هم که موضوع اصلی این فصل‌اند متعالی‌اند. توابع متعالی علاوه بر ریاضیات درفیزیك و مهندسی نیز اهمیت دارند؛ درطول فصل چند نمونه ازکاربرد این‌توابع را خواهیم‌دید.

۱.۶ تابعهای معکوس یکدیگر

برای پیگیری‌مبحث حساب دیفرانسیل و انتگرال‌لازم‌است توابعی را تعریف‌کنیم که به‌بهترین وجه به صورت معکوس توابعی که تاکنون دیده‌ایم معرفی می‌شوند. دراین‌بخش در بارهٔ اینکه دوتابع به چه مفهومی معکوس یکدیگر هستند بحث می‌کنیم، و از اینجا نتایجی در مورد فرمولها، نمودارها، و مشتقات آنها به‌دست می‌آوریم.

تابعهای یک به یک معکوس دارند

همان‌طور که می‌دانید، تابع قاعده‌ای است که به‌هرعدد در دامنه‌اش عددی از بردش را تخصیص می‌دهد. توابعی نظیر

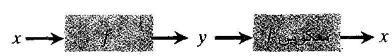
$$y=\sin x ، \quad y=x^2 ، \quad و \quad y=3$$

می‌توانند به ازای ورودیهای متفاوت خروجی یکسان داشته‌باشند. ولی توابعی نظیر

$$y=\sqrt{x} ، \quad y=x^3 ، \quad و \quad y=4x-4$$

همواره به‌ازای ورودیهای متفاوت خروجیهای مختلف دارند. توابعی‌را که به‌ازای ورودیهای مختلف همیشه خروجیهای مختلف دارند، توابع **یک به‌یک** می‌نامند.

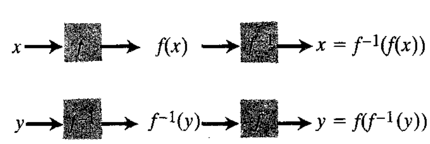
چون هرخروجی یک تابع یک به یک از فقط یک ورودی به‌دست می‌آید، هرتابع یک به‌یک را می‌توان معکوس کرد تا خروجیها را به‌ورودیهای مربوط برگرداند (شکل ۱.۶). تابعی که از معکوس‌کردن یک تابع یک به‌یک f به‌دست می‌آید **معکوس f** نام دارد. نماد معکوس f، f^{-1} است. نماد ۱− در f^{-1} نما نیست: یعنی $f^{-1}(x)$ برابر با $1/f(x)$ نیست.



۱.۶ معکوس تابعی‌چون f، هرخروجی f را به‌ورودی مربوط به‌خودش برمی‌گرداند.

همان‌گونه‌که درشکل ۲.۶ دیده می‌شود، نتیجهٔ ترکیب f و f^{-1}، به‌هرترتیب‌که باشد، **تابع‌همانی** است. تابع‌همانی تابعی است‌که به‌هرعدد همان‌عدد را نسبت‌می‌دهد. آزمون اینکه دو تابع f و g معکوس یکدیگر هستند یا نه، به این صورت است: $f\circ g$ و $g\circ f$ را محاسبه می‌کنیم، اگرهردوترکیب تابع‌همانی باشند، آنگاه f و g معکوس یکدیگرند، و درغیراین‌صورت چنین‌نیست.

چه توابعی معکوس‌دارند؟ توابع صعودی و توابع نزولی معکوس دارند، زیرا یک به‌یک‌اند (مسألهٔ ۲۲). در بین توابع پیوسته، اینها تنها توابعی هستندکه معکوس دارند، اما ما به اثبات این مطلب نمی‌پردازیم.

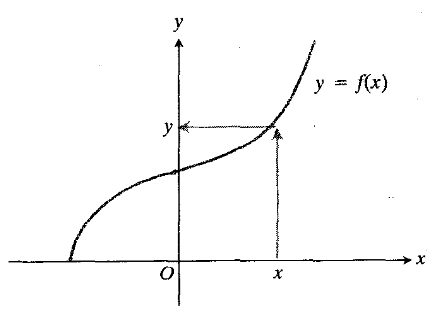


۲.۶ اگر $y=f(x)$ یک تابع یک به یک باشد، آنگاه $x=f^{-1}(f(x))$ و $y=f(f^{-1}(y))$. هر یک از دو تابع $f^{-1}\circ f$ و $f\circ f^{-1}$ روی دامنه‌اش تابع همانی است.

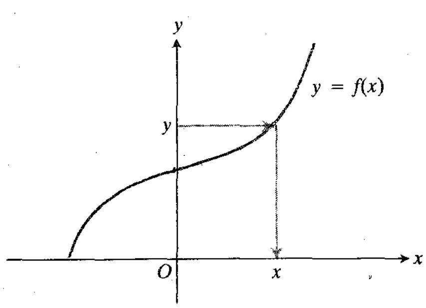
نمودار تابعهای معکوس

نمودار معکوس یک تابع چه ارتباطی با نمودار خود تابع دارد؟ فرضاً، اگر تابع صعودی باشد، نمودارش نظیر نمودار موجود درشکل ۳.۶ ازچپ به‌راست‌خیز برمی‌دارد. برای‌خواندن نمودار، بانقطهٔ x واقع برمحور x آغازمی‌کنیم، به‌بالامی‌رویم تا به‌نمودار برسیم، و سپس به‌محور y می‌رویم تا مقدار y را بیابیم. اگر از y آغازکنیم و بخواهیم x مربوط به y را بیابیم، برعکس عمل می‌کنیم (شکل ۴.۶).

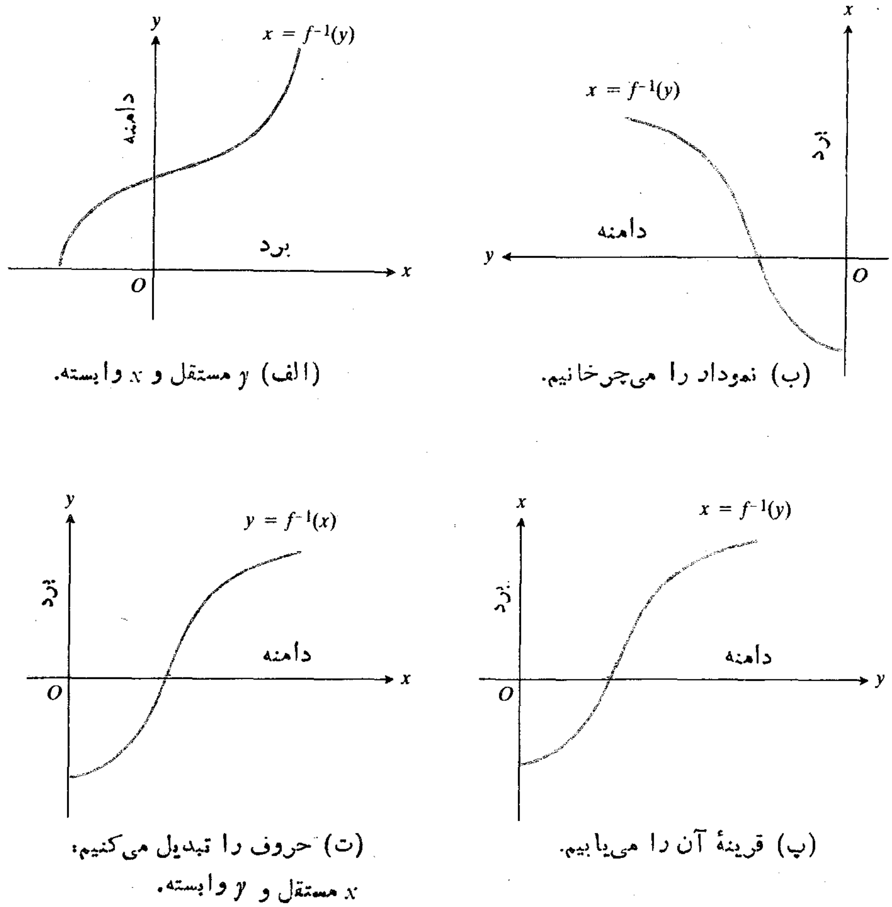
نمودار f^{-1} همان نمودار f است‌که برخلاف معمول محور دامنه افقی و محور برد قائم رسم نشده است. برای رسم نمودار f^{-1} به‌طوری‌که مطابق با عادت ما باشد، باید با روش زیر آن را از نمودار f به‌دست آوریم. نمودار f (شکل ۵.۶ الف) را درخلاف جهت‌ساعت می‌چرخانیم تامحور y افقی، و محور x قائم‌شود (شکل ۵.۶ ب). سپس قرینهٔ نمودار را نسبت به‌محور قائم چنان می‌یابیم‌که گویی این محور آینه‌ای است‌که جهت‌محور y را ازچپ به‌راست برمی‌گرداند (شکل ۵.۶ پ). درپایان، به‌جای y، x وبه‌جای x، y می‌نویسیم (شکل ۵.۶ ت). بدین‌ترتیب نمودار معمولی f^{-1} به‌صورت تابعی از x به‌دست می‌آید.



۳.۶ برای یافتن مقدار f در x بالامی‌رویم تا به‌خم برسیم و از آنجا به‌طرف محور y می‌دویم.



۴.۶ برای‌یافتن xی‌که y را به‌دست می‌دهد، از y به‌طرف خم می‌رویم و از آنجا پایین می‌آییم تا به‌محور x برسیم.



۵.۶ گامهای لازم برای رسم نمودار f^{-1} به‌صورت تابعی از x.

حال که به‌ارتباط نمودار $y=f^{-1}(x)$ با نمودار $y=f(x)$ پی بردیم، می‌توانیم آن را به‌روش سریعتری رسم کنیم. برای رسیدن به‌شکل ۵.۶ ت ازشکل ۵.۶ الف، معادلهٔ f را نسبت به x و برحسب y حل، وجای x و y را با یکدیگر عوض می‌کنیم. اثر این کاردقیقاً مانند این‌است که قرینهٔ نمودار $y=f(x)$ را نسبت به‌خط $y=x$ بیابیم. مثال زیر منظور ما را روشن می‌کند.

مثال ۱ معکوس تابع $y=\sqrt{x}$ را به‌صورت تابعی از x بیابید. سپس نمودار $y=\sqrt{x}$ و نمودار معکوسش را باهم رسم کنید.

حل: ازمعادلهٔ $y=\sqrt{x}$، x را برحسب y محاسبه‌می‌کنیم، وحروف x و y را به‌هم تبدیل می‌کنیم

$$y=\sqrt{x},\quad x=y^2,\quad y=x^2.$$

معکوس تابع $y=\sqrt{x}$، تابع $y=x^2$، $x\geqslant 0$ است. محدودیت $x\geqslant 0$ که در برد $y=\sqrt{x}$ نهفته‌است، باید برای دامنهٔ تابع معکوس $y=x^2$ منظور شود، زیرا دامنهٔ بدون محدودیت به‌صورت $-\infty<x<\infty$ است که قابل قبول نیست.

برای آزمایش، می‌نویسیم

$$f(x)=\sqrt{x},\quad g(x)=x^2,\quad x\geqslant 0$$

و می‌بینیم که ترکیب، به‌هر ترتیب که باشد، تابع‌همانی است

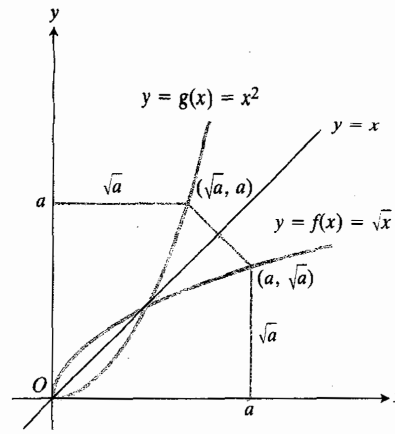
$$g(f(x))=(\sqrt{x})^2=x,\quad f(g(x))=\sqrt{x^2}=|x|=x. \tag{1}$$

در معادلهٔ آخر می‌توانیم از نماد قدرمطلق صرفنظر کنیم، زیرا $x\geqslant 0$.

اگر نمودار $y=x^2$، $x\geqslant 0$، و $y=\sqrt{x}$ را یکجا رسم کنیم (شکل ۶.۶)، تقارن دوتابع نسبت به‌خط $y=x$ مشخص می‌شود. نمودار $y=\sqrt{x}$ ازنقاط $(a,\sqrt{a})$، $a\geqslant 0$، تشکیل می‌شود. حال‌آنکه نمودار $y=x^2$، $x\geqslant 0$، متشکل از نقاط $(\sqrt{a},a)$، $a\geqslant 0$ است. ■

نکته معادلات (۱) نشان می‌دهند که تابع $y=\sqrt{x}$، معکوس تابع $y=x^2$، $x\geqslant 0$ است. هر تابع یك به‌یك، معکوس معکوس خود است

$$(f^{-1})^{-1}=f.$$



۶.۶ نمودار یك تابع ومعکوسش نسبت به‌خط $y=x$ متقارن‌اند.

مثال ۲ معکوس تابع زیر را بیابید

$$y=\frac{۱}{۴}x+۳\ .$$

حل: ازمعادلهٔ مفروض x را برحسب y به‌دست می‌آوریم

$$x=۴y-۱۲\ .$$

حال درمعادلهٔ $x=۴y-۱۲$ جای x و y را عوض می‌کنیم و

$$y=۴x-۱۲$$

را به‌دست‌می‌آوریم. معکوس $y=(۱/۴)x+۳$، $y=۴x-۱۲$ است.

برای آزمایش، می‌نویسیم

$$f(x)=\frac{۱}{۴}x+۳,\quad g(x)=۴x-۱۲\ .$$

پس

$$g(f(x))=۴\left(\frac{۱}{۴}x+۳\right)-۱۲=x+۱۲-۱۲=x$$

$$f(g(x))=\frac{۱}{۴}(۴x-۱۲)+۳=x-۳+۳=x\ .\ ■$$

مثال ۳ معکوس تابع $y=۸x^۳$ را بیابید.

حل: از معادلهٔ $y=۸x^۳$، x را برحسب y به‌دست می‌آوریم

$$x=\frac{\sqrt[۳]{y}}{۲}\ .$$

با تعویض x و y داریم

$$y=\frac{\sqrt[۳]{x}}{۲}\ .$$

معکوس $y=۸x^۳$، $y=\sqrt[۳]{x}/۲$ است.

برای آزمودن محاسبات، ترکیبهای این دوتابع را به‌دست می‌آوریم تا مطمئن شویم که هریك از ترکیبها تابع همانی است

$$y=۸\left(\frac{\sqrt[۳]{x}}{۲}\right)^۳=۸\left(\frac{x}{۸}\right)=x$$

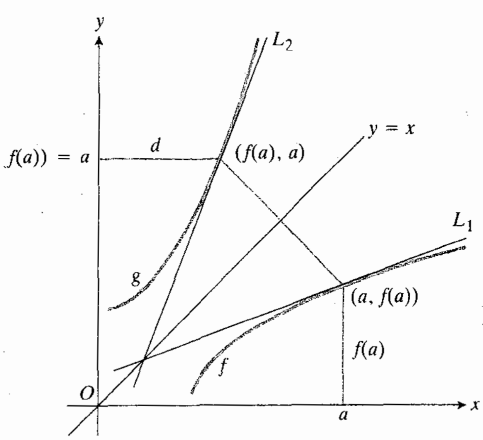
$$y=\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{۸x^۳}=\frac{۱}{۲}(۲x)=x\ .\ ■$$

مشتق معکوس یك تابع مشتقپذیر

اگر f و g معکوس یکدیگر باشند، نمودارهایشان، نظیر شکل ۷.۶، تصویر آینه‌ای یکدیگر نسبت به‌خط $x=y$اند. پس اگر $L_۱$ خط مماس برنمودار f در $(a, f(a))$ و $L_۲$ تصویر آینه‌ای $L_۱$ نسبت به‌خط $y=x$ باشد، طبیعی است که انتظار داشته‌باشیم $L_۲$ مماس برنمودار g در $(f(a), a)$ باشد. چون نسبت خیز/رو بر $L_۲$ متناظر با نسبت رو/خیز بر $L_۱$ است، می‌بینیم که شیب خط $L_۲$ یعنی $m_۲$ عکس شیب خط $L_۱$ یعنی $m_۱$ است

$$m_۲=\frac{۱}{m_۱}=\frac{۱}{f'(a)}\ . \qquad (۲)$$

اگر $L_۲$ واقعاً مماس برنمودار g در $(f(a), a)$ باشد، آنگاه



۷.۶ وقتی‌که نمودارهای f و g نسبت به‌خط $y=x$ تصویر آینه‌ای یکدیگر باشند، تصویر مماس برخم f در نقطهٔ $(a, f(a))$؛ مماس برنمودار g درنقطهٔ $(f(a), a)$ است. پس، شیب نمودار g در $x=f(a)$ عکس شیب نمودار f در $x=a$ است، با این‌شرط که $f'(a)\neq ۰$.

شیب L_2، $g'(f(a))$ است و داریم

$$g'(f(a))=\frac{1}{f'(a)}\,. \qquad (3)$$

قاعدهٔ محاسبهٔ مشتق معکوس یك تابع مشتقپذیر (که در کتابهای درسی پیشرفته‌تر ثابت می‌شود) به‌شرح زیر است.

قاعدهٔ ۱۱

قاعدهٔ محاسبهٔ مشتق تابعهای معکوس

اگر f درهرنقطه ازیك بازهٔ I مشتقپذیر باشد، و f' بر I هرگز صفر نشود، آنگاه $g=f^{-1}$ درهرنقطهٔ داخلی بازهٔ $f(I)$ مشتقپذیر است، و مقدار آن درنقطهٔ $f(x)$ برابر است با

$$g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}\,. \qquad (4)$$

دربخش ۷.۳ در یکی از نتایج قضیهٔ مقدار میانگین نشان دادیم که اگر f درهرنقطه ازیك بازهٔ باز I مشتقپذیر باشد، و اگر f' بر I هرگز صفرنشود، آنگاه f بر I یك بـه یك است. چنین تـابعی مسلماً معکوس دارد. قـاعدهٔ ۱۱ حاکی است که f^{-1} نیز مشتقپذیر است و مشتق آن عکس مشتق f است، و از معادلـهٔ (۴) به‌دست می‌آید.

در بخش ۸.۲ هنگام بحث دربارهٔ قاعدهٔ زنجیری در مورد معادلات پارامتری گفتیم که اگرمشتق $x=f(t)$ بربازه‌ای چون I هرگز صفر نشود، آنگاه معادلـهٔ $x=f(t)$، t را به‌عنوان تابع مشتقپذیری از x تعریف می‌کند. حال می‌توانیم به دلیل این مطلب پی‌ببریم: f معکوس دارد زیرا مشتقش هرگز صفرنمی‌شود، و f^{-1} بنا به قـاعدهٔ ۱۱ مشتقپذیر است. در بخش ۸.۲، ایـن معکوس را $t=h(x)$ نامیدیم.

مثال ۴ اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^2$، آنگاه

$$f(9)=\sqrt{9}=3\,.$$

نشان دهید همـان گـونـه کـه رابطـهٔ (۴) پیش‌بینی مـی‌کند، $g'(3)=1/f'(9)$.

حل: داریم

$$g'(x)=2x,\quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$g'(3)=6,\qquad f'(9)=\frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{6}\,.$$

بنابراین

$$g'(3)=\frac{1}{f'(9)}\,. \qquad \blacksquare$$

مثال ۵ درستی رابطهٔ (۴) را به‌کمك تابع $f(x)=4x-12$، ومعکوسش

$$g(x)=\frac{1}{4}x+3$$

بیازمایید.

حل: به‌ازای تمام مقادیر x داریم

$$f'(x)=4,\quad g'(x)=\frac{1}{4}=\frac{1}{f'(x)}\,. \qquad \blacksquare$$

مثال ۶ درستی رابطهٔ (۴) را به‌کمك تابع $f(x)=x^3$ ومعکوسش $g(x)=\sqrt[3]{x}$، درنقطهٔ $x=2$، بیازمـایید. به‌عبارت دیگرنشان دهید که

$$g'(f(2))=\frac{1}{f'(2)}\,.$$

حل: داریم

$$f(2)=2^3=8,\qquad g'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3}$$

$$f'(x)=3x^2,\qquad g'(8)=\frac{1}{3}(8)^{-2/3}=\frac{1}{3\times 8^{2/3}}$$

$$=\frac{1}{3\times 4}=\frac{1}{12}\,.$$

$$f'(2)=3\times 2^2=12\,.$$

پس، $g'(8)=1/f'(2)$. $\blacksquare$

حسن رابطهٔ (۴) در این‌است‌که دقیقاً به‌ما می‌گوید چگونه مشتق $g=f^{-1}$ در $f(x)$ را محاسبه‌کنیم: عکس‌مقدار f' در x را محاسبه می‌کنیم. این قـاعده مانند قـاعدهٔ زنجیری فرمولبندی کوتاهتری هم داردکه به‌خاطرسپردن‌آن ساده‌تر، اما حاوی اطلاع کمتری است: اگر $y=f(x)$، و معکوسش $x=g(y)$ مشتقپذیر باشند، آنگاه

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}\,. \qquad (5)$$

مثال ۷ به‌کمك زوج معکوس $y=\sqrt{x}$ و $x=y^2$، درستی‌رابطهٔ (۵) را بیازمایید.

حل: مشتق این توابع عبارت‌اند از

$$y=\sqrt{x},\qquad x=y^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}},\qquad \frac{dx}{dy}=2y\,.$$

پس

$$\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=2\sqrt{x}=2y=\frac{dx}{dy}. \quad \blacksquare$$

□ راههای دیگر تعبیر قاعدهٔ ۱۱

رابطهٔ (۴) را به‌صورت

$$g'(f(x))\cdot f'(x)=1 \tag{۶}$$

هم می‌توان نوشت که یادآور قاعدهٔ زنجیری است. در واقع، ارتباطی بین این دو وجود دارد. اگر f و g توابع مشتقپذیری باشند که معکوس یکدیگر هم هستند، آنگاه

$$(g\circ f)(x)=x$$

$$(g\circ f)'(x)=1$$

و بنابه‌قاعدهٔ زنجیری داریم

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$$

یا

$$1=g'(f(x))\cdot f'(x). \tag{۷}$$

اگر $f'(x)\neq 0$، آنگاه از رابطهٔ (۷) می‌توان $g'(f(x))$ را به‌دست آورد

$$g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$$

و این همان رابطهٔ (۴) است. (با وجود این، با استنتاج رابطهٔ (۴) از قاعدهٔ زنجیری، قاعدهٔ ۱۱ ثابت نمی‌شود زیرا در این استنتاج از مشتقپذیر بودن $g=f^{-1}$ استفاده می‌شود.)

راه دیگر تعبیر قاعدهٔ ۱۱ این است: اگر $y=f(x)$ در $x=a$ مشتقپذیر باشد، آنگاه

$$dy=f'(a)\,dx\,.$$

این بدین‌معناست که y، تقریباً $f'(a)$ بار تندتر از x تغییر می‌کند، و تغییر x، تقریباً $1/f'(a)$ بار از تغییر y تندتر است.

مسأله‌ها

درمسائل ۱ــ۸

الف) $g(x)$، معکوس تابع $f(x)$ را بیابید.

ب) توابع f و g را یکجا رسم کنید.

پ) نشان دهید که قاعدهٔ ۱۱ را می‌توان درمورد f و g در نقاط c و $f(c)$ به‌کار برد.

۱. $f(x)=2x+3,\quad c=-1$

۲. $f(x)=5-4x,\quad c=1/2$

۳. $f(x)=(1/5)x+7,\quad c=-1$

۴. $f(x)=2x^2,\quad x\geqslant 0,\quad c=1$

۵. $f(x)=x^2+1,\quad x\geqslant 0,\quad c=5$

۶. $f(x)=(x-1)^{1/3},\quad c=9$

۷. $f(x)=x^3-1,\quad c=2$

۸. $f(x)=x^2-2x+1,\quad x\geqslant 1,\quad c=4$

درمسائل ۹ــ۱۶، معکوس هر تابع، $f^{-1}(x)$، را بیابید، ونشان‌دهید که $f(f^{-1}(x))=f^{-1}(f(x))=x$.

۹. $f(x)=x^5$

۱۰. $f(x)=x^4,\quad x\geqslant 0$

۱۱. $f(x)=x^{2/3},\quad x\geqslant 0$

۱۲. $f(x)=(1/2)x-7/2$

۱۳. $f(x)=(x-1)^2,\quad x\geqslant 1$

۱۴. $f(x)=x^3+1$

۱۵. $f(x)=x^{-2},\quad x>0$

۱۶. $f(x)=x^{-3},\quad x\neq 0$

۱۷. الف) نمودارهای $y=x^3$ و $y=x^{1/3}$ را به ازای $-2\leqslant x\leqslant 2$ رسم کنید، و خطهای مماس بر آنها را در نقاط $(1,1)$ و $(-1,-1)$ بکشید.
ب) کدام‌یك از این دو تابع در یك مقدار x مشتق ندارد، و این x چیست؟ شیب خم دیگر در x چیست؟ در این x، خطهای مماس بر این دوخم چه خطهایی هستند؟

۱۸. الف) خم $y=1/x$ را بکشید و ملاحظه کنید که نسبت به‌خط $y=x$ متقارن است.
ب) شیب خم در $P(a,1/a)$ چیست؟ در $P'(1/a,a)$ چطور؟ حاصلضرب این دوشیب چیست؟
پ) معکوس تابع $f(x)=1/x$ را بیابید.

۱۹. فرض‌کنید $f(x)=x^2-4x-3$، $x>2$، و نیز فرض کنید g معکوس f باشد. مطلوب است مقدار g' وقتی که $f(x)=2$.

۲۰. $g(x)$، معکوس $f(x)=1+1/x$، $x\neq 0$ را بیابید. سپس درمواردی که f و g هردو تعریف می‌شوند، نشان‌دهید که

$f(g(x))=g(f(x))=x$، و $g'(f(x))=1/f'(x)$.

۲۱. یك قمقمهٔ کروی بهشعاع $10\ \mathrm{cm}$ مفروض است. قرار است با ریختن اسید هیدروفلوئوریك بهدرون قمقمه رویهٔ داخلی آن خوردهشود، و بهحجمش $1\ \mathrm{cm}^3$ افزودهشود. اگرفرض کنیم اسید با آهنگ یکنواخت $0{,}1\ \mathrm{mm/hr}$ رویهٔ داخلی را بخورد، قمقمه تقریباً چه مدت باید پر از اسید باشد؟

۲۲. توابع صعودی و نزولی. از بخش ۱.۳ بهیادآورید که f یك تابع صعودیاست هرگاه بهازای همهٔ x_1 و x_2های واقع دردامنهٔ f، $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. بههمین ترتیب، f یكتابع نزولی است هرگاه بهازای تمام x_1 و x_2های واقع در دامنهٔ آن، $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. نشاندهیدکه توابع صعودی و نزولی یك بهیكاند.

TOOLKIT PROGRAMS

Picard s Fixed Point Method (Among other things, this program graphs functions and their inverses together.)
Super * Grapher

۲.۶ تابعهای مثلثاتی معکوس

منشأ توابع مثلثاتی معکوس مسائلی است که درآنها باید با استفاده از اندازهٔ اضلاع یك مثلث، زوایای آن را بهدست آوریم. این توابع پادمشتق بسیاری از توابع هم هستند و لذا در جوابهای تعدادی از معادلات دیفرانسیل مورد بحث در ریاضیات، مهندسی، وفیزیك ظاهرمیشوند. دراین بخش، چگونگی تعریف، رسم نمودار، و محاسبهٔ این توابع را بررسی میکنیم؛ و در بخش ۳.۶ بهمشتق، و انتگرال نظیرآنها میپردازیم.

آرك سینوس

تابع $y=\sin x$ یك بهیك نیست؛ این تابع برهر بازهٔ بهطول 2π دوبار سراسر برد مقادیرش، از -1 تا 1، را طی میکند. ولیاگر دامنهٔ سینوس را بهبازهٔ از $-\pi/2$ تا $\pi/2$ محدودکنیم، میبینیم که تابع محدود شده

$$y=\sin x,\quad -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2 \qquad (1)$$

یك بهیك است. لذا معکوسی دارد (بخش ۱.۶) که با

$$y=\sin^{-1} x \qquad (2)$$

نمایش داده میشود. این تساوی چنین خوانـده میشود «y برابر است با **آرك سینوس x**» و غالباً بهصورت

$$y=\arcsin x \qquad (3)$$

نوشتهمیشود. اگرمعنای «آرك» [قوس] را دراینعبارت نمیفهمید بهشکل ۸.۶ نگاه کنید که تعبیرهندسی $y=\sin^{-1}x$ را که درآن y مثبت است بهدست میدهد. اگر $x=\sin y$، آنگاه y آرکی [قوسی] از دایرهٔ واحد است کـه سینوسش x میباشد. بهازای هرمقدار x دربازهٔ $[-1, 1]$، $y=\sin^{-1}x$ عـددی است از بازهٔ $[-\pi/2, \pi/2]$ که سینوس آن x است. مثلاً (شکل ۹.۶)،

$\sin 0 = 0$ زیرا $\sin^{-1} 0 = 0$

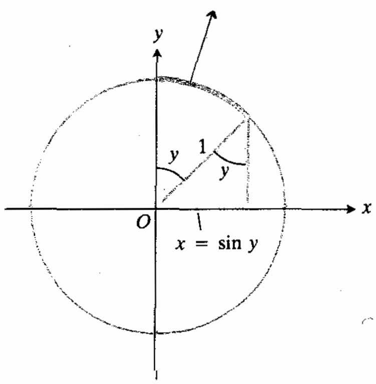
$\sin \pi/3 = \sqrt{3}/2$ زیرا $\sin^{-1} \sqrt{3}/2 = \pi/3$

$\sin \pi/2 = 1$ زیرا $\sin^{-1} 1 = \pi/2$

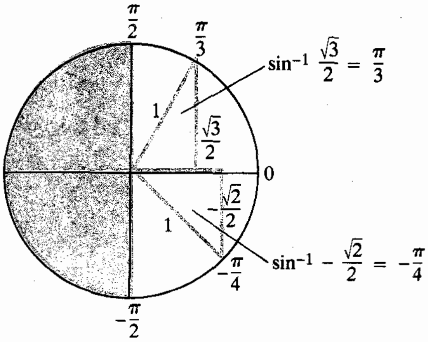
$\sin(-\pi/4) = -\sqrt{2}/2$ زیرا $\sin^{-1}(-\sqrt{2}/2) = -\pi/4$

نمودار $y=\sin^{-1}x$ درشکل ۱۰.۶ نمایش داده شدهاست. خم آبیرنگ درشکل، قرینهٔ نمودار $y=\sin x$ نسبت بهخط $y=x$ است.

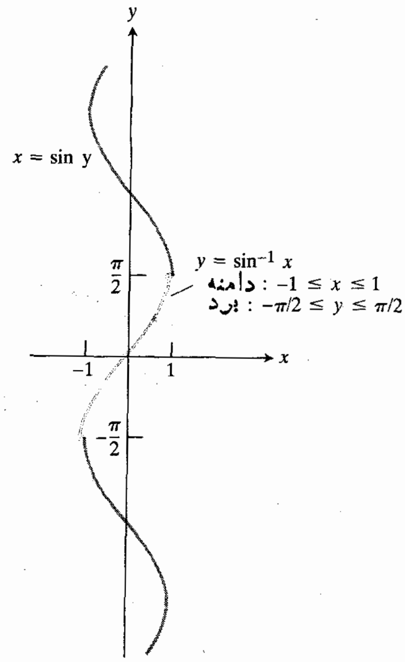
اگر $x=\sin y$، آنگاه طولاینقوس [آرك] y است، یعنی، y طولقوسیاست که سینوس آن x است. با استفاده از نماد، $y=\operatorname{arc}\sin x$.



۸.۶ نمایش هندسی $y=\arcsin x$، وقتی y مثبت است.



۹.۶ زاویهایکه اندازهاش $y=\sin^{-1}x$ است از $-\pi/2$ تا $\pi/2$ تغییرمیکند.



۱۰.۶ نمودار $y=\sin^{-1}x$.

است، و لذا نمودار $x=\sin y$ می‌باشد. نمودار $y=\sin^{-1}x$ بخشی است از این خم که بین $y=-\pi/2$ و $y=\pi/2$ واقع است.

عدد ۱ — در $y=\sin^{-1}x$ نما نیست؛ معنای آن «معکوس» است، نه «عکس». عکس $\sin x$ عبارت است از

$$(\sin x)^{-1}=\frac{1}{\sin x}=\csc x.$$

نمودار آرک سینوس در شکل ۱۰.۶ نسبت به مبدأ متقارن است زیرا نمودار $x=\sin y$ نسبت به مبدأ متقارن است. از نظر جبری، این بدین‌معناست که به‌ازای هر x در دامنهٔ آرک سینوس،

$$\sin^{-1}(-x)=-\sin^{-1}x \qquad (۴)$$

که راه دیگری است برای بیان این مطلب که تابع $y=\sin^{-1}x$ فرد است.

آرک کسینوس

تابع کسینوسی $y=\cos x$ هم نظیر تابع سینوسی یك به یك نیست، اما اگر به بازهٔ $[0,\pi]$ محدود شود

$$y=\cos x,\quad 0\leqslant x\leqslant\pi \qquad (۵)$$

یك به یك است. بنا بر این، این تابع محدود شده معکوس دارد،

$$y=\cos^{-1}x \qquad (۶)$$

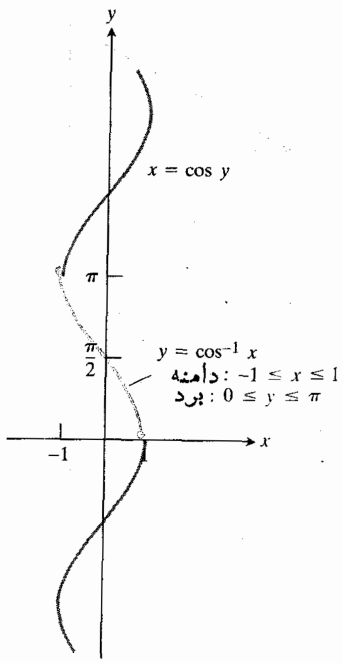
و به آرك کسینوس x معروف است. به‌ازای هر مقدار x در بازهٔ $[-1,1]$، $y=\cos^{-1}x$ عددی است از بازهٔ $[0,\pi]$ که کسینوس آن x است. نمودار $y=\cos^{-1}x$ را درشکل ۱۱.۶ می‌بینید.

همان‌گونه که درشکل ۱۲.۶ دیده می‌شود، آرك کسینوس x در اتحاد

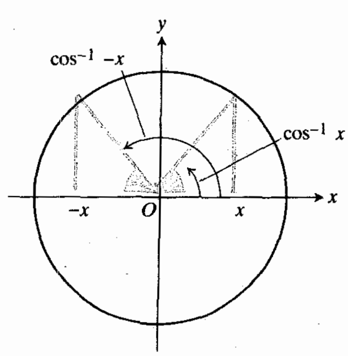
$$\cos^{-1}x+\cos^{-1}(-x)=\pi \qquad (۷)$$

یا

$$\cos^{-1}(-x)=\pi-\cos^{-1}x \qquad (۸)$$



۱۱.۶ نمودار $y=\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}x$.

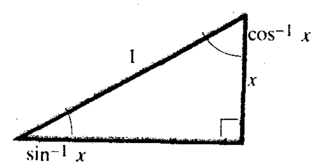


۱۲.۶ $\cos^{-1}x+\cos^{-1}(-x)=\pi$.

صدق می‌کند. بـا توجه به مثلث شکل ۱۳.۶ نیز دیده می‌شود کـه به‌ازای $x > 0$،

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} \qquad (9)$$

زیرا دراین‌صورت $\sin^{-1} x$ و $\cos^{-1} x$ زوایای متمم در یك‌مثلث قائم‌الزاویه‌اندکه طول وترش یك واحد و طول یکی از ساقهایش x واحداست. معادلهٔ (۹) به‌ازای‌سایرمقادیر x واقع‌در $[-1, 1]$ هم برقرار است، اما از شکل مثلث درشکل ۱۳.۶ این‌مطلب نتیجه نمی‌شود. بـا این‌حـال، این نتیجه‌ای است از روابط (۴) و (۸) (مسألهٔ ۴۸).



۱۳.۶ دراین شکل، $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$.

معکوس $\tan x$، $\sec x$، $\csc x$، $\cot x$

چهـار تـابع مثلثاتی اساسی دیگـر $y = \tan x$، $y = \sec x$، $y = \csc x$، و $y = \cot x$ هم، وقتی به‌طورمناسبی‌محدودشوند، معکوس دارند. معکوس

$$y = \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \qquad (10)$$

با

$$y = \tan^{-1} x \qquad (11)$$

نمایش داده می‌شود. دامنهٔ آرك تـانژانت تمام اعداد حقیقی‌است، و بردش، بازهٔ باز $(-\pi/2, \pi/2)$ است. به ازای هرمقدار x، $y = \tan^{-1} x$ زاویه‌ای است بین $-\pi/2$ و $\pi/2$ و تـانژانت آن x است. نمودار $y = \tan^{-1} x$ در شکل ۱۴.۶ نشان داده شده‌است.

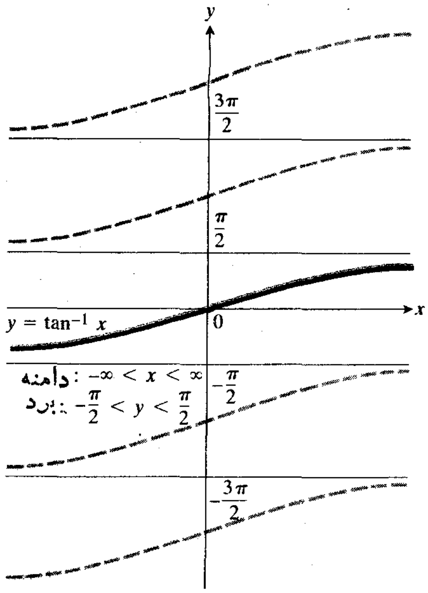
نمودار $y = \tan^{-1} x$ نسبت بـه‌مبدأ متقارن است زیـرا شاخه‌ای‌است ازنمودار $x = \tan y$ که نسبت به‌مبدأ متقارن‌است. ازنظرجبری، این‌بدین‌معناست که

$$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x. \qquad (12)$$

آرك تانژانت هم نظیرآرك سینوس تابع فردی از x است.

نمودار معکوسهای توابع (محدود شده)

$$y = \cot x, \quad 0 < x < \pi \qquad (13)$$



۱۴.۶ بـرای $y = \tan^{-1} x$ شاخـه‌ای را انتخاب‌کرده‌ایم‌که از مبدأ می‌گذرد.

$$y = \sec x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad x \neq \frac{\pi}{2} \qquad (14)$$

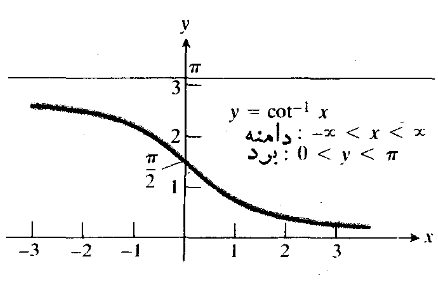
$$y = \csc x, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad x \neq 0 \qquad (15)$$

درشکلهای ۱۵.۶، ۱۶.۶، و ۱۷.۶ نشان داده شده‌است. این‌توابع چنان انتخاب شده‌اندکه در روابط زیرصدق کنند.

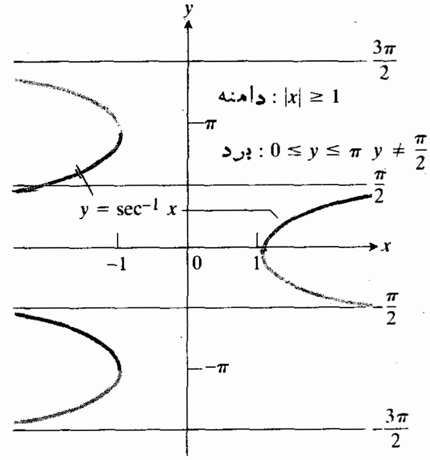
$$\cot^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x \qquad (16)$$

$$\sec^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (17)$$

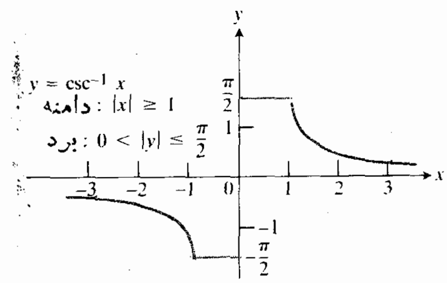
$$\csc^{-1} x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (18)$$



۱۵.۶ نمودار $y = \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x$.



۱۶.۶ $y=\sec^{-1}x=\cos^{-1}(1/x)$ برای $|x|\geqslant 1$ تعریف می‌شود.



۱۷.۶ نمودار $y=\csc^{-1}x=\sin^{-1}(1/x)$.

ما دربارهٔ این روابط بحث نمی‌کنیم، ولی اهمیت آنها را در محاسبهٔ مقادیر $\cot^{-1} x$ ، $\sec^{-1} x$ ، و $\csc^{-1} x$ به‌کمك ماشین حسابهایی که‌صرفاً $\tan^{-1} x$ ، $\cos^{-1} x$ ، و $\sin^{-1} x$ را به‌دست می‌دهند، یادآور می‌شویم.

درمسألهٔ ۴۷ از شما خواسته شده‌است، اتحاد زیر را اثبات کنید. این اتحاد از روابط (۸) و (۱۷) نتیجه می‌شود.

$$\sec^{-1}(-x)=\pi-\sec^{-1}x. \qquad (۱۹)$$

هشدار دربارهٔ آرك سکانت: بعضی از نویسندگان کتابهای ریاضی $\sec^{-1} x$ را طوری انتخاب می‌کنند که وقتی x مثبت‌است بین ۰ و $\pi/۲$ ، و وقتی x منفی‌است (درنتیجه به‌صورت یك‌زاویهٔ منفی در ربع سوم، که در شکل ۱۶.۶ با خم خاکستری نشان داده شده‌است) بین $-\pi$ و $-\pi/۲$ قرار بگیرد. برتری این انتخاب دراین است که فرمول مشتق $\sec^{-1} x$ ساده می‌شود، ولی عیب آن این‌است که وقتی x منفی‌است، فرمول (۱۷) صادق‌نیست. همچنین برخی ازجدولهای ریاضی، به‌جای اینکه مقادیرربع دوم $\sec^{-1} x$ را که ما دراین‌کتاب به‌کار برده‌ایم بدهند، مقادیرربع سوم آن را به‌دست می‌دهند. وقتی از جدول استفاده می‌کنید به این نکته توجه کنید.

تعبیر به‌کمك مثلث قائم‌الزاویه

تعبیر توابع مثلثاتی معکوس به‌کمك مثلث قائم‌الزاویه، مطابق شکل ۱۸.۶. درمسائل انتگرالگیری که به‌جانشانی نیاز دارند می‌تواند مفید باشد. ازبرخی از اینها درفصل ۷ استفاده خواهیم‌کرد.

مثال ۱ با فرض

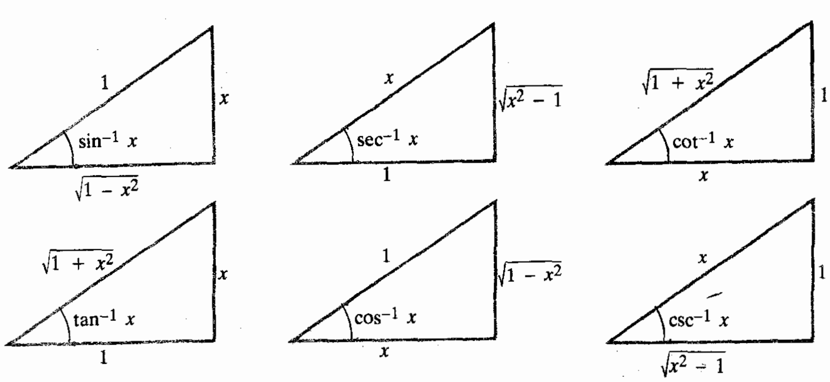
$$\alpha=\sin^{-1}\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

مطلوب است $\csc\alpha$ ، $\cos\alpha$ ، $\sec\alpha$ ، $\tan\alpha$ ، و $\cot\alpha$.

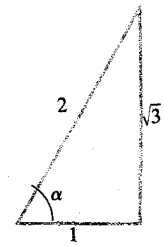
حل: یك مثلث مرجع نظیرمثلث شکل ۱۹.۶ رسم‌می‌کنیم؛ طول وتر را ۲ و طول ضلع قائم را $\sqrt{۳}$ می‌گیریم. سپس‌طول ضلع‌دیگررا محاسبه‌می‌کنیم: $\sqrt{(۲)^۲-(\sqrt{۳})^۲}=۱$. بدین‌ترتیب مقادیر توابع مثلثاتی α به صورت نسبت طول اضلاع به دست می‌آیند

$$\csc\alpha=\frac{۲}{\sqrt{۳}}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}, \quad \cos\alpha=\frac{۱}{۲}, \quad \sec\alpha=۲$$

$$\tan\alpha=\frac{\sqrt{۳}}{۱}=\sqrt{۳}, \qquad \cot\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}.$$



۱۸.۶ تعبیر توابع مثلثاتی معکوس به‌کمك مثلث قائم‌الزاویه (مقادیر ربع اول).

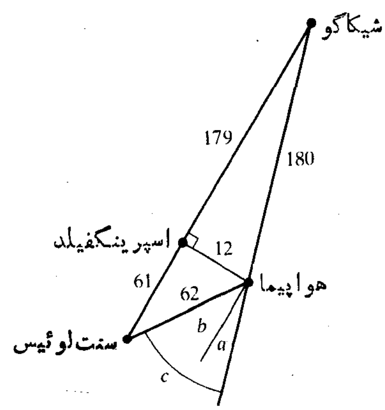


۱۹۰۶ اگر $\alpha=\sin^{-۱}(\sqrt{۳}/۲)$، آنگاه مقادیر توابع مثلثاتی α را می‌توان با کمك این مثلث به‌دست آورد. ■

دامنه و برد، برای مراجعهٔ سریع

تابع	دامنه	برد
$y=\sin^{-۱}x$	$-۱\leqslant x\leqslant ۱$	$-\frac{\pi}{۲}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{۲}$
$y=\cos^{-۱}x$	$-۱\leqslant x\leqslant ۱$	$۰\leqslant y\leqslant\pi$
$y=\tan^{-۱}x$	$-\infty<x<\infty$	$-\frac{\pi}{۲}<y<\frac{\pi}{۲}$
$y=\cot^{-۱}x$	$-\infty<x<\infty$	$۰<y<\pi$
$y=\sec^{-۱}x$	$\lvert x\rvert\geqslant ۱$	$۰\leqslant y\leqslant\pi,\ y\neq\frac{\pi}{۲}$
$y=\csc^{-۱}x$	$\lvert x\rvert\geqslant ۱$	$-\frac{\pi}{۲}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{۲},\ y\neq ۰$

مثال ۲ اصلاح مسیر. خلبان‌هواپیمایی که از شیکاگو به سنت‌لوئیس می‌رود متوجه می‌شود که ۱۲ مایل دور از مسیر اصلی است (شکل ۲۰۰۶). مطلوب است زاویهٔ a بین این‌مسیر و مسیرموازی با‌مسیر اصلی، زاویهٔ b، و زاویهٔ اصلاح $c=a+b$.



۲۰۰۶ نمودار اصلاح مسیر (مثال ۲)؛ فواصل برحسب مایل (مقیاس دقیق نیست).

حل:

$$a=\sin^{-۱}\frac{۱۲}{۱۸۰}\approx ۰٫۰۶۷\ \text{رادیان}\approx ۳٫۸^\circ$$

$$b=\sin^{-۱}\frac{۱۲}{۶۲}\approx ۰٫۱۹۵\ \text{رادیان}\approx ۱۱٫۲^\circ$$

$$c=a+b\approx ۱۵^\circ.$$ ■

مسأله‌ها

مقادیر توابع در مسائل ۱–۱۲ را بیابید و برای این‌کار از مثلث مرجع، نظیر مثلثهای شکلهای ۱۸۰۶ و ۱۹۰۶ استفاده کنید.

۱. الف) $\tan^{-۱}۱$

ب) $\tan^{-۱}\sqrt{۳}$

پ) $\tan^{-۱}\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)$

۲. الف) $\tan^{-۱}(-۱)$

ب) $\tan^{-۱}(-\sqrt{۳})$

پ) $\tan^{-۱}\left(\frac{-۱}{\sqrt{۳}}\right)$

۳. الف) $\sin^{-۱}\left(\frac{۱}{۲}\right)$

ب) $\sin^{-۱}\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)$

پ) $\sin^{-۱}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$

۴. الف) $\sin^{-۱}\left(\frac{-۱}{۲}\right)$

ب) $\sin^{-۱}\left(\frac{-۱}{\sqrt{۲}}\right)$

پ) $\sin^{-۱}\left(\frac{-\sqrt{۳}}{۲}\right)$

۵. الف) $\cos^{-۱}\left(\frac{۱}{۲}\right)$

ب) $\cos^{-۱}\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)$

پ) $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$

۶. الف) $\cos^{-1}\left(\frac{-۱}{۲}\right)$

ب) $\cos^{-1}\left(\frac{-۱}{\sqrt{۲}}\right)$

پ) $\cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{۳}}{۲}\right)$

۷. الف) $\sec^{-1}\sqrt{۲}$

ب) $\sec^{-1}\left(\frac{۲}{\sqrt{۳}}\right)$

پ) $\sec^{-1}۲$

۸. الف) $\sec^{-1}(-\sqrt{۲})$

ب) $\sec^{-1}\left(\frac{-۲}{\sqrt{۳}}\right)$

پ) $\sec^{-1}(-۲)$

۹. الف) $\csc^{-1}\sqrt{۲}$

ب) $\csc^{-1}\left(\frac{۲}{\sqrt{۳}}\right)$

پ) $\csc^{-1}۲$

۱۰. الف) $\csc^{-1}(-\sqrt{۲})$

ب) $\csc^{-1}\left(\frac{-۲}{\sqrt{۳}}\right)$

پ) $\csc^{-1}(-۲)$

۱۱. الف) $\cot^{-1}۱$

ب) $\cot^{-1}\sqrt{۳}$

پ) $\cot^{-1}\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)$

۱۲. الف) $\cot^{-1}(-۱)$

ب) $\cot^{-1}(-\sqrt{۳})$

پ) $\cot^{-1}\left(\frac{-۱}{\sqrt{۳}}\right)$

۱۳. $\alpha=\sin^{-1}(۱/۲)$ داده‌شده‌است. $\cos\alpha$، $\tan\alpha$، $\sec\alpha$، $\csc\alpha$ را بیابید.

۱۴. $\alpha=\cos^{-1}(-۱/۲)$ مفروض‌است. مطلوب‌است $\sin\alpha$، $\tan\alpha$، $\sec\alpha$ و $\csc\alpha$. عبارتهای مفروض در مسائل ۱۵-۳۴ را محاسبه کنید.

۱۵. $\sin\left(\cos^{-1}\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)$

۱۶. $\tan\left(\sin^{-1}\left(-\frac{۱}{۲}\right)\right)$

۱۷. $\sec\left(\cos^{-1}\frac{۱}{۲}\right)$

۱۸. $\cot\left(\sin^{-1}\left(-\frac{۱}{۲}\right)\right)$

۱۹. $\csc(\sec^{-1}۲)$

۲۰. $\cos(\tan^{-1}(-\sqrt{۳}))$

۲۱. $\cos(\cot^{-1}۱)$

۲۲. $\csc\left(\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\right)$

۲۳. $\cot(\cos^{-1}۰)$

۲۴. $\sec\left(\tan^{-1}\left(-\frac{۱}{۲}\right)\right)$

۲۵. $\tan(\sec^{-1}۱)$

۲۶. $\sin(\csc^{-1}(-۱))$

۲۷. $\sin^{-1}(۱)-\sin^{-1}(-۱)$

۲۸. $\tan^{-1}(۱)-\tan^{-1}(-۱)$

۲۹. $\sec^{-1}(۲)-\sec^{-1}(-۲)$

۳۰. $\sin(\sin^{-1}۰٫۷۳۵)$

۳۱. $\cos(\sin^{-1}۰٫۸)$

۳۲. $\tan^{-1}(\tan\pi/۳)$

۳۳. $\cos^{-1}(-\sin\pi/۶)$

۳۴. $\sec^{-1}(\sec(-۳۰^\circ))$ (پاسخ -۳۰° نیست.)

درمسائل ۳۵-۴۲ حدها را بیابید. (راهنمایی: اگر شك كرديد،

نموار تابع را ملاحظه کنید.)

۳۵. $\lim\limits_{x \to 1^-} \sin^{-1} x$

۳۶. $\lim\limits_{x \to -1^+} \cos^{-1} x$

۳۷. $\lim\limits_{x \to \infty} \tan^{-1} x$

۳۸. $\lim\limits_{x \to -\infty} \tan^{-1} x$

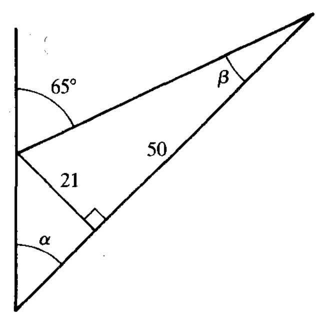
۳۹. $\lim\limits_{x \to \infty} \sec^{-1} x$

۴۰. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sec^{-1} x$

۴۱. $\lim\limits_{x \to \infty} \csc^{-1} x$

۴۲. $\lim\limits_{x \to -\infty} \csc^{-1} x$

۴۳. **ماشین‌حساب** زاویهٔ α را درشکل ۲۱.۶ بیابید.



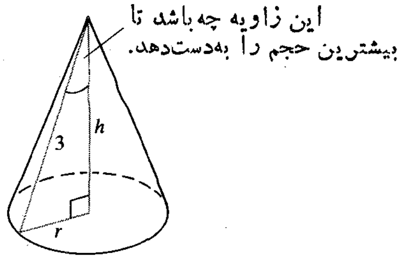
۲۱.۶ زاویهٔ α را بیابید.
(راهنمایی: $\alpha+\beta=65°$.)

۴۴. تابلویی به‌بلندی a فوت بریك دیوار قائم چنان نصب شده است‌که پایین آن b فوت بالاتر ازسطح چشم یك ناظر قراردارد. اگر فاصلهٔ ناظر تا دیوار x فوت باشد، نشان دهیدکه α، زاویهٔ دید تابلو، را می‌توان از معادلهٔ زیر به‌دست آورد

$$\alpha=\cot^{-1}\frac{x}{a+b}-\cot^{-1}\frac{x}{b}\cdot$$

(راهنمایی: ابتدا تصویر جانبی تابلو را بکشید، و سپس ازچشم ناظرخطی عمود بردیوار رسم‌کنید.)

۴۵. طول مولد مخروطی ۳ m است. زاویهٔ رأس آن (شکل ۲۲.۶) چه باشد تا مخروط بیشترین حجم ممکن را داشته باشد.



۲۲.۶ مخروط مورد بحث درمسأله ۴۵.

۴۶. ناحیه‌ای‌که در ربع اول قرار دارد و به $y=\tan^{-1} x$، $y=0$، و $x=1$ محدود است حول محور y دوران می‌کند. مطلوب‌است حجم جسم‌حاصل. (راهنمایی: از واشر استفاده‌کنید.)

۴۷. معادلات (۸) و (۱۷) را ترکیب‌کنید و نشان‌دهیدکه

$$\sec^{-1}(-x)=\pi-\sec^{-1} x\cdot$$

۴۸. شکل ۱۳.۶ نشان می‌دهد که معادلهٔ

$$\sin^{-1} x+\cos^{-1} x=\frac{\pi}{2}$$

به‌ازای $0<x<1$ برقرار است. برای اینکه نشان دهید این معادله به‌ازای تمام x های واقع در $[-1, 1]$ برقرار است چنین کنید:

الف) با محاسبهٔ مستقیم نشان دهیدکه

$$\sin^{-1}(1)+\cos^{-1}(1)=\frac{\pi}{2}$$

$$\sin^{-1}(0)+\cos^{-1}(0)=\frac{\pi}{2}$$

$$\sin^{-1}(-1)+\cos^{-1}(-1)=\frac{\pi}{2}\cdot$$

ب) سپس برای مقادیر x در $(-1, 0)$، فرض‌کنید $x=-a$، $a>0$، و درمورد مجموع

$$\sin^{-1}(-a)+\cos^{-1}(-a)$$

معادلات (۲) و (۸) را به‌کار ببرید.

۴۹. شکلی شبیه شکل ۸.۶ رسم کنید و تعبیری هندسی برای $y=\cos^{-1} x$ بیابید.

TOOLKIT PROGRAMS
Function Evaluator   Super * Grapher

۳.۶ مشتق تابعهای مثلثاتی معکوس: انتگرالهای مربوط

در این بخش، فرمولهای متداول مشتقات توابع مثلثاتی معکوس (جدول ۱.۶) را عرضه می‌کنیم و نشان می‌دهیم که چگونه به‌دست می‌آیند، و دربارهٔ فرمولهای انتگرالهای نظیر بحث می‌کنیم. خواهیم دید که محدودیتهایی که دامنه‌های توابع مثلثاتی معکوس دارند، به‌طور طبیعی، محدودیتهایی برای دامنهٔ مشتقات نیز هستند.

مثال ۱ الف)

$$\frac{d}{dx}\sin^{-۱}x^{۲}=\frac{۱}{\sqrt{۱-(x^{۲})^{۲}}}\cdot\frac{d}{dx}(x^{۲})=\frac{۲x}{\sqrt{۱-x^{۴}}}$$

ب)

$$\frac{d}{dx}\tan^{-۱}\sqrt{x+۱}=\frac{۱}{۱+(\sqrt{x+۱})^{۲}}\cdot\frac{d}{dx}(\sqrt{x+۱})$$

$$=\frac{۱}{x+۲}\cdot\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}$$

$$=\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}(x+۲)}$$

پ)

$$\frac{d}{dx}\sec^{-۱}(۳x)=\frac{۱}{|۳x|\sqrt{(۳x)^{۲}-۱}}\cdot\frac{d}{dx}(۳x)$$

$$=\frac{۳}{|۳x|\sqrt{۹x^{۲}-۱}}=\frac{۱}{|x|\sqrt{۹x^{۲}-۱}}\,.\qquad\blacksquare$$

برای اینکه نشان دهیم چگونه فرمولهای مشتقهای فوق به‌دست می‌آیند، فرمولهای ۱ و ۵ را اثبات می‌کنیم.

مشتق $y=\sin^{-۱}u$

می‌دانیم که تابع $x=\sin y$ دربازهٔ باز $-\pi/۲<y<\pi/۲$ مشتقپذیر است و مشتقش، کسینوس، دراین بازه مثبت است. بنابراین قاعدهٔ ۱۱ از بخش ۱.۶ به ما اطمینان می‌دهد که تابع معکوس $y=\sin^{-۱}x$، درسراسر بازهٔ $-۱<x<۱$ مشتقپذیر است. با وجود این، نمی‌توانیم انتظار داشته باشیم که این تابع در $x=۱$ یا $x=-۱$ مشتقپذیر باشد، زیرا دراین نقاط خطهای مماس بر نمودار، قائم‌اند (شکل ۲۳.۶ را ببینید).

برای محاسبهٔ مشتق $y=\sin^{-۱}x$، از دوطرف رابطهٔ $\sin y=x$ نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$\sin y=x$$

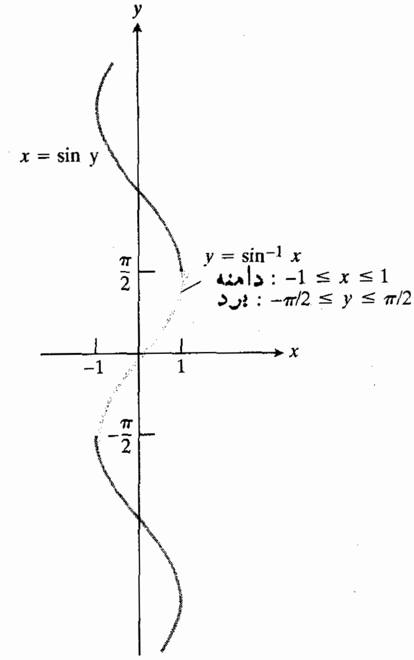
$$\frac{d}{dx}\sin y=۱\qquad(۱)$$

$$\cos y\frac{dy}{dx}=۱\,.$$

حال دوطرف را بر $\cos y$ (که برای $-\pi/۲<y<\pi/۲$

جدول ۱.۶

	مشتقها		دیفرانسیلها
۱.	$\dfrac{d(\sin^{-۱}u)}{dx}=\dfrac{du/dx}{\sqrt{۱-u^{۲}}}\,,\quad -۱<u<۱$	۱′.	$d(\sin^{-۱}u)=\dfrac{du}{\sqrt{۱-u^{۲}}}\,,\quad -۱<u<۱$
۲.	$\dfrac{d(\cos^{-۱}u)}{dx}=-\dfrac{du/dx}{\sqrt{۱-u^{۲}}}\,,\quad -۱<u<۱$	۲′.	$d(\cos^{-۱}u)=-\dfrac{du}{\sqrt{۱-u^{۲}}}\,,\quad -۱<u<۱$
۳.	$\dfrac{d(\tan^{-۱}u)}{dx}=\dfrac{du/dx}{۱+u^{۲}}$	۳′.	$d(\tan^{-۱}u)=\dfrac{du}{۱+u^{۲}}$
۴.	$\dfrac{d(\cot^{-۱}u)}{dx}=-\dfrac{du/dx}{۱+u^{۲}}$	۴′.	$d(\cot^{-۱}u)=-\dfrac{du}{۱+u^{۲}}$
۵.	$\dfrac{d(\sec^{-۱}u)}{dx}=\dfrac{du/dx}{\lvert u\rvert\sqrt{u^{۲}-۱}}\,,\quad \lvert u\rvert>۱$	۵′.	$d(\sec^{-۱}u)=\dfrac{du}{\lvert u\rvert\sqrt{u^{۲}-۱}}\,,\quad \lvert u\rvert>۱$
۶.	$\dfrac{d(\csc^{-۱}u)}{dx}=\dfrac{-du/dx}{\lvert u\rvert\sqrt{u^{۲}-۱}}\,,\quad \lvert u\rvert>۱$	۶′.	$d(\csc^{-۱}u)=\dfrac{-du}{\lvert u\rvert\sqrt{u^{۲}-۱}}\,,\quad \lvert u\rvert>۱$



۲۳.۶ نمودار $y=\sin^{-1} x$.

مثبت است) تقسیم می‌کنیم

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot \qquad (2)$$

مشتق $y=\sin^{-1} x$ نسبت به x عبارت است از

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1} x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot \qquad (3)$$

اگر u تابع مشتقپذیری از x باشد، قاعدهٔ زنجیری را به‌صورت

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

درمورد $y=\sin^{-1} u$ به‌کار می‌بندیم و نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1} u=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}\cdot \qquad (4)$$

مشتق $y=\sec^{-1} u$

ابتدا از دوطرف رابطهٔ $\sec y=x$ نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$\sec y=x$$

$$\frac{d}{dx}\sec y=1$$

$$\sec y\tan y\frac{dy}{dx}=1 \qquad (5)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sec y\tan y}\cdot$$

برای بیان نتیجهٔ حاصل برحسب x، از روابط زیر استفاده می‌کنیم

$$\sec y=x \quad \text{و} \quad \tan y=\pm\sqrt{\sec^2 y-1}=\pm\sqrt{x^2-1}\cdot$$

پس

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\cdot$$

با علامت چه بکنیم؟ نگاهی به شکل ۲۴.۶ نشان می‌دهد که شیب نمودار $y=\sec^{-1} x$ همیشه مثبت است. پس

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x=\begin{cases}\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & x>1\\ -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & x<-1\,.\end{cases} \qquad (6)$$

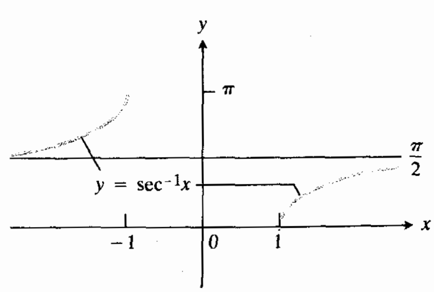
با استفاده از قدرمطلق، معادلهٔ (۶) به‌صورت تک‌معادلهٔ زیردرمی‌آید

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} x=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}},\quad |x|>1\,. \qquad (7)$$

حال از قاعدهٔ زنجیری استفاده می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1} u=\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx},\quad |u|>1 \qquad (8)$$

که درآن u تابع مشتقپذیری از x است.



۲۴.۶ نمودار $y=\sec^{-1} x$.

فرمولهای انتگرالگیری

ممکن است انتظار داشته باشید که از شش فرمول مشتق درجدول ۱.۶ شش فرمول انتگرالگیری جدید بهدست آید، اما تنها سه‌تای آنها مهم‌اند

انتگرالهایی که به‌توابع مثلثاتی معکوس منجر می‌شوند

۱.
$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^{2}}}=\sin^{-1} u+C$$

(برای $u^{2}<1$ برقرار است)

۳.
$$\int \frac{du}{1+u^{2}}=\tan^{-1} u+C$$

(برای همهٔ uها برقرار است)

۵.
$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^{2}-1}}=\int \frac{d(-u)}{(-u)\sqrt{u^{2}-1}}$$
$$=\sec^{-1}|u|+C=\cos^{-1}\left|\frac{1}{u}\right|+C$$

(برای $u^{2}>1$ برقرار است)

سه‌تای دیگر مطلب تازه‌ای دربرندارند

۲.
$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^{2}}}=-\cos^{-1} u+C$$

۴.
$$\int \frac{du}{1+u^{2}}=-\cot^{-1} u+C$$

۶.
$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^{2}-1}}=-\csc^{-1}|u|+C.$$

مثال ۲ مطلوب است محاسبهٔ

الف) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^{2}}$ و

ب) $\displaystyle\int_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^{2}-1}}$.

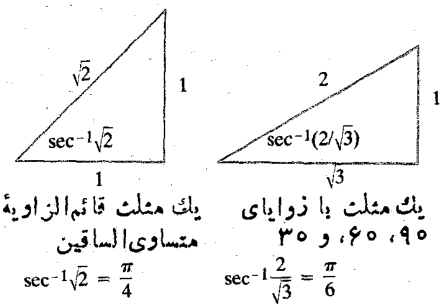
حل: الف)

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^{2}}=\tan^{-1} x\Big]_{0}^{1}=\tan^{-1} 1-\tan^{-1} 0$$
$$=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$$

ب)

$$\int_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^{2}-1}}=\sec^{-1} x\Big]_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}.$$

اگر فوراً نمی‌توانید $\sec^{-1} x$ را به‌ازای حدود انتگرالگیری محاسبه کنید، مثلثهایی شبیه مثلثهای شکل ۲۵.۶ رسم کنید.



۲۵.۶ مثلثهایی برای یافتن $\sec^{-1}\sqrt{2}$ و $\sec^{-1}(2/\sqrt{3})$. ■

مثال ۳ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int \frac{x^{2}\,dx}{\sqrt{1-x^{6}}}.$$

حل: شباهت بین انتگرال مفروض و صورت متداول

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^{2}}}=\sin^{-1} u+C$$

جانشانی

$$u=x^{3},\quad du=3x^{2}\,dx.$$

را به‌ذهن القا می‌کند. به‌این ترتیب

$$\int \frac{x^{2}\,dx}{\sqrt{1-x^{6}}}=\frac{1}{3}\int \frac{3x^{2}\,dx}{\sqrt{1-(x^{3})^{2}}}$$
$$=\frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^{2}}}$$
$$=\frac{1}{3}\sin^{-1} u+C$$
$$=\frac{1}{3}\sin^{-1}(x^{3})+C.$$

■

مثال ۴ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^{2}}}.$$

حل: این همان انتگرال آرک سینوس x است که در آن،

۹ جای ۱ را گرفته‌است. برای اینکه به‌جای ۹، ۱ قرار گیرد، از $9-x^2$، از ۹ فاکتور می‌گیریم و آن را پس از جذر گرفتن به بیرون رادیکال منتقل می‌کنیم

$$\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9\left(1-\frac{x^2}{9}\right)}=3\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}.$$

توجه کنید که به‌جای $x^2/9$ نوشته‌ایم $(x/3)^2$. لذا

$$\int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}=\int\frac{dx}{3\sqrt{1-(x/3)^2}}.$$

حال جانشانیهای

$$u=\frac{x}{3}\text{، و } du=\frac{dx}{3}\text{، یا } dx=3\,du$$

را به‌کار می‌گیریم. بنابراین

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}&=\int\frac{dx}{3\sqrt{1-(x/3)^2}}\\&=\int\frac{3\,du}{3\sqrt{1-u^2}}=\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\\&=\sin^{-1}u+C=\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+C.\end{aligned}$$ ■

مسأله‌ها

درمسائل ۱–۲۰، dy/dx را بیابید.

۱. $y=\cos^{-1}x^2$

۲. $y=\cos^{-1}(1/x)$

۳. $y=5\tan^{-1}3x$

۴. $y=\cot^{-1}\sqrt{x}$

۵. $y=\sin^{-1}(x/2)$

۶. $y=\sin^{-1}(1-x)$

۷. $y=\sec^{-1}5x$

۸. $y=(1/3)\tan^{-1}(x/3)$

۹. $y=\csc^{-1}(x^2+1)$

۱۰. $y=\cos^{-1}2x$

۱۱. $y=\csc^{-1}\sqrt{x}+\sec^{-1}\sqrt{x}$

۱۲. $y=\csc^{-1}\sqrt{x+1}$

۱۳. $y=\cot^{-1}\sqrt{x-1}$

۱۴. $y=x\sqrt{1-x^2}-\cos^{-1}x$

۱۵. $y=\sqrt{x^2-4}-2\sec^{-1}(x/2)$

۱۶. $y=\cot^{-1}\dfrac{2}{x}+\tan^{-1}\dfrac{x}{2}$

۱۷. $y=\tan^{-1}\dfrac{x-1}{x+1}$

۱۸. $y=x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}$

۱۹. $y=x(\sin^{-1}x)^2-2x+2\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x$

۲۰. $y=x\cos^{-1}2x-(1/2)\sqrt{1-4x^2}$

درمسائل ۲۱–۴۵، انتگرالها را محاسبه کنید.

۲۱. $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

۲۲. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}$

۲۳. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

۲۴. $\displaystyle\int_{-2}^{-\sqrt{2}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

۲۵. $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{4\,dx}{1+x^2}$

۲۶. $\displaystyle\int_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}}\frac{6\,dx}{1+x^2}$

۲۷. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$

۲۸. $\displaystyle\int_0^{1/4}\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

۲۹. $\displaystyle\int_{1/\sqrt{3}}^{1}\frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}}$

۳۰. $\displaystyle\int_0^{1}\frac{x}{1+x^4}\,dx$

۳۱. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{4x\,dx}{\sqrt{4-x^4}}$

۳۲. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

۳۳. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt[4]{2}} \frac{x\,dx}{x^2\sqrt{x^4-1}}$

۳۴. $\displaystyle\int_2^{4} \frac{dx}{2x\sqrt{x-1}}$ (راهنمایی: فرض کنید $x=u^2$.)

۳۵. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{1+(x-1)^2}$

۳۶. $\displaystyle\int_1^{3} \frac{2\,dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

۳۷. $\displaystyle\int_{1/2}^{3/4} \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

۳۸. $\displaystyle\int_{3/2}^{(1+\sqrt{3})/2} \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$

۳۹. $\displaystyle\int_{-2/3}^{-\sqrt{2}/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$

۴۰. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2\cos x\,dx}{1+\sin^2 x}$

حدهای مسائل ۴۱-۴۴ را به‌کمک قاعدهٔ هوپیتال (بخش ۸.۳) محاسبه کنید.

۴۱. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{-1} 2x}{x}$

۴۲. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\tan^{-1} 3x}{5x}$

۴۳. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^{-3}(\sin^{-1} x - x)$

۴۴. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^{-3}(\tan^{-1} x - x)$

۴۵. فرض کنید $f(x)=\sin^{-1} x+\cos^{-1} x$. مطلوب است

الف) $f'(x)$

ب) $f(0.32)$.

۴۶. خمی بیابید که شیب آن در نقطهٔ (x, y)، $(1-x^2)^{-1/2}$ باشد و از نقطهٔ $(0, 1)$ بگذرد.

۴۷. شخصی با سرعت ۴ km/hr در امتداد یک ساحل مستقیم قدم می‌زند، و نور چراغی که می‌تواند بچرخد و از ساحل ۱ km فاصله دارد او را تعقیب می‌کند. مطلوب است آهنگ چرخش چراغ (برحسب رادیان درساعت)، هنگامی که شخص به‌نقطه‌ای می‌رسد که فاصله وی تا نزدیکترین نقطهٔ ساحل به‌چراغ ۲ km است. (شخص به‌طرف این نقطه می‌رود.)

۴۸. مطلوب است حجم جسم حاصل ازدوران ناحیهٔ «مثلثی» واقع درربع اول و محدود به‌خم $y=1/\sqrt{1+x^2}$ و خطهای $x=0$ و $y=x/\sqrt{2}$ حول محور x.

۴۹. آیا انتگرالگیریهای (الف) و(ب) هر دو می‌توانند درست باشند؟ توضیح دهید.

الف) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\sin^{-1} x+C$

ب)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\cos^{-1} x+C$$

۵۰. الف) نشان دهید توابع

$$f(x)=\sin^{-1}\frac{x-1}{x+1} \quad \text{و} \quad g(x)=2\tan^{-1}\sqrt{x}$$

که هردوبرای $x\geqslant 0$ تعریف می‌شوند، مشتق یکسان دارند و لذا داریم

$$f(x)=g(x)+C. \qquad (9)$$

ب) C را بیابید. (راهنمایی: به‌ازای مقدار خاصی از x، هردوطرف رابطهٔ (۹) را محاسبه‌کنید.)

۵۱. انتگرال

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

ارتباطی با توابع مثلثاتی معکوس ندارد. آن‌را با روش دیگری محاسبه‌کنید.

۵۲. فرض‌کنید

$$f(x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

الف) نشان‌دهید: ثابت $=f(x)+f(1/x)$. (راهنمایی: مشتق مجموع را بیابید.)

ب) مقدار ثابت در (الف) را بیابید.

در مسائل ۵۳–۵۶ معادلهٔ دیفرانسیل را بـا توجه به‌شرایط اولیهٔ مفروض حل کنید.

۵۳. $(x^2+1)\frac{dy}{dx}=-y^2$، به‌ازای $x=0$، $y=1$.

۵۴. $\sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-y^2}$، به‌ازای $x=0$، $y=0$.

۵۵. $x\sqrt{x^2-1}\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-y^2}$، بـه ازای $x=2$، $y=-1/2$.

۵۶. $\frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{1-y^2}}{x^2+1}$، به‌ازای $x=1$، $y=1/2$.

۵۷. درستی فرمولهای مشتق زیر را بررسی کنید.

الف) $\frac{d(\cos^{-1}u)}{dx}=-\frac{du/dx}{\sqrt{1-u^2}}, \quad -1<u<1$

ب) $\frac{d(\tan^{-1}u)}{dx}=\frac{du/dx}{1+u^2}$

پ) $\frac{d(\cot^{-1}u)}{dx}=-\frac{du/dx}{1+u^2}$

ت) $\frac{d(\csc^{-1}u)}{dx}=\frac{-du/dx}{|u|\sqrt{u^2-1}} \quad |u|>1$

TOOLKIT PROGRAMS
Derivative Grapher　Super * Grapher

۴.۶ لگاریتم طبیعی و مشتق آن

در اواخر قـرن شانـزدهم، یك بـارون اسکاتلندی به‌نـام جان‌نپر (۱۵۵۰–۱۶۱۷) ابزاری به‌نام لگاریتم ابداع کرد کـه با تبدیل ضرب به‌جمع کار محاسبه را ساده می‌کند؛ یعنی داریم

$$\text{لگاریتم } ax = \text{لگاریتم } a + \text{لگاریتم } x \qquad (1)$$

برای‌ضرب دوعدد مثبت a و x، از یك‌جدول، لگاریتمهای a و x را پیدا می‌کنیم، سپس این لگاریتمها را به‌هم می‌افزاییم، مجموع حاصل را در داخل‌جدول می‌یابیم، و بالاخره حاصلضرب مطلوب ax را ازحاشیهٔ جدول می‌خوانیم.

مسلماً دردست داشتن جـدول کلید کار بود، به‌همین‌سبب نپر دودههٔ آخر زندگی‌اش را صرف تهیهٔ جـدولی کرد کـه هیچگاه نتوانست آن را تمـام کند (و این درحـالی است کـه تیکو براههٔ ستاره‌شناس، مشتاقانه در انتظار این‌جدول بود تا بتواند محاسبات خودش را تسریع بخشد). پس از وفات نپر، هنری بریگز، دوست نپر در لندن، جدول‌را کامل کرد و متعاقب آن کپلر جدول‌را درسراسر اروپا منتشر کرد، ولی مدتها قبل از آن تیکو براهه در گذشته بود.

کشف نپر که بزرگترین پیشرفت درامرمحاسبه قبل از ظهور کامپیوتر محسوب می‌شود، تنها به‌کمك معادلهٔ

$$\log(ax)=\log a+\log x$$

محاسبات اعشاری درنجوم، دریانوردی، ومثلثات را ممکن‌ساخت. هرچند امروزه برای‌یافتن لگاریتمهای مذکور دراین‌معادله به‌جای جدول ازماشین‌حساب استفاده می‌کنیم، ولی از اهمیت این معادله کم نشده‌است. درچند بخش‌آتی به‌تعریف لگاریتم می‌پردازیم، و ویژگیهای جبری‌آن را اثبات می‌کنیم. همچنین می‌بینیم که انواع مختلف لگاریتم وجود دارنـد. کار خود را با مفیدترین لگاریتم درحساب‌دیفرانسیل و انتگرال که به‌لگاریتم «طبیعی» موسوم‌است و به‌صورت یك انتگرال تعریف می‌شود، آغاز می‌کنیم.

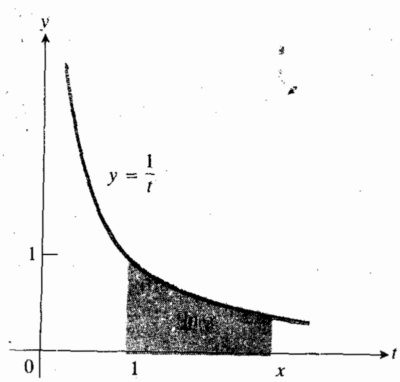
لگاریتم طبیعی و مشتق آن

لگاریتم طبیعی یك عدد مثبت x که بـا $\ln x$ نمایش داده‌می‌شود، بنابه‌تعریف، مقدار انتگرال تابع $1/t$ از $t=1$ تا $t=x$ است.

تعریف
تابع لگاریتم طبیعی $y=\ln x$

$$\ln x=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \quad x>0 \qquad (2)$$

به ازای هر x بزرگتر از ۱، این انتگرال مساحت نـاحیه‌ای را نشان می‌دهد که از بالا به‌خم $y=1/t$، از پـایین به‌محور t، از طرف چپ به‌خط $t=1$، و ازطرف راست به‌خط $t=x$ محدود است (شکل ۲۶.۶ را ببینید).



۲۶.۶ $\ln x=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \quad \frac{d(\ln x)}{dx}=\frac{1}{x}$.

اگر $x=1$، مرزهای چپ و راست ناحیه برهم منطبق می‌شوند، و لذا مساحت صفر است

$$\ln 1=\int_{1}^{1}\frac{1}{t}\,dt=0\,. \tag{۳}$$

اگر x کوچکتر از یك باشد، آنگاه مرز چپ، خط $t=x$ و مرز راست، $t=1$ است. دراین‌حالت

$$\ln x=\int_{1}^{x}\frac{1}{t}\,dt=-\int_{x}^{1}\frac{1}{t}\,dt \tag{۴}$$

برابراست با منهای مساحت زیرخم بین x و ۱.

مقدار انتگرال معین در (۲) را می‌توانیم به‌کمك قاعدهٔ سیمپسون تا هرچند رقم اعشاری که بخواهیم به‌دست آوریم. (برای ملاحظهٔ روشی دیگر، بخش ۴.۱۲ را ببینید.) در بخش ۵.۶ به مطالعهٔ برد $y=\ln x$ خواهیم‌پرداخت.

چون تابع $y=\ln x$ با انتگرال

$$\ln x=\int_{1}^{x}\frac{1}{t}\,dt,\quad x>0$$

تعریف می‌شود، فوراً از نخستین قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال (بخش ۷.۴) نتیجه می‌شود که

$$\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}\,. \tag{۵}$$

اگر u تابع مشتقپذیری از x باشد، آنگاه از قاعدهٔ زنجیری

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}$$

فرمول کلیتر زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{d}{dx}\ln u=\frac{1}{u}\,\frac{du}{dx}\,. \tag{۶}$$

مثال ۱ اگر $y=\ln(3x^2+4)$، dy/dx را بیابید.

حل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3x^2+4}\,\frac{d(3x^2+4)}{dx}$$

$$=\frac{6x}{3x^2+4}\,. \qquad ■$$

انتگرال $\int \frac{1}{u}\,du$

فرمول انتگرال

$$\int u^n\,du=\frac{u^{n+1}}{n+1}=C,\quad n\neq -1$$

که در فصل ۴ به‌دست آوردیم، شامل $n=-1$ نمی‌شد، زیرا مشتق هیچ توانی از u، $1/u$ نیست.

حال درموقعیتی قرارداریم که به‌این‌حالت استثنایی بپردازیم، زیرا معادلهٔ (۶) فوراً به‌معادله

$$\int u^{-1}\,du=\int \frac{1}{u}\,du=\int \frac{1}{u}\,\frac{du}{dx}\,dx=\ln u+C \tag{۷ الف}$$

منجرمی‌شود، با این‌شرط‌که u مثبت باشد. اما اگر u منفی‌باشد، آنگاه $-u$ مثبت است و

$$\int \frac{du}{u}=\int \frac{d(-u)}{-u}=\ln(-u)+C'\,. \tag{۷ ب}$$

دونتیجهٔ (۷ الف) و (۷ ب) را می‌توان دریك‌نتیجهٔ واحد به‌صورت زیر تلفیق کرد.

$$\int \frac{du}{u}=\begin{cases}\ln u+C & u>0\\ \ln(-u)+C' & u<0\,.\end{cases} \tag{۸}$$

اگرعلامت u در دامنهٔ مفروضش تغییر نکند، آنگاه یك مقدار ثابت انتگرالگیری کافی است، و ازفرمول زیرمی‌توان استفاده کرد.

$$\int \frac{du}{u}=\ln|u|+C\,. \tag{۹}$$

درکاربردها باید به‌خاطرداشت‌که دراینجا تابع u می‌تواند هر تابع مشتقپذیر $u=f(x)$ باشد. معادلهٔ (۹) حاکی است‌که انتگرالهایی با یك صورت خاص، به لگاریتم منجر می‌شوند. یعنی، اگر $f(x)$ تابع مشتقپذیری باشدکه بردامنهٔ مفروضش تغییرعلامت ندهد، آنگاه

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln|f(x)|+C\,. \tag{۱۰}$$

مثال ۲ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int \frac{6x}{3x^2+4}\,dx\,.$$

حل: این انتگرال به‌صورت

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

است که در آن $f(x)=3x^2+4$ و $6x$ $f'(x)=$. تابع f تغییر علامت نمی‌دهد (همیشه مثبت است). بنابراین معادلهٔ (۱۰) را می‌توان به‌کار برد، و

$$\int \frac{6x}{3x^2+4}\,dx=\ln|3x^2+4|+C$$
$$=\ln(3x^2+4)+C\,.$$

چون $3x^2+4$ مثبت است، بدون قدر مطلق هم کار انجام می‌شود. ■

مثال ۳ تابعی چون $y=f(x)$ بیابید به‌قسمی که $dy/dx=1/x$، $f(1)=1$، و $f(-1)=2$. جواب را رسم کنید.

حل: ثابتهایی چون C و C' وجود دارند که

$$y=\begin{cases}\ln x+C & x \text{ مثبت}\\ \ln(-x)+C' & x \text{ منفی}\end{cases}$$

اگر $x=1$ و $y=1$ را در رابطهٔ فوق بگذاریم، داریم

$1=\ln 1+C=0+C$، لذا $C=1$.

به همین ترتیب، $x=-1$ و $y=2$ را در رابطهٔ فوق قرار می‌دهیم. داریم

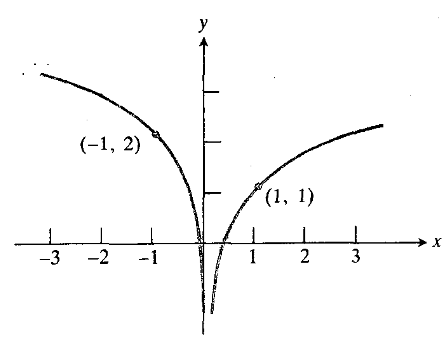
$$2=\ln(-(-1))+C'=\ln 1+C'=0+C'$$

و لذا $C'=2$.

پس جواب کامل عبارت است از

$$y=f(x)=\begin{cases}\ln x+1 & x \text{ مثبت}\\ \ln(-x)+2 & x \text{ منفی}\end{cases}$$

نمودار جواب در شکل ۲۷.۶ نشان داده شده‌است. (برای تحلیل کلی نمودار $y=\ln x$، بخش ۵.۶ را ببینید.)



۲۷.۶ نمودار تابعی چون $f(x)$ که مشتقش $1/x$ است و $f(-1)=2$، و $f(1)=1$؛

$$f(x)=\begin{cases}\ln x+1 & x \text{ مثبت}\\ \ln(-x)+2 & x \text{ منفی}\end{cases}$$

ثابتهای انتگرالگیری C و C' در مثال ۳ برابر نیستند.

نکته معمول نیست که دو شرط اولیه برای جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول داشته باشیم. در اینجا به این دلیل دو شرط داریم که جواب عمومی $dy/dx=1/x$ از دو خانوادهٔ خمها تشکیل می‌شود، یکی به ازای $x>0$ و دیگری برای $x<0$. برای انتخاب یک جواب خصوصی کامل، لازم است از هر خانواده یک خم انتخاب کنیم. برای $x>0$ خم با شرط $f(1)=1$ انتخاب می‌شود، برای $x<0$ با شرط $f(-1)=2$.

مثال ۴ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos\theta\,d\theta}{2+\sin\theta}\,.$$ ■

حل: برای محاسبهٔ انتگرال نامعین مربوط، از جانشانی زیر استفاده می‌کنیم

$$u=2+\sin\theta,\quad du=\cos\theta\,d\theta\,.$$

داریم

$$\int\frac{\cos\theta\,d\theta}{2+\sin\theta}=\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C$$
$$=\ln(2+\sin\theta)+C\,.$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos\theta\,d\theta}{2+\sin\theta}=\ln(2+\sin\theta)\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$
$$=\ln(2+1)-\ln(2+(-1))$$
$$=\ln 3-\ln 1$$
$$=\ln 3\,.$$ ■

مثال ۵ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int\frac{\ln x}{x}\,dx\,.$$

حل: از جانشانی زیر استفاده می‌کنیم

$$u=\ln x,\quad du=\frac{1}{x}\,dx\,.$$

داریم

$$\int\frac{\ln x}{x}\,dx=\int u\,du=\frac{u^2}{2}+C=\frac{(\ln x)^2}{2}+C\,.$$ ■

مثال ۶ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int_{۱}^{۴} \frac{dx}{\sqrt{x}(۱+\sqrt{x})}.$$

حل: برای محاسبهٔ انتگرال نامعین، ازجانشانی زیراستفاده می‌کنیم

$$u=۱+\sqrt{x},\quad du=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}dx,\quad ۲\,du=\frac{۱}{\sqrt{x}}dx.$$

آنگاه

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(۱+\sqrt{x})}=۲\int \frac{du}{u}=۲\ln|u|+C$$

$$=۲\ln(۱+\sqrt{x})+C.$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$\int_{۱}^{۴} \frac{dx}{\sqrt{x}(۱+\sqrt{x})}=۲\ln(۱+\sqrt{x})\Big]_{۱}^{۴}$$

$$=۲(\ln ۳-\ln ۲). \quad \blacksquare$$

انتگرالهای $y=\tan x$ **و** $x=\cot x$

فرمول

$$\int \frac{du}{u}=\ln|u|+C$$

به ما امکان می‌دهد که از توابع تانژانتی و کتانژانتی انتگرال بگیریم. درمورد تانژانت داریم

$$\int \tan x\,dx=\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x}=-\int \frac{-\sin x\,dx}{\cos x}$$

$$=-\int \frac{du}{u}\quad \begin{pmatrix} u=\cos x, \\ du=-\sin x\,dx \end{pmatrix}\qquad (۱۱)$$

$$=-\ln|u|+C$$

$$=-\ln|\cos x|+C$$

$$=\ln|\sec x|+C.$$

(درآخرین گام ازاتحاد $-\ln(a)=\ln(۱/a)$ استفاده‌شده‌است که دربخش ۵.۶ آن را توجیه خواهیم کرد.)

درمورد کتانژانت داریم

$$\int \cot x\,dx=\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x}$$

$$=\int \frac{du}{u}\quad \begin{pmatrix} u=\sin x, \\ du=\cos x\,dx \end{pmatrix}\qquad (۱۲)$$

$$=\ln|u|+C$$

$$=\ln|\sin x|+C.$$

فرمولهای کلی عبارت‌اند از

$$\int \tan u\,du=-\ln|\cos u|+C=\ln|\sec u|+C \qquad (۱۳)$$

$$\int \cot u\,du=\ln|\sin u|+C \qquad (۱۴)$$

مثال ۷ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int ۲x\tan(۵x^{۲}-۱)\,dx.$$

حل: ازجانشانی زیراستفاده می‌کنیم

$$u=۵x^{۲}-۱,\quad du=۱۰x\,dx,\quad ۲x\,dx=\frac{۱}{۵}du.$$

داریم

$$\int ۲x\tan(۵x^{۲}-۱)dx=\int \frac{۱}{۵}\tan u\,du=\frac{۱}{۵}\int \tan u\,du$$

$$=\frac{۱}{۵}\ln|\sec u|+C$$

$$=\frac{۱}{۵}\ln|\sec(۵x^{۲}-۱)|+C. \quad \blacksquare$$

فرمولهای مهم

۱. $\ln x=\int_{۱}^{x}\frac{۱}{t}dt,\quad x>۰$ (تعریف $\ln x$)

۲. $\frac{d}{dx}\ln x=\frac{۱}{x}$

۳. $\frac{d}{dx}\ln u=\frac{۱}{u}\frac{du}{dx}$

۴. $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \begin{cases} \ln u + C & u > 0 \\ \ln(-u) + C & u < 0 \end{cases}$

۵. $\displaystyle\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$ (اگر علامت u در دامنهٔ انتگرالگیری تغییر نکند)

مسأله‌ها

درمسائل ۱ـ۲۰، dy/dx را بیابید.

۱. $y = \ln 2x$

۲. $y = \ln 5x$

۳. $y = \ln kx$ (k ثابت)

۴. $y = (\ln x)^2$

۵. $y = \ln(10/x)$

۶. $y = \ln(x^2 + 2x)$

۷. $y = (\ln x)^3$

۸. $y = \ln(\cos x)$

۹. $y = \ln(\sec x + \tan x)$

۱۰. $y = x \ln x - x$

۱۱. $y = x^3 \ln(2x)$

۱۲. $y = \ln(\csc x)$

۱۳. $y = \tan^{-1}(\ln x)$

۱۴. $y = \ln(\ln x)$

۱۵. $y = x^2 \ln(x^2)$

۱۶. $y = \ln(x^2 + 4) - x\tan^{-1}\frac{x}{2}$

۱۷. $y = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) - \frac{\tan^{-1} x}{x}$

۱۸. $y = x(\ln x)^3$

۱۹. $y = x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$

۲۰. $y = x\ln(a^2 + x^2) - 2x + 2a\tan^{-1}\frac{x}{a}$

درمسائل ۲۱ـ۴۰، انتگرالها را محاسبه کنید.

۲۱. $\displaystyle\int \frac{dx}{x}$

۲۲. $\displaystyle\int \frac{2\,dx}{x}$

۲۳. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x}$

۲۴. $\displaystyle\int \frac{dx}{x + 2}$

۲۵. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x + 1}$

۲۶. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{1 - x}$

۲۷. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{2x + 3}$

۲۸. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{3\,dx}{2 - 3x}$

۲۹. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{4x^2 + 1}$

۳۰. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x\,dx}{2 - \cos x}$

۳۱. $\displaystyle\int \tan 3x\,dx$

۳۲. $\displaystyle\int \cot 5x\,dx$

۳۳. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{4 - x^3}$

۳۴. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 2x\,dx}{1 + \tan 2x}$

۳۵. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}$

۳۶. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

۳۷. $\displaystyle\int_1^2 \frac{(\ln x)^2\,dx}{x}$

۳۸. $\int_{۱}^{۳} \frac{\cos(\ln x)\, dx}{x}$

۳۹. $\int \frac{\sec^{۲} x+\sec x \tan x}{\sec x+\tan x}\, dx$

۴۰. $\int \frac{dx}{(۱+x^{۲})\tan^{-۱} x}$

درمسائل ۴۱ـ۴۴، حدها را بیابید.

۴۱. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$

۴۲. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$

۴۳. $\lim_{t\to ۰} \frac{\ln(۱+۲t)-۲t}{t^{۲}}$

۴۴. $\lim_{\theta\to ۰^+} \frac{\ln(\sin\theta)}{\cot\theta}$

۴۵. مطلوب است مساحت ناحیهٔ «مثلثی» واقع در ربع اول که به‌خطوط $x=۱$ و $y=۱$، و هذلولی $xy=۲$ محدود است.

۴۶. مطلوب است مرکزجرم یك‌ورقهٔ همگن نازك که بین خم $y=۱/x$، محور x، و خطوط $x=۱$ و $x=۲$ محصوراست.

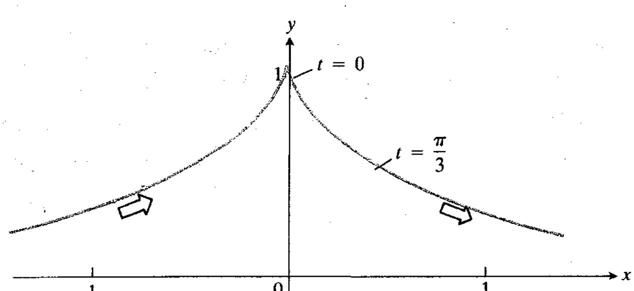
۴۷. مطلوب است مرکزجرم یك‌ورقهٔ نازك با چگالی ثابت $\delta=۱$ که بین خمهای $y=۱/(۱+x^{۲})$ و $y=-۱/(۱+x^{۲})$ و خطوط $x=۰$ و $x=۱$ محصور است.

۴۸. مطلوب است حل معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''=\sec^{۲} x$$

با این‌شرط که وقتی $x=۰$، $y=۰$ و $y'=۱$.

۴۹. طول خم زیررا بیابید. شکل ۲۸.۶ را ببینید.



۲۸.۶ خم مورد بحث درمسألهٔ ۴۹ بخشی از خمی‌است‌که وقتی t بین $-\pi/۲$ و $\pi/۲$ باشد دربالای‌تمام‌محور x گسترده‌است. پیکانها جهت افزایش t را نشان می‌دهند.

$$x=\ln(\sec t+\tan t)-\sin t, \quad y=\cos t$$
$$۰\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{۳}.$$

۵.۶ ویژگیهای لگاریتمهای طبیعی، نمودار $y=\ln x$

دراین بخش ویژگیهای مهم زیر را که لگاریتمهای طبیعی دارند ثابت می‌کنیم، و آنها را دررسم نمودار تابع $y=\ln x$ به‌کار می‌بریم

$$\ln ax=\ln a+\ln x \qquad (۱)$$

$$\ln\frac{x}{a}=\ln x-\ln a \qquad (۲)$$

$$\ln x^{n}=n\ln x \qquad (۳)$$

این ویژگیها وقتی برقرارندکه x و a مثبت باشند. موقتاً این محدودیت اضافی را هم قائل می‌شویم‌که n یك عددگویا باشد، ولی در بخش ۷.۶ این محدودیت را کنار می گذاریم.

مثال ۱

$$\ln\left(\frac{۱}{۸}\right)=\ln ۱-\ln ۸=۰-\ln ۲^{۳}=-۳\ln ۲$$

$$\ln ۴-\ln ۵=\ln\left(\frac{۴}{۵}\right)=\ln ۰{,}۸$$

$$\ln\sqrt[۳]{۲۵}=\ln(۲۵)^{۱/۳}=\frac{۱}{۳}\ln ۲۵=\frac{۱}{۳}\ln ۵^{۲}=\frac{۲}{۳}\ln ۵$$

■

در اثبات‌روابط (۱)ـ(۳) این‌واقعیت را مبنای کارمی گیریم که: $y=\ln x$ درمعادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx}=\frac{۱}{x} \quad (\text{به‌ازای هر } x \text{ بزرگتر از } ۰)$$

صدق می کند، و اینکه اگرمشتق دوتابع یکسان باشد، اختلاف آن دوتابع تنها یك مقدار ثابت است.

اتحاد $\ln ax=\ln a+\ln x$

برای اثبات تساوی (۱) توجه‌کنیدکه مشتق $\ln ax$ و مشتق $\ln x$ به‌ازای تمام مقادیرمثبت x یکسان‌اند

$$\frac{d}{dx}\ln ax=\frac{۱}{ax}\frac{d}{dx}(ax)=\frac{a}{ax}=\frac{۱}{x}=\frac{d}{dx}\ln x.$$

پس، به‌ازای ثابتی چون C،

$$\ln ax = \ln x + C.$$

با گذاشتن ۱ به‌جای x می‌توانیم C را بیابیم

$$\ln a = \ln 1 + C = 0 + C$$

$$C = \ln a.$$

درنتیجه

$$\ln ax = \ln x + \ln a$$

که همان رابطهٔ (۱) است.

اتحاد $\ln(x/a) = \ln x - \ln a$

برای اثبات رابطهٔ (۲)، ابتدا در رابطهٔ (۱) به‌جای x، $1/a$ قرارمی‌دهیم و به‌خاطرمی‌آوریم‌که $\ln 1 = 0$:

$$0 = \ln 1 = \ln\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{a}\right)$$

بنابراین

$$\ln \frac{1}{a} = -\ln a. \tag{۴}$$

حال رابطهٔ (۱) را به‌کارمی‌گیریم و درآن به‌جای a، $1/a$، و به‌جای $\ln a$، $\ln(1/a) = -\ln a$ می‌گذاریم:

$$\ln \frac{x}{a} = \ln\left(x \cdot \frac{1}{a}\right) = \ln x + \ln \frac{1}{a} = \ln x - \ln a.$$

نتیجه، تساوی (۲) است.

اتحاد $\ln x^n = n \ln x$

برای اثبات رابطهٔ (۳)، توجه‌کنیدکه به‌ازای تمام مقادیرمثبت x، $\ln x^n$ و $n \ln x$ مشتق یکسان دارند

$$\frac{d}{dx} \ln x^n = \frac{1}{x^n} \cdot \frac{d}{dx}(x^n) = \frac{1}{x^n} \cdot nx^{n-1}$$

$$= \frac{n}{x} = \frac{d}{dx}(n \ln x).$$

بنابراین، به‌ازای ثابتی‌چون C داریم

$$\ln x^n = n \ln x + C.$$

با انتخاب $x = 1$، می‌بینیم که $C = 0$، و رابطهٔ (۳) به‌دست می‌آید.

اگر $n = 1/m$، و m یک‌عدد صحیح مثبت باشد، از رابطهٔ (۳) نتیجه می‌شود که

$$\ln \sqrt[m]{x} = \ln x^{1/m} = \frac{1}{m} \ln x. \tag{۵}$$

ساده‌کردن محاسبات مربوط به‌مشتق

برای ساده‌کردن کار محاسبهٔ مشتق لگاریتمهای حاصلضرب، خارج‌قسمت، و توان توابع، می‌توانیم از ویژگیهای محاسباتی که با روابط (۱)-(۳) مشخص شدند، استفاده‌کنیم.

مثال ۲ اگر

$$y = \ln \frac{x\sqrt{x+5}}{(x-1)^3}$$

dy/dx را بیابید.

حل: با استفاده از روابط (۱)-(۳) می‌بینیم که

$$y = \ln \frac{x\sqrt{x+5}}{(x-1)^3}$$

$$= \ln x\sqrt{x+5} - \ln(x-1)^3 \qquad \text{(بنابر رابطهٔ ۲)}$$

$$= \ln x + \ln\sqrt{x+5} - \ln(x-1)^3 \qquad \text{(بنابر رابطهٔ ۱)}$$

$$= \ln x + \frac{1}{2}\ln(x+5) - 3\ln(x-1) \qquad \text{(بنابر رابطهٔ ۳)}$$

درنتیجه

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+5)} - \frac{3}{x-1}. \qquad \blacksquare$$

مشتقگیری به‌کمک لگاریتم

گاه می‌توان مشتق تابعی‌را که با یک معادلهٔ پیچیده داده شده‌است، با گرفتن لگاریتم از دوطرف معادله، قبل از عمل مشتقگیری، سریعتر محاسبه‌کرد. مثال‌زیر این‌فرایندراکه به‌**مشتقگیری لگاریتمی** موسوم است روشن می‌کند.

مثال ۳ اگر

$$y = \frac{\sqrt{\cos x}}{x^2 \sin x}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \tag{۶}$$

dy/dx را بیابید.

حل: از دوطرف معادله لگاریتم می‌گیریم، و برای ساده‌کردن طرف راست از ویژگیهای محاسباتی روابط (۱)-(۳) استفاده می‌کنیم:

$$\ln y=\ln\left(\frac{\sqrt{\cos x}}{x^{۲}\sin x}\right)$$
$$=\ln\sqrt{\cos x}-\ln(x^{۲}\sin x) \qquad (۷)$$
$$=\frac{۱}{۲}\ln\cos x-۲\ln x-\ln\sin x.$$

حال از دوطرف مشتق می‌گیریم-درمورد طرف چپ از مشتقگیری ضمنی استفاده می‌کنیم

$$\frac{۱}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{۱}{۲}\frac{-\sin x}{\cos x}-\frac{۲}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}. \qquad (۸)$$

بالاخره dy/dx را محاسبه می‌کنیم

$$\frac{dy}{dx}=y\left[-\frac{۱}{۲}\tan x-\frac{۲}{x}-\cot x\right]. \quad \blacksquare$$

مثال ۴ اگر

$$y^{۲/۳}=\frac{(x^{۲}+۱)(۳x+۴)^{۱/۲}}{\sqrt[۵]{۲x-۴}} \qquad (۹)$$

dy/dx را بیابید.

حل: مراحل حل نظیر مراحل مثال ۳ هستند. از دوطرف معادله لگاریتم می‌گیریم

$$\frac{۲}{۳}\ln y=\ln(x^{۲}+۱)+\frac{۱}{۲}\ln(۳x+۴)-\frac{۱}{۵}\ln(۲x-۴). \qquad (۱۰)$$

از دوطرف، با استفاده از مشتقگیری ضمنی درمورد طرف چپ، مشتق می‌گیریم

$$\frac{۲}{۳}\cdot\frac{۱}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{۲x}{x^{۲}+۱}+\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۳}{۳x+۴}-\frac{۱}{۵}\cdot\frac{۲}{۲x-۴}.$$

حال dy/dx را می‌یابیم

$$\frac{dy}{dx}=\frac{۳y}{۲}\left[\frac{۲x}{x^{۲}+۱}+\frac{۳}{۶x+۸}-\frac{۱}{۵x-۱۰}\right]. \quad \blacksquare$$

نمودار $y=\ln x$

شیب خم

$$y=\ln x \qquad (۱۱)$$

از

$$\frac{dy}{dx}=\frac{۱}{x} \qquad (۱۲)$$

به‌دست می‌آید که به‌ازای هر $x>۰$، مثبت است. پس نمودار $y=\ln x$ از چپ به راست دائماً صعود می‌کند. چون این مشتق پیوسته است، خود تابع $\ln x$ هم پیوسته است، و خم مماسی‌دارد که به‌طور پیوسته می‌چرخد.

مشتق دوم

$$\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}=-\frac{۱}{x^{۲}} \qquad (۱۳)$$

همیشه منفی‌است، و لذا تقعرنمودار همیشه روبه‌پایین است.

خم ازنقطهٔ $(۱,۰)$ می‌گذرد، زیرا $\ln ۱=۰$. دراین‌نقطه شیب‌آن $+۱$ است، پس‌خط مماس دراین نقطه با محور x زاویهٔ $۴۵°$ می‌سازد (با این‌فرض‌که روی محورهای x و y واحدهای برابر انتخاب شوند).

اگر به‌تعریف $\ln ۲$، به‌عنوان یك انتگرال، رجوع کنیم:

$$\ln ۲=\int_{۱}^{۲}\frac{۱}{t}\,dt$$

می‌بینیم که می‌توان آن را به‌صورت ناحیهٔ نشان داده‌شده درشکل ۲۶.۶ به ازای $x=۲$ تعبیر کرد. با درنظرگرفتن مساحتهای مستطیلهای با قاعدهٔ ۱ و ارتفاع ۱ یا ۱/۲، که به‌ترتیب محیط بر ومحاط درناحیهٔ مفروض‌اند، ملاحظه می‌کنیم که

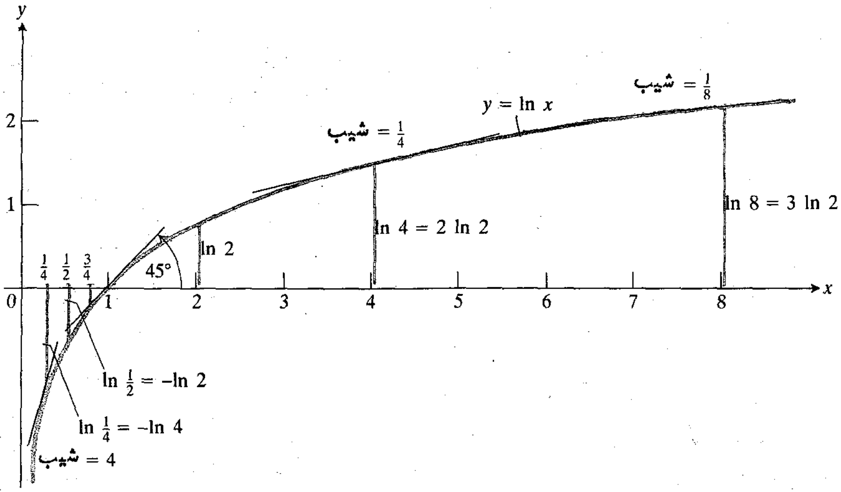
$$۰٫۵<\ln ۲<۱٫۰.$$

در واقع، با محاسبات مفصلتر، مقدار $\ln ۲$ تا پنج رقم اعشار به‌صورت

$$\ln ۲\approx ۰٫۶۹۳۱۵$$

به‌دست می‌آید. پس بنابررابطهٔ (۳) داریم

$$\ln ۴=\ln ۲^{۲}=۲\ln ۲\approx ۱٫۳۸۶۳۰$$
$$\ln ۸=\ln ۲^{۳}=۳\ln ۲\approx ۲٫۰۷۹۴۴$$
$$\ln\frac{۱}{۲}=\ln ۲^{-۱}=-\ln ۲\approx -۰٫۶۹۳۱۵$$



۲۹.۶ نمودار $y=\ln x$.

$$\ln\frac{۱}{۴}=\ln ۲^{-۲}=-۲\ln ۲\approx -۱٫۳۸۶۳۰$$

و غیره.

حال نقاط متناظر با $x=۱/۴, ۱/۲, ۱, ۲, ۴, ۸$ از خم $y=\ln x$ را مشخص میکنیم، و آنها را با یك خم هموار بههم وصل میکنیم. خم حاصل باید درنقطهٔ $(x, \ln x)$ دارای شیب $۱/x$ باشد و تقعرش روبهپایین باشد. اینخم درشکل ۲۹.۶ نشان داده شدهاست.

چون $\ln ۲$ از ۰٫۵ بزرگتر است و $\ln ۲^n=n\ln ۲$، داریم

$$\ln ۲>۰٫۵$$
$$\ln ۴>۲(۰٫۵)=۱$$
$$\ln ۸>۳(۰٫۵)=۱٫۵$$
$$\ln ۱۶>۴(۰٫۵)=۲$$
$$\vdots$$
$$\ln ۲^n>n(۰٫۵)=\frac{n}{۲}$$

و لذا وقتی x بهبینهایت میل کند، $\ln x$ هم نظیر آن عمل میکند. یعنی،

(۱۴) وقتی $x\to+\infty$ ، $\ln x\to+\infty$.

ازطرف دیگر، وقتی x با مقادیرمثبت بهصفر نزدیك میشود، $۱/x$ بهبینهایت مثبت میگراید. بنابراین از رابطهٔ (۴) نتیجهمیگیریم که

(۱۵) وقتی $x\to ۰^+$ ، $\ln x=-\ln\frac{۱}{x}\to-\infty$.

محور y مجانب قائم نمودار $y=\ln x$ است.

ویژگیهای $y=\ln x$

۱. دامنه: مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی مثبت، $x>۰$.
۲. برد: مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی، $-\infty<y<\infty$.
۳. در هرنقطه از دامنهاش تابعی پیوسته و صعودی است. اگر $x_۱>x_۲>۰$ ، آنگاه $\ln x_۱>\ln x_۲$. از دامنه به برد تابعی یك به یك است. (لذا معکوسی داردکه موضوع بحث بخش بعدی است.)
۴. حاصلضرب، خارجقسمت و توان: اگر a و x دوعدد مثبت باشند، آنگاه

$$\ln ax=\ln a+\ln x \qquad (۱)$$

$$\ln\frac{x}{a}=\ln x-\ln a \qquad (۲)$$

$$\ln x^n=n\ln x. \qquad (۳)$$

مسألهها

درمسائل ۱ـ۱۰، لگاریتمها را برحسب $\ln ۲$ و $\ln ۳$ بیان کنید. مثلاً، $\ln ۱٫۵=\ln(۳/۲)=\ln ۳-\ln ۲$.

۱. $\ln ۱۶$
۲. $\ln\sqrt[۳]{۹}$
۳. $\ln ۲\sqrt{۲}$
۴. $\ln ۰٫۲۵$
۵. $\ln ۴/۹$
۶. $\ln ۱۲$

۷. $\ln 9/8$

۸. $\ln 36$

۹. $\ln 4{,}5$

۱۰. $\ln\sqrt{13{,}5}$

درمسائل ۱۱–۲۲، dy/dx را بیابید.

۱۱. $y=\ln\sqrt{x^2+5}$

۱۲. $y=\ln x^{3/2}$

۱۳. $y=\ln\dfrac{1}{x\sqrt{x+1}}$

۱۴. $y=\ln\sqrt[3]{\cos x}$

۱۵. $y=\ln(\sin x\sin 2x)$

۱۶. $y=\ln(x\sqrt{x^2+1})$

۱۷. $y=\ln(3x\sqrt{x+2})$

۱۸. $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

۱۹. $y=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{x^3}{1+x^3}$

۲۰. $y=\ln\dfrac{x}{2+3x}$

۲۱. $y=\ln\dfrac{(x^2+1)^5}{\sqrt{1-x}}$

۲۲. $y=\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}}\ln t\,dt$

درمسائل ۲۳–۳۱، dy/dx را با مشتقگیری لگاریتمی بیابید.

۲۳. $y^2=x(x+1),\quad x>0$

۲۴. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}},\quad x>1$

۲۵. $y=\sqrt{x+3}\sin x\cos x,\quad 0<x<\pi/2$

۲۶. $y=\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^{2/3}},\quad x>0$

۲۷. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x(x-2)}{x^2+1}},\quad x>2$

۲۸. $y^5=\sqrt{\dfrac{(x+1)^5}{(x+2)^{10}}}$

۲۹. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x(x+1)(x-2)}{(x^2+1)(2x+3)}},\quad x>2$

۳۰. $y^{4/5}=\dfrac{\sqrt{\sin x\cos x}}{1+2\ln x}$

۳۱. $\sqrt{y}=\dfrac{x^5\tan^{-1}x}{(3-2x)\sqrt[3]{x}}$

۳۲. الف) بزرگترین دامنهٔ ممکن تابع زیرچیست؟

$$y=\sqrt{\frac{(x+1)(x+2)}{(3-x)(4-x)}}$$

ب) dy/dx را بیابید.

درمسائل ۳۳–۴۰، انتگرالها را محاسبه کنید.

۳۳. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x+3}$

۳۴. $\displaystyle\int_{0}^{6}\frac{dx}{x+2}$

۳۵. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cot x\,dx$

۳۶. الف) $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$

ب) $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{x\,dx}{1+x^2}$

۳۷. $\displaystyle\int_{2}^{4}\frac{2x-5}{x}\,dx$

۳۸. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/3}\frac{\sec x\tan x\,dx}{2+\sec x}$

۳۹. الف) $\displaystyle\int_{0}^{0/5}\frac{x\,dx}{1-x^2}$

ب) $\displaystyle\int_{0}^{0/5}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

پ) $\displaystyle\int_{0}^{0/5}\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

۴۰. الف) $\int_{-۱}^{۳}\frac{dx}{\sqrt{۲x+۳}}$

ب) $\int_{-۱}^{۳}\frac{dx}{۲x+۳}$

پ) $\int_{-۱}^{۳}\frac{dx}{(۲x+۳)^{۲}}$

۴۱. نمودار (الف) $y=|\ln x|$، (ب) $y=\ln|x|$ را رسم کنید.

۴۲. نمودارهای $y=\ln x$ و $y=\ln ۲x$ را در یک دستگاه رسم کنید. (راهنمایی: قبل از رسم، رابطهٔ (۱) را درمورد $\ln ۲x$ به‌کار ببرید.)

۴۳. مطلوب‌است محاسبهٔ

$$\lim_{x\to\infty}\int_{x}^{۲x}\frac{۱}{t}\,dt.$$

۴۴. الف) مطلوب‌است مساحت ناحیهٔ واقع در ربع اول محصور بین محور x، خم $y=\tan x$، و خط $x=\pi/۳$.
ب) مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ مورد بحث در (الف) حول محور x.

۴۵. مسألهٔ ۴۴ را درمورد ناحیهٔ محصور بین خمهای $y=۴/x$ و $y=(x-۳)^{۲}$ حل کنید.

۴۶. ناحیهٔ محصور بین‌خم $y=۱/\sqrt{x}$، محور x، و خطهای $x=۱/۲$ و $x=۴$ را حول محور x دوران می‌دهیم تا جسمی حاصل شود. حجم این جسم را بیابید.

۴۷. تقریب خطی و درجهٔ دوم $\ln(۱+x)$. تقریبهای متداول $\ln(۱+x)$ نزدیک $x=۰$ عبارت‌اند از:

(۱۶) خطی: $\ln(۱+x)\approx x$

(۱۷) درجهٔ دوم: $\ln(۱+x)\approx x-\frac{x^{۲}}{۲}$.

الف) از فرمولهای مذکور درجدول ۲.۳ (بخش ۹.۳) استفاده کنید و درستی این تقریبها را نشان دهید.
ب) مطلوب است براورد خطای ناشی از قرار دادن تقریب خطی و درجهٔ دوم به‌جای $\ln(۱+x)$، در بازهٔ ۰ $\leqslant x \leqslant$ ۰ر۱.

۴۸. الف) نمودارهای $y=x$ و $y=\ln(۱+x)$ را در یک دستگاه رسم کنید و نشان دهید که خطای ماکسیمم در تقریب $\ln(۱+x)\approx x$ بر بازهٔ ۰ $\leqslant x \leqslant$ ۰ر۱ در $x=$ ۰ر۱ به وجود می‌آید. (راهنمایی: شیب خم $y=\ln(۱+x)$ در $x=۰$ چیست؟)
ب) **ماشین حساب** تفاضل $\ln($۱ر۱$)-$ ۰ر۱ را با ماشین‌حساب بیابید.

۴۹. **محاسبهٔ مقادیر $\ln x$ با قاعدهٔ سیمپسون.** هرچندروابط (۱۶) و (۱۷) درمسألهٔ ۴۷ برای قراردادن x و $(x-x^{۲}/۲)$ به‌جای $\ln(۱+x)$ در بازه‌های کوتاه خوب‌اند، ولی برای براوردکردن مقدار یك لگاریتم خاص، قاعدهٔ سیمپسون نتیجهٔ بهتری به‌دست می‌دهد.

به‌عنوان مثال، مقادیر $\ln($۱ر۲$)$ و $\ln($۰ر۸$)$ تا پنج‌رقم اعشار عبارت‌اند از

$\ln($۱ر۲$)=$ ۰ر۱۸۲۳۲ و $\ln($۰ر۸$)=-$ ۰ر۲۲۳۱۴.

ابتدا $\ln($۱ر۲$)$ و $\ln($۰ر۸$)$ را با روابط (۱۶) و (۱۷) حساب کنید، و سپس آنها را با قاعدهٔ سیمپسون با ضابطهٔ $n=۲$ بیابید. دقت‌قاعدهٔ سیمپسون تحسین‌برانگیز است، این‌طور نیست؟

۵۰. **ماشین‌حساب** با استفاده از قاعدهٔ سیمپسون باضابطهٔ $n=۸$، $\ln ۵$ را براوردکنید. این نتیجه را با مقداری‌که ماشین‌حسابتان برای $\ln ۵$ به‌دست می‌دهد مقایسه کنید.

TOOLKIT PROGRAM
Super * Grapher

۶.۶ تابع نمایی e^{x}

حال به‌معکوس تابع $y=\ln x$ می‌رسیم که موارد استفادهٔ زیادی در ریاضیات و کاربردهایش دارد.

عدد e

چون $\ln ۲$ از ۱ کمتر و $\ln ۴$ از ۱ بیشتر است، طبق‌قضیهٔ مقدار میانگین عددی بین ۲ و ۴ وجود دارد که لگاریتمش برابر با ۱ است. چون $\ln x$ یك به‌یك است، این عدد یکتاست، و با حرف e نمایش داده می‌شود. اویلرکه در اوایل قرن هیجدهم دربارهٔ این عدد مطلبی نوشته، آن را با حرف اول نام خودش نمایش‌داده است. پس

$$e=\ln^{-۱}۱ \quad و \quad \ln e=۱. \qquad (۱)$$

اگر در شکل ۲۹.۶ خطکشی درامتداد خط $y=۱$ قرار دهید، می‌بینید که e بین ۲ر۵ و ۳ واقع می‌شود. درفصل ۱۲ به‌چگونگی محاسبهٔ مقدار e با هرتعداد رقم اعشار پی‌خواهید برد. مقدار آن

تا ۱۵ رقم اعشار عبارت است از

$$e = ۲٫۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴۵۹۰۴۵\ldots \qquad (۲)$$

تابع $y=e^x$

وقتی x یک‌عددگویا باشد، می‌توانیم e^x را همان‌گونه تعریف کنیم که توانهای گویای هر عدد مثبت دیگری را تعریف می‌کنیم. برای این توانهای e داریم

$$\ln e^x = x \ln e = x \cdot ۱ = x . \qquad (۳)$$

پس، وقتی x گویا باشد، e^x عددی است که لگاریتم طبیعی آن x است. با استفاده از نمادها داریم

$$\text{به‌ازای هر } x \text{ گویا،} \quad e^x = \ln^{-۱} x . \qquad (۴)$$

رابطهٔ (۴) حاکی است که توابع e^x و $\ln^{-۱} x$، وقتی x گویا باشد، یکسان‌اند. این مطلب کلید تعریف e^x برای سایرمقادیر x است.

هرچند تا اینجا e^x را فقط برای مقادیر گویای x تعریف کرده‌ایم، ولی تابع $\ln^{-۱} x$ برای همهٔ مقادیر x، اعم از گویا و گنگ، تعریف‌می‌شود. بنابراین، می‌توانیم برای‌تعریف e^x به‌ازای مقادیری از x که درمورد آنها e^x قبلاً تعریف نشده است از فرمول $e^x = \ln^{-۱} x$ استفاده‌کنیم. در واقع، اگر بخواهیم تابع حاصل پیوسته باشد، هیچ راه‌دیگری برای تعریف e^x وجود ندارد. پس، ناچار، به‌ازای همهٔ xها، $e^x = \ln^{-۱} x$. بنابراین، $y = e^x$ اگر و تنها اگر $x = \ln y$.

تعریف

تابع $y = e^x$

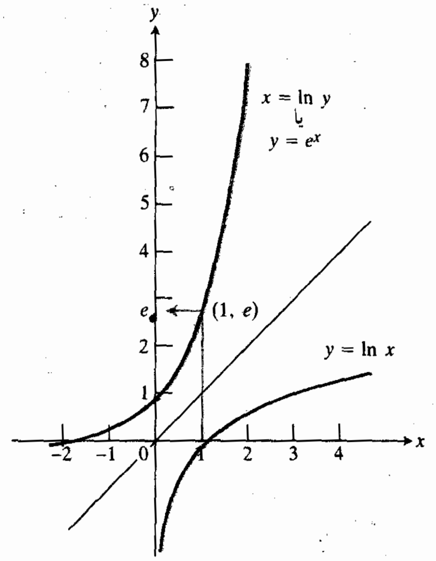
به‌ازای هرعدد حقیقی x،

$$e^x = \ln^{-۱} x . \qquad (۵)$$

تابع $y = e^x$ را اغلب **تابع نمایی** با **پایهٔ e** و **نمای x** می‌نامند. نمادی‌دیگر برای e^x، $\exp(x)$ است که«اکسپو تانسیل x» خوانده‌می‌شود. وقتی به‌جای x عبارت پیچیده‌ای‌از x داشته‌باشیم، نمادگذاری «exp» رجحان دارد. در پیوست ۱۲ جدولی آمده است که مقادیر e^x را به‌ازای x های کوچک به‌دست می‌دهد.

نمودار $y = e^x$ را می‌توان با پیداکردن قرینهٔ $y = \ln x$ نسبت به‌خط $y = x$ (شکل ۳۰.۶) به‌دست آورد. نمودار $y = e^x$ همان نمودار $x = \ln y$ است. توجه کنید که این نمودار محور y را در $y = e^۰ = ۱$ قطع می‌کند، یعنی

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = ۰ \qquad (۶)$$



۳۰.۶ نمودار $y = \ln x$ و معکوسش $y = e^x$.

و نیز توجه کنید که

$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty . \qquad (۷)$$

معادلات شامل $\ln x$ و e^x

چون $y = e^x$ و $y = \ln x$ معکوس یکدیگرند،

$$\text{به‌ازای هر } x > ۰ \text{،} \quad e^{\ln x} = x \qquad (۸)$$

و

$$\text{به‌ازای تمام } x\text{ها،} \quad \ln e^x = x . \qquad (۹)$$

مثال ۱

الف) $\ln e^۲ = ۲$

ب) $\ln e^{-۱} = -۱$

پ) $\ln \sqrt{e} = \frac{۱}{۲}$

ت) $e^{\ln ۲} = ۲$

ث) $e^{\ln (x^۲+۱)} = x^۲ + ۱$

ج) $\ln e^{\sin x} = \sin x$

چ) $\ln \frac{e^{۲x}}{۵} = \ln e^{۲x} - \ln ۵ = ۲x - \ln ۵$. ■

مثال ۲ y را بیابید.

الف) $\ln y = x^۲$

ب) $e^{3y}=2+\cos x$

پ) $\ln(y-1)-\ln y=3x$

حل:

الف) $\ln y=x^2$

رابطه را نمایی می‌کنیم: $e^{\ln y}=e^{(x^2)}$

$$y=e^{(x^2)}.$$

ب) $e^{3y}=2+\cos x$

ازدوطرف لگاریتم می‌گیریم: $\ln e^{3y}=\ln(2+\cos x)$

$$3y=\ln(2+\cos x)$$

$$y=\frac{1}{3}\ln(2+\cos x).$$

پ) $\ln(y-1)-\ln y=3x$

لگاریتمها را تلفیق می‌کنیم: $\ln\frac{y-1}{y}=3x$

رابطه را نمایی می‌کنیم: $\frac{y-1}{y}=e^{3x}$

طبق‌معمول‌جواب‌را می‌یابیم: $y-1=ye^{3x}$

$$y-ye^{3x}=1$$

$$y(1-e^{3x})=1$$

$$y=\frac{1}{1-e^{3x}}. \blacksquare$$

دوقاعدهٔ عملی مفید

برای حذف لگاریتم از یك رابطه، دوطرف را نمایی کنید.
برای حذف پایه‌های e، از دوطرف لگاریتم بگیرید.

قانونهای نماها

هرچند e^x با روشی به ظاهر تصادفی به‌صورت معکوس لگاریتم تعریف شد، ولی از قوانین آشنای نماها درجبر تبعیت می کند

$$e^{x_1}\cdot e^{x_2}=e^{x_1+x_2} \qquad (10)$$

$$e^{-x}=\frac{1}{e^x}. \qquad (11)$$

این‌روابط به‌ازای تمام اعداد حقیقی برقرارند و از رابطهٔ بین e^x

■ ■ ■

متعالی‌بودن π و یك توهم ریاضی

درگذشته، فهم‌واقعی یا اثبات متعالی‌بودن یك‌عددکار بسیارمشکلی بود. حتی اثبات گنگ‌بودن یك عدد هم دشوار بود. یکی از سه مسألهٔ معروف روزگار باستان، یعنی‌مسألهٔ «تربیع دایره‌تنها با ستاره و پرگار» به‌نظرمی‌رسیدکه با مسألهٔ گنگ‌بودن π مربوط باشد. (دومسألهٔ معروف دیگر، تضعیف مکعب، و تثلیث زاویه‌اند.)

گنگ‌بودن π و e را لامبرت (۱۷۲۸–۱۷۷۷) دراواسط قرن هیجدهم اثبات کرد. هرچند اثبات‌گنگ‌بودن π مسألهٔ تربیع دایره را حل نمی‌کند اما، با اثبات متعالی‌بودن π مسأله حل می‌شود. این اثبات از حوزهٔ بحث این‌کتاب خارج است. هرمیت ریاضیدان در ۱۸۷۳ ثابت‌کردکه e متعالی است. در ۱۸۸۲ لیندمان با استفاده ازروش هرمیت ثابت کردکه π هم متعالی است، و بنابراین تکلیف آخرین نکتهٔ این مسألهٔ معروف ترسیم هندسی را معین کرد. امروزه هنوزهم عده‌ای مدعی و دچار این‌توهم‌اندکه مسألهٔ تربیع‌دایره‌را حل کرده‌اند، و راه‌حلهای‌غلط خودرا به‌بخش ریاضی دانشگاههای سراسر دنیا می‌فرستند.

و $\ln x$ به‌دست می‌آیند. برای اثبات رابطهٔ (۱۰) فرض کنید

$$y_1=e^{x_1} \quad \text{و} \quad y_2=e^{x_2}.$$

پس، طبق تعریف

$$x_1=\ln y_1 \quad \text{و} \quad x_2=\ln y_2.$$

لذا، بنا بر رابطهٔ (۱) از بخش ۵.۶ داریم

$$x_1+x_2=\ln y_1+\ln y_2=\ln y_1 y_2$$

بنا براین، بازهم بنا بر تعریف داریم

$$y_1 y_2=e^{x_1+x_2}$$

که رابطهٔ (۱۰) را ثابت می‌کند.
برای اثبات رابطهٔ (۱۱) فرض کنید $y=e^{-x}$. پس، بنا بر تعریف، $-x=\ln y$ و از رابطهٔ (۴) بخش ۵.۶ داریم

$$x=-\ln y=\ln\left(\frac{1}{y}\right).$$

بنا براین

$$y=\frac{1}{e^x} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{y}=e^x$$

که رابطهٔ (۱۱) را اثبات می‌کند.

مثال ۳ ساده‌کنید:

الف) $e^{\ln 2+3\ln x}$

ب) $e^{2x-\ln x}$

حل:

الف) (از رابطهٔ ۱۰) $e^{\ln 2+3\ln x}=e^{\ln 2}\cdot e^{3\ln x}$

(تعریف e^x و یکی از ویژگیهای لگاریتم) $=2\cdot e^{\ln x^3}$

$=2x^3$

ب) (از رابطهٔ ۱۰) $e^{2x-\ln x}=e^{2x}\cdot e^{-\ln x}$

(از رابطهٔ ۱۱) $=\dfrac{e^{2x}}{e^{\ln x}}$

(تعریف e^x) $=\dfrac{e^{2x}}{x}$ ■

مشتق و انتگرال $y=e^x$

تابع $y=e^x$ مشتقپذیر است، زیرا معکوس تابع مشتقپذیری است که مشتق آن هرگز صفر نمی‌شود. برای محاسبهٔ مشتق

$$y=e^x$$

از دوطرف لگاریتم می‌گیریم

$$\ln y=x$$

و مشتق ضمنی نسبت به x را به‌دست می‌آوریم

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=1 \quad \text{یا} \quad \frac{dy}{dx}=y.$$

چون $y=e^x$، از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{de^x}{dx}=e^x.$$

تابع e^x در اثر مشتقگیری تغییر نمی‌کند؛ این تابع فناناپذیر است! هر چندبار از آن مشتق بگیریم تغییر نمی‌کند. از این بابت تابع نمایی شبیه داستان مریدی است که از مرادش پرسید چه‌چیز زمین را نگه می‌دارد. پاسخ این بود که یك فیل زمین را نگه می‌دارد، و مرید طبیعتاً می‌خواست بداند که چه‌چیز فیل را نگه‌می‌دارد. مراد لحظه‌ای مکث کرد و گفت «فیل، فیل، بازهم فیل.»

حتی اگر از قبل نمی‌دانستیم، می‌توانستیم تعیین کنیم که $y=e^x$ تابعی است صعودی از x، زیرا مشتق آن مثبت است.
با استفاده از قاعدهٔ زنجیری، درحالتی که u تابع مشتقپذیری از x باشد، می‌توانیم فرمولی برای مشتق e^u بیابیم.

$$\frac{de^u}{dx}=\frac{de^u}{du}\frac{du}{dx}=e^u\frac{du}{dx}. \tag{۱۲}$$

و این به‌نوبهٔ خود به‌فرمول انتگرالگیری زیر منجرمی‌شود

$$\int e^u\,du=e^u+C. \tag{۱۳}$$

مثال ۴

$$\frac{d}{dx}e^{\sin x}=e^{\sin x}\frac{d}{dx}(\sin x)=e^{\sin x}\cos x$$ ■

مثال ۵

$$\int_0^1 \frac{e^{\tan^{-1}x}\,dx}{1+x^2}.$$

حل: ازجانشانیهای زیر استفاده می‌کنیم

$$u=\tan^{-1}x,\quad du=\frac{1}{1+x^2}dx,\quad 0=\tan^{-1}0$$

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}1.$$

لذا

$$\int_0^1 \frac{e^{\tan^{-1}x}\,dx}{1+x^2}=\int_0^{\pi/4}e^u\,du=e^u\Big]_0^{\pi/4}$$

$$=e^{\pi/4}-e^0=e^{\pi/4}-1.$$

■

مثال ۶ معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx}=2xe^{-y},\quad x>\sqrt{3} \tag{14}$$

را با این‌شرط که وقتی $x=2$ ، $y=0$، حل کنید.

حل: با ضرب‌کردن دوطرف معادلهٔ (۱۴) در e^y، متغیرها را ازهم جدا می‌کنیم

$$e^y\cdot\frac{dy}{dx}=e^y\cdot 2xe^{-y}=2xe^{y-y}=2xe^0=2x$$

یا

$$e^y\frac{dy}{dx}=2x.$$

حال ازدوطرف نسبت به x انتگرال می‌گیریم و به‌دست می‌آوریم

$$e^y=x^2+C.$$

برای یـافتن مقدار C، از شرط $y=0$ به‌ازای $x=2$ استفاده می‌کنیم:

$$C=e^0-4=1-4=-3.$$

بنابراین

$$e^y=x^2-3. \tag{15}$$

برای اینکه از این معادله y را بیابیم، از دوطرف لگاریتم می‌گیریم

$$\ln e^y=\ln(x^2-3)$$
$$y=\ln(x^2-3). \tag{16}$$

توجه کنید که جواب به‌ازای $x>\sqrt{3}$ معتبر است.

همیشه خوب‌است که باقراردادن‌جواب یك‌معادلهٔ دیفرانسیل درمعادلهٔ اصلی، این‌جواب را امتحان‌کنیم. ازمعادلهٔ (۱۶) و سپس معادلهٔ (۱۵)، داریم

$$\frac{dy}{dx}\underset{\substack{\Uparrow\\ \text{معادلهٔ (۱۶)}}}{=}\frac{d}{dx}\ln(x^2-3)=\frac{2x}{x^2-3}\underset{\substack{\Uparrow\\ \text{معادلهٔ (۱۵)}}}{=}\frac{2x}{e^y}=2xe^{-y}.$$

بنابـراین تـابع y و مشتق آن dy/dx درمعادلـهٔ (۱۴) صدق می‌کنند.

■

ویژگیهای $y=e^x$

۱. تابع نمایی $y=e^x$ معکوس تابع لگاریتم طبیعی $y=\ln x$ است؛ یعنی، $e^x=\ln^{-1}x$.

دامنه: مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی، $-\infty<x<\infty$.

برد: مجموعهٔ تمام اعداد مثبت، $y>0$.

۲. مشتق آن عبارت است از

$$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x.$$

۳. تابعی است پیوسته (زیرا مشتقپذیر است) و صعودی از x.

۴. اگر u تابع مشتقپذیری از x باشد، آنگاه

$$\frac{d}{dx}e^u=e^u\frac{du}{dx}\quad \text{و}\quad \int e^u\,du=e^u+C.$$

۵. $e^{x_1}\cdot e^{x_2}=e^{x_1+x_2}$ و $e^{-x}=1/e^x$.

مسأله‌ها

درمسائل ۱–۱۲ ، عبارتها را ساده‌کنید.

۱. $e^{\ln x}$

۲. $\ln(e^x)$

۳. $e^{-\ln(x^2)}$

۴. $\ln(e^{-x^2})$

۵. $\ln(e^{1/x})$

۶. $\ln(1/e^x)$

۷. $e^{\ln 2+\ln x}$

۸. $e^{2\ln x}$

۹. $\ln(e^{x-x^2})$

۱۰. $\ln(x^2e^{-2x})$

۱۱. $e^{x+\ln x}$

۱۲. $e^{\ln x-2\ln y}$

درمسائل ۱۳–۱۸، y را بیابید.

۱۳. $e^{\sqrt{y}}=x^2$

۱۴. $e^{2y}=x^2$

۱۵. $e^{(x^2)}\cdot e^{(2x+1)}=e^y$

۱۶. $\ln(y-1)=x+\ln x$

۱۷. $\ln(y-2)=\ln(\sin x)-x$

۱۸. $\ln(y^2-1)-\ln(y+1)=\sin x$

درمسائل ۱۹–۴۲، dy/dx را بیابید.

۱۹. $y=e^{3x}$

۲۰. $y=e^{(x+1)}$

۲۱. $y=e^{5-7x}$

۲۲. $y=\cos e^x$

۲۳. $y=x^2e^x$

۲۴. $y=\sin e^{-x}$

۲۵. $y=e^{\sin x}$

۲۶. $y=e^{(x^2)}\cdot e^{-x}$

۲۷. $y=\ln(3xe^{-x})$

۲۸. $y=\ln\dfrac{e^x}{1+e^x}$

۲۹. $y=e^{\sin^{-1}x}$

۳۰. $y=(1+2x)e^{-2x}$

۳۱. $y=(9x^2-6x+2)e^{3x}$

۳۲. $y=\dfrac{ax-1}{a^2}e^{ax}$

۳۳. $y=x^2e^{-x^2}$

۳۴. $y=e^x\ln x$

۳۵. $y=\tan^{-1}(e^x)$

۳۶. $y=\sec^{-1}(e^{2x})$

۳۷. $y=x^3e^{-2x}\cos 5x$ (راهنمایی: از مشتقگیری لگاریتمی استفاده کنید.)

۳۸. $y=\int_0^{\ln x}\sin e^t\,dt,\quad x>0$

۳۹. $\ln y=x\sin x$

۴۰. $\ln xy=e^{x+y}$

۴۱. $e^{2x}=\sin(x+3y)$

۴۲. $\tan y=e^x+\ln x$

درمسائل ۴۳–۵۶، انتگرالها را محاسبه کنید.

۴۳. $\int_{\ln 3}^{\ln 5}e^{2x}\,dx$

۴۴. $\int_{-1}^{1}xe^{x^2}\,dx$

۴۵. $\int_0^{\pi}e^{\sin x}\cos x\,dx$

۴۶. $\int_0^{\ln 8}e^{x/3}\,dx$

۴۷. $\int_{-\ln(a+1)}^{0}e^{-x}\,dx$

۴۸. $\int_0^{2}e^{x/2}\,dx$

۴۹. $\int_0^{1}e^{\ln\sqrt{x}}\,dx$

۵۰. $\int_0^{1}\dfrac{dx}{e^x}$

۵۱. $\int_0^{\ln 2}\dfrac{24\,dx}{e^{3x}}$

۵۲. $\int_0^{1}\dfrac{e^x\,dx}{1+e^x}$

۵۳. $\int_0^{\ln 13}\dfrac{e^x\,dx}{1+2e^x}$

۵۴. $\int_e^{e^2}\dfrac{dx}{x\ln x}$

۵۵. $\int_0^{\ln 2}\dfrac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$ (راهنمایی: فرض کنید $u=e^x$.)

۵۶. $\int_{1}^{4}\frac{e^{\sqrt{x}}\,dx}{\sqrt{x}}$ (راهنمایی: فرض کنید $u=\sqrt{x}$.)

در مسائل ۵۷–۶۰، حدها را به‌کمك قاعدهٔ هوپیتال (بخش ۸.۳) محاسبه کنید.

۵۷. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{h}-(1+h)}{h^{2}}$

۵۸. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^{x}-1}$

۵۹. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{2}+e^{x}}{x+e^{x}}$

۶۰. $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x}$

۶۱. الف) تمام ماکسیممها و مینیممهای (نسبی و مطلق) تابع زیر را بیابید

$$y=e^{\sin x},\qquad -\pi\leqslant x\leqslant 2\pi.$$

ب) نمودار این تابع را رسم کنید. (می‌توانید ازجدولهای پیوست ۱۲ استفاده کنید.)

۶۲. مطلوب است مقادیرماکسیمم و مینیمم مطلق

$$f(x)=e^{x}-2x$$

بر بازهٔ $[0,1]$.

۶۳. مقدار ماکسیمم $f(x)=x^{2}\ln(1/x)$ را بیابید.

۶۴. نمودار $y=(x-3)^{2}e^{x}$ در نقطهٔ $P(3,0)$ یك‌مماس‌افقی دارد. آیا y در $x=3$ یك اکسترمم نسبی دارد یا اینکه P یك نقطهٔ عطف تابع است؟

۶۵. تقریب خطی و درجهٔ دوم e^{x}. تقریبهای خطی و درجهٔ دوم متداول e^{x} نزدیك $x=0$ عبارت‌اند از

خطی: $e^{x}\approx 1+x$

درجهٔ دوم: $e^{x}\approx 1+x+\dfrac{x^{2}}{2}.$

الف) ازفرمولهای جدول ۲.۳ (بخش ۹.۳) استفاده کنید و این تقریبها را بیازمایید.

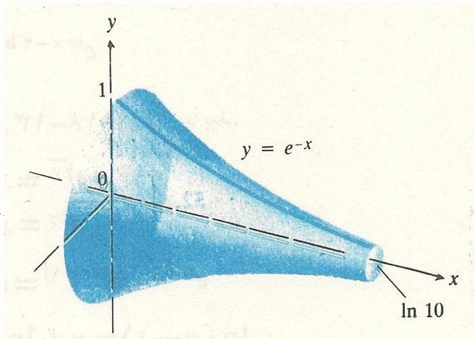
ب) مطلوب است براورد خطاهای حاصل ازقراردادن تقریب خطی و تقریب درجهٔ دوم به‌جای e^{x}، در $0\leqslant x\leqslant 0{,}1$.

پ) نمودار e^{x}، $L(x)=1+x$، و

$$Q(x)=1+x+x^{2}/2$$

را بر بازهٔ $-1\leqslant x\leqslant 1$ دریك دستگاه رسم کنید.

۶۶. ناحیهٔ بین‌خم $y=e^{-x}$، محور x از $x=0$ تا $x=\ln 10$ را حول محور x دوران می‌دهیم تا یك جسم (شکل ۳۱.۶) پدید آید. حجم این جسم را بیابید.



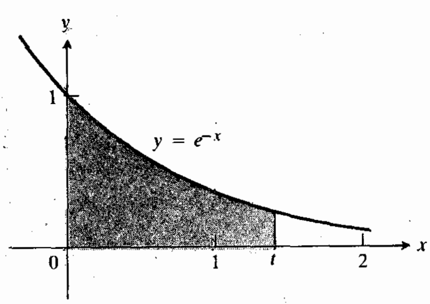
۳۱.۶ جسم موردبحث درمسألهٔ ۶۶ ازمبدأ تا $x=\ln 10$ که تقریباً ۲٫۳ است امتداد دارد.

۶۷. فرض کنید $A(t)$ مساحت ناحیهٔ واقـع درربع اول محصور بین محورهای‌مختصات،خم $y=e^{-x}$، و خط $x=t>0$ (شکل ۳۲.۶) باشد. نیز فرض کنید $V(t)$ حجم جسم حـاصل از دوران این ناحیه حول محور x باشد. حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{t\to\infty}A(t)$

ب) $\lim\limits_{t\to\infty}V(t)/A(t)$

پ) $\lim\limits_{t\to 0^{+}}V(t)/A(t)$



۳۲.۶ نمودار $y=e^{-x}$ و ناحیهٔ مربوط به مسألهٔ ۶۷.

۶۸. طـول خم $x=e^{t}\sin t$، $y=e^{t}\cos t$، $0\leqslant t\leqslant\pi$ را بیابید.

۶۹. الف) نشان دهیدکه $y=Ce^{ax}$ به‌ازای هرمقدار C جوابی است برای معادلهٔ دیفرانسیل $dy/dx=ay$.

ب) با استفاده از نتیجهٔ (الف)، جوابی برای معادلهٔ دیفرانسیل $dy/dt = -\text{۲}y$ بیابید که در شرط اولیهٔ $y = \text{۳}$ وقتی که $t = \text{۰}$، صدق کند.

۷۰. مقداری برای ثابت r بیابید که به‌ازای آن، $y = e^{rx}$ جوابی برای معادلهٔ دیفرانسیل زیر باشد

$$y'' - \text{۴}y' + \text{۴}y = \text{۰}.$$

درمسائل ۷۱–۷۴، معادلات دیفرانسیل را با شرایط اولیهٔ مفروض حل کنید.

۷۱. $\dfrac{dy}{dx} = e^{-x}$، $y = \text{۰}$ وقتی که $x = \text{۴}$

۷۲. $e^y \dfrac{dy}{dx} = \text{۲}xe^{x^\text{۲}-\text{۱}}$، $y = \text{۰}$ وقتی که $x = \text{۱}$

۷۳. $\dfrac{\text{۱}}{y+\text{۱}} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\text{۱}}{\text{۲}x}$، $x > \text{۰}$، $y = \text{۱}$ وقتی که $x = \text{۲}$

۷۴. $\dfrac{\text{۱}}{y+\text{۱}} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\text{۱}}{x^\text{۲}}$، $x > \text{۰}$، $y = \text{۰}$ وقتی که $x = \text{۱}$

تابعهای هیپربولیک

مسائل ۷۵–۷۸، توابع سینوس هیپربولیک و کسینوس هیپربولیک را معرفی می‌کنند که به‌تفصیل در فصل ۹ مورد بررسی قرارخواهند گرفت. این توابع جدید، از بسیاری جهات به‌توابع مثلثاتی سینوسی و کسینوسی شباهت دارند. تعریف این توابع به‌شرح زیر است:

سینوس هیپربولیک: $$\sinh x = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}(e^x - e^{-x})$$

کسینوس هیپربولیک: $$\cosh x = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}(e^x + e^{-x})$$

شکل ۳۳.۶ نمودارهای آنها را همراه با نمودارهای $e^x/\text{۲}$ و $e^{-x}/\text{۲}$ نشان می‌دهد. این توابع علاوه‌برجذابیتشان در ریاضیات درجوابهای بسیاری از معادلات دیفرانسیل هم ظاهرمی‌شوند. ودر نظریهٔ نسبیت انشتین نیز نقشی اساسی دارند.

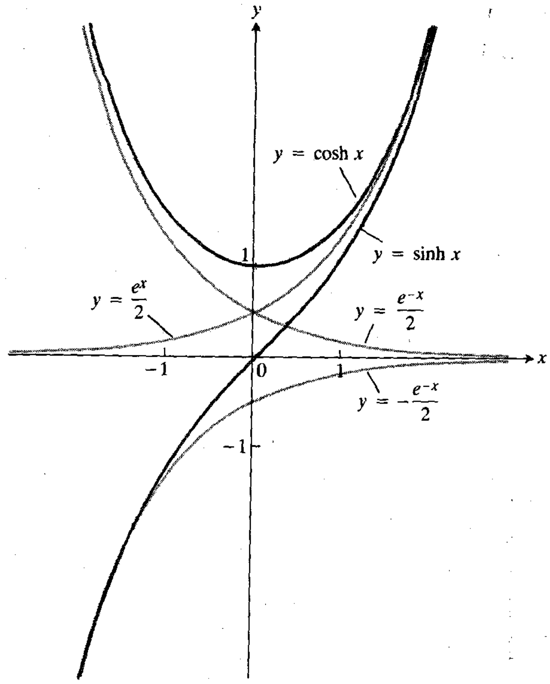
با استفاده از این‌تعریفها، تساویهای زیر را ثابت‌کنید.

۷۵. $\dfrac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$، $\dfrac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$

۷۶. $\cosh^\text{۲} x - \sinh^\text{۲} x = \text{۱}$،

$$\cosh^\text{۲} x + \sinh^\text{۲} x = \cosh(\text{۲}x)$$

۷۷. $\cosh(-x) = \cosh x$، $\sinh(-x) = -\sinh x$



۳۳.۶ نمودارهای سینوس و کسینوس هیپربولیک.

۷۸. نشان‌دهید که $y = \cosh x$ در معادلهٔ دیفرانسیل $y'' = \sqrt{\text{۱} + (y')^\text{۲}}$ صدق می‌کند. (این معادلهٔ دیفرانسیل یکی‌از معادلات «کابلهای معلق» است که در بخش ۳.۹ مورد بحث قرار می‌گیرد.)

TOOLKIT PROGRAMS

Integral Evaluator — Root Finder
Name That Function — Super * Grapher
Parametric Equations

۷.۶ تابعهای a^x و a^u

هرچند تاکنون راهی پیدا نکرده‌ایم که اعداد مثبت را به توان هرعدد دلخواه، برسانیم (مگراعداد گویا) ولی‌عدد e یك استثناست. با تعریف $e^x = \ln^{-1} x$، e^x به‌ازای هرعدد حقیقی x، گنگ یا گویا، تعریف‌می‌شود. دراین بخش، نشان‌می‌دهیم که‌این‌خوش‌اقبالی به‌ما امکان می‌دهد هرعدد مثبت دیگری را هم به‌هرتوان دلخواهی برسانیم. همچنین‌قاعدهٔ توان برای مشتقگیری‌را به‌صورت‌نهایی‌اش (مناسب برای تمام نماهای حقیقی) اثبات می‌کنیم، و توابعی‌نظیر x^x و $(\sin x)^{\tan x}$ راکه‌متضمن‌رساندن تابعی‌به‌توان تابعی‌دیگرند تعریف می‌کنیم.

تابع a^x

اگر a یك عدد مثبت، و x عدد دلخواهی باشد، تابع a^x («a به‌توان x») را با معادلهٔ زیر تعریف می‌کنیم

$$a^x=(e^{\ln a})^x=e^{x\ln a} \tag{۱}$$

این تعریف کارساز است زیرا $\ln x$ در $x=a$ تعریف می‌شود، و e را هم می‌توان به‌هرتوان دلخواه رساند.

تعریف

تابع $y=a^x$

اگر a مثبت و x عدد دلخواهی باشد، آنگاه

$$a^x=e^{x\ln a}. \tag{۲}$$

حال می‌توانیم این محدودیت را که n در رابطهٔ زیر یك عددگویا باشد لغو کنیم

$$\ln a^n=n\ln a. \tag{۳}$$

برای انجام این کار، از دوطرف رابطهٔ (۲) که به‌ازای هر عدد حقیقی x برقرار است لگاریتم می‌گیریم

$$\ln a^x=\ln e^{x\ln a}=x\ln a. \tag{۴}$$

رابطهٔ(۲) اساس الگوریتمی است که بعضی از ماشین‌حسابهای کوچك برای محاسبهٔ y^x به‌کارمی‌برند. درمحاسبهٔ $(-۲)^۳$ مشکلی نداریم، زیرا می‌دانیم که چیزی جز $(۲)^۳-$، یا ۸− نیست. اما تصور کنید که می‌خواستیم نتیجه‌را با استفاده از (۲) به‌دست آوریم

$$(-۲)^۳=e^{۳\ln(-۲)} \tag{۵}$$

ولی آموخته‌ایم که ۲− در دامنهٔ تابع $\ln x$ نیست. ما هم باید کاری شبیه‌کار این ماشین‌حسابها انجام دهیم: ازخود واکنشی نشان دهیم که مبین «خطا» باشد: می گوییم در (۲) عدد a باید مثبت باشد.

قانون نماها

از روابط (۲) و (۴) قانون نماها برای توانهای دلخواه اعداد مثبت به‌دست می‌آید.

قانون نماها

به‌ازای هرعدد مثبت a،

$$a^{xy}=(a^x)^y=(a^y)^x. \tag{۶}$$

پس،

$$e^{۳\ln ۲}=(e^۳)^{\ln ۲}=(e^{\ln ۲})^۳=(۲)^۳=۸. \tag{۷}$$

این قانون، قانون نماهای صحیح

$$a^{mn}=(a^m)^n$$

را که مثلاً می‌گوید

$$x^۶=(x^۲)^۳=(x^۳)^۲$$

تعمیم می‌دهد.

مراحل اثبات رابطهٔ (۶) درمسألهٔ ۴۳ ذکر شده‌اند.

مثال ۱ بنابه‌رابطهٔ (۶) داریم

$$e^{۳\ln x}=(e^{\ln x})^۳=x^۳$$

که با محاسبهٔ

$$e^{۳\ln x}=e^{\ln x^۳}=x^۳$$

که بخشی ازمثال ۳ (الف) بخش ۶.۶ بود، سازگار است. ■

مشتقهای a^x و a^u

برای یافتن فرمولی برای مشتق a^x نسبت به x وقتی a عددی مثبت است، از دوطرف رابطهٔ (۲) مشتق می گیریم

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}a^x&=\frac{d}{dx}e^{x\ln a}\\&=e^{x\ln a}\cdot\frac{d}{dx}x\ln a \qquad \text{(قاعدهٔ زنجیری)}\\&=e^{x\ln a}\cdot\ln a\\&=a^x\ln a.\end{aligned}$$

از اینجا، فرمول زیر به‌دست می‌آید.

مشتق a^x

اگر $a>۰$، آنگاه

$$\frac{d}{dx}a^x=a^x\ln a. \tag{۸}$$

معادلهٔ (۸) نشان می‌دهد که چرا در حساب دیفرانسیل و انتگرال، e مطلوبترین‌پایه‌است. وقتی $a=e$، $\ln a=\ln e=۱$، و معادلهٔ (۸) به‌معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود

$$\frac{d}{dx}e^x=e^x.$$

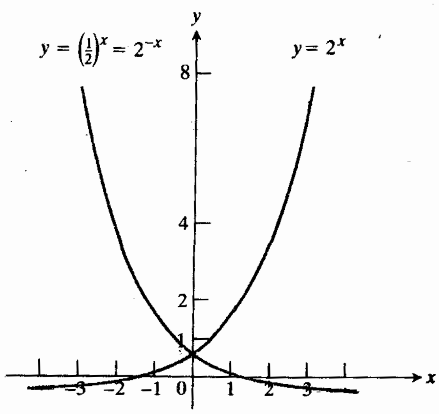
مثال ۲ بنا به‌معادلهٔ (۸) داریم

$$\frac{d}{dx}\,3^x = 3^x \ln 3 \,. \qquad \blacksquare$$

از فرمول

$$\frac{d}{dx}\,a^x = a^x \ln a, \quad a > 0$$

می‌بینیم کـه مشتـق $y=a^x$ وقتـی $a>1$ مثبت است و وقتی $0<a<1$ منفی است. پس $y=a^x$ تـابعی است صعودی از x هرگاه $a>1$ وتابعی‌است نزولی‌از x، هرگاه $0<a<1$. درهـرحالت $y=a^x$ یك بـه‌یك است، و بنا براین معکوسی دارد (که موضوع بحث بخش بعدی است). شکل ۳۴.۶ نمودارهـای $y=2^x$ (صعودی و یك به‌یك) و $y=(1/2)^x$ (نزولی ویك به‌یك) را نشان می‌دهد.



۳۴.۶ توابع $y=2^x$ و $y=(1/2)^x$ هردو یك به‌یك هستند.

ازمعادلهٔ (۸)، و قاعدهٔ زنجیری

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}$$

فرمولی برای مشتق $y=a^u$، که درآن u تـابع مشتقپذیری از x است، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dx}\,a^u = \frac{d}{du}\,a^u \cdot \frac{du}{dx} = a^u \ln a \,\frac{du}{dx} \,.$$

پس، برای مشتق a^u فرمول زیر وجود دارد.

مشتق a^u

اگر $a>0$ و u تابع مشتقپذیری از x باشد، آنگاه

$$\frac{d}{dx}\,a^u = a^u \ln a \,\frac{du}{dx} \,. \qquad (9)$$

مثال ۳ بنا بر (۹) داریم

$$\frac{d}{dx}\,3^{\sin x} = 3^{\sin x} \ln 3 \cdot \frac{d}{dx}\sin x$$

$$= 3^{\sin x} \ln 3 \cos x \,. \qquad \blacksquare$$

درعمل، دلیلی برای حفظ‌کردن فرمول (۹) وجود نـدارد زیرا مشتق a^u را همیشه می‌توان بـا روش مشتقگیری لگاریتمی محاسبه‌کرد. علت‌اصلی به‌دست‌آوردن فرمول در اینجا این است‌که باکمك آن، فرمول انتگرالگیری متناظرش را به‌دست‌آوریم؛ و ما به‌زودی به‌آن خواهیم پرداخت.

مثال ۴ با مشتقگیری لگاریتمی، مشتق

$$y = 3^{\sin x} \qquad (10)$$

را محاسبه‌کنید.

حل: از دوطرف رابطهٔ (۱۰) لگاریتم طبیعی می گیریـم؛ مشتق آن را می‌یابیم و dy/dx را محاسبه می‌کنیم

$$y = 3^{\sin x}$$

$$\ln y = \ln 3^{\sin x} = \sin x \ln 3$$

$$\frac{1}{y}\,\frac{dy}{dx} = \ln 3 \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = y \ln 3 \cos x = 3^{\sin x} \ln 3 \cos x$$

و این با نتیجهٔ مثال ۳ سازگار است. $\blacksquare$

انتگرال a^u

وقتی $a \neq 1$، داریم $\ln a \neq 0$، و لذا فرمول (۹) را می‌توان به‌صورت زیرهم نوشت

$$a^u \frac{du}{dx} = \frac{1}{\ln a}\,\frac{d}{dx}\,a^u \,. \qquad (11)$$

اگر از دوطرف این‌معادله نسبت به x انتگرال بگیریم، داریم

$$\int a^u \frac{du}{dx} dx = \int \frac{1}{\ln a}\left(\frac{d}{dx} a^u\right) dx$$

$$= \frac{1}{\ln a}\int \left(\frac{d}{dx} a^u\right) dx = \frac{1}{\ln a} a^u + C. \quad (12)$$

انتگرال طرف چپ معادلهٔ (۱۲) را معمولاً به‌صورت

$$\int a^u \frac{du}{dx} dx = \int a^u du$$

می‌نویسند، و لذا (۱۲) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\int a^u du = \frac{1}{\ln a} a^u + C, \quad a \neq 1, \quad a > 0. \quad (13)$$

مثال ۵ ازمعادلهٔ (۱۳) داریم

$$\text{(الف)} \quad \int 2^x dx = \frac{1}{\ln 2} 2^x + C$$

$$\text{(ب)} \quad \int 2^{\sin x} \cos x\, dx = \frac{1}{\ln 2} 2^{\sin x} + C$$

برای محاسبهٔ نخستین انتگرال، از معادلهٔ (۱۳) با مفروضات زیر استفاده می‌کنیم

$$a = 2, \quad u = x, \quad du = dx.$$

برای محاسبهٔ دومین انتگرال، از معادلهٔ (۱۳) با مفروضات زیر استفاده می‌کنیم

$$a = 2, \quad u = \sin x, \quad du = \cos x\, dx.$$

لذا داریم

$$\int 2^{\sin x} \cos x\, dx = \int 2^u du = \frac{1}{\ln 2} 2^u + C$$

$$= \frac{1}{\ln 2} 2^{\sin x} + C. \quad \blacksquare$$

قاعدهٔ توان برای مشتقگیری (صورت نهایی)

حال که می‌توانیم تمام اعداد مثبت را به‌توانهای دلخواه برسانیم، می‌توانیم قاعدهٔ توان برای مشتقگیری را هم تعمیم‌دهیم تا برای تمام اعداد حقیقی، اعم ازگویا و گنگ، برقرار باشد.

قاعدهٔ ۱۲

قاعدهٔ توان (صورت نهایی)

اگر n ثابت حقیقی‌دلخواهی، و u تابع‌مشتقپذیری‌از x باشد، آنگاه

$$(14) \quad \text{به‌ازای هرعدد حقیقی } n\text{،} \quad \frac{d}{dx} u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx}.$$

اثبات قاعدهٔ توان فرض‌کنید $y = u^n$. آنگاه

$$\ln y = \ln u^n = n \ln u \quad \text{(رابطهٔ ۳)}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = n \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

و

$$\frac{dy}{dx} = n\frac{y}{u}\frac{du}{dx} = n\frac{u^n}{u}\frac{du}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}. \quad \blacksquare$$

اینکه بتوانیم اعداد مثبت‌را به‌توان هرعدد حقیقی‌دلخواهی برسانیم به‌ما امکان می‌دهد توابعی نظیر

$$x^x \text{،} \quad x^{\sin x} \text{،} \quad \text{و} \quad (1+x)^{1/x}$$

را به‌ازای $x > 0$ تعریف‌کنیم. مشتق‌این گونه توابع بامشتقگیری لگاریتمی به‌دست می‌آید.

مثال ۶ اگر $y = x^x$ ($x > 0$)، dy/dx را بیابید.

حل:

$$\ln y = \ln x^x = x \ln x$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x = 1 + \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = y(1+\ln x) = x^x(1+\ln x). \quad \blacksquare$$

یافتن حد به‌کمك لگاریتمها و نماییها

برای محاسبهٔ حدهایی نظیر آنچه که درمثال‌بعد می‌آید می‌توان از لگاریتم استفاده‌کرد. ایده این است: برای محاسبهٔ حد یك تابع مثبت، ابتدا حد لگاریتم تابع را محاسبه، و سپس این حد را به‌صورت توانی از e درمی‌آوریم.

مثال ۷ نشان دهیدکه

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x} = e. \quad (15)$$

حل: با فرض اینکه $f(x)=(1+x)^{1/x}$، کار خود را با عبارت زیر انجام می‌دهیم

$$\ln f(x)=\ln(1+x)^{1/x}=\frac{1}{x}\ln(1+x)=\frac{\ln(1+x)}{x}.$$

از قاعدهٔ هوپیتال درمی‌یابیم که

$$\lim_{x\to 0^+}\ln f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1.$$

بنابراین

وقتی $x\to 0^+$، $\ln f(x)\to 1$.

حال می‌توانیم از صورت نمایی استفاده کنیم و ببینیم که وقتی $x\to 0^+$،

$$(1+x)^{1/x}=f(x)=e^{\ln f(x)}\to e^1=e$$

(چون تابع نمایی پیوسته است). بنابراین

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x}=e$$

که همان رابطهٔ (۱۵) است. ■

نکته رابطهٔ

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

مستقل از تعریف لگاریتم طبیعی، راهی برای تعریف e به‌دست می‌دهد. ولی اثبات وجود این حد باید با اثبات ما که در آن از لگاریتم استفاده کردیم متفاوت باشد.

ویژگیهای $y=a^x$، $a>0$، $a\neq 1$

اگر a یک عدد حقیقی مثبت باشد، و $a\neq 1$، آنگاه تابع $y=a^x$ دارای ویژگیهای زیر است

۱. تعریف آن چنین است

$$a^x=e^{x\ln a}.$$

دامنه: مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی، $-\infty<x<\infty$.

برد: مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی مثبت، $y>0$.

۲. مشتق آن عبارت است از

$$\frac{d}{dx}a^x=a^x\ln a.$$

۳. پیوسته است (زیرا مشتق‌پذیر است)، صعودی است هرگاه $a>1$، نزولی است هرگاه $0<a<1$، و در هرحالت یک به یک است.

۴. اگر u تابع مشتق‌پذیری از x باشد، آنگاه

$$\frac{d}{dx}a^u=a^u\ln a\frac{du}{dx} \quad \text{و} \quad \int a^u\,du=\frac{1}{\ln a}a^u+C.$$

مسأله‌ها

درمسائل ۱–۱۶، dy/dx را بیابید.

۱. $y=2^x$

۲. $y=2^{3x}$

۳. $y=8^x$

۴. $y=3^{2x}$

۵. $y=9^x$

۶. $y=2^x3^x$

۷. $y=(2^x)^2$

۸. $y=x^{\sin x},\quad x>0$

۹. $y=(\sin x)^{\tan x},\quad \sin x>0$

۱۰. $y=2^{\sec x}$

۱۱. $y=x^{\ln x},\quad x>0$

۱۲. $y=(\cos x)^x,\quad \cos x>0$

۱۳. $y=(1-x)^x,\quad x<1$

۱۴. $y=x2^{(x^2)}$

۱۵. $y=2^x\ln x$

۱۶. $y=(\cos x)^{\sqrt{x}},\quad x>0,\quad \cos x>0$

درمسائل ۱۷–۲۸، انتگرالها را محاسبه کنید.

۱۷. $\int_0^1 5^x\,dx$

۱۸. $\int_{-1}^0 2^x\,dx$

۱۹. $\int_0^1 \frac{1}{2^x}\,dx$

۲۰. $\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{10}\right)^x dx$

۲۱. $\int_0^1 3^{2x}\,dx$

۲۲. $\int_{-1}^1 2^{(x+1)}\,dx$

۲۳. $\int_{-1}^0 4^{-x}\ln 2\,dx$

۲۴. $\int_{-2}^0 5^{-x}\,dx$

۲۵. $\int_1^2 5^{(2x-2)}\,dx$

۲۶. $\int_1^{\sqrt{2}} x2^{-x^2}\,dx$

۲۷. $\int_0^{\pi/2} 2^{\cos x}\sin x\,dx$

۲۸. $\int_0^{\pi/3} 2^{\sec x}\sec x\,\tan x\,dx$

۲۹. مقدار کدام انتگرال بیشتر است: الف یا ب؟

الف) $\int_0^1 2^{(3x)}\,dx$

ب) $\int_0^1 3^{(2x)}\,dx$

۳۰. مشتق توابع زیر را نسبت به x بیابید.

الف) $y=2^{\ln x}$

ب) $y=\ln 2^x$

پ) $y=\ln x^2$

ت) $y=(\ln x)^2$

درمسائل ۳۱ـ۳۶، حدها را بیابید.

۳۱. $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{-x}$

۳۲. $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^x$

۳۳. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{\sin x}-1}{x}$

۳۴. $\lim\limits_{x\to 1^+} x^{1/(x-1)}$

۳۵. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{1/x}$

۳۶. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$

۳۷. در محاسبهٔ حدهای زیر، لگاریتم کمکی نمی‌کند. از راههای دیگری آنها را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x-5}{4(3^x+2)}$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3^x-5}{4(3^x+2)}$

۳۸. **ماشین‌حساب** با کمك ماشین‌حساب خود، و با انتخاب $n=10,\ 10^2,\ 10^3,\ldots$ ببینید تا چه‌اندازه می‌توانید به‌حد

$$e=\lim_{n\to\infty}(1+(1/n))^n\approx 2/718281828459045$$

نزدیك شوید. ممکن است انتظار داشته باشید که تقریبها همواره به e نزدیك شوند، اما در برخی از ماشین‌حسابها، بر اثر خطاهای گردکردن این تقریبها پس‌از مدتی از e دور می‌شوند.

۳۹. **ماشین‌حساب** خمهای $y=x^2$ و $y=2^x$ در $x=2$ و $x=4$ یکدیگر را قطع‌می‌کنند. نقطهٔ تقاطع دیگری‌هم بین ۱ — و ۰ وجود دارد (شکل ۳۵.۶). روش نیوتن را با فرض $f(x)=2^x-x^2$ به‌کار گیرید و تا آنجاکه ماشین‌حسابتان اجازه می‌دهد مختصات آن را با دقت بیابید.

۴۰. مطلوب است مقادیرماکسیمم

الف) $x^{1/x}$، $x>0$

ب) x^{1/x^2}، $x>0$

پ) x^{1/x^n}، $x>0$ و n یك عدد صحیح و مثبت است.

۴۱. نشان دهید که اگر n یك عدد صحیح مثبت باشد

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x^n}=1\,.$$

۴۲. به‌ازای چه‌مقادیرمثبت x، $x^{(x^x)}=(x^x)^x$؟

۸.۶ تابعهای $y=\log_a u$: آهنگهای رشد

در بخش ۴.۶ اشاره کردیم که لگاریتم طبیعی تنها یکی از توابع لگاریتمی است. بقیهٔ این توابع چه هستند؟ درست نظیر لگاریتم طبیعی که معکوس e^x است، بقیهٔ این توابع هم معکوسهای توابع نمایی a^x هستند. همان‌گونه که ذیلاً خواهیم دید محاسبهٔ این معکوسهای جدید فوق‌العاده آسان است؛ و این معکوسها در علوم و مهندسی کاربردهای مهمی دارند که در پایان بخش به‌چند مورد از آنها اشاره خواهیم کرد. علاوه بر اینها، به‌سرعت رشد لگاریتمها و نماییها، وقتی x بزرگ می‌شود، هم توجهی خواهیم کرد.

دراین بخش، اطلاعات ما از لگاریتمها و نماییها کامل می‌شود. ما با رابطهٔ زیر بحث را آغاز کردیم

$$\ln x=\int_{۱}^{x}\frac{۱}{t}\,dt,\quad x>۰\,.$$

این مطلب به‌ما امکان داد که با رابطهٔ

$$e^x=(\ln x \text{ معکوس})$$

e^x را تعریف کنیم. سپس مطابق قاعدهٔ زیر a^x را به‌ازای هرعدد مثبت a تعریف کردیم

$$a^x=e^{(\ln a)x}\,.$$

حال، درآخرین گام، لگاریتم x درپایهٔ a را به‌صورت زیرتعریف می‌کنیم

$$\log_a x=(a^x \text{ معکوس})\,.$$

لگاریتم درپایهٔ a

دربخش قبل دیدیم که اگر a عدد مثبتی بجز ۱ باشد، تابع $y=a^x$ مشتق‌پذیر و یك به‌یك است. علاوه‌براین، مشتق آن، $a^x\ln a$، هرگز صفر نمی‌شود. پس این تابع یك معکوس مشتق‌پذیر دارد، وما آن را **لگاریتم x درپایهٔ a** می‌نامیم و با

$$y=\log_a x \tag{۱}$$

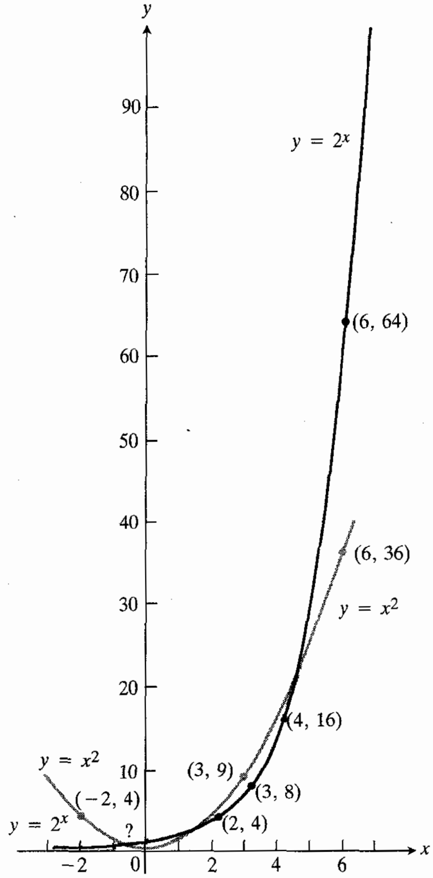
نمایش می‌دهیم. چون $y=a^x$ و $y=\log_a x$ معکوس یکدیگرند، ترکیب آنها به‌هرترتیبی، تابع همانی است. پس روابط زیر به‌دست می‌آیند

(۲ الف) $\log_a(a^x)=x$ به‌ازای تمام xها،

و

(۲ ب) $a^{(\log_a x)}=x$ به‌ازای هر x مثبت.

رابطهٔ (۲ ب) حاکی است که لگاریتم x درپایهٔ a نمایی است که باید a به‌توان آن برسد تا x به‌دست آید. مثلاً



۳۵.۶ خمهای $y=x^۲$ و $y=۲^x$ کجا یکدیگر را قطع می‌کنند؟ در $x=۲$، $x=۴$، و $x=?$. مسألهٔ ۳۹ را ببینید.

۴۳. مراحل محاسبهٔ رابطهٔ (۶) عبارت‌اند از

الف) $a^{xy}=e^{xy\ln a}$

ب) $=e^{y\cdot x\ln a}$

پ) $=e^{y\cdot\ln(a^x)}$

ت) $=(a^x)^y.$

نقش روابط (۲) و (۴) را دراین مراحل توضیح دهید.

۴۴. نشان‌دهید که اگر a و b اعدادی مثبت باشند و u عدد حقیقی دلخواهی باشد، داریم $(ab)^u=a^ub^u$.

TOOLKIT PROGRAMS	
Function Evaluator	Super * Grapher
Root Finder	

$\log_a(۱)=۰$ چون $a^۰=۱$

$\log_a(a)=۱$ چون $a^۱=a$

$\log_۵ ۲۵=۲$ چون $۵^۲=۲۵$

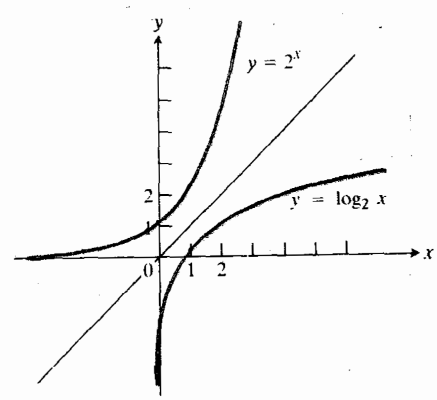
$\log_۲\left(\frac{۱}{۴}\right)=-۲$ چون $۲^{-۲}=\frac{۱}{۴}$.

درهرحالت، لگاریتم x نمایی است‌که پایه باید به‌توان آن برسد تا x به‌دست آید. درتساوی

$$۲^{-۲}=\frac{۱}{۴}$$

۲ پایه است و ۲−، لگاریتم ۱/۴ درپایهٔ ۲، نمایی است‌که ۲ باید به‌توان آن برسد تا ۱/۴ به‌دست آید.

شکل ۳۶.۶ نمودارهای‌توابع $y=۲^x$ و $y=\log_۲ x$ را نشان می‌دهد.



۳۶.۶ نمودار $y=۲^x$ و معکوسش $y=\log_۲ x$.

محاسبهٔ $\log_a x$

عدد $y=\log_a x$ را همیشه می‌توان به‌کمك فرمول زیر از لگاریتمهای طبیعی a و x به‌دست آورد

$$\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}. \qquad (۳)$$

این فرمول را می‌توان با روش زیر استنتاج کرد. اگر

$$y=\log_a x$$

آنگاه

$$a^y=x.$$

پس

$$\ln a^y=\ln x,\quad y\ln a=\ln x$$

و

$$y=\frac{\ln x}{\ln a}$$

که همان رابطهٔ (۳) است.

مثال ۱ از رابطهٔ (۳) داریم

$$\log_۲(۱۰)=\frac{\ln ۱۰}{\ln ۲}\approx\frac{۲٫۳۰۲۵۹}{۰٫۶۹۳۱۵}\approx ۳٫۳۲۱۹۳. \quad \blacksquare$$

مثال ۲ $y=\log_۴ ۸$ را محاسبه کنید.

حل: از رابطهٔ (۳) داریم

$$y=\log_۴ ۸=\frac{\ln ۸}{\ln ۴}=\frac{\ln ۲^۳}{\ln ۲^۲}=\frac{۳\ln ۲}{۲\ln ۲}=\frac{۳}{۲}. \quad \blacksquare$$

قواعد محاسبه

اگر رابطهٔ (۳) را با سه قاعدهٔ

$$\ln uv=\ln u+\ln v \qquad (۴\ \text{الف})$$

$$\ln\frac{u}{v}=\ln u-\ln v \qquad (۴\ \text{ب})$$

$$\ln u^v=v\ln u \qquad (۴\ \text{پ})$$

که در بخش ۵.۶ برای اعداد حقیقی‌مثبت (برحسب x و y به‌جای u و v) به‌دست آمد، تلفیق کنیم، داریم

$$\log_a uv=\log_a u+\log_a v \qquad (۵\ \text{الف})$$

$$\log_a\frac{u}{v}=\log_a u-\log_a v \qquad (۵\ \text{ب})$$

$$\log_a u^v=v\log_a u. \qquad (۵\ \text{پ})$$

مثلاً، تساوی (۵ پ) با روش زیر به‌دست می‌آید

$$\log_a u^v=\frac{\ln u^v}{\ln a}=\frac{v\ln u}{\ln a}=v\log_a u$$

که درآن ابتدا از رابطهٔ (۳)، سپس از رابطهٔ (۴) ازبخش ۷.۶، و بعد مجدداً از رابطهٔ (۳) استفاده شده‌است.

مشتق $\log_a u$

اگر u تابع مثبت مشتقپذیری از x باشد، می‌توانیم ازدوطرف

$$\log_a u=\frac{\ln u}{\ln a}$$

مشتق بگیریم و

$$\frac{d}{dx}\log_a u=\frac{d}{dx}\frac{\ln u}{\ln a}=\frac{۱}{\ln a}\frac{d}{dx}\ln u$$

$$=\frac{۱}{\ln a}\frac{۱}{u}\frac{du}{dx}=\frac{۱}{u\ln a}\frac{du}{dx}$$

را به‌دست آوریم.

به‌طور خلاصه

$$\boxed{\frac{d}{dx}\log_a u=\frac{۱}{u\ln a}\frac{du}{dx}.} \qquad (۶)$$

مثال ۳ مشتق $y=\log_{۱۰}(۳x+۱)$ را محاسبه کنید.

حل: از رابطهٔ (۶) به‌ازای $a=۱۰$ و $u=۳x+۱$ داریم

$$\frac{d}{dx}\log_{۱۰}(۳x+۱)=\frac{۱}{(۳x+۱)\ln ۱۰}\frac{d}{dx}(۳x+۱)$$

$$=\frac{۳}{(۳x+۱)\ln ۱۰}.$$ ■

انتگرالهایی را که شامل $\log_a x$ اند همیشه می‌توان به‌صورت انتگرالهایی که شامل $\ln x$ هستند محاسبه کرد.

مثال ۴ مطلوب است

$$\int\frac{\log_۲ x}{x}dx.$$

حل: $\log_۲ x$ را برحسب $\ln x$ بیان می‌کنیم

$$\log_۲ x=\frac{\ln x}{\ln ۲}.$$

پس،

$$\int\frac{\log_۲ x}{x}dx=\frac{۱}{\ln ۲}\int\frac{\ln x}{x}dx$$

$$=\frac{۱}{\ln ۲}\int u\,du\quad\left(u=\ln x,\quad du=\frac{۱}{x}dx\right)$$

$$=\frac{۱}{\ln ۲}\frac{u^۲}{۲}+C$$

$$=\frac{(\ln x)^۲}{۲\ln ۲}+C.$$ ■

آهنگهای نسبی رشد

ممکن است توجه کرده باشید که توابع نمایی نظیر

$$y=e^x \quad و \quad y=۲^x$$

وقتی x بزرگ می‌شود، خیلی سریعتر از چندجمله‌ایها و توابع گویا که نمودارهایشان را در فصل ۳ رسم کردیم رشد می‌کنند. این توابع نمایی مسلماً خیلی سریعتر از تابع $y=x$ رشد می‌کنند (شکلهای ۳۰.۶ و ۳۴.۶ را ببینید)، و در شکل ۳۵.۶ دیده می‌شود که وقتی x زیاد می‌شود، $y=۲^x$ بیش‌از $y=x^۲$ فزونی می‌گیرد. درواقع، وقتی $x\to\infty$، توابع $y=۲^x$ و $y=e^x$ تندتر از هرتوان مثبتی از x، حتی $x^{۱۰۰۰۰۰۰}$ (مسألهٔ ۴۴) رشد می‌کنند.

برای اینکه به سرعت رشد $y=e^x$، وقتی x زیاد می‌شود، پی ببرید، تجسم کنید که نمودار این تابع را بریك تخته سیاه بزرگ رسم می‌کنید، و واحد مقیاس محورها هم سانتیمتر است. در $x=۱\text{ cm}$، ارتفاع نمودار نسبت به‌محور x، $e^۱\approx ۳\text{ cm}$ است. در $x=۶\text{ cm}$، ارتفاع نمودار، $e^۶\approx ۴۰۳\text{ cm}\approx ۴\text{ m}$ است (که اگر از سقف رد نشده باشد، نزدیکیهای آن است). در $x=۱۰\text{ cm}$، ارتفاع نمودار برابر است با $e^{۱۰}\approx ۲۲۰۲۶\text{ cm}\approx ۲۲۰\text{ m}$، یعنی بلندتر از بیشتر ساختمانهای موجود است. در $x=۲۴\text{ cm}$، نمودار از نیمه‌راه ماه هم می‌گذرد، و به ازای $x=۴۳\text{ cm}$، نمودار به‌اندازه‌ای ارتفاع دارد که از نزدیکترین ستارهٔ همسایه، یعنی از پروکسیماسنچوری، هم می‌گذرد

$$e^{۴۳}\approx ۴٫۷\times ۱۰^{۱۸}\text{cm}$$

$$=۴٫۷\times ۱۰^{۱۳}\text{km}$$

$$\approx ۱٫۵۷\times ۱۰^۸ \quad \text{ثانیهٔ نوری} \qquad (۷)$$

(نور درخلاء با سرعت ۳۰۰۰۰۰ km/sec حرکت می‌کند)

$$\approx ۵٫۰ \quad \text{سال نوری}$$

فاصله تا پروکسیماسنچوری درحدود ۴٫۳ سال نوری است. ولی $x=۴۳\text{ cm}$ از مبدأ، بدین‌معناست که کمتر از نیم‌متر از محور y فاصله گرفته‌ایم.

درمقابل، توابع لگاریتمی نظیر

$$y=\ln x \quad و \quad y=\log_۲ x$$

وقتی $x\to\infty$، از هرتوان مثبتی از x رشدکمتری دارند (مسألهٔ ۴۶ را ببینید). اگر محورها را با سانتیمتر مدرج کنیم، باید روی محور x به‌اندازهٔ ۴ سال نوری جلوبرویم تا نقطه‌ای بیابیم که به‌ازای آن ارتفاع نمودار $y=\ln x$ تنها $y=۴۳\text{ cm}$ بشود.

برای اینکه این مقایسه‌ها بین توابع نمایی، چندجمله‌ای، و لگاریتمی دقیق باشند باید منظور از «تابعی چون $y=f(x)$، وقتی $x\to\infty$، تندتر از تابع دیگری چون $y=g(x)$ رشد می‌کند» را تعریف کرد.

تعریف
آهنگ رشد

وقتی $x\to\infty$، $f(x)$ تندتر از $g(x)$ رشد می‌کند، هرگاه

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty \qquad (۸)$$

و وقتی $x\to\infty$، f و g با یک آهنگ رشد می‌کنند، هرگاه

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L\neq 0. \qquad (۹)$$

(L متناهی و ناصفر)

طبق این تعاریف، $y=2x$ تندتر از $y=x$ رشد نمی‌کند. این دوتابع با یک آهنگ رشد می‌کنند، زیرا

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x}=\lim_{x\to\infty}2=2$$

که این‌حد، متناهی و ناصفر است. دلیل تناقض ظاهری این مطلب با آنچه عقل سلیم حکم می‌کند این است که ما می‌خواهیم «f تندتر از g رشد می‌کند» این‌معنا را برساند که برای مقادیر بزرگ x، g درمقایسه با f ناچیز باشد.

مثال ۵ $y=e^x$ تندتر از $y=x^2$ رشد می‌کند، زیرا

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\infty$$

که با دوبار استفاده از قاعدهٔ هوپیتال به‌دست می‌آید

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=\infty.$$ ■

مثال ۶ وقتی $x\to\infty$، $y=3^x$ تندتر از $y=2^x$ رشد می‌کند، زیرا

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x}{2^x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x=\infty.$$ ■

مثال ۷ وقتی $x\to\infty$، $y=x^2$ تندتر از $y=\ln x$ رشد می‌کند، زیرا

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\ln x}\underset{\Uparrow\ \text{قاعدهٔ هوپیتال}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1/x}=\lim_{x\to\infty}2x^2=\infty.$$ ■

مثال ۸ وقتی $x\to\infty$، آهنگهای رشد

$$y=\log_2 x$$

و

$$y=\ln x$$

را باهم مقایسه کنید.

حل: نسبت این دوتابع را به‌هرترتیب (ترتیب مهم نیست) به‌دست می‌آوریم و حد این نسبت را وقتی $x\to\infty$ محاسبه می‌کنیم

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log_2 x}{\ln x}\underset{\Uparrow\ \text{رابطهٔ (۳)}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x/\ln 2}{\ln x}=\frac{1}{\ln 2}.$$

این‌حد، متناهی و ناصفر است. لذا دیده‌می‌شود که لگاریتمها، هرچند پایه‌های متفاوتی داشته‌باشند، با یک آهنگ رشد می‌کنند. ■

همان‌گونه که از مثال ۸ برمی‌آید، هردوتابع لگاریتمی $y=\log_a x$ و $y=\log_b x$، وقتی $x\to\infty$، با یک آهنگ رشد می‌کنند. برای‌مشاهدهٔ دلیل این‌امرحد زیر را محاسبه می‌کنیم

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log_a x}{\log_b x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x/\ln a}{\ln x/\ln b}=\frac{\ln b}{\ln a}.$$

این حد همیشه متناهی و مخالف با صفر است.

علی‌رغم رفتار توابع لگاریتمی، دوتابع مختلف نمایی

$$y=b^x \quad \text{و} \quad y=a^x$$

وقتی $x\to\infty$، با آهنگهای متفاوتی رشد می‌کنند. این مطلب از محاسبهٔ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{b^x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^x=\begin{cases}\infty & a>b\\ 0 & a<b\end{cases}$$

دیده می‌شود. اگر $a>b$، آنگاه a^x تندتر از b^x رشد می‌کند.

اگر وقتی $x\to\infty$، آهنگ رشد f و g یکسان و آهنگ رشد g و h هم یکسان باشد، آنگاه f و h با یک آهنگ رشد می‌کنند. دلیلش این است که از

$$\lim\frac{g}{h}=L_2 \quad \text{و} \quad \lim\frac{f}{g}=L_1$$

نتیجه می‌گیریم

$$\lim \frac{f}{h}=\lim \frac{f}{g}\cdot\frac{g}{h}=L_{۱}L_{۲}\,.$$

مثال ۹ نشان دهید که وقتی $x\to\infty$، $\sqrt{x^{۲}+۵}$ و $(۲\sqrt{x}-۱)^{۲}$ با یك آهنگ رشد می‌کنند.

حل: برای اینکه نشان‌دهیم آهنگ رشد این دوتابع یکسان است، نشان‌می‌دهیم آهنگ رشد هردو با آهنگ رشد x یکی است

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^{۲}+۵}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{۱+\frac{۵}{x^{۲}}}=۱$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(۲\sqrt{x}-۱)^{۲}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{۲\sqrt{x}-۱}{\sqrt{x}}\right)^{۲}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(۲-\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)^{۲}=۴\,.$$

■

□ لگاریتم درپایهٔ ۱۰

لگاریتمهای در پایهٔ ۱۰، که غالباً **لگاریتمهای معمولی** نامیده می‌شوند، در بسیاری از فرمولهای علمی ظاهرمی‌شوند. مثلاً، شدت زمین‌لرزه برحسب ریشترگزارش می‌شود. فرمول آن به شرح زیر است

$$(R\ \text{اندازهٔ})=\log_{۱۰}\left(\frac{a}{T}\right)+B \qquad (۱۰)$$

که درآن a دامنهٔ حرکت زمین برحسب میکرون در ایستگاه گیرنده، T دورهٔ تناوب موج زلزله برحسب ثانیه، و B ثابتی تجربی است که میزان تضعیف موج زلزله را با زیادشدن فاصله از مرکز زمین‌لرزه نشان می‌دهد. درمورد زمین‌لرزه‌ای که ۱۰۰۰۰ km از ایستگاه گیرنده فاصله داشته باشد، داریم $B=۶ر۸$. اگر ارتفاع ثبت‌شدهٔ حرکت‌زمین $a=۱۰$ میکرون، و دورهٔ تناوب $T=۱$ ثانیه‌باشد، آنگاه اندازهٔ زمین‌لرزه برحسب ریشترعبارت است از

$$R=\log_{۱۰}\left(\frac{۱۰}{۱}\right)+۶ر۸=۷ر۸\,. \qquad (۱۱)$$

زمین‌لرزه‌ای با این اندازه، در نزدیکیهای مرکزش خسارات عمده‌ای وارد می‌کند. زمین‌لرزهٔ ۵ ریشتر به‌بالا خسارت وارد می‌کند و اگراندازه‌اش ۸ ریشتر باشد تقریباً ویرانی کامل به‌بار می‌آورد. زمین‌لرزهٔ ۱۹۶۴ انکوریج آلاسکا ۸ر۴ ریشتر بود. زمین‌لرزهٔ ۱۹۷۱ سانفرانسیسکو، کالیفرنیا، (که میلیاردها دلار خسارت به‌بار آورد) ۶ر۸ ریشتر بود.

مقیاس pH برای اندازه‌گیری قدرت اسیدی یك‌محلول، مقیاسی لگاریتمی است. مقدار pH (یعنی پتانسیل هیدروژن) محلول، لگاریتم طبیعی عکس غلظت یون هیدرونیوم، $[H_{۳}O^{+}]$ است

$$\mathrm{pH}=\log_{۱۰}\frac{۱}{[H_{۳}O^{+}]}=-\log_{۱۰}[H_{۳}O^{+}]\,. \qquad (۱۲)$$

غلظت یون هیدرونیوم برحسب مول درلیتر اندازه‌گیری می‌شود. pH سرکه ۳، آب‌مقطر ۷، آب‌دریا ۸ر۱۵، وآمونیاك خانگی ۱۲ است. مقدار pH از تقریباً ۱ر۰ برای اسید هیدروکلریك معمولی تا ۱۴ برای محلول هیدروکسیدسدیم معمولی تغییرمی‌کند. بیشتر غذاها اسیدی هستند. مقادیر pH برخی از خوراکیها عبارت‌اند از

غذا	مقدار pH
موز	۴ر۵–۴ر۷
گریپ‌فوروت	۳ر۰–۳ر۳
پرتقال	۳ر۰–۴ر۰
لیموترش	۱ر۸–۲ر۰
شیر	۶ر۳–۶ر۶
نوشابه‌ها	۲ر۰–۴ر۰
اسفناج	۵ر۱–۵ر۷

درنجوم، رابطهٔ بین اندازهٔ مطلق‌ستاره، M، اندازهٔ ظاهری ستاره، m، و فاصلهٔ d برحسب پارسك (یك پارسك ۳ر۲۶۲ سال نوری است) از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$M=m+۵-۵\log_{۱۰}d\,.$$

از این رابطه می‌توان برای محاسبهٔ فاصلهٔ ستاره، وقتی m و M معلوم باشند، استفاده‌کرد.

مثال دیگر کاربرد لگاریتم معمولی، مقیاس db (دی بی) برای اندازه‌گیری شدت صدا برحسب دسیبل است. اگر I، شدت صدا برحسب وات برمترمربع باشد، آنگاه شدت آن برحسب دسیبل برابراست با

$$\text{شدت‌صدا برحسب‌دسیبل}=۱۰\log(I\times ۱۰^{۱۲})\,\mathrm{db}\,. \qquad (۱۳)$$

شدت برخی از صداها برحسب دسیبل عبارت‌اند از

آستانهٔ شنوایی	۰ db
خش‌خش برگها	۱۰ db
نجوا	۲۰ db
اتومبیل	۵۰ db
صحبت معمولی	۶۵ db
متهٔ بادی درفاصلهٔ ۱۰ فوتی	۹۰ db
آستانهٔ درد	۱۲۰ db

اگر دیدید که دوبرابر کردن قدرت تقویت‌کنندهٔ رادیوضبط شما شدت صدا را فقط به‌اندازهٔ چند دسیبل اضافه‌می‌کند، تعجب نکنید، رابطهٔ (۱۳) موضوع را روشن می‌کند. طبق محاسبهٔ زیر، دوبرابر کردن I، شدت را تنها درحدود ۳ db افزایش می‌دهد

$$۱۰ \log (۲I \times ۱۰^{۱۲}) = ۱۰ \log (I \times ۱۰^{۱۲}) + ۱۰ \log ۲$$

$$\approx ۱۰ \log (I \times ۱۰^{۱۲}) + ۳\cdot$$

نکته‌ای در مورد نمادگذاری در تعداد زیادی از کتابهای درسی پیشرفته و مقالات تحقیقاتی ریاضی از $\log x$، بدون مشخص کردن پایه استفاده می‌کنند تا لگاریتم طبیعی $\ln x$ را نمایش دهند. در بیشتر کتابهای درسی در علوم طبیعی، $\log x$ را برای نمایش $\log_{۱۰} x$ به‌کارمی‌برند. بیشتر ماشین‌حسابها، از $\ln x$ برای لگاریتم طبیعی، و از $\log x$ برای لگاریتم در پایهٔ ۱۰ استفاده می‌کنند. اما، درکامپیوتر ممکن است برای لگاریتم طبیعی، LOG(X) به‌کار رود. دراین‌صورت برای یافتن $\log_{۱۰} x$ باید (LOG(X))/(LOG(۱۰)) را محاسبه کرد.

خلاصهٔ تعریفهای این فصل

$$\ln x = \int_{۱}^{x} \frac{۱}{t}\, dt, \quad x > ۰$$

$$\Downarrow$$

$$e^x = (\text{معکوس } \ln x)$$

$$\Downarrow$$

$$a^x = e^{(\ln a)x} \quad \text{برای هرعدد مثبت } a$$

$$\Downarrow$$

$$\log_a x = (\text{معکوس } a^x)$$

مسأله‌ها

درمسائل ۱–۸، هرلگاریتم را به‌صورت یك عددگویا بنویسید.

۱. $\log_{۴} ۱۶$

۲. $\log_{۸} ۳۲$

۳. $\log_{۵} ۰/۰۴$

۴. $\log_{۰/۵} ۴$

۵. $\log_{۲} ۴$

۶. $\log_{۴} ۲$

۷. $\log_{۸} ۱۶$

۸. $\log_{۳۲} ۴$

درمسائل ۹ و ۱۰، x را بیابید.

۹. $۳^{\log_{۳} ۷} + ۲^{\log_{۲} ۵} = ۵^{\log_{۵} x}$

۱۰. $۸^{\log_{۸} ۳} - e^{\ln ۵} = x^۲ - ۷^{\log_{۷} ۳x}$

درمسائل ۱۱–۱۴، حدها را بیابید

۱۱. $\lim_{x\to\infty} \frac{\log_{۲} x}{\log_{۳} x}$

۱۲. $\lim_{x\to\infty} \frac{\log_{۲} x}{\log_{۸} x}$

۱۳. $\lim_{x\to\infty} \frac{\log_{۹} x}{\log_{۳} x}$

۱۴. $\lim_{x\to\infty} \frac{\log_{\sqrt{۱۰}} x}{\log_{\sqrt{۲}} x}$

درمسائل ۱۵–۲۸، dy/dx را بیابید

۱۵. $y = \log_{۴} x$

۱۶. $y = \log_{۴} x^۲$

۱۷. $y = \log_{۱۰} e^x$

۱۸. $y = \log_{۵} \sqrt{x}$

۱۹. $y = \ln ۲ \cdot \log_{۲} x$

۲۰. $y = \log_{۲} (۱/x)$

۲۱. $y = \log_{۱۰} \sqrt{x+۱}$

۲۲. $y=\log_2(3x+1)$

۲۳. $y=1/\log_2 x$

۲۴. $y=\ln 10^x$

۲۵. $y=\log_5(x+1)^2$

۲۶. $y=\log_2(\ln x)$

۲۷. $y=\log_7(\sin x)$

۲۸. $y=e^{\log_{10} x}$

۲۹. کدام تابع زیر در $x=10$ تندتر تغییر می‌کند

$y=\ln x$ یا $y=\log_2 x$؟

۳۰. نشان دهید که اگر a، b، و u اعدادی مثبت باشند و نه a یك باشد و نه b، $\log_b a \cdot \log_b u=\log_a u$.

درمسائل ۳۱–۳۸، انتگرالها را محاسبه کنید.

۳۱. $\int_1^{10} \frac{\log_{10} x}{x}\,dx$

۳۲. $\int_1^4 \frac{\log_2 x}{x}\,dx$

۳۳. $\int_1^8 \frac{\log_4 (x^2)}{x}\,dx$

۳۴. $\int_0^1 \frac{\log_2 (3x+1)}{3x+1}\,dx$

۳۵. $\int_1^{125} \frac{(\log_5 x)^2}{x}\,dx$

۳۶. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\log_2 x}$

۳۷. $\int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{dx}{x\log_{10} x}$

۳۸. $\int_2^8 \frac{dx}{x(\log_8 x)^2}$

۳۹. کدام توابع زیر وقتی $x\to\infty$ کندتر از $y=e^x$ رشد می‌کنند؟

الف) $y=x+3$

ب) $y=x^3-3x+1$

پ) $y=\sqrt{x}$

ت) $y=4^x$

ث) $y=(5/2)^x$

ج) $y=\ln x$

چ) $y=\log_{10} x$

ح) $y=e^{-x}$

خ) $y=e^{x+1}$

د) $y=(1/2)e^x$

۴۰. کدام توابع زیر وقتی $x\to\infty$ تندتر از $y=x^2-1$ رشد می‌کنند؟ آهنگ رشد کدامها نظیر $y=x^2-1$ است؟ و کدامها کندتر رشد می‌کنند؟

الف) $y=x^2+4x$

ب) $y=x^3+3$

پ) $y=x^5$

ت) $y=15x+3$

ث) $y=\sqrt{x^4+5x}$

ج) $y=(x+1)^2$

چ) $y=\ln x$

ح) $y=\ln(x^2)$

خ) $y=\ln(10^x)$

د) $y=2^x$

۴۱. از توابع زیر وقتی $x\to\infty$، آهنگ رشد کدامها نظیر آهنگ رشد $y=\ln x$ است؟

الف) $y=\log_3 x$

ب) $y=\log_2 x^2$

پ) $y=\log_{10}\sqrt{x}$

ت) $y=1/x$

ث) $y=1/\sqrt{x}$

ج) $y=e^{-x}$

چ) $y=x$

ح) $y=5\ln x$

خ) $y=2$

د) $y=\sin x$

۴۲. وقتی $x \to \infty$، توابع‌زیر را برحسب آهنگ رشدشان از تندترین رشد تا کندترین رشد مرتب کنید.

الف) e^x

ب) x^x

پ) $(\ln x)^x$

ت) $e^{x/2}$

۴۳. آهنگهای رشد $y=\ln x$ و $y=\ln(\ln x)$ را وقتی $x \to \infty$، باهم مقایسه کنید.

۴۴. نشان دهید که وقتی $x \to \infty$، $y=e^x$ تندتر از $y=x^n$، n هرعدد صحیح مثبت، (حتی $x^{1000000}$) رشد می‌کند. (راهنمایی: مشتق nام x^n چیست؟)

۴۵. نتایج راجع به‌حدها در بخش ۱۰۰۱، مسألهٔ ۵۸، دربارهٔ آهنگ رشد نسبی چندجمله‌ایها وقتی $x \to \infty$ به‌چه صورت درمی‌آیند؟

۴۶. نشان دهید که وقتی $x \to \infty$، $y=\ln x$ از $y=x^{1/n}$، به‌ازای هرعدد صحیح و مثبت n، کندتر رشد می‌کند.

۴۷. در هر محلولی، حاصلضرب غلظت یونهای هیدرونیوم، $[H_3O^+]$، و غلظت یونهای هیدروکسیل، $[OH^-]$، تقریباً 10^{-14} است.

الف) به‌ازای چه مقدار $[H_3O^+]$ مجموع غلظتها، $S=[H_3O^+]+[OH^-]$ مینیمم می‌شود؟ (راهنمایی: نمادها را تغییر دهید. فرض کنید $x=[H_3O^+]$.)

ب) pH محلولی را که در آن S این مقدار مینیمم را دارد بیابید؟

پ) چه نسبتی از $[H_3O^+]$ به $[OH^-]$، S را مینیمم می‌کند؟

۴۸. فرمول استرلینگ برای براورد کردن $n!$. فرمول استرلینگ حاکی است که اگر n بزرگ باشد، آنگاه

$$n! \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n+(1/2)} e^{-n}.$$

مقدار ثابت m چه باشد تا بتوانیم در این فرمول به جای e^{-n}، 10^{-mn} بگذاریم؟

۴۹. الف) رابطهٔ (۵ الف) را اثبات کنید.

ب) رابطهٔ (۵ ب) را اثبات کنید.

TOOLKIT PROGRAMS

Function Evaluator   Super * Grapher

۹.۶ کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی

دراین بخش برخی از کاربردهای توابع لگاریتمی و نمایی را شرح می‌دهیم که دلیل اهمیت این توابع درعلوم و مهندسی هستند.

قانون تغییرنمایی

در بسیاری‌از پدیده‌های‌مربوط به‌فیزیك،زیست‌شناسی،محیط‌زیست، و اقتصاد، کمیتی چون y درهرزمان مفروض t با آهنگی رشد می‌کند یا زوال می‌یابد که متناسب است با مقدار کمیت موجود. این مطلب به‌معادلهٔ

$$\frac{dy}{dt}=ky \qquad (1)$$

منجر می‌شود که در آن k ثابتی است که هرگاه y افزایش یابد مثبت، و هرگاه‌کاهش‌یابد منفی است.

برای حل معادلهٔ (۱) دوطرف را بر y تقسیم می‌کنیم

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}=k$$

سپس از دوطرف نسبت به t انتگرال می‌گیریم

$$\ln y = kt + C. \qquad (2)$$

چون y مثبت است از علامات معمول قدرمطلق صرفنظرمی‌کنیم. از معادلهٔ (۲) نتیجه می‌شود

$$y=e^{kt+C}=e^{kt}\cdot e^{C}=Ae^{kt}$$

که در آن $A=e^C$. اگر y_0 مقدار y در $t=0$ را نشان دهد، آنگاه $A=y_0$ و $y=y_0e^{kt}$. این معادله را **قانون تغییرنمایی** می‌نامند.

قانون تغییرنمایی

$$y=y_0 e^{kt} \qquad (3)$$

مثال ۱ رشد سلول. دریك محیط ایده‌آل، جرم m یك سلول، دست‌کم دراوایل، به‌طورنمایی‌رشد می‌کند. مواد شیمیایی به‌سرعت ازغشاء سلول‌می‌گذرند و رشد سلول‌تنها به‌سوخت‌وساز درون آن مربوط است، که این‌نیز به‌نوبهٔ خود به‌جرم ملکولهای‌شرکت‌کننده وابسته‌است. اگر این‌فرض‌موجه‌را بپذیریم که درهرلحظه ازززمان، آهنگ رشد سلول، dm/dt، متناسب‌است باجرمی که تاآن زمان انباشته شده‌است، آنگاه

$$\frac{dm}{dt}=km$$

و

$$m=m_{\circ}e^{kt}.$$

البته، محدودیتهایی هم درکار است، و درهرحالت خاص، باید انتظار داشته باشیم که این معادله تنها برای مقادیری از m که از اندازهٔ معینی کمترند، اطلاعات مطمئنی به‌دست دهد. ■

مثال ۲ آهنگ تولد، و رشد جمعیت. به بیان دقیق، تعداد افراد یك جامعه (از انسانها، گیاهان، روباهها، یا هرچیزدیگر) یك تابع ناپیوسته از زمان است، زیرا مقادیر گسسته را اختیار می کند. با وجود این، به‌محض اینکه تعداد افراد به‌اندازهٔ کافی بزرگ شود، با اطمینان می‌توان آن را با یك تابع پیوسته، و حتی مشتقپذیر توصیف کرد. اگر فرض کنیم که نسبت افراد مولد ثابت می‌ماند، و فرض کنیم که میزان باروری ثابت است، آنگاه درهرزمان t، آهنگ تولد با تعداد افراد زنده، $y(t)$، متناسب است. علاوه‌براین اگر ازخروج، ورود، و مرگ افراد صرفنظر کنیم، آهنگ رشد dy/dt برابر با آهنگ تولد ky خواهد بود. به‌عبارت دیگر داریم

$$\frac{dy}{dt}=ky.$$

بازهم می‌بینیم که $y=y_{\circ}e^{kt}$. ■

سودی که به طور پیوسته محاسبه می‌شود

اگر مبلغ $A_{\circ}$ را با نرخ سالانهٔ r پس‌اندازکنید و سود k بار در سال به‌حساب شما واریزشود، مقدار پول شما پس از t سال برابر خواهد بود با

$$A_t=A_{\circ}\left(۱+\frac{r}{k}\right)^{kt}. \qquad (۴)$$

این پول ممکن است ماهی یك‌بار ($k=۱۲$)، هفته‌ای یك بار ($k=۵۲$)، روزی یك‌بار ($k=۳۶۵$)، یا حتی به‌دفعات بیشتر، مثلاً ساعتی یك بار، یاحتی دقیقه‌ای یك بار، افزایش‌یابد (یا به‌قول بانکیها سود بدهد). اما بازهم درامد شما از این‌راه محدود است، و حدآن برابراست با

$$\lim_{k\to\infty}A_t=\lim_{k\to\infty}A_{\circ}\left(۱+\frac{r}{k}\right)^{kt}=A_{\circ}e^{rt}. \qquad (۵)$$

(مسألهٔ ۱۰ را ببینید.)

فرمول‌حاصل که نشان‌دهندهٔ مقدار پول موجود درحساب‌شما پس از t سال است، عبارت است از

$$A(t)=A_{\circ}e^{rt}. \qquad (۶)$$

این فرمول‌را **فرمول سود پیوسته** می نامند؛ ومی گویند سودپرداختی طبق این فرمول **به‌طور پیوسته حساب شده** است.

مثال ۳ فرض‌کنید ۶۲۱ دلار را دربانکی به‌ودیعه می‌سپارید و سود آن با نرخ ۶٪ به‌طور پیوسته حساب می‌شود. پس از ۸ سال درحساب خود چقدر پول خواهید داشت؟

حل: فرمول (۶) را با ضوابط $A_{\circ}=۶۲۱$، $r=۰٫۰۶$، و $t=۸$ به‌کار می گیریم

$$A(۸)=۶۲۱\,e^{(۰٫۰۶)(۸)}=۶۲۱\,e^{۰٫۴۸}=۱۰۰۳٫۵۸$$

(با تقریب یك سنت).

اگر بانك فصلی یك‌بار (درمعادلهٔ (۴)، $k=۴$) سود را به‌حساب می‌ریخت، موجودی‌حساب‌شما دقیقاً ۱۰۰۰ دلار می بود. پس تأثیرمحاسبهٔ سود به‌طور پیوسته، درمقایسه با محاسبهٔ سود در پایان هر فصل، فقط ۳٫۵۸ دلار است. ممکن است بانکی تصمیم بگیرد این مبلغ اضافی را بپردازد تا بتواند چنین تبلیغ کند: «ما سودپول‌شما را روزوشب درهر ثانیه حساب و پرداخت می کنیم- حتی بهترازآن، ما سود را به‌طور پیوسته محاسبه می کنیم.» ■

رادیواکتیویته

وقتی یك اتم رادیواکتیو مقداری ازجرمش را به‌صورت پرتو منتشر می‌کند، باقیماندهٔ اتم تغییرشکل می‌یابد و مادهٔ جدیدی به‌وجود می‌آید. این فرایند تابش و تغییر را **واپاشی رادیواکتیو** می‌نامند، و عنصری که اتمهایش‌خود به‌خود به‌انجام‌دادن این‌فرایند می‌پردازد، **رادیواکتیو** نام دارد. مثلاً کربن ۱۴ رادیواکتیو به‌نیتروژن بدل می‌شود، و رادیوم پس از چند مرحله رادیواکتیو سرانجام به‌سرب تبدیل می‌شود.

تجربه نشان‌داده‌است‌که درهر لحظه، آهنگ واپاشی یك‌عنصر رادیواکتیو (تعداد هسته‌هایی که در واحد زمان تغییرمی کنند) تقریباً متناسب است با تعداد هسته‌های رادیواکتیو موجود. پس واپاشی یك عنصر رادیواکتیو با معادلهٔ $dy/dt=ky$ توصیف می‌شود، و تعداد هسته‌های رادیواکتیو موجود در زمان t برابر است با

$$y=y_{\circ}e^{kt} \qquad (۷)$$

که درآن $y_{\circ}$ تعداد موجود در زمان صفراست.

دررابطهٔ (۷) **ثابت واپاشی** k عددی منفی است‌که مقدارش از مشخصات عنصری است‌که درحال واپاشی است. مثلاً، وقتی زمان برحسب سال اندازه گرفته شود، برای‌کربن ۱۴، k برابر است با $-۱٫۲\times۱۰^{-۴}$ و برای رادیوم ۲۲۶، این عدد برابر است با $-۴٫۳\times۱۰^{-۴}$.

مثال ۴ نیمعمر یك عنصر رادیواکتیو. نیمعمر یك‌عنصر رادیواکتیو مدت زمان لازم برای واپاشی نصف هسته‌های رادیواکتیو موجود در یك نمونه است. جالب توجه است که این نیمعمر عدد ثابتی است و به تعداد هسته‌های رادیواکتیو موجود در نمونهٔ اولیه بستگی ندارد.

برای پی بردن به‌دلیل این‌مطلب، فرض کنید در بدو امر تعداد هسته‌های رادیواکتیو موجود در نمونه $y_\circ$ باشد. پس y، تعداد هسته‌های رادیواکتیو موجود درهر لحظهٔ بعدی t، برابر است با

$$y = y_\circ e^{kt}\,.$$

درجستجوی مقداری برای t هستیم که به‌ازای آن،

$$y_\circ e^{kt} = \frac{۱}{۲} y_\circ$$

زیرا این‌زمان، لحظه‌ای است که تعداد هسته‌های‌رادیواکتیوموجود برابر با نصف تعداد اولیه است. در این معادله پس از حذف $y_\circ$ داریم

$$e^{kt} = \frac{۱}{۲}$$

$$kt = \ln\frac{۱}{۲} = -\ln ۲$$

$$t = -\frac{\ln ۲}{k}\,. \tag{۸}$$

این مقدار t نیمعمر این عنصر است. همان‌گونه که معادلهٔ (۸) نشان می‌دهد این عدد تنها به‌مقدار k بستگی دارد و به $y_\circ$، تعداد هسته‌های موجود در بدو امر، بستگی ندارد. ■

انتقال گرما: قانون سرمایش نیوتن

وقتی مایعی داغ را در یك فنجان نازك می‌ریزیم، مایع سرد می‌شود تا آنجاکه دمایش با دمای محیط اطراف یکی شود. وقتی یك شمش‌نقرهٔ داغ را درآب فرو می‌بریم تا خنك‌شود، دمایش تاحدی پایین می‌رود که با دمای آب مجاور خود برابرشود. دراین‌گونه موارد، آهنگ تغییر دمای جسم تقریباً با اختلاف بین دمای جسم، و دمای محیط اطراف آن متناسب است. این قاعده‌گرچه درمورد گرم‌شدن هم کاربرد دارد، **قانون سرمایش نیوتن** نام‌دارد. این‌قانون را با روش زیرمی‌توان به‌صورت یك معادله نوشت.

اگر $T(t)$ دمای جسم درزمان t باشد، و T_s دمای محیط اطراف آن باشد، آنگاه

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_s)\,. \tag{۹}$$

چون T_s ثابت‌است، این‌رابطه‌را می‌توان به‌صورت $dy/dt = ky$ نوشت‌که در آن $y = (T - T_s)$. پس جواب معادلهٔ (۹) عبارت است از

$$y = y_\circ e^{kt}$$

یا

$$T - T_s = (T_\circ - T_s)e^{kt} \tag{۱۰}$$

که درآن $T_\circ$ مقدار T در زمان صفراست.

مثال ۵ تخم‌مرغ پخته‌ای با دمای $۹۸^\circ C$ را درظرف آبی با دمای $۱۸^\circ C$ می‌گذاریم تا خنك‌شود. بعداز ۵ دقیقه دمای‌تخم‌مرغ به $۳۸^\circ C$ می‌رسد. با این‌فرض که آب چندان‌گرم نشده باشد، پس از چه مدت دیگر دمای تخم‌مرغ به $۲۰^\circ C$ می‌رسد؟

حل: ابتدا محاسبه‌می‌کنیم که چقدرطول‌می‌کشد تا تخم‌مرغ از $۹۸^\circ C$ به $۲۰^\circ C$ برسد، و بعد ۵ دقیقه‌ای را که تا به‌حال سپری شده‌است از آن‌کم می‌کنیم.

بنا به رابطهٔ (۱۰)، دمای تخم‌مرغ پس‌از t دقیقه‌که وارد ظرف آب بشود عبارت است از

$$T - ۱۸ = (۹۸ - ۱۸)e^{kt} \quad \text{یا} \quad T = ۱۸ + ۸۰e^{kt}\,.$$

برای محاسبهٔ k از این اطلاع استفاده می‌کنیم‌که وقتی $t = ۵$، $T = ۳۸$. پس

$$۳۸ = ۱۸ + ۸۰e^{۵k}$$

$$e^{۵k} = \frac{۱}{۴}$$

$$۵k = \ln\frac{۱}{۴} = -\ln ۴$$

$$k = -\frac{۱}{۵}\ln ۴ = -۰/۲۸ \quad \text{(تا دورقم‌اعشار)}$$

دمای تخم‌مرغ درزمان t برابراست با

$$T = ۱۸ + ۸۰e^{-۰/۲۸t}\,.$$

پس از چه‌مدتی داریم $T = ۲۰$؟ وقتی‌که

$$۲۰ = ۱۸ + ۸۰e^{-۰/۲۸t}$$

$$۸۰e^{-۰/۲۸t} = ۲$$

$$e^{-۰/۲۸t} = \frac{۱}{۴۰}$$

$$-۰/۲۸t = \ln\frac{۱}{۴۰} = -\ln ۴۰$$

(تا دورقم اعشار) دقیقه $t=\dfrac{\ln ۴۰}{۰٫۲۸}=۱۳$

دمای تخم‌مرغ بعداز ۱۳ دقیقه که وارد آب می‌شود به $۲۰^\circ C$ می‌رسد. چون ۵ دقیقه طول کشیده تا به $۳۸^\circ C$ برسد، ۸ دقیقه دیگر به $۲۰^\circ C$ خواهد رسید. ■

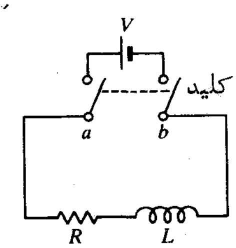
مدار RL

نمودار شکل ۳۷.۶ یك مدار الکتریکی را نشان می‌دهد که مقاومت کل آن R اهم و القاکنایی آن که درشکل به‌صورت یك پیچك نمایش داده شده، L هانری است (به‌همین‌دلیل این مدار را RL می‌نامند). در این مدار کلیدی با پایانه‌های a و b هم وجود دارد که با بستن آن یك منبع الکتریکی با ولتاژ ثابت V ولت درمدار قرار می‌گیرد.

با استفاده از قانون اهم، $V=RI$، درمورد چنین مداری داریم

$$L\frac{di}{dt}+Ri=V \qquad (۱۱)$$

که درآن i شدت جریان برحسب آمپر، و t زمان برحسب ثانیه است. با استفاده از این معادله می‌توان چگونگی عبور جریان پس از بسته‌شدن کلید را پیشگویی کرد.



۳۷.۶ مدار RL.

مثال ۶ در زمان $t=۰$ کلید مدار RL درشکل ۳۷.۶ را می‌بندیم. عبور جریان به‌صورت تابعی از زمان چگونه خواهد بود؟

حل: با این‌شرط که وقتی $t=۰$، $i=۰$، i را از معادلهٔ (۱۱) به‌دست می‌آوریم. محاسبات به‌شرح زیر است

$$L\frac{di}{dt}+Ri=V$$

(متغیرها ازهم‌جدا شده‌اند) $$\frac{di}{V-Ri}=\frac{۱}{L}dt$$

(جانشانیهای $u=V-Ri$، $du=-R\,di$، و $di=-(۱/R)du$ را انجام می‌دهیم) $$\frac{-\frac{۱}{R}du}{u}=\frac{۱}{L}dt$$

(متغیرها ازهم‌جداشده‌اند) $$\frac{du}{u}=-\frac{R}{L}dt$$

(انتگرال می‌گیریم) $$\ln|u|=-\frac{R}{L}t+C$$

(به‌صورت نمایی درمی‌آوریم) $$u=\pm e^{-(Rt/L)+C}$$

(A را به‌جای $\pm e^C$ می‌نویسیم) $$=Ae^{-Rt/L}$$

(از u به i برمی‌گردیم) $$V-Ri=Ae^{-Rt/L}$$

برای محاسبهٔ A از شرط وقتی $t=۰$، $i=۰$، استفاده می‌کنیم

$$V-R(۰)=Ae^{-R(۰)/L}$$

$$V=A.$$

معادلهٔ جریان عبارت است از

$$V-Ri=Ve^{-Rt/L}$$

یا

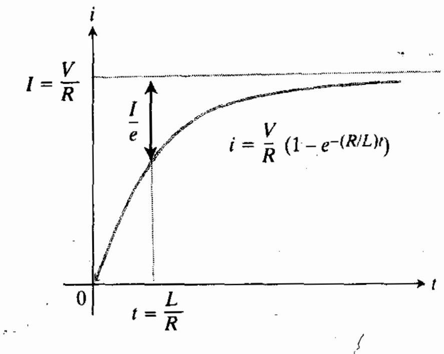
$$i=\frac{V}{R}(۱-e^{-Rt/L}). \qquad (۱۲)$$

این معادله نشان می‌دهد که جریان همیشه از V/R کمتراست، اما به‌سمت V/R، به‌عنوان یك **مقدار حالت ماندگار**، میل می‌کند

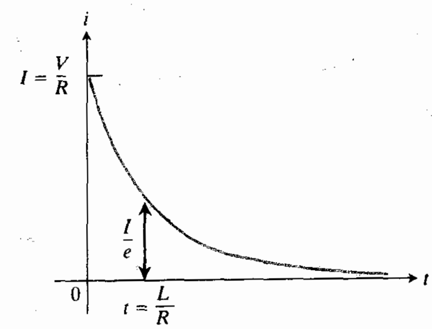
$$\lim_{t\to\infty}\frac{V}{R}(۱-e^{-Rt/L})=\frac{V}{R}(۱-۰)=\frac{V}{R}. \qquad (۱۳)$$

جریان $I=V/R$ جریانی است که با فرض $L=۰$ (درکارنبودن القاکنایی) یا $di/dt=۰$ (ماندگاربودن جریان، ثابت $i=$) در مدار جریان خواهد داشت. نمودار معادلهٔ جریان برحسب زمان، معادلهٔ (۱۲)، درشکل ۳۸.۶ (الف) نشان داده شده‌است. ■

قانون تغییر نمایی:	$y=y_۰e^{kt}$
سود مرکب پیوسته:	$A(t)=A_۰e^{rt}$
قانون سرمایش نیوتن:	$T-T_s=(T_۰-T_s)e^{kt}$
معادلات مدار RL:	$L\dfrac{di}{dt}+Ri=V$
	$i=\dfrac{V}{R}(۱-e^{-Rt/L})$



(الف)



(ب)

۳۸.۶ (الف) مدار RL، جـواب مثال ۶. افزایش جریان دریك مدار شامل القاکنایی و مقاومت. I مقدار جریان درحالت ماندگار است. (ب) مسألهٔ ۲۰. کاهش جریان در یك مدار شامل القاکنایی و مقاومت.

مسأله‌ها

۰۱ رشد باکتریها. فرض کنید مجتمعی از باکتریها طبق قانون نمایی و بدون مانع رشد می‌کند. این مجتمع در آغاز یك باکتری دارد، و درهر نیم‌ساعت تعداد باکتریها دو برابر می‌شود. ایـن مجتمع در پایان ۲۴ ساعت متشکل از چند بـاکتری خواهد بود؟ (در شرایط مناسب آزمایشگاهی، تعداد باکتری کلرا درهر ۳۰ دقیقه دو برابر می‌شود. البته دربدن یك شخص آلوده، بسیاری از باکتریها از بین می‌روند، ولی این مثال به توضیح این مطلب کمك می‌کند که چرا شخصی که درصبح سرحال است ممکن است قبل از فرارسیدن شب به‌طورخطرناکی مریض باشد.)

۰۲ رشد باکتریها. مجتمعی از باکتریها درشرایط ایده‌آل آزمایشگاهی به‌طورنمایی رشد می‌کند، و تعداد بـاکتریها پس از سه ساعت به ۱۰۰۰۰، و پس از ۵ ساعت بـه ۴۰۰۰۰ می‌رسد. تعداد باکتریها در آغاز چقدر بوده‌است؟

۰۳ میزان بروز یك بیماری. درطول هرسال، تعداد موارد یك مرض، y، به‌اندازهٔ ۱۰٪ تقلیل می‌یابد. اگر امروز تعداد موارد یك مرض ۱۰۰۰۰ باشد، تقریباً پس از چند سال تعداد مواردکمتر از ۱۰۰۰ خواهد بود؟

۰۴ فشار جو. مدل فشار جو زمین، p، غالباً با این فرض به دست می‌آید که نسبت dp/dh، یعنی آهنگ تغییر p نسبت به‌ارتفاع h ازسطح دریا، متناسب با h باشد. فرض کنید که درسطح دریا فشار ۱۰۱۳ میلی‌بار (تقریباً ۱۴٫۷ پوند براینچ مربع)، و در ارتفاع $20\,\mathrm{km}$ فشار ۵۰ میلی‌بار باشد.

الف) بـرای بیان p بـرحسب h، معادلـهٔ $dp/dh = kh$ (k ثابت‌است) را حل کنید. با استفاده ازشرایط اولیهٔ مفروض، مقادیر k و ثابت انتگرالگیری را بیابید.

ب) در $h = 50\,\mathrm{km}$ فشار جو چقدراست؟

پ) فشار درچه ارتفاعی برابربا ۹۰۰ میلی‌بار است؟

۰۵ خازن خالی‌شونده. یك خازن الکتریکی در اثر نشتی با آهنگی متناسب با بار آن خالی‌می‌شود. اگر بارخازن، Q، در زمان $t = 0$ برابربا Q_0 باشد، Q را به‌صورت تابعی از t بیابید.

۰۶ واکنشهای شیمیایی مرتبهٔ اول. دربرخی از واکنشهای شیمیایی، آهنگ تغییرمقدار یك‌ماده نسبت به‌زمان متناسب‌است با مقدار مادهٔ موجود. مثلاً برای تبدیل لاکتون δ۔گلوکنو به‌اسیدگلوکنیك داریم

$$\frac{dy}{dt} = -0{,}6y$$

که درآن، t برحسب ساعت است. اگردرلحظهٔ $t = 0$، ۱۰۰ گرم لاکتون δ۔گلوکنو موجود باشد، بعد از یك ساعت چند گرم بـاقی خواهد ماند؟

۰۷ وصیت بنجامین فرانکلین[۱]. بنجامین فـرانکلین بـرای کمك به‌محصلان ۱۰۰۰ پوند به‌بانك سپرد و وصیت کرد کـه هرمحصل متقاضی بتواند بخشی از این پول را برای مدت یك سال با نرخ ۵٪ وام بگیرد. وی در وصیتنامهٔ خود اظهار کرده است که اگر این برنامه به‌طور کامل به مدت ۱۰۰ سال اجرا شود، موجودی حساب به ۱۳۱۰۰۰ پوند می‌رسد. اما وام‌گیرندهٔ کافی وجود نداشت و برنامه طبق نظرفرانکلین اجرا نشد. در پایان ۱۰۰ سال، در ژانویهٔ ۱۸۹۴، به جای ۱۳۱۰۰۰ پوند، ۹۰۰۰۰ پوند درحساب جمع شد یعنی سرمایهٔ اولیه به‌جای اینکه ۱۳۱ برابرشود ۹۰ برابر شد.

اگرسود به‌طورپیوسته حساب‌می‌شد، سرمایهٔ اولیهٔ فرانکلین با چه نرخی پس از صد سال، ۹۰ برابرمی‌شد؟

۰۱ این‌مسأله و مسألهٔ بعد با اندکی تلخیص ترجمه شده است.

۸. براورد فرانکلین مبنی بر اینکه سرمایهٔ اولیهٔ ۱۰۰۰ پوند بعد از ۱۰۰ سال، ۱۳۱۰۰۰ پوند می‌شود، متضمن محاسبهٔ سود با نرخ ۵٪ و یک‌بار درسال بود. اگر سود به‌طور پیوسته حساب می‌شد، این سرمایه با چه نرخی بعد از ۱۰۰ سال ۱۳۱ برابر می‌شد؟

۹. قاعدهٔ ۷۰. اگر از تقریب $\ln 2 \approx 0.70$ (به‌جای $0.69315\ldots$) استفاده کنید به این قاعدهٔ سرانگشتی می‌رسید که می‌گوید «برای اینکه بدانید چند سال طول می‌کشد تا مقدار پولی که با سود پیوستهٔ r درصد به‌کار می‌اندازید دوبرابر شود، ۷۰ را بر r تقسیم کنید.» مثلاً سرمایه‌ای با نرخ ۵٪ پس از تقریباً $70/5 = 14$ سال دوبرابر می‌شود. اگر بخواهید سرمایه بعد از ۱۰ سال دوبرابر شود، باید نرخ آن $70/10 = 7$ (درصد) باشد. نشان دهید که قانون ۷۰ چگونه به‌دست می‌آید. (درقانون مشابهی به‌نام «قانون ۷۲» ازعدد ۷۲ به‌جای ۷۰ استفاده می‌شود، احتمالاً به‌خاطر اینکه تعداد عوامل صحیح آن بیشتر است.)

۱۰. پرسش جان نپر. جان نپر که لگاریتم طبیعی را ابداع کرد، نخستین کسی است که به این پرسش پاسخ داد: «اگر سرمایه‌ای را با نرخ ۱۰۰٪ به‌کار اندازید و سود به‌طور پیوسته محاسبه شود، چه می‌شود؟»

الف) چه اتفاقی می‌افتد؟

ب) پس از چه‌مدت پول شما سه برابر می‌شود؟

پ) درامد شما درسال چقدر خواهد بود؟

۱۱. عمر کربن ۱۴. از نیمعمر عناصر رادیواکتیو گاه می‌توان برای تعیین تاریخ وقایع زمین در گذشته استفاده کرد. سن سنگهایی که بیش از ۲ میلیارد سال عمر دارند از روی میزان واپاشی رادیواکتیو اورانیوم (با نیمعمر ۴٫۵ میلیارد سال) محاسبه شده است. در یک موجود زنده، نسبت کربن رادیواکتیو، کربن ۱۴، به‌کربن معمولی در طول زندگی موجود نسبتاً ثابت باقی‌می‌ماند، و تقریباً برابر است با همین نسبت درمورد موجودات اطراف که در آن زمان درمنطقه زندگی می‌کرده‌اند. اما، بعداز مرگ موجود هیچ کربن جدیدی جذب نمی‌شود، و نسبت کربن ۱۴ درجسد موجود زنده وقتی این نوع کربن واپاشیده می‌شود، کم می‌شود. چون نیمعمر کربن ۱۴ مشخص و حدوداً ۵۷۰۰ سال است، می‌توان سن جسد موجود زنده را، با مقایسهٔ نسبت کربن ۱۴ در آن با نسبتی که فرض می‌شود موجودات اطراف در آن زمان داشته‌اند، براورد کرد. باستان‌شناسان با این روش توانسته‌اند قدمت لایه‌ها (شامل $CaCO_3$)، دانه‌ها، ومصنوعات چوبی را تعیین کنند. برهمین مبنا قدمت نقاشیهای روی دیوارهای غار درلاسکاس فرانسه ۱۵۵۰۰ سال براورد شده‌است.

الف) برای کربن ۱۴، k را درمعادلهٔ (۳) بیابید.

ب) سن زغالی که ۹۰٪ کربن ۱۴ آن واپاشیده است، چقدر است؟

پ) میزان کربن موجود در زغال حاصل از نابود شدن یک درخت در آتشفشانی که دریاچه کراتر اورگان را به‌وجود آورد، برابر است با ۴۴٫۵٪ کربن ۱۴ در موجودات زندهٔ اطراف درخت. سن دریاچهٔ کراتر تقریباً چقدر است؟

۱۲. برای ملاحظهٔ اثر یک خطای نسبتاً کوچک در براورد مقدار کربن ۱۴ موجود در نمونه‌ای که می‌خواهیم عمر آن را بیابیم، مورد فرضی زیر را بررسی می‌کنیم

الف) از استخوان فسیلی که در امریکای مرکزی پیدا شده معلوم شده‌که در دوهزار سال قبل از میلاد ۱۷٪ مقدار اولیه، کربن ۱۴ داشته‌است. سال مرگ حیوان را براورد کنید.

ب) بند (الف) را با فرض ۱۸٪ به‌جای ۱۷٪ تکرار کنید.

پ) بند (الف) را با فرض ۱۶٪ به‌جای ۱۷٪ تکرار کنید.

۱۳. پلونیوم. نیمعمر پلونیوم ۱۴۰ روز است، اما وقتی ۹۰٪ هستهٔ رادیواکتیو اولیه واپاشیده شود، نمونهٔ پلونیوم شما به‌درد نمی‌خورد. تقریباً چند روز از این پلونیوم می‌توانید استفاده کنید؟

۱۴. کاکائوی درحال سرد شدن. فرض کنید یک فنجان کاکائو در اتاقی که دمای آن $20^\circ C$ است بعد از ۱۰ دقیقه از $90^\circ C$ به $60^\circ C$ می‌رسد. با استفاده ازقانون سرمایش نیوتن به‌پرسشهای زیر پاسخ دهید.

الف) بعداز چند دقیقهٔ دیگر دمای کاکائو به $35^\circ C$ می‌رسد؟

ب) به‌جای اینکه فنجان را دراتاق بگذاریم، آن‌را درفریزری که دمایش $-15^\circ C$ است می‌گذاریم. بعداز چه‌مدت دمای کاکائو از $90^\circ C$ به $35^\circ C$ می‌رسد؟

۱۵. جسمی با دمای مجهول. جسمی را که دمای آن معلوم نیست دراتاقی با دمای $30^\circ F$ قرارمی‌دهیم. دمای جسم بعد از ۱۰ دقیقه به $0^\circ F$، وبعد از ۲۰ دقیقه به $15^\circ F$ می‌رسد. با استفاده ازقانون سرمایش نیوتن دمای اولیهٔ جسم را براورد کنید.

۱۶. محیطی با دمای مجهول. یک ظرف آب گرم ($46^\circ C$) را دریخچال می‌گذاریم. دمای آب بعداز ۱۰ دقیقه به $39^\circ C$ می‌رسد؛ و بعد از ۱۰ دقیقهٔ دیگر به $33^\circ C$ می‌رسد. با استفاده از قانون سرمایش نیوتن دمای یخچال را براورد کنید.

۱۷. نقره‌ای که در هوا سرد می‌شود. دمای فعلی یک شمش نقره $60^\circ C$ بیشتر ازدمای اتاق است. ۲۰ دقیقهٔ پیش دمای آن $70^\circ C$ بیشتر از دمای اتاق بود. ۱۵ دقیقه بعد دمای نقره چقدر از دمای اتاق بیشترخواهد بود؟ دوساعت بعد چطور؟ چه‌موقع دمای نقره $10^\circ C$ بیش‌از دمای اتاق خواهد بود؟

۱۸. مدار RL. درمثال ۶، جریان چند ثانیه پس از بستن کلید به‌نصف مقدار حالت ماندگار خود می‌رسد؟ توجه کنید که این‌زمان به V بستگی ندارد. جواب خود را با توجه به‌رابطهٔ (۸) بسنجید.

۱۹. جریان در یك مدار RL وقتی $t=L/R$ ثـانیه باشد چقدر خواهد بود؟ (عدد L/R را ثابت زمانی مدار می‌نامند.)

۲۰. اگر درمدار RL شکل ۳۷.۶ جریان ماندگاری وجود داشته باشد، وکلید را بازکنیم، افت جریان از معادلهٔ زیر به‌دست‌می‌آید (معادلهٔ ۱۱ به‌ازای $V=0$):

$$L\frac{di}{dt}+Ri=0.$$

الف) از این معادله، i را بیابید.

ب) بعد از اینکه کلید را باز می‌کنیم، چقدر طول می‌کشد تا جریان نصف مقدار اولیه‌اش شود؟

پ) وقتی $t=L/R$، مقدارجریان چقدراست؟ (این‌مقدار t را ثابت زمانی درحالت‌مدار بازمی‌نامند.) شکل ۳۸.۶ (ب) را ببینید.

۲۱. مقاومت متناسب با سرعت. فرض‌کنید جسمی به‌جرم m که با سرعت v روی یك‌خط مستقیم‌حرکت می‌کند با مقاومتی‌متناسب بـا سرعت مواجه می‌شود، و فرض‌کنید کـه این تنها نیروی وارد برجسم است. اگرجسم با سرعت v_0 حرکت خود را آغازکند، تا لحظهٔ t چقدر راه پیموده است؟ فرض‌کنید $F=d(mv)/dt$.

۲۲. قند خون. اگر گلوکز بـا آهنگی ثـابت وارد رگ شود، تغییر کلی غلظت گلوکز، $c(t)$، در خون را نسبت به‌زمان می‌توان با معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dc}{dt}=\frac{G}{100V}-kc$$

توصیف کرد. در این معادله G، V، و k ثـابتهای مثبت هستند؛ G آهنگ ورودگلوکز برحسب میلی‌گرم در دقیقه، و V حجم‌خون بـدن بـرحسب لیتر (حدوداً ۵ لیتر درمورد بـزرگسالان) است. غلظت $c(t)$ برحسب میلی گرم بـرسانتی‌لیتر تعیین می‌شود. جملهٔ $-kc$ را هم‌افزوده‌ایم زیرا فرض‌می‌شودکه گلوکز به‌طور پیوسته با آهنگی متناسب با غلظتش به‌ملکولهای دیگری تبدیل می‌شود.

الف) از ایـن معادلـه، $c(t)$ را بیابید؛ $c(0)$ را بـا c_0 مشخص کنید.

ب) غلظت را درحالت ماندگار، $\lim_{t\to\infty} c(t)$، بیابید.

۲۳. تبدیل شکر. در پـردازش شکر خام مرحله‌ای وجـود دارد موسوم بـه «تبدیل» کـه ساختار ملکولی شکر را تغییر می‌دهـد. پس از آغاز کار، آهنگ تغییر مقدار شکرخام با مقدار شکر خـام باقیمانده متناسب است. اگـر ظرف ۱۰ ساعت اول، ۱۰۰۰ kg شکرخام به ۸۰۰ kg تقلیل یابد، بعد از ۱۴ ساعت چقدر شکرخام باقی می‌ماند؟

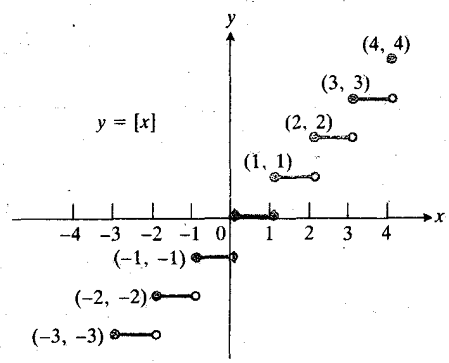
TOOLKIT PROGRAMS

Antiderivatives and Direction Fields
Sequences and Series
Super * Grapher

پرسشها و تمرینهای مروری

۱. اصطلاحـات «تابع جبری» و «تابع متعالی» را تعریف‌کنید. به‌نظرشما، تابع بزرگترین عدد صحیح (شکل ۳۹.۶) به‌چه‌رده‌ای (جبری یا متعالی) تعلق دارد؟

[غالباً اثبات این‌نکته مشکل است که یك تابع‌خاص به‌کدام رده تعلق‌دارد. اعداد هم به‌دو ردهٔ جبری و متعالی تقسیم‌می‌شوند.]



۳۹.۶ تابع بزرگترین عدد صحیح، $y=[x]$. تمرین ۱ را ببینید.

۲. تابعی مثال بزنید که (الف) یك به یك باشد، (ب) یك به یك نباشد.

۳. فرض‌کنید دامنهٔ یك‌تابع یك به‌یك f، $[a, b]$ باشد، و بردآن $[f(a), f(b)]$. معکوس f را تـوصیف‌کنید. دامنه و برد آن چیست؟

۴. ادامهٔ تمرین ۳. اگر وقتی $f(x)=y$، $g(y)=x$؛ آنگاه به‌ازای هر $a\leqslant x\leqslant b$ داریم

$$g(f(x))=x.$$

فرض‌کنید f مشتقپذیر است. قـاعدهٔ زنجیری را درمورد ترکیب $h=g\circ f$ به‌کار ببرید و فرمولی کلی برای مشتق یك‌تابع معکوس به‌دست آورید. چه محدودیتی باید درمورد مشتق f قائل شویم؟

۵. توابع آرك سینوس، آرك کسینوس، آرك تانژانت، وآرك‌سکانت را تعریف‌کنید. دامنه، برد، و مشتق این توابع چیستند؟ نمودارشان را رسم‌کنید.

۶. تابع لگاریتم طبیعی را تعریف کنید. دامنه، برد، و مشتقش چیست؟ نمودارش را رسم کنید.

۷. از تعریف $\ln x$ به صورت یک انتگرال استفاده، و $\lim_{x\to\infty}(\ln x)/x=0$ را ثابت کنید.

۸. معکوس تابع لگاریتم طبیعی چیست؟ دامنه، برد، و مشتقش چیست؟ نمودارش را بکشید.

۹. $(8.73)^{2.75}$ را چگونه محاسبه می‌کنید؟ (اگر ماشین‌حساب با دکمهٔ y^x دارید، البته می‌توانید به‌جای y، ۸٫۷۳ و به‌جای x، ۲٫۷۵ قراردهید.) $(-8)^{1/3}$ را چگونه محاسبه می‌کنید؟ (وقتی با یک ماشین‌حساب قدیمی بخواهید این محاسبه را انجام‌دهید کلمهٔ «خطا» ظاهر می‌شود. چرا؟)

۱۰. به‌جز $\ln x$، چه تابعهای لگاریتمی دیگری وجود دارند؟ تعریف، راه محاسبه، و مشتق آنها چیست؟

۱۱. معنای جملهٔ «وقتی x به بینهایت میل می‌کند، تابع $f(x)$ تندتر از تابع $g(x)$ رشد می‌کند» چیست؟ معنای اینکه آهنگ رشد f و g یکسان است چیست؟ مثال بیاورید.

۱۲. تعبیر فیزیکی معادلهٔ دیفرانسیل $dy/dt=ky$ چیست؟ چه‌جوابی از این معادله شرط اولیهٔ «وقتی $t=0$، $y=y_0$» را برمی‌آورد؟ برای کاربرد این معادله مثالهایی بیاورید.

مسأله‌های گوناگون

۱. x را از معادلهٔ $\tan^{-1}x-\cot^{-1}x=\pi/4$ بیابید.

۲. ذره‌ای از مبدأ حرکت می‌کند، و در امتداد محور x چنان حرکت‌می‌کند که سرعتش در x برابر است با $dx/dt=\cos^2\pi x$. چقدر طول می‌کشد تا ذره به $x=1/4$ برسد؟ آیا هرگز به $x=1/2$ می‌رسد؟ چرا؟

درمسائل ۳ و ۴ حدها را بیابید.

۳. $$\lim_{b\to 1^-}\int_0^b\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

۴. $$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x\tan^{-1}t\,dt}{x}$$

۵. حجم حاصل از دوران ناحیهٔ محدود به $x=0$، $x=\sec y$، $y=0$، و $y=\pi/3$ حول محور y را بیابید.

۶. قرار است یک ایستگاه خورشیدی در امتداد شرقی-غربی روی سطح زمین بین دوساختمان بلند به‌ارتفاعهای h و $2h$ ساخته‌شود. فاصلهٔ بین دوساختمان d است. فاصلهٔ ایستگاه تا ساختمان بلندتر چقدر باید باشد تا در روزی که خورشید مستقیماً از بالای سر می‌گذرد، تعداد ساعتهایی که آفتاب بر ایستگاه می‌تابد ماکسیمم باشد؟

۷. زاویهٔ انشعاب اپتیمال (بهینه) در لوله‌ها.[1] وقتی از یک لولهٔ بزرگتر، لوله‌ای کوچکتر منشعب می‌شود، ممکن است به‌خاطر صرفه‌جویی در انرژی بخواهیم «بهترین» زاویهٔ انشعاب را برگزینیم. مثلاً ممکن است لازم بدانیم که در امتداد مقطع AOB شکل ۴۰٫۶ انرژیی که در اثر اصطکاک ازدست می‌رود مینیمم باشد. در این شکل B نقطه‌ای است که لولهٔ کوچکتر باید به آن برسد، A نقطه‌ای از لولهٔ بزرگ است که ماده از آنجا عبور کرده به B می‌رسد، و O محل انشعاب است. قانونی که به پوازوییل منسوب است حاکی است که اتلاف انرژی ناشی از اصطکاک جریان نامتلاطم با طول مسیر متناسب است و با توان چهارم شعاع نسبت عکس دارد. پس، انرژیی که در امتداد AO ازدست‌می‌رود برابر است با $(kd_1)/R^4$ ودرامتداد OB برابر است با $(kd_2)/r^4$، که در آن k ثابت، d_1 طول AO، d_2 طول OB، R شعاع لولهٔ بزرگتر، و r شعاع لولهٔ کوچکتر است. زاویهٔ θ باید چنان باشد که مجموع این دو مینیمم شود:

$$L=k\frac{d_1}{R^4}+k\frac{d_2}{r^4}.$$

دراین مدل، فرض می‌کنیم که $AC=a$ و $BC=b$ ثابت باشند. پس روابط زیر را داریم

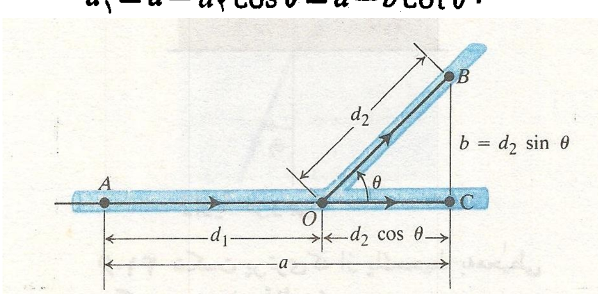
$$d_1+d_2\cos\theta=a,\quad d_2\sin\theta=b$$

و لذا

$$d_2=b\csc\theta$$

و

$$d_1=a-d_2\cos\theta=a-b\cot\theta.$$



۴۰٫۶ لولهٔ کوچکتر OB از لولهٔ بزرگتر AOC با زاویه‌ای چون θ منشعب می‌شود. این زاویه اتلاف انرژی ناشی از اصطکاک در طول AO و OB را مینیمم می‌کند. زاویهٔ اپتیمال عبارت است از $\cos^{-1}(r^4/R^4)$، که در آن r شعاع لولهٔ کوچکتر، و R شعاع لولهٔ بزرگتر است (مسألهٔ ۷).

حال می‌توانیم اتلاف کل L را به‌صورت تابعی از θ بیان کنیم:

$$L=k\left(\frac{a-b\cot\theta}{R^۴}+\frac{b\csc\theta}{r^۴}\right). \qquad (۱۱)$$

الف) نشان‌دهید که مقدار بحرانی θ که به‌ازای آن $dL/d\theta$ صفر می‌شود برابر است با

$$\theta_c=\cos^{-۱}\frac{r^۴}{R^۴}\cdot$$

ب) **ماشین‌حساب یا جدول** اگر نسبت شعاعهای دو لوله $r/R=۵/۶$ باشد، زاویهٔ انشعاب اپتیمال داده شده در بند (الف) را با تقریب یک‌درجه براورد کنید.

تحلیل ریاضی توصیف شده در اینجا، برای توضیح زاویهٔ انشعاب رگهای موجود در بدن حیوانات نیز به‌کار می‌رود.

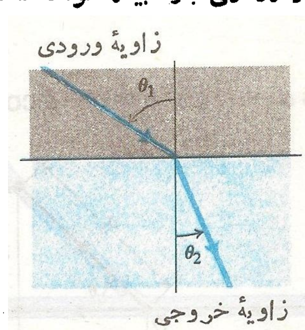
۸. وقتی پرتوی از نور از محیطی (چون هوا) با سرعت $c_۱$ می‌گذرد و به محیط دیگری (مثلاً آب) وارد می‌شود و در این محیط با سرعت $c_۲$ حرکت می‌کند، زاویهٔ ورودی $\theta_۱$ و زاویهٔ خروجی $\theta_۲$ بنا به‌قانون اسنل چنین به‌هم مربوط می‌شوند:

$$\frac{\sin\theta_۱}{c_۱}=\frac{\sin\theta_۲}{c_۲}$$

(شکل ۶.۴۱). خارج‌قسمت $c_۱/c_۲=n_{۱۲}$ را ضریب شکست محیط ۲ نسبت به‌محیط ۱ می‌نامند.

الف) $\theta_۲$ را به‌صورت تابعی از $\theta_۱$ بیان کنید.

ب) بزرگترین مقدار $\theta_۱$ی که به‌ازای آن $\theta_۲$ در بند (الف) تعریف می‌شود چیست؟ (به ازای مقادیر $\theta_۱$ بزرگتر از این مقدار، نور ورودی بازتابیده خواهد شد.)



۶.۴۱ شکست پرتوی که از یک‌محیط به‌محیطی دیگر می‌رود (مسألهٔ ۸).

۹. نشان دهید که

$$\int_۰^۱\frac{x^۴(۱-x)^۴}{۱+x^۲}\,dx=\frac{۲۲}{۷}-\pi\cdot$$

(راهنمایی: قبل از انتگرالگیری، صورت کسر را بسط دهید و حاصل را برمخرج تقسیم کنید.)

۱۰. نشان‌دهید که اختلاف $\ln ۵x$ و $\ln ۳x$ عددی ثابت است. این عدد ثابت چیست؟

درمسائل ۱۱–۲۸، dy/dx را بیابید.

۱۱. $y=x\ln x$

۱۲. $y=\sqrt{x}\ln x$

۱۳. $y=(\ln x)/x$

۱۴. $y=(\ln x)/\sqrt{x}$

۱۵. $y=x/(\ln x)$

۱۶. $y=x(\ln x)^۳$

۱۷. $y=x^۳\ln x$

۱۸. $y=\ln(\ln x)$

۱۹. $y=\ln(۳x^۲)$

۲۰. $y=\ln(ax^b),\quad a>۰,\quad b>۰$

۲۱. $y=(۱/۲)\ln((۱+x)/(۱-x))$

۲۲. $y=\ln\sqrt{۱+x^۲}-\tan^{-۱}x$

۲۳. $y=\ln(x/\sqrt{x^۲+۱})$

۲۴. $y=\ln(x-\sqrt{x^۲+۱})$

۲۵. $y=x\sec^{-۱}x-\ln(x+\sqrt{x^۲-۱}),\quad x>۱$

۲۶. $y=(۲x/\sqrt{x^۲-۱})^{-۲}$

۲۷. $y=(x(x-۲)/(x^۲+۱))^{۱/۳}$

۲۸. $y=(۲x-۵)(۸x^۲+۱)^{۱/۲}/(x^۳+۲)^۲$

درمسائل ۲۹–۴۰، انتگرالها را محاسبه کنید.

۲۹. $\displaystyle\int_۰^{-۸/۳}\frac{dx}{۴-۳x}$

۳۰. $\displaystyle\int_۰^۵\frac{x\,dx}{x^۲+۱}$

۳۱. $\displaystyle\int_۰^۲\frac{x\,dx}{x^۲+۲}$

۳۲. $\int_0^2 \frac{x\,dx}{(x^2+2)^2}$

۳۳. $\int_1^2 \frac{5\,dx}{x-3}$

۳۴. $\int_0^7 \frac{x}{2x+2}\,dx$ (راهنمایی: ابتدا x را بر $2x+2$ تقسیم کنید.)

۳۵. $\int \frac{x^3}{x^4+1}\,dx$

۳۶. $\int \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

۳۷. $\int x^2 \cot(2+x^3)\,dx$

۳۸. $\int \frac{\sin 3x}{5-2\cos 3x}\,dx$

۳۹. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,(3+\sin^{-1}x)}$

۴۰. $\int \frac{dx}{x\sec^{-1}x\sqrt{x^2-1}}$

۴۱. حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{h\to 0^+} h\ln h$

ب) $\lim_{x\to 0^+} x^p \ln x$، $p>0$

۴۲. با استقرای ریاضی و قاعدهٔ هوپیتال ثابت کنید که به‌ازای هرعدد صحیح مثبت n،

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^n}{x}=0\,.$$

۴۳. فرض کنید p یك‌عدد صحیح بزرگتراز ۱ باشد. نشان‌دهیدکه

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{p\cdot n}\right)=\ln p\,.$$

۴۴. نشان دهیدکه اگر $0<x<1$،

$$\frac{x^2}{4}<x-\ln(1+x)<\frac{x^2}{2}\,.$$

(راهنمایی: فرض‌کنید $f(x)=x-\ln(1+x)$ ونشان‌دهیدکه $(x/2)<f'(x)<x$.)

۴۵. مطلوب است تقریب درجهٔ دوم

الف) $f(x)=\ln(\sec x+\tan x)$ نزدیك $x=0$؛

ب) $f(x)=\ln x$ نزدیك $x=1$.

۴۶. مطلوب است طول خم

$$\frac{x}{a}=\left(\frac{y}{b}\right)^2-\frac{1}{8}\left(\frac{b^2}{a^2}\right)\ln\left(\frac{y}{b}\right)$$

از $y=b$ تا $y=3b$ با این فرض که a و b ثابتهای مثبتی هستند.

۴۷. مطلوب است طول قوسی از خم

$$x=a\left(\cos t+\ln\tan\frac{t}{2}\right),\quad y=a\sin t$$

$$\frac{\pi}{2}\leqslant t<\pi$$

که از نقطهٔ $(0,a)$ تا نقطهٔ (x_1,y_1) امتداد دارد.

۴۸. ذره‌ای با شتاب $a=4/(4-t)^2$ بر خط مستقیمی حرکت می‌کند. اگر در $t=0$ شتاب برابربا ۲ باشد، این‌ذره بین $t=1$ و $t=2$ چه مسافتی را می‌پیماید؟

۴۹. با این‌شرط‌که وقتی $x=1$، $y=1$؛ معادلهٔ دیفرانسیل زیر را حل‌کنید.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+(1/x)}{1+(1/y)},\quad x>0,\quad y>0$$

۵۰. ثابت‌کنیدکه مساحت ناحیهٔ زیرنمودار $y=1/x$، و بالای بازهٔ $a\leqslant x\leqslant b$ $(a>0)$ برابر است با مساحت ناحیهٔ بالای بازهٔ $ka\leqslant x\leqslant kb$ به‌ازای هر $k>0$.

۵۱. خم $y=f(x)$ از نقاط $(0,0)$ و (a,b) می‌گذرد، و مستطیل $0\leqslant x\leqslant a$، $0\leqslant y\leqslant b$ را به‌دوناحیه تقسیم می‌کند: A بالای خم و B زیر آن. اگر به ازای تمام مقادیر $a>0$ و $b>0$ مساحت A دوبرابرمساحت B باشد، خم را بیابید.

۵۲. نقاط $P(x_1,y_1)$ و $Q(x_2,y_2)$ دونقطهٔ دلخواه واقع در ربع اول هستندکه برهذلولی $xy=R$ (R مثبت) قرار دارند. نشان دهیدکه مساحت محصور بین قوس PQ، خطوط $x=x_1$، $x=x_2$، و محور x برابراست با مساحت محصور بین‌قوس PQ، خطوط $y=y_1$، $y=y_2$، و محور y.

۵۳. بخشی از مماس بریك خم‌که بین محور x و نقطهٔ تماس قراردارد به‌وسیلهٔ محور y نصف می‌شود. اگرخم ازنقطهٔ $(1,2)$ بگذرد، معادله‌اش را بیابید.

۵۴. با استقرای ریاضی (پیوست ۲) و قاعدهٔ $\ln ax = \ln a + \ln x$ نشان دهید به ازای مقادیری از x که توابع $u_1(x)$، ...، $u_n(x)$ همگی مثبت باشند، داریم

$$\ln(u_1 u_2 \cdots u_n) = \ln u_1 + \ln u_2 + \cdots + \ln u_n.$$

درمسائل ۵۵–۷۴، dy/dx را بیابید.

۵۵. $y = e^{1/x}$

۵۶. $y = \ln e^x$

۵۷. $y = xe^{-x}$

۵۸. $y = x^2 e^x$

۵۹. $y = (\ln x)/e^x$

۶۰. $x = \ln y$

۶۱. $y = \ln(2xe^{2x})$

۶۲. $y = e^{\sec x}$

۶۳. $y = e^{\sin^2 x}$

۶۴. $y = e^{\ln(\sin e^x)}$

۶۵. $y = \ln(e^x/(1+e^x))$

۶۶. $y = e^{-x}\sin 2x$

۶۷. الف) $y = 2x - \frac{1}{2}e^{2x}$

ب) $y = e^{(2x-(1/2)e^{2x})}$

۶۸. الف) $y = x - e^x$

ب) $y = e^{(x-e^x)}$

۶۹. $y = \dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}$

۷۰. $y = x^2 e^{2x}\sin 3x$

۷۱. $y = \sin^{-1}(x^2) - xe^{(x^2)}$

۷۲. $y = e^x(\sin 2x - 2\cos 2x)$

۷۳. $y = e^{2x}(\sin 3x + \cos 3x)$

۷۴. $\ln(x-y) = e^{xy}$، $x > y$

درمسائل ۷۵–۸۰، انتگرالها را محاسبه کنید.

۷۵. $\int_1^e \frac{x+1}{x}\,dx$

۷۶. $\int_0^1 (e^x+1)\,dx$

۷۷. $\int_0^{\ln 2} e^{-2x}\,dx$

۷۸. $\int_1^{e^2} \frac{2\ln x}{x}\,dx$

۷۹. $\int_{-1}^1 \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$

۸۰. $\int_0^{\pi/6} \frac{\sec^3 x + e^{\sin x}}{\sec x}\,dx$

درمسائل ۸۱–۸۴، حدها را بیابید.

۸۱. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^5}{e^x}$

۸۲. $\lim_{x\to 0} \frac{xe^x}{4-4e^x}$

۸۳. $\lim_{x\to 4} \frac{e^{x-4}+4-x}{\cos^2(\pi x)}$

۸۴. $\lim_{x\to 0^+} (e^x+x)^{1/x}$

۸۵. صورت‌خطی $f(x) = x + e^{4x}$ را در $x = 0$ بیابید.

۸۶. تقریب درجهٔ دوم

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

را درنزدیك $x = 0$ بیابید.

۸۷. با توجه به مقادیر اکسترمم، نقاط عطف، و تقعر، نمودار هریك از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = (\ln x)/\sqrt{x}$، $x > 0$

ب) $y = e^{-x^2}$

پ) $y = (1+x)e^{-x}$

۸۸. اگر $f(x) = e^{g(x)}$ و

$$g(x) = \int_2^x \frac{t}{1+t^4}\,dt.$$

$f'(2)$ را محاسبه کنید.

۸۹. خمی بیابید که از مبدأ بگذرد، و چنان باشد که طول خم، s، بین مبدأ و هرنقطهٔ (x, y) ازخم برابر باشد با

$$s=e^x+y-1.$$

۹۰. اگر $y=(e^{2x}-1)/(e^{2x}+1)$، نشان دهید که

$$dy/dx=1-y^2.$$

۹۱. مساحت رویهٔ حاصل از دوران خم

$$y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}), \quad 0\leqslant x\leqslant \ln\sqrt{2}$$

را حول محور x بیابید.

۹۲. حجم حاصل از دوران ناحیهٔ محدود به $y=e^x$، $y=0$، $x=0$، و $x=2$ را حول محور x بیابید.

۹۳. مساحت ناحیهٔ محصور بین خم

$$y=\left(\frac{a}{2}\right)(e^{x/a}+e^{-x/a})$$

محور x، و خطوط $x=-a$ و $x=+a$ را بیابید.

۹۴. مطلوب است مساحت ناحیهٔ زیرخم $y=t\sin(t-1)$، $x=\ln t$ از $x=0$ تا $x=\ln(\pi+1)$.

۹۵. مثلثی به محور y، خط افقی گذرنده از بالاترین نقطهٔ خم $y=e^{-2x^2}$، و خط گذرنده از مبدأ و نقطهٔ عطف خم $y=e^{-2x^2}$ و واقع در ربع اول، محدود است. مساحت مثلث را بیابید.

۹۶. الف) نشان‌دهید به‌ازای هر a که از ۱ بزرگتر باشد، داریم

$$\int_1^a \ln x\,dx+\int_0^{\ln a} e^y\,dy=a\ln a$$

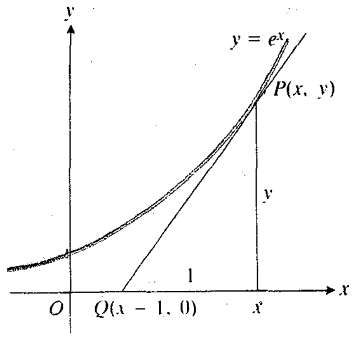
(راهنمایی: انتگرالها را به‌صورت مساحت تعبیر کنید.)

ب) برای محاسبهٔ $\int_1^a \ln x\,dx$ معادلهٔ مذکور در (الف) را حل کنید.

۹۷. نشان‌دهید که مماس برخم $y=e^x$ درنقطهٔ $P(x,y)$ و خط عمود از P برمحور x همواره آن محور را در نقاطی قطع می‌کنند که فاصلهٔ آنها یک واحد است (شکل ۴۲.۶). این یکی از راههایی است که نشان می‌دهد نمودار $y=e^x$ با چه سرعتی صعود می‌کند.

۹۸. اگر $dy/dx=2/e^y$ و وقتی $x=5$ داشته‌باشیم $y=0$، y را به‌صورت تابعی از x بیابید.

۹۹. با این شرط که وقتی $x=0$، $y=2$؛ معادلهٔ $dy/dx=y^2e^{-x}$ را حل کنید.



۴۲.۶ خط QP برخم درنقطهٔ P مماس است (مسألهٔ ۹۷). درشکل، مقیاس دقیق نیست.

۱۰۰. نقطهٔ $P(x,y)$ طوری درصفحه حرکت می‌کند که به‌ازای $t\geqslant 0$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t+2} \quad \text{و} \quad \frac{dy}{dt}=2t.$$

الف) اگر وقتی $t=0$، $x=\ln 2$ و $y=1$؛ x و y را به‌صورت توابعی از t بیان کنید.

ب) y را برحسب x بیابید.

پ) x را برحسب y محاسبه کنید.

ت) میانگین آهنگ تغییر y نسبت به x، وقتی t از ۰ تا ۲ تغییر می‌کند، چیست؟

ث) وقتی $t=1$، dy/dx را بیابید.

۱۰۱. اگر ذره‌ای در امتداد محور x چنان حرکت کند که مکانش در زمان t از $x=ae^{\omega t}+be^{-\omega t}$ به‌دست‌آید، که در آن a، b، و ω ثابت هستند، نشان‌دهید که ذره از مبدأ با نیرویی متناسب با مقدار تغییرمکان دفع می‌شود. (فرض کنید که نیرو برابراست با حاصلضرب جرم در شتاب.)

۱۰۲. ثابت کنید که

الف) اگر h ثابت مثبت و دلخواهی باشد،

$$\lim_{x\to\infty}(\ln x)/x^h=0.$$

ب) اگر n ثابت دلخواهی باشد،

$$\lim_{x\to+\infty}x^n/e^x=0.$$

۱۰۳. با استقرای ریاضی (پیوست ۲) ثابت کنید که به‌ازای هر عدد صحیح و مثبت n

$$\frac{d^n}{dx^n}(xe^x)=(x+n)e^x.$$

۱۰۴. الف) اگر $(\ln x)/x=(\ln 2)/2$، آیا الزاماً $x=2$؟

ب) اگر $(\ln x)/x=-2\ln 2$، آیا الزاماً $x=1/2$؟

۱۰۵. ماشین‌حساب. محاسبهٔ $\ln x$ با استفاده از ریشه‌های دوم.

الف) نشان‌دهید که

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1.$$

ب) نشان‌دهید که اگر x عدد مثبت دلخواهی باشد، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x}-1)=\ln x.$$

(راهنمایی: فرض کنید $x=e^{nh}$ و برابری مذکور در (الف) را به‌کار ببرید.)

برابری مذکور در (ب) روشی برای محاسبهٔ $\ln x$، با هرتعداد دلخواه ارقام اعشاری، به‌دست می‌دهد که در آن ازچیزی جز عمل سادهٔ ریشهٔ دوم گرفتن استفاده نمی‌شود. زیرا می‌توانیم بنویسیم $n=2^k$، وسپس $\sqrt[n]{x}$ را با k مرتبه‌متوالی ریشهٔ‌دوم گرفتن به‌دست آوریم.

۱۰۶. حد زیر را وقتی $n\to\infty$ بیابید

$$\frac{e^{1/n}+e^{2/n}+\dots+e^{(n-1)/n}+e^{n/n}}{n}.$$

۱۰۷. مطلوب‌است محاسبهٔ dy/dx درموارد زیر

الف) $y=x^{\tan 3x}$

ب) $x^{\ln y}=2$

پ) $y=(x^2+2)^{2-x}$

ت) $x^{(1/x)}$

۱۰۸. x را بیابید.

الف) $4^x=2^x$

ب) $x^x=2^x$، $x>0$

پ) $3^x=2^{x+1}$

ت) $4^{-x}=3^{x+2}$

۱۰۹. انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_0^{\pi/6}(\cos x)4^{-\sin x}\,dx$

ب) $\int_{\ln\log_4\ln 4}^{\ln\log_4\ln 16} e^x 4^{(e^x)}\,dx$

۱۱۰. اگر a یك عدد بزرگتر از ۱ باشد، ثابت کنید‌که نمودار $y=a^x$ دارای ویژگیهای زیر است.

الف) اگر $x_1>x_2$، آنگاه $a^{x_1}>a^{x_2}$.

ب) تقعر نمودار رو به بالاست.

پ) کل نمودار در بالای محور x قرار می‌گیرد.

ت) شیب در هر نقطهٔ دلخواه متناسب با عرض آن نقطه است، وضریب تناسب برابراست با عرض از مبدأ نمودار.

ث) وقتی $x\to-\infty$، خم به‌محور x نزدیك می‌شود.

۱۱۱. فرض کنید a و b اعداد مثبتی باشند به‌طوری‌که $a^b=b^a$. (مثلاً $4^2=2^4$.)

الف) نشان‌دهید که $(\ln a)/a=(\ln b)/b$.

ب) نشان دهید که نمودار تابع $f(x)=(\ln x)/x$ در $x=e$ یك ماکسیمم و در $x=e^{3/2}$ یك نقطهٔ عطف دارد، و وقتی x از طریق مقادیر مثبت به‌صفر می‌گراید، $f(x)$ به بینهایت منفی میل می‌کند، و وقتی x به بینهایت مثبت می‌گراید، $f(x)$ به صفر میل می‌کند. این نمودار را رسم کنید.

پ) با استفاده ازنتایج قسمتهای (الف) و(ب) نشان‌دهید که

i) اگر $0<a\leqslant 1$ و $a^b=b^a$، آنگاه $b=a$، و

ii) اگر $1<a<e$، یا اگر $a>e$، آنگاه دقیقاً یك عدد $b\neq a$ وجود دارد که $a^b=b^a$.

۱۱۲. آزمایش خون. درجنگ جهانی دوم لازم بودکه خون تعداد زیادی سرباز را آزمایش کنند. برای اینکه خون N نفر را آزمایش کنند دوراه متداول است: یك روش این است که خون هرفرد را جداگانه آزمایش می‌کنند. راه دیگر این است که خون x نفر را روی هم می‌ریزند و آن را آزمایش می‌کنند. اگر نتیجهٔ آزمایش منفی باشد، همین یك آزمایش برای همهٔ x نفر کافی‌است. اگر نتیجه مثبت باشد، آنگاه خون هریك از x نفر را جداگانه آزمایش می‌کنند، و لذا دراین حالت کلاً به $x+1$ آزمایش نیاز است. با استفاده از روش‌دوم و اندکی بهره‌گیری ازنظریهٔ احتمال می‌توان نشان‌داد که به‌طور متوسط، تعدادکل آزمایشها، y، برابر خواهد بود با

$$y=N\left(1-q^x+\frac{1}{x}\right).$$

اگر $q=0.99$ و $N=1000$، نشان‌دهید که مقدار صحیح xی که y را مینیمم می‌کند برابر ۱۱، و مقدار صحیح xی که y را ماکسیمم می‌کند برابر ۸۹۵ است. (نتیجهٔ دوم در عمل اهمیتی ندارد.) روش آزمایش دسته‌جمعی که در جنگ جهانی دوم به‌کار گرفته شد نسبت به روش آزمایش فردی ۸۰٪ باصرفه‌تر بود، اما نه با این مقدار qی مفروض.

۱۱۳. رشد جمعیت. براورد شده‌است که جمعیت کشور خاصی

درحال حاضر با آهنگ ۲٪ درسال زیاد می‌شود. فرض کنید که این آهنگ رشد (لحظه‌ای) همواره ادامه‌خواهدداشت. اگرجمعیت فعلی N_0 باشد، جمعیت در t سال بعد، N، چقدر براورد می‌شود؟ پس ازچند سال جمعیت دوبرابر می‌شود؟

۱۱۴. ولتاژدر یک خازن درحال تخلیه. دریک‌خازن درحال تخلیه، آهنگ تغییر ولتاژ برحسب ولت بر ثانیه متناسب است با ولتاژ. ضریب تناسب برابراست با منهای یک‌چهلم. ولتاژ را به صورت تابعی از زمان تعریف‌کنید. ظرف چند ثانیه ولتاژ به ۱۰٪ مقدار اولیه‌اش تقلیل می‌یابد؟

۱۱۵. سرعت متناسب با تغییر مکان. سرعت ذره‌ای که در امتداد محور x حرکت می‌کند متناسب است با x. ذره در زمان $t=0$ در $x=2$ و درزمان $t=10$ در $x=4$ است. مکان ذره در $t=5$ کجاست؟

۱۱۶. عبور از غشای یک سلول. درشرایط خاصی، نتیجهٔ عبور یک مادهٔ نامحلول از غشای یک‌سلول با معادلهٔ زیرتوصیف می‌شود.

$$\frac{dy}{dt}=k\frac{A}{V}(c-y).$$

در این معادله، y غلظت مادهٔ داخل سلول، و dy/dt آهنگ تغییرات y برحسب زمان‌است. حروف k، A، V، و c ثابت‌اند؛ k ضریب تراوایی (از ویژگیهای غشا)، A مساحت رویهٔ غشا، V حجم سلول، و c غلظت جسم خارج سلول است. این معادله حاکی است که آهنگ تغییرات غلظت مادهٔ داخل سلول متناسب است با اختلاف بین آن و غلظت مادهٔ خارج سلول.

الف) $y(t)$ را از معادله حساب‌کنید؛ $y(0)$ را با y_0 نمایش دهید.

ب) غلظت را درحالت ماندگار، $\lim_{t\to\infty} y(t)$، بیابید.