جورج توماس، راس فینی

حساب دیفرانسیل و انتگرال

و هندسهٔ تحلیلی

جلد اول ۲

ترجمهٔ مهدی بهزاد، سیامک کاظمی، علی کافی

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست

عنوان | صفحه

فصل ۵ کاربرد انتگرال معین

فصل ۶ تابعهای متعالی

فصل ۷ روشهای انتگرالگیری

فصل ۸ مقاطع مخروطی و سایرخمهای مسطح

فصل ۹ تابعهای هیپربولیک

فصل ۱۰ مختصات قطبی

پیشگفتار*

در این ویرایش جدید از کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسهٔ تحلیلی کوشیده‌ایم مفیدترین کیفیات و ویژگیهایی که ویرایشهای قبلی از نظر خوانندگان داشته‌اند، محفوظ بماند. با این‌حال، در این ویرایش یکی از جامعترین تجدیدنظرها در تاریخ سی سالهٔ این کتاب هم درصورت و هم در محتوا به عمل آمده‌است. این تجدیدنظرمبتنی است بردهها نقد، گفتگوهای متعدد با خوانندگان ویرایشهای قبلی، نامه‌های حاوی توصیه از دوستان، دانشجویان و مدرسان ازسراسر جهان. هدف کلی ما دراین تجدیدنظر این بوده است که کتاب را خواندنیتر، و مطالبش را بـرای مبتدیان قابل فهم‌ترسازیم بدون آنکه استانداردها و مطالبی را که خوانندگان مایل‌اند این کتاب داشته باشد، قربانی کنیم.

مخاطبان و پیشنیازها این کتاب تمام مطالب لازم را بـرای یك درس متعارف حساب دیفرانسیل و انتگرال که درسه ترم نیمساله یا چهار ترم سه ماهه به‌دانشجویان سالهای اول و دوم عرضه شود، دربردارد. پیشنیاز آن، آشنایی با جبر و مثلثات درحد معمولی‌است ولی برای یادآوری، فصل ۱ را بـا مرور مختصری برمختصات، خطها، تابعها، و نمودارها آغـاز کرده‌ایم. درفصل ۲ نیز مروری برمثلثات شده است.

ویژگیهای برگرفته از ویرایشهای قبلی

مـانند قبل، هدف مـا آموزاندن حساب دیفرانسیل و انتگرال و ارائهٔ آن نوع تعلیمی است که خوانندگان برای کاربرد مؤثر این حساب درکارهـای دانشگاهی و حرفـه‌ای آیندهٔ خود به‌آن نیاز خواهندداشت. برای‌انجام این‌کار، سطح ریاضی‌مطالب، جهتگیری کاربردی آن، تـأکیدکتاب برمثالهای حـل شده، وکثرت و تنوع تمرینها را محفوظ نگهداشته‌ایم و مانند قبل، ارتباطات بین حساب دیفرانسیل و انتگرال و برخی از روشهای عددی مورد استفاده در درسهای دیگر را نشان داده‌ایم.

سطح ریاضی گرچه شیوهٔ عرضهٔ مطالب در این ویرایش در بسیاری از موارد بسیار ساده‌تر از ویرایشهای قبلی است، ولی میزان دقت تقریباً یکسان است. در این ویرایش می‌کوشیم مطالب را بـدون توضیح‌دادن واضحات و درعین‌حال، بدون پاسخ‌دادن به‌پرسشهایی کـه خوانندگان آمـادگی پرسیدن آنها را ندارند، شرح دهیم. مثلا، قضیهٔ مـاکسمین را درمورد تابعهای پیوسته روی بازه‌هـای بسته بیان می‌کنیم و ازآن بـرای ارائهٔ قضیهٔ مقدار میانگین بهره می‌گیریم ولی قضیهٔ ماکسمین را ثـابت نمی‌کنیم و بـه بـررسی ویژگیهایی از دستگاه اعـداد حقیقی که قضیه به‌آنها بستگی دارد نمی‌پردازیم. چند اثبات سادهٔ ε-δیی در مورد حـدهـا درفصل ۱ می‌آوریم ولی اثبات قضایای حدی پیچیده‌تر را در پیوستها ذکر می‌کنیم.

کاربردها حساب دیفرانسیل و انتگرال برای حل‌مسائلی درفیزیك و نجوم ابداع شد، وگرچه در سیر پیشرفت خود بـه‌شاخهٔ ریاضی گسترده و مستقلی تبدیل شده است، اما اکثرکاربردهایش درخارج از ریاضیات هنوز بـا علوم [تجربی] و مهندسی در ارتباط‌انـد. همانند ویرایشهای قبلی، درکتاب حاضرهم‌کاربردها بیشتر درهمین زمینه‌ها هستند. نمونه‌هایی از این‌کاربردهـا عبارت‌اند از محاسبهٔ مقادیراکسترمم، مراکزجرم، کار ونیروی هیدرواستاتیکی، محاسبهٔ مدارهـای ماهواره‌هـا، و توصیف جریان سیال (بخشهای ۵.۳، ۸.۵، ۹.۵، ۱۰.۵، ۴.۱۴، و ۲.۱۹ را ببینید). ولی درسالهای اخیرحساب دیفرانسیل و انتگرال دربسیاری از رشته‌های دیگرهم اهمیت پیدا کرده است. ازجمله در اقتصاد، تجارت، علوم زیستی و حتی‌مسائل فیزیکی مربوط به‌ورزشها. بنابراین، مثالهای متنوعی هم از این رشته‌ها آورده‌ایم‌که مثلا چند مورد آن عبارت است از متوسط موجودی روزانـه، آهنگ تولد و رشد جمعیت وکارلازم برای نواختن ضربه به یك توپ‌گلف یا یك توپ تنیس. (صفحات ۳۰۰، ۳۱۴، ۳۷۵ را ببینید). هروقت حس کرده‌ایم‌کـه می‌توان

بدون تحمیل مطلبی به‌متن ارتباطاتی بین حساب دیفرانسیل و انتگرال و زندگی واقعی برقرار کرد، چنین کاری کرده‌ایم. در این ویرایش، صفحات بیشتری را به‌مراحل مسأله حل کردن در کاربردهایی که با مدلسازی ریاضی مربوط‌اند، اختصاص داده‌ایم، مثلا در اوایل بخش آهنگهای وابسته (صفحات ۱۸۰-۱۸۱)، و در حل مسألهٔ کابل آویزان (صفحات ۵۱۴-۵۱۵).

مثالهای حل‌شده تمرینها درجاهایی می‌آیند که خواننده باید دست به‌کار شود ولی مثالها درجاهایی می‌آیند که کار برعهدهٔ ماست. ما مثالهای مورد علاقهٔ خوانندگان را در این ویرایش حفظ کرده‌ایم و تعدادی مثال تازه هم آورده‌ایم که غالباً مراحل حل را با تفصیل بیشتری از قبل نشان می‌دهند. همچنین به جای برخی از مثالهای مشکل، مثالهای ساده‌تری آورده‌ایم که همان نکات را دربردارند. مثالها مربوط به‌مباحث متنوعی هستند از عایق‌کاری خط لولهٔ سراسری آلاسکا تا زهکشی و پرکردن باتلاقها، از برق شهر تا روشی برای ترسیم سهمیها؛ از تحلیل شکل طاق‌دروازهٔ غرب درسنت‌لوئیس تا معماهای محاسبات کامپیوتری و تغییردما در زیرسطح زمین (صفحات ۱۲۱، ۲۶۰، ۲۹۹، ۴۶۴، ۵۱۶، ۶۴۹ و انتهای بخش ۱۰.۱۶ را ببینید).

مجموعه‌های مسأله‌ها هر مجموعه از مسائل، آمیزه‌ای است از مسأله‌های عادی ریاضی و مسأله‌های مبارزطلب‌تر. در بسیاری از این مجموعه‌ها جهش از مسائل آسان به مسائل پیچیده تدریجیتر از قبل صورت می‌گیرد. تقریباً در هر مجموعه، مسائل کاربردی آمده است و بسیاری از مجموعه‌ها شامل تمرینهایی هستند که با ماشین محاسبه انجام می‌شود (صفحات ۱۱۰-۱۱۲، ۱۷۵-۱۸۰، ۲۶۱-۲۶۳) هر فصل با بخشی که شامل مسائل گوناگون است پایان می‌پذیرد. این مسأله‌ها به مباحثی که در فصل آمده‌اند، مربوط‌اند و ترتیب ارائهٔ آنها همان ترتیب ارائهٔ مباحث است. دربسیاری از این بخشهای پایانی، مطالبی [و مسائلی در ارتباط با آنها] آمده است که جالب‌اند ولی معمولا کمتر تدریس می‌شوند و ریاضیات مورد بحث در آنها، در راستای مطالب فصل است (صفحات ۳۲۴-۳۲۵ و۵۵۴-۵۵۵).

روشهای عددی بحثهای مربوط به‌ریشه‌یابی، تقریبهای خطی و درجهٔ دوم توابع، و تقریبهای عددی انتگرالها را درکتاب حاضر هم آورده‌ایم. این مباحث در ریاضیات و رشته‌های دیگر اهمیت روزافزونی می‌یابند. همانند ویرایشهای قبلی، گاه تمرینهایی آمده که به‌کمک ماشین محاسبه حل می‌شوند وگاه نیز در آخر مجموعه‌های مسائل ارجاعاتی نیز به برنامه‌های میکروکامپیوتری در *The Calculus Toolkit* شده است[1]. ولی مطالعهٔ متن مستلزم داشتن تجربهٔ کار با کامپیوتر یا ماشین‌حساب یا دسترسی به آنها نیست.

ویژگیهای جدید

علاوه برآنکه کوشیده‌ایم آنچه را که به‌نظر خوانندگان، بهترین ویژگیهای ویرایشهای قبلی بوده حفظ کنیم، کتاب را از ویژگیهای جدیدی برخوردار ساخته‌ایم تا نیازهای فعلی کلاسهای درس را برآورد.

مباحث ترسیم ترسیم اشکال سه‌بعدی غالباً دشوار است. بنابراین، برای ترسیم صفحه‌ها، استوانه‌ها، و رویه‌های دوبعدی و برای اینکه اشیاء سه‌بعدی چنان رسم شوند که سه بعدی به‌نظر برسند، رهنمودهای گام به‌گامی آورده‌ایم. رویه‌های مورد نظر در مباحث ترسیم و در تمرینها، رویه‌هایی هستند که خوانندگان بعداً در این کتاب هنگام مطالعهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال چندمتغیره با آنها سروکار خواهند داشت (انتهای بخشهای ۳.۱۳ و ۱۰.۱۵ را ببینید).

کیفیت تصویری و هنری بسیاری از تصویرهای قدیمی را دوباره رسم کرده‌ایم و تصاویر جدیدی هم به‌متن افزوده‌ایم تا فهم استدلالهای ریاضی و تصور خمها، رویه‌ها و اجسامی که در مثالها و تمرینها مطرح می‌شوند، آسانتر شود. تصاویر این ویرایش از ویرایشهای قبلی بیشتراست و مجموعه‌های مسائل هم از کیفیت تصویری بهتری برخوردارند.

چشم‌اندازهای فصلها هر فصل با مطلبی تحت عنوان چشم‌انداز آغاز می‌شود که مباحث فصل را با مباحث دیگر کتاب مربوط می‌سازد و اهمیت آنها را از لحاظ نظری و کاربردی شرح می‌دهد (مثلا ابتدای فصلهای ۴ و ۱۶ را ببینید.) بیشتر بخشهای کتاب نیز خود با مقدمهٔ کوتاهی شروع می‌شوند که زمینه را برای مباحثی که می‌خواهند مطرح کنند، فراهم می‌سازد. (مثلا صفحات ۳۴۴ و ۵۸۳ را ببینید.)

یادداشتهای تاریخی حساب دیفرانسیل و انتگرال، حاصل قرنها تلاش آدمی است، و ما برای آگاهاندن خواننده از این موضوع، یادداشتهایی در بارهٔ افرادی که در پیشرفت آن سهیم بوده‌اند و در بارهٔ کارهایی که آنها انجام داده‌اند، آورده‌ایم (مثلا یادداشت راجع به‌کار ماریا آنیزی درصفحهٔ ۴۹۰ و یادداشت راجع به‌سری تیلر درصفحهٔ ۶۲۱ را ببینید).

نمودارها و دستورالعملهایی برای مراجعهٔ سریع در این ویرایش نمودارها و دستورالعملهایی آورده‌ایم که در آنها دسته‌ای از

---

۱. نرم افزار *The Calculus Toolkit* شامل بیست و هفت برنامه در زمینهٔ مباحث مختلفی از تابعها گرفته تا میدانهای برداری است. این نرم افزار به استاد و دانشجو امکان می‌دهد که از میکروکامپیوتر به‌عنوان «گچ و تختهٔ الکترونیکی» استفاده کنند.

فرمولهای مربوط بههم فهرست بندی می‌شود، شیوه‌های عمل روشن می‌گردد، و خط‌مشی حل مسأله توصیف می‌شود. (صفحات ۲۸۷، ۳۹۷، ۴۱۱، و ۶۵۸ را ببینید).

تغییرات دیگر

علاوه بر کیفیاتی که در بالا برشمردیم، این ویرایش تفاوتهای مهم دیگری با ویرایشهای قبلی دارد.

تمایز بین مباحث اصلی و اختیاری کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال باید در یك زمان پاسخگوی نیاز درسهای متفاوت زیادی باشد و درنتیجه، مطالب چنین کتابی معمولا بیش از آن است که هرمدرس خاصی بدان نیاز دارد. برای کمك به‌خواننده که بین مباحث اصلی و حاشیه‌ای تمایز قائل شود، تعدادی از بخشها و زیر بخشها را با مربع توخالی (□) مشخص کرده‌ایم. این مربعها نشان‌دهندهٔ بخشهای اختیاری‌اند که مطالعهٔ آنها برای پیگیری بخشهای بعدی ضروری نیست.

تجدیدسازمان مباحث دراین ویرایش، دیفرانسیل در فصل ۲ معرفی می‌شود و تابعهای معکوس ازفصل ۲ به‌جایی‌که اولین بار درفصل ۶ به‌آنها نیاز داریم انتقال یافته‌اند. معرفی قاعدهٔ زنجیری از مقدمهٔ معادلات پارامتری تفکیك شده است. بخشهای طولانی کوتاه شده یا به دو بخش تقسیم گشته‌اند. (مثلا، مبحث تابعها و نمودارها درفصل ۱ وگرادیانها درفصل ۱۶) و برخی از بخشهای کوتاه درهم ادغام شده‌اند تا طول مبحث مناسب شود (قضیهٔ رول و قضیهٔ مقدار میانگین اکنون در یك مبحث آمده‌اند). برخی از مباحثی‌که کمتر مطرح‌اند ـ از قبیل قضایای پاپوس، جانشانی $z = \tan(x/2)$، کسینوسهای هادی، و تقسیم سریهای توانی ـ کوتاه شده، جزو مباحث اختیاری آمده، یا به‌مجموعه‌های مسائل انتقال یافته‌اند.

حساب‌دیفرانسیل‌و انتگرال چندمتغیره ترتیب ارائهٔ مطالب حساب دیفرانسیل و انتگرال چندمتغیره تغییر کرده‌و بیشتر آن از نو نوشته شده‌است. رویه‌های درجهٔ دوم از فصل مربوط به‌بردارها خارج‌شده‌و به‌یك‌فصل جدید(۱۵) منتقل شده که‌استوانه‌ها، مختصات استوانه‌ای، مختصات کروی، و مباحث ترسیم‌را در بردارد. ترتیب مطالب فصل ۱۴ که دربارهٔ توابع برداری و حرکت است، تغییر کرده و این‌فصل فشرده‌تر شده تا معرفی خمیدگی، پیچش و دستگاه **TNB** آسانتر شود. فصل قدیم در زمینهٔ مشتقات جزئی به‌دوفصل جداگانه تقسیم شده که یکی در بارهٔ نظریه و دیگری دربارهٔ کاربردهاست. شیوهٔ پرداختن به قضایای انتگرال برداری در فصل ۱۹ کاملا جدید است. این مبحث با انتگرالهای خمیده خطی، میدانهای برداری، و قضیهٔ گرین درصفحه شروع می‌شود، سپس به سراغ انتگرالهای رویه‌ای، قضیهٔ دیورژانس، و قضیهٔ استوکس می‌رود و با میدانهای پایستار وتوابع پتانسیل به‌پایان می‌رسد. ما همچنین ارتباط دنیای واقعی را بااین موضوع، که انگیزهٔ اولیهٔ پیدایش و رشدآن بوده است، بیشتر مورد بحث قرارمی‌دهیم.

کاربردهای جدید دهها کاربرد جدید را درکتاب آورده‌ایم؛ از جمله، تحلیل حرکت یك‌کامیون از روی نمودار زمان‌ـمسافت آن، محاسبهٔ آهنگ‌تغییر شعاع حباب صابون، بحث مقیاس دسیبل برای اندازه‌گیری صدا، وتعیین مشخصات مسیر توپ بیسبال در عبور از دیوار پارك فن‌دی در بوستون (مثلا صفحات ۱۴۳، ۱۸۵، ۳۷۱ را ببینید).

تجدیدنظر درشیوهٔ بررسی مباحث استاندارد ازمیان بسیاری از مباحثی‌که درشیوهٔ پرداختن به‌آنها تجدیدنظرشده، اینها را نام می‌بریم:

- دیفرانسیل (بخش ۴.۲)
- قاعدهٔ زنجیری (بخش ۵.۲)
- قضیه‌های اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال (بخش ۷.۴)
- حجم اجسام دورانی (بخشهای ۳.۵ و ۴.۵)
- گشتاور و مرکزجرم (بخشهای ۸.۵ و ۵.۱۸)
- معادله‌های پارامتری (بخشهای ۸.۲ و ۹.۸)
- دنباله‌ها، ازجمله بخشی در بارهٔ بازگشت و زبان کامپیوتری (بخش ۱.۱۱)
- آزمونهای همگرایی (بخشهای ۵.۱۱ و ۹.۱۱)
- ژاکوبیها، در دو بخش اختیاری (بخشهای ۳.۱۸ و ۶.۱۸)
- انتگرالهای خمیده‌خطی درمیدانهای برداری (بخش ۲.۱۹)
- مساحت رویه و انتگرالهای رویه‌ای (بخش ۴.۱۹)
- میدانهای مستقل ازمسیر و پایستار (بخش ۷.۱۹)

جورج توماس مؤسسهٔ تکنولوژی ماساچوست (M.I.T)

راس فینی مؤسسهٔ تکنولوژی ماساچوست (M.I.T)

---

* درترجمهٔ این پیشگفتار، برخی از قسمتهای پایانی آن‌که برای خوانندگان فارسی‌زبان مفید به‌نظر نرسیده، حذف شده است. درضمن چندجمله راجع به‌کیفیت رنگهای تصاویر کتاب اصلی و نحوهٔ تقسیم‌بندی‌کتاب در دوجلد، ترجمه نشده است.

درامد: حساب دیفرانسیل و انتگرال چیست؟

حساب دیفرانسیل و انتگرال، ریاضیات مربوط به‌حرکت و تغییر است. هرجا حرکت یا رشدی‌هست، هرجا نیروهای متغیری درکار تولیدشتاب‌اند، حساب‌دیفرانسیل و انتگرال‌درست‌همان ریاضیاتی است که به‌کار می‌آید. این‌امر درآغاز پیدایش این مبحث صادق بود، و امروز نیز چنین است.

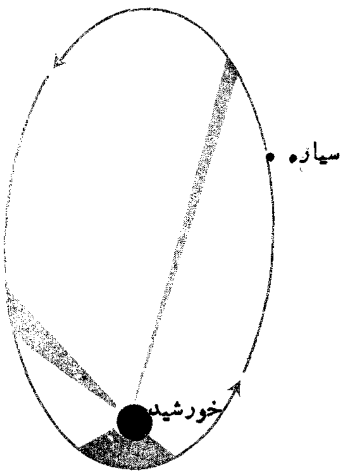
حساب دیفرانسیل و انتگرال در آغاز برای براورده‌کردن نیازهای دانشمندان قرن هفدهم ابداع شد. حساب دیفرانسیل با مسألهٔ محاسبهٔ آهنگهای تغییر سروکار داشت و به دانشمندان امکان می‌داد شیب خمها را تعریف‌کنند، سرعت و شتاب اجسام متحرك را محاسبه کنند، زاویهٔ آتشباری توپ را برای حصول بیشترین برد به‌دست‌آورند، و زمانهایی راکه سیارات نزدیکترین و دورترین فاصله را از هم دارند، پیش‌بینی‌کنند. حساب انتگرال به‌مسألهٔ تعیین تابع براساس اطلاع ازآهنگ تغییرش می‌پرداخت و این امکان را فراهم می‌کردکه مکان آتی یك جسم را با توجه به‌مکان فعلی‌اش و نیروهای مؤثر برآن محاسبه‌کنند، مساحت‌نواحی نامنظم واقع درصفحه را بیابند، طول خمها را اندازه بگیرند، و محل مرکزجرم هرجسم دلخواه را به‌دست‌آورند.

پیش از پیشرفتهای ریاضیی که به‌کشف بزرگ‌ آیزك نیوتن (۱۶۴۲–۱۷۲۷) و بارون گوتفرید ویلهلم‌لایب نیتس (۱۶۴۶–۱۷۱۶) انجامید، یوهانس‌کپلر منجم (۱۵۷۱–۱۶۳۰) با بیست‌سال تفکر، ثبت اطلاعات، و انجام محاسبات، سه‌قانون‌حرکت سیارات را که اکنون به‌نام او معروف‌اند، کشف کرد:

۱. هرسیاره درمداری بیضی‌شکل حرکت می‌کندکه یك‌کانونش درخورشید قرار دارد (شکل).

۲. بردار شعاعی (یعنی خط واصل بین خورشید وسیاره) درمدتهای مساوی مساحات مساوی را می‌روبد.

۳. مربع مدت گردش هر سیاره به‌دور خورشید، متناسب‌است با مکعب فاصلهٔ‌متوسط آن‌سیاره ازخورشید. (اگر T مدت گردش سیاره به‌دور خورشید و D فاصلهٔ‌متوسط باشد، نسبت T^2/D^3 برای تمام سیاره‌های منظومهٔ شمسی ثابت است.)



گردش سیاره‌ای به دور خورشیدش. در اینجا ناحیه‌های سایه‌خورده مساحتهای برابردارند. طبق قانون دوم‌کپلر، سیاره‌آن قسمت ازمرز این نواحی را که روی مدارش قرار دارد درزمانهای مساوی می‌پیماید. بنابراین، سیاره در نزدیکی خورشید تندترحرکت می‌کند تا درقسمتهای دورتر مدار.

همان‌طورکه در بخش ۴.۱۴ خواهید دید، استنتاج قوانین کپلر از قوانین حرکت نیوتن با استفاده ازحساب دیفرانسیل و انتگرال‌کارساده‌ای است.

امروز حساب دیفرانسیل و انتگرال و تعمیمهای آن در آنالیز ریاضی قلمرو واقعاً گسترده‌ای دارند و فیزیکدانان، ریاضیدانان، و منجمانی‌که اول‌بار این موضوع را ابداع کردند مسلماً شگفت‌زده و شادمان می‌شدند اگرمی‌دیدندکه این‌موضوع

چه انبوهی ازمسائل را حل می‌کند و چه رشته‌هـای متنوعی آن را برای مدلسازی ریاضی به‌کارمی‌برند و به‌فهم‌عالم و دنیای پیرامون ما کمك می‌کنند. امیدواریم شما هم دراین شگفت‌زدگی و لـذت سهیم باشید.

اقتصاددانان ازحساب دیفرانسیل و انتگرال برای پیش‌بینی گرایشهای‌کلی اقتصادی استفاده می‌کنند. اقیانوس‌شناسان از این حساب برای فرمولبندی نظریه‌هایی دربارهٔ جریانهای دریایی بهره می‌گیرند و هواشناسان آن را برای توصیف جریـان هوای جو به‌کارمی‌گیرند. زیست‌شناسان به‌کمك‌حساب دیفرانسیل و انتگرال میزان جمعیت را پیش‌بینی می‌کنند و تأثیرجانوران شکارگرمانند روباه‌را برجمعیت جانوران‌شکارشونده تشریح‌می‌کنند. پژوهشگران پزشکی با استفاده از این حساب تجهیزات فراصوتی و پرتو x را برای بازبینی اندامهای داخلی بدن طراحی می‌کنند و دانشمندان علوم فضایی‌آن را بـرای طـراحی موشکها وکشف سیاره‌هـای دوردست بـه‌کار می‌گیرنـد. روانشناسان از حساب دیفرانسیل و انتگرال برای درك توهمات بصری استفاده می‌کنند و فیزیکدانان آن را برای طراحی سیستمهای نـاوبری لخت و مطالعهٔ مـاهیت زمان و عالم به‌کار می‌بـرند. مهندسان هیدرولیك به‌کمك حساب دیفرانسیل و انتگرال الگوهای مطمئنی برای آب‌بندی شیرها در خطوط لوله می‌یابند و مهندسان برق با به‌کارگیری آن، تجهیزات استروبوسکوپی‌را طراحی ومعادلات‌دیفرانسیلی‌راکه توصیف‌کنندهٔ جریان الکتریکی درکامپیوترها هستند، حل می‌کنند. تولیدکنندگان وسائل ورزشی‌برای طراحی‌راکتهای تنیس و بیسبال، وتحلیلگران بازار سهام برای پیش‌بینی قیمتها و ارزیابی مخاطرهٔ نـرخ بهره، این حساب را به‌کارمی‌گیرند و فیزیولوژیست‌ها با استفاده ازآن تکانه‌هـا (ایمپالسها)ی الکتریکی را در نورونهای دستگاه عصبی انسان توصیف می‌کنند. شرکتهای دارویی برای‌تعیین میزان‌مناسب موجودی دارو، و تولیدکنندگان الوار برای تعیین مناسبترین‌زمان قطع درختان، به‌کمك این حساب نیازمندنـد. این فهرست عملا بی‌پایان است زیرا امروز حساب دیفرانسیل و انتگرال تقریباً در هرزمینه و حرفه‌ای به‌طریقی به‌کار می‌رود.

حساب دیفرانسیل و انتگرالی کـه امروز به‌کار می‌بریم از نظرتاریخی حـاصل تلاشهای افـراد بسیاری است. ریشه‌های این حساب را تا هندسهٔ کلاسیك یونانی می‌تـوان ردیابی‌کرد، ولی ابداع آن عمدتاً کار دانشمندان قـرن هفدهم است. از میان این دانشمندان می‌تـوان رنه‌دکارت (۱۵۹۶–۱۶۵۰)، بونـا ونتورا کاوالیری[1] (۱۵۹۸–۱۶۴۷)، پیردوفرما (۱۶۰۱–۱۶۶۵)، جان والیس (۱۶۱۶–۱۷۰۳) و جیمزگرگوری (۱۶۳۸–۱۶۷۵) را نام‌برد. این‌کار با ابداعات بزرگ‌نیوتن و لایب‌نیتس به‌اوج خود رسید. آنان پیشگام بودند.

پیشرفت حساب دیفرانسیل و انتگرال درطی قرن بعد بـا سرعت زیادی ادامه یافت و هرروز کاربردهای جدیدی برای آن درهندسه، مکانیك، مهندسی، و نجوم پیدا می‌شد. در زمرهٔ مهمترین افـرادی کـه در این زمینه سهم داشتند، چندین نسل از برنولیها مخصوصاً یـاکوب برنولی (۱۶۵۴–۱۷۰۵) و بـرادرش یوهان برنولی (۱۶۶۷–۱۷۴۸) بودند (خانوادهٔ برنولی همان نقشی را در ریاضیات داشتندکه خـانوادهٔ باخ درموسیقی)؛ همچنین باید از لئونهارت اویلر (۱۷۰۷–۱۷۸۳) ـ‌که بـا قـدرت ابـداع خارق‌العاده‌اش چهرهٔ اصلی ریاضیات درقرن هجدهم بود ـ یادکرد و نیز از ژوزف لـوئی‌لاگرانـژ (۱۷۳۶–۱۸۱۳)، و آدریـن ماری‌لژاندر (۱۷۵۲–۱۸۳۳)، و بسیاری دیگر.

تکمیل ساختار منطقی روشهای حساب دیفرانسیل و انتگرال را ریاضیدانان قـرن نوزدهم ازجمله برنهارد بولتسانو (۱۷۸۱–۱۸۴۸)، آگـوستین لـوئی‌کـوشی (۱۷۸۹–۱۸۵۷)، و کارل وایرشتراس (۱۸۱۵–۱۸۹۷) برعهده‌گرفتند. همچنین‌قرن‌نوزدهم شاهد دورجدیدی از تعمیمهای‌جالب حساب دیفرانسیل و انتگرال و پیشرفتهای بزرگ ریاضیات در ورای این‌حساب بـود. بـرای کسب اطلاعاتی درمورد این پیشرفتها می‌توانیدکتاب مهم موریس کلاین تحت عنوان اندیشهٔ ریاضی از دوران باستان تا عصر جدید[2] را مطالعه‌کنید.

جان‌فون نویمان (۱۹۰۳–۱۹۵۷) یکی از ریـاضیدانـان بزرگ قـرن بیستم نوشت «حساب دیفرانسیل و انتگرال نخستین دستاورد ریاضیات نوین است و درك اهمیت‌آن کارآسانی نیست. به‌عقیدهٔ من، این حساب روشنتر ازهرمبحث دیگری مرحلهٔ آغازی ریاضیات نوین را توصیف می‌کند؛ و نظام آنـالیز ریاضی، کـه توسیع‌منطقی آن است، هنوز بزرگترین پیشرفت فنی درتفکر دقیق به‌شمار می‌آید.»

1. Bonaventura Cavalieri

2. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (New York: Oxford University Press, 1972).

۷

روشهای انتگرالگیری

چشم‌انداز

هدف همهٔ روشهای انتگرالگیری تبدیل انتگرالهای ناآشنا به انتگرالهایی است که یا آنها را می‌شناسیم یا درجداول موجودند. روش جانشانی روش اصلی انتگرالگیری و روشی است که تاکنون آن‌را به‌کار می‌برده‌ایم. جز این روش، سه روش با کاربردهای خاصتر نیز وجود دارد. این روشها عبارت‌اند از انتگرالگیری جزء به‌جزء، استفاده از جانشانیها و اتحادهای مثلثاتی برای ترکیب مربعات و حذف ریشهٔ دوم، و انتگرالگیری به‌کمک تجزیه به‌کسرهای ساده.

روش اصلی انتگرالگیری از توابع گویا، روش تجزیه به‌کسرهای ساده است. به‌کمک این روش می‌توان هر کسر دلخواهی از دوچند جمله‌ای را به‌مجموعی از کسرهای ساده‌تری تبدیل کرد که‌از آنها می‌توان با استفاده از جانشانی انتگرال گرفت.

در ادامهٔ فصل به‌انتگرال شماری از حاصلضربها و توانهای توابع مثلثاتی (که هم در ریاضیات محض و هم در ریاضیات کاربردی اهمیت دارند) نظری می‌افکنیم و با شیوهٔ استفاده از «جدول مختصر انتگرالها» که درانتهای کتاب آمده، آشنا می‌شویم. همچنین به‌توصیف روشی برای محاسبهٔ انتگرالها روی بازه‌های باز و نامتناهی می‌پردازیم. فصل را با بحثی مختصر دربارهٔ فرمولهای کاهش توان به پایان می‌بریم. به‌کمک این فرمولها می‌توان انتگرال توانهای بزرگ توابع را برحسب انتگرال توانهای کوچکتر که مستقیماً قابل محاسبه‌اند بیان کرد.

فصل را با مروری برآنچه‌که تاکنون دیده‌ایم و نیز ذکر چند توصیه آغاز می‌کنیم.

۱.۷ فرمولهای اصلی انتگرالگیری

چون انتگرالگیری نامعین عکس مشتقگیری است، محاسبهٔ انتگرالی چون

$$\int f(x)\,dx$$

معادل یافتن تابعی چون $F(x)$ است که مشتقش $f(x)$ یا دیفرانسیلش $f(x)\,dx$ باشد. برای اینکه یافتن F آسانترشود، مانند فصول پیشین بامعکوس کردن فرمولهای دیفرانسیلی، جدولی از صورتهای متداول انتگرالی تهیه می‌کنیم. سپس می‌کوشیم انتگرال مورد نظر را با یکی از صورتهای متداول تطبیق دهیم. جدول ۱.۷ صورتهای متداولی را که تاکنون به دست آورده‌ایم نشان می‌دهد. فهرست مفصلتری ازاین صورتهای متداول درجدول انتگرالهای انتهای کتاب موجود است.

چنانچه انتگرالی باهیچ یك‌ازصورتهای موجود درجداولی که دراختیار داریم منطبق نباشد می‌کوشیم به‌کمك جانشانیها و عملیات جبری آن را به‌یکی ازاین صورتها تبدیل کنیم. مثالها و مسائل این فصل به‌گونه‌ای طرح شده‌اندکه برمهارت خواننده در عملیات بسیار سودمند جانشانی و تبدیلهای جبری بیفزایند. سعی شده است این مسائل ومثالها نسبتاً ساده باشند تا به‌جای درگیر شدن خواننده با عملیات جبری، توجه او بیشتر به‌روشهای لازم معطوف شود. اغلب این مسائل خاص را می‌توان به‌کمك جداول مستقیماً حل کرد. اما حل این مسائل به‌این روش به‌هدف کسب

جدول ۱۰۷ فرمولهای انتگرالهایی که تاکنون به‌دست‌آورده‌ایم (صورتهای متداول)

	انتگرالها		دیفرانسیلها
۱.	$\int du = u + C$	۱.	$du = \frac{du}{dx}dx$
۲.	$\int a\,du = a\int du$	۲.	$d(au) = a\,du$
۳.	$\int (du + dv) = \int du + \int dv$	۳.	$d(u+v) = du + dv$
۴.	$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$	۴.	$d(u^n) = nu^{n-1}\,du$
۵.	$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$	۵.	$d(\ln u) = \frac{du}{u}$
۶.	$\int e^u\,du = e^u + C$	۶.	$d(e^u) = e^u\,du$
۷.	$\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C$	۷.	$d(a^u) = a^u \ln a\,du$
۸.	$\int \cos u\,du = \sin u + C$	۸.	$d(\sin u) = \cos u\,du$
۹.	$\int \sin u\,du = -\cos u + C$	۹.	$d(\cos u) = -\sin u\,du$
۱۰.	$\int \tan u\,du = \ln\lvert\sec u\rvert + C$	۱۰.	$d(\ln\lvert\sec u\rvert) = \tan u$
۱۱.	$\int \cot u\,du = \ln\lvert\sin u\rvert + C$	۱۱.	$d(\ln\lvert\sin u\rvert) = \cot u$
۱۲.	$\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$	۱۲.	$d(\tan u) = \sec^2 u\,du$
۱۳.	$\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$	۱۳.	$d(\cot u) = -\csc^2 u\,du$
۱۴.	$\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$	۱۴.	$d(\sec u) = \sec u \tan u\,du$
۱۵.	$\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$	۱۵.	$d(\csc u) = -\csc u \cot u\,du$
۱۶.	$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u + C$	۱۶.	$d(\sin^{-1} u) = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$
۱۷.	$\int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} u + C$	۱۷.	$d(\tan^{-1} u) = \frac{du}{1+u^2}$
۱۸.	$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \sec^{-1}\lvert u\rvert + C$	۱۸.	$d(\sec^{-1} u) = \frac{du}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2-1}}$

مهارت که احتمالاً بعداً بـه‌آن نیاز است لطمه می‌زند. آنچه مهم است، داشتن همین مهارت است ونـه یافتـن جـواب خاص یك مسألهٔ مفروض.

چون انتگرالگیری برمشتقگیری استوار است، در جـدول ۱.۷ علاوه برفرمولهای انتگرالی فرمولهای دیفرانسیلی فصول قبل نیز آمـده است. فعلاً لازم نیست فرمولهای این جـدول را حفظ کنید وهرگاه لازم باشد می‌توانید به آن مـراجعه‌کنید. بـررسی مختصری شمارا مجاب می‌کندکه درحال حاضر با پانـزده فرمول نخست دیفرانسیلها آشنایید. وتا آنجاکه بـه‌انتگرالگیری مربوط می‌شود، تمرین در روشها شمارا قادرمی‌سازدکه بدون حفظ‌کردن فرمولهای دیفرانسیلهای توابع مثلثاتی معکـوس، انتگرالهای سه سطر آخر جدول را بیابید.

فعلاً از چه نوع توابعی می‌تـوان مستقیماً به کمك جدول ۱.۷ انتگرال گرفت؟

توانها

$$\int u^n\,du,\quad \int\frac{du}{u}$$

توابع نمایی

$$\int e^u\,du,\quad \int a^u\,du$$

توابع مثلثاتی

$$\int \sin u\,du,\quad \int \cos u\,du,\quad \int \tan u\,du,\quad \int \cot u\,du$$

توابع جبری

$$\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}},\quad \int\frac{du}{1+u^2},\quad \int\frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}$$

البته ترکیبات دیگری از توابع مثلثاتی نظیر $\int\sec^2 u\,du$ نیز تصادفاً بااستفاده از این جـدول قابل انتگرالگیری‌انـد. چه نوع توابع متداولی دراین جدول نیامده است؟

لگاریتمها

$$\int \ln u\,du,\quad \int \log_a u\,du$$

توابع مثلثاتی

$$\int \sec u\,du,\quad \int \csc u\,du$$

توابع جبری

$$\int\frac{du}{a^2\pm u^2}\ (a^2\neq 1 \text{ به‌ازای }),\quad \int\frac{du}{au^2+bu+c}$$

$$\int\sqrt{a^2\pm u^2}\,du,\quad \int\sqrt{u^2-a^2}\,du$$

$$\int\sqrt{au^2+bu+c}\,du$$

و غیره.

توابع معکوس

$$\int \sin^{-1}u\,du,\quad \int \tan^{-1}u\,du$$

و غیره.

سرانجام روش محاسبهٔ همهٔ انتگرالهای این جدول وبرخی انتگرالهای دیگر را شرح می‌دهیم. امار‌وشی وجود نداردکه همهٔ مسائل انتگرالگیری را برحسب توابع مقدماتی حل‌کند، و برخی انتگرالها را نمی‌توان با هیچ روش خاصی محاسبه‌کرد.

مثالهای‌زیر مروری‌است برروش جانشانی‌درانتگرالگیری. هدف ما این است‌که انتگرالها را به‌یکی از صورتهای موجود در یك جدول، دراینجا جدول ۱.۷، تبدیل کنیم.

مثال ۱ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int\frac{dx}{1+4x^2}.$$

حل: این انتگرال نظیر صورت متداول

$$\int\frac{du}{1+u^2}=\tan^{-1}u+C$$

(فرمول ۱۷ جدول) است‌اگر $2x$ به‌جای u بنشیند. باجانشانیهای

$$u=2x\text{، }\quad du=2\,dx\text{، }\quad \text{و}\quad dx=\frac{1}{2}du$$

داریم

$$\int\frac{dx}{1+4x^2}=\int\frac{(1/2)\,du}{1+u^2}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{1+u^2}$$

$$=\frac{1}{2}\tan^{-1}u+C=\frac{1}{2}\tan^{-1}2x+C.\quad\blacksquare$$

مثال ۲ مطلوب است

$$\int\sqrt{1-5x}\,dx.$$

حل: با جانشانیهای

$$u=1-5x,\quad du=-5\,dx,\quad dx=-\frac{1}{5}du$$

و به‌کمك فرمول ۴ به‌ازای $n=1/2$ داریم

$$\int\sqrt{1-5x}\,dx=\int\sqrt{u}\,.\,-\frac{1}{5}du=-\frac{1}{5}\int\sqrt{u}\,du$$

$$=-\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}+C$$

$$=-\frac{2}{15}(1-5x)^{3/2}+C.\quad\blacksquare$$

مثال ۳ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int\frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx.$$

حل: با جانشانیهای

$$u=\ln x,\quad du=\frac{1}{x}dx$$

داریم

$$\int\frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx=\int\sin u\,du=-\cos u+C$$

$$=-\cos(\ln x)+C.\quad\blacksquare$$

مثال ۴ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\sin x}\cos x\,dx.$$

حل: با جانشانیهای

$$u=1+\sin x,\quad du=\cos x\,dx$$

داریم

$$\int\sqrt{1+\sin x}\cos x\,dx=\int\sqrt{u}\,du=\int u^{1/2}\,du$$

$$=\frac{2}{3}u^{3/2}+C$$

$$=\frac{2}{3}(1+\sin x)^{3/2}+C.$$

حدود انتگرالگیری چه می‌شوند؟ دوکار (با توجه به‌بخش ۸.۴) می‌توان کرد: (۱) محاسبهٔ انتگرال تبدیل شده با حدود تبدیل شده یا (۲) محاسبهٔ انتگرال اصلی با حدود اصلی.

روش ۱. حدود تبدیل شده. وقتی $x=0$،

$$u=1+\sin(0)=1$$

و وقتی $x=\pi/2$،

$$u=1+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=2.$$

بنابراین،

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\sin x}\cos x\,dx=\int_1^2\sqrt{u}\,du=\frac{2}{3}u^{3/2}\Big]_1^2$$

$$=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

روش ۲. حدود اصلی

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\sin x}\cos x\,dx$$

$$=\frac{2}{3}(1+\sin x)^{3/2}\Big]_0^{\pi/2}$$

$$=\frac{2}{3}(1+1)^{3/2}-\frac{2}{3}(1+0)^{3/2}$$

$$=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).\quad\blacksquare$$

مثال ۵ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int_0^{\pi/2}\cos^4x\sin^3x\,dx.$$

حل: برای اینکه بتوانیم این انتگرال را محاسبه‌کنیم از اتحاد مثلثاتی $\sin^2x=1-\cos^2x$ استفاده می‌کنیم

$$\int_0^{\pi/2}\cos^4x\sin^3x\,dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}\cos^4x(1-\cos^2x)\sin x\,dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}(\cos^4x-\cos^6x)\sin x\,dx$$

$$=-\frac{\cos^5x}{5}+\frac{\cos^7x}{7}\Big]_0^{\pi/2}$$

$$=(-0+0)-\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{5}-\frac{1}{7}=\frac{2}{35}.$$

اگر فوراً متوجه چگونگی محاسبهٔ انتگرال $(\cos^4 x - \cos^6 x)\sin x$ نشدید، جانشانیهای زیر را انجام دهید

$$u = \cos x, \quad du = -\sin x\, dx.$$

به‌این ترتیب

$$\int_0^{\pi/2} (\cos^4 x - \cos^6 x)\sin x\, dx$$

$$= \int_{u=1}^{u=0} (u^4 - u^6)(-du)$$

$$= \int_0^1 (u^4 - u^6)du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7}\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{35}. \quad \blacksquare$$

انتگرالهای غیرمقدماتی

کار جوئل موزس و دیگران در MIT[1] درتهیهٔ برنامهٔ کامپیوتری MACSYMA ، که انتگرالهای نامعین را با عملیات نمادین محاسبه می‌کند، باعث شدکه توجه مجددی به‌این مطلب شودکه چه انتگرالهایی را می‌توان به‌صورت ترکیب جبری تعدادی متناهی‌از توابع مقدماتی (توابعی‌که مطالعه کرده‌ایم) بیان‌کرد و برای محاسبهٔ چه‌انتگرالهایی به‌سریهای نامتناهی (فصل ۱۲) یاروشهای عددی نیاز است. نمونه‌هایی‌ازانتگرالهای دستهٔ اخیرتابع خطای

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

و انتگرالهایی نظیر

$$\int \sqrt{1+x^4}\, dx \quad \text{و} \quad \int \sin x^2\, dx$$

هستندکه درمهندسی وفیزیک با آنها مواجه می‌شویم. این‌انتگرالها وتعداد دیگری از نظایر آنها مانند

$$\int \frac{e^x}{x} dx, \quad \int e^{(e^x)}\, dx, \quad \int \frac{1}{\ln x} dx$$

$$\int \ln(\ln x)\, dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx$$

$$\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}\, dx, \quad 0 < k < 1$$

آنچنان ساده به‌نظر می‌رسندکه مارا وسوسه می‌کنندکه بکوشیم آنها را به‌دست آوریم. اما می‌توان اثبات کردکه برای محاسبهٔ این انتگرالها فرمول ساده‌ای وجود ندارد. یعنی راهی وجود نداردکه بتوان این انتگرالها را به‌صورت ترکیبات متناهی از توابع مقدماتی بیان‌کرد. همین مطلب درمورد انتگرالهایی‌که پس‌از جانشانی به‌این انتگرالها تبدیل می‌شوند نیز صدق می‌کند. هیچ یك از انتگرالهایی‌که دراین فصل از شما خواسته شده آنها را محاسبه‌کنید ازاین دست نیستند، اما ممکن‌است گهگاه درجاهای دیگری با این انتگرالهای غیرمقدماتی مواجه شوید.

مساله‌ها

انتگرالهای مسائل ۱ــ۱۶ را به‌کمك جانشانی داده شده به‌صورت متداول درآورید وسپس آنهارا محاسبه‌کنید.

۱. $\int 6x\sqrt{3x^2+5}\, dx, \quad u = 3x^2+5$

۲. $\int \frac{16x\, dx}{8x^2+2}, \quad u = 8x^2+2$

۳. $\int_0^{\sqrt{\ln 2}} x e^{x^2}\, dx, \quad u = x^2$

۴. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{1+\sin x}}, \quad u = 1+\sin x$

۵. $\int_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{8x^2+1}}, \quad u = 8x^2+1$

۶. $\int \frac{\sin x}{3+4\cos x} dx, \quad u = 3+4\cos x$

۷. $\int e^x \sec^2(e^x)\, dx, \quad u = e^x$

۸. $\int_1^3 \frac{dy}{\sqrt{y}(1+y)}, \quad u = \sqrt{y}$

۹. $\int e^x\sqrt{3+4e^x}\, dx, \quad u = 3+4e^x$

۱۰. $\int_4^9 \frac{dx}{x-\sqrt{x}}, \quad u = \sqrt{x}$

---

[1] مؤسسهٔ (دانشگاه) تکنولوژی ماساچوست آمریکا

۱۱. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x},\quad u=\ln x$

۱۲. $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^x\,dx}{1+e^x},\quad u=1+e^x$

۱۳. $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx,\quad u=\sqrt{x}$

۱۴. $\displaystyle\int \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx,\quad u=\sqrt{x}$

۱۵. $\displaystyle\int \tan x\sec^2 x\,dx,\quad u=\tan x$

۱۶. $\displaystyle\int \tan x\sec^2 x\,dx,\quad u=\sec x$

در مسائل ۱۷–۲۰، انتگرالها را به‌کمک اتحادها و جانشانیهای داده شده به‌صورت متداول درآورید وسپس آنها رامحاسبه‌کنید.

۱۷. $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx,\quad \cos^2 x=1-\sin^2 x,\quad u=\sin x$

۱۸. $\displaystyle\int \sin^4 x\cos^3 x\,dx,\quad \cos^2 x=1-\sin^2 x$

$u=\sin x$

۱۹. $\displaystyle\int \tan^3 x\sec x\,dx,\quad \tan^2 x=\sec^2 x-1$

$u=\sec x$

۲۰. $\displaystyle\int \tan^3 x\sec^3 x\,dx,\quad \tan^2 x=\sec^2 x-1$

$u=\sec x$

درمسائل ۲۱–۸۰، جانشانیهایی به‌دست‌آوریدکه بتوان به‌کمک آنها انتگرالها را به صورتهای متداول درآورد. سپس انتگرالها را محاسبه‌کنید.

۲۱. $\displaystyle\int_{1/2}^{3} \sqrt{2x+3}\,dx$

۲۲. $\displaystyle\int_1^{40} \frac{dx}{3x+5}$

۲۳. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x-7)^2}$

۲۴. $\displaystyle\int \frac{(x+1)\,dx}{x^2+2x+3}$

۲۵. $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} \frac{\sin x\,dx}{2+\cos x}$

۲۶. $\displaystyle\int \tan^3 2x\sec^2 2x\,dx$

۲۷. $\displaystyle\int \sqrt{\sin x}\cos x\,dx$

۲۸. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{2+\tan x}\,dx$

۲۹. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}\,dx$

۳۰. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} 8\cos^3 2x\sin 2x\,dx$

۳۱. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 2x\cos^3 2x\,dx$

(راهنمایی: $\cos^3 2x=\cos 2x\,(1-\sin^2 2x)$.)

۳۲. $\displaystyle\int \csc^4 x\,dx$

(راهنمایی: $\csc^4 x=\csc^2 x(1+\cot^2 x)$.)

۳۳. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

۳۴. $\displaystyle\int x^{1/3}\sqrt{x^{4/3}-1}\,dx$

۳۵. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

۳۶. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin 2x\,dx$

۳۷. $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x}{1+x^2}\,dx$

۳۸. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(x^2)\,dx$

۳۹. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 2x}{1+\cos 2x}\,dx$

(راهنمایی: $\sin^2 2x=1-\cos^2 2x$)

۴۰. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}}$

۴۱. $\displaystyle\int_{0}^{1/2}\frac{2\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

۴۲. $\displaystyle\int_{0}^{1/\sqrt{2}}\frac{2v\,dv}{\sqrt{1-v^4}}$

۴۳. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(3x^2+4)^3}$

۴۴. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+5}\,dx$

۴۵. $\displaystyle\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^3+5}}$

۴۶. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{4x^2+1}$

۴۷. $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2}e^{2x}\,dx$

۴۸. $\displaystyle\int e^{\cos x}\sin x\,dx$

۴۹. $\displaystyle\int\frac{dx}{e^{3x}}$

۵۰. $\displaystyle\int\frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,dx$

۵۱. $\displaystyle\int\frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$

۵۲. $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{3}/3}\frac{dt}{1+9t^2}$

۵۳. $\displaystyle\int\cos^2 x\sin x\,dx$

۵۴. $\displaystyle\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x}$

۵۵. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2}\cot^3 x\csc^2 x\,dx$

۵۶. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/3}\tan 3x\sec^2 3x\,dx$

۵۷. $\displaystyle\int\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{e^{2x}-e^{-2x}}\,dx$

۵۸. $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\sin 2x\cos^2 2x\,dx$

۵۹. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos\theta)^3\sin\theta\,d\theta$

۶۰. $\displaystyle\int te^{-t^2}\,dt$

۶۱. $\displaystyle\int\frac{dt}{t\sqrt{4t^2-1}}$

۶۲. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

(راهنمایی: صورت ومخرج را در e^x ضرب کنید.)

۶۳. $\displaystyle\int\frac{\cos x\,dx}{\sin x}$

۶۴. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\frac{\cos x\,dx}{1+\sin x}$

۶۵. $\displaystyle\int\sec^3 x\tan x\,dx$

۶۶. $\displaystyle\int\frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{1+\cos\theta}}$

۶۷. $\displaystyle\int e^{\tan 3x}\sec^2 3x\,dx$

۶۸. $\displaystyle\int\cos 2t\sqrt{4-\sin 2t}\,dt$

۶۹. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{1+\cos 2x}{\sin^2 2x}\,dx$

۷۰. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\sin^2 2x}{1+\cos 2x}\,dx$

۷۱. $\displaystyle\int\frac{\csc^2 2t}{\sqrt{1+\cot 2t}}\,dt$

۷۲. $\displaystyle\int_{0}^{\ln 3}e^{3x}\,dx$

۷۳. $\displaystyle\int_{0}^{1/2}\frac{e^{\tan^{-1}2t}}{1+4t^2}\,dt$

۰۷۴ $\int xe^{-x^2}\,dx$

۰۷۵ $\int_1^4 \frac{2^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx$

۰۷۶ $\int 10^{2x}\,dx$

۰۷۷ $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

۰۷۸ $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

۰۷۹ $\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$

۰۸۰ $\int_0^{\sqrt{e-1}} \ln(x^2+1)\cdot 2x(x^2+1)^{-1}\,dx$

۰۸۱ انتگرال

$$\int xe^{(x^2)}\,dx$$

را بـه‌کمك جانشانی (الف) $u=x^2$ و (ب) $u=e^{(x^2)}$ محاسبه کنید.

۲.۷ انتگرالگیری جزء به جزء

با استفاده از روش انتگرالگیری جزء به‌جزء می‌توان انتگرالهای دشوار را به‌انتگرالهایی تبدیل کرد که معمولاً محاسبهٔ آنها ساده‌تر است. این روش درمورد انتگرالهایی به‌صورت زیر به‌کار می‌رود

$$\int f(x)g(x)\,dx \qquad (1)$$

که درآن f تابعی است که پس‌از چندبار مشتقگیری صفر می‌شود و g تابعی است کـه می‌تـوان ازآن بارها و بـدون هیچ مشکلی انتگرال گرفت. انتگرال

$$\int xe^x\,dx$$

ازاین دست است زیرا $f(x)=x$ پس‌از دوبار مشتق‌گرفتن صفر می‌شود واز $g(x)=e^x$ می‌توان بارهاوبدون هیچ مشکلی انتگرال گـرفت. از روش انتگرالگیری جزء به‌جزء می‌تـوان در مـورد انتگرالهای مهمی نظیر

$$\int e^x \sin x\,dx$$

نیز استفاده کرد که ازنوع انتگرال (۱) نیستند.

دراین بخش انتگرالگیری جزء به‌جزء را توصیف می‌کنیم و روش استفاده‌ازآن را شرح می‌دهیم. انتگرالگیری جزء به‌جزء علاوه براینکه روشی نیرومند درمحاسبهٔ انتگرالهای نامعین است، نقشی مهـم درآماده ساختن این انتگرالها بـرای محاسبه به‌کمك کامپیوتـر نیز دارد. اما ما دراین کتاب مجال پـرداختن بـه‌این مبحث را نداریم.

فرمول

فـرمـول انتگرالگیری جزء به جزء از قاعـدهٔ حاصلضرب زیـر به‌دست می‌آید

$$\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}\,.$$

صورت دیفرانسیلی این قاعده چنین است

$$d(uv)=u\,dv+v\,du$$

که می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت

$$u\,dv=d(uv)-v\,du\,.$$

پس‌از انتگرالگیری ازآن داریم

فرمول انتگرالگیری جزء به‌جزء

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du\,. \qquad (2)$$

درفرمول‌انتگرالگیری جزء به‌جزء،انتگرال $\int u\,dv$ برحسب انتگرال $\int v\,du$ بیان می‌شود. بـا انتخاب مناسب u و v ممکن است محاسبهٔ انتگرال دوم ساده‌تـراز محاسبهٔ انتگرال اول باشد. اهمیت این فرمول نیز درهمین است. وقتی با انتگرالـی روبه‌رو می‌شویم که نمی‌توانیم آن را حل‌کنیم، باید آن را بـه انتگرال دیگری تبدیل‌کنیم تا بلکه بتوانیم آن را حل‌کنیم.

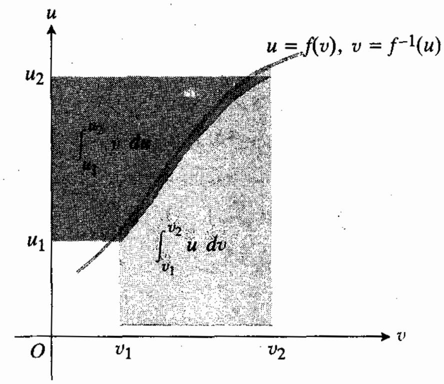
فـرمول انتگرالگیری جزء به جزء برای انتگرالهای معین چنین است

$$\int_{v_1}^{v_2} u\,dv=(u_2v_2-u_1v_1)-\int_{u_1}^{u_2} v\,du\,. \qquad (3)$$

تعبیر قسمتهای مختلف فـرمول بـه‌صورت مساحت در شکل ۱۰۷ دیده می‌شود.

مثال ۱ انتگرال زیر را محاسبه‌کنید

$$\int x\cos x\,dx\,.$$



۱۰۷ مساحت ناحیهٔ آبی‌رنگ، $\int_{v_1}^{v_2} u\,dv$، برابر است با مساحت مستطیل بزرگ، $u_2 v_2$، منهای مساحتهای مستطیل کوچك، $u_1 v_1$، و ناحیهٔ خاکستری، $\int_{u_1}^{u_2} v\,du$. با استفاده از علائم می‌توان نوشت

$$\int_{v_1}^{v_2} u\,dv=(u_2v_2-u_1v_1)-\int_{u_1}^{u_2} v\,du \,.$$

حل: به‌کمك فرمول

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

به‌ازای

$$u=x, \quad dv=\cos x\,dx$$

$$du=dx, \quad v=\sin x$$

(ساده‌ترین تابع با ضابطهٔ $dv=\cos x\,dx$).

داریم

$$\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int \sin x\,dx$$

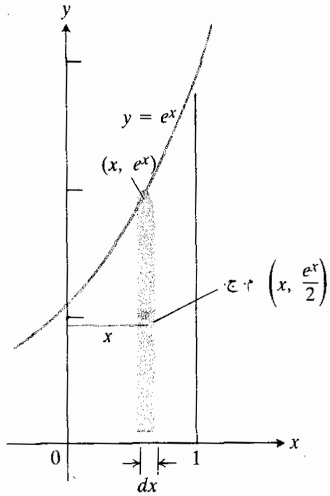
$$=x\sin x+\cos x+C \,.$$

توجه کنید که v را ساده‌ترین تابعی که دیفرانسیلش $\cos x\,dx$ است برگزیدیم. توابع پیچیده‌تری نظیر $\sin x+5$ و $\sin x+C_1$ تنها محاسبات را طولانیتر می‌کنند و به‌جواب کلیت بیشتری نمی‌بخشند (درعین حال، مسألهٔ ۵۱ را هم ببینید.) ■

مثال ۲ چگالی یك ورقهٔ نازك همگن δ است و درناحیه‌ای واقع در ربع اول به‌خم $y=e^x$ و خط $x=1$ محدود است (شکل ۲۰۷). گشتاوری‌راکه‌این ورقه حول‌محور y ایجاد می‌کندبیابید.

حل: یك نوار قائم نمونه مشخصات زیر را دارد

مرکز جرم: $(\tilde{x}, \tilde{y})=\left(x, \dfrac{e^x}{2}\right)$



۲۰۷ گشتاور نوار حول محور y عبارت است از $x\,\delta\,dA=\delta\,xe^x\,dx$.

طول: e^x

عرض: dx

مساحت: $dA=e^x\,dx$

جرم: $dm=\delta\,dA=\delta\,e^x\,dx$

بنابراین گشتاور نوار حول محور y چنین است

$$\tilde{x}\,dm=x\,.\,\delta e^x\,dx=\delta\,x\,e^x\,dx \,.$$

گشتاور ورقه حول محور y، انتگرال زیر است

$$M_y=\int \tilde{x}\,dm=\delta\int_0^1 x\,e^x\,dx \,.$$

برای محاسبهٔ این انتگرال فرمول

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

را به‌ازای

$$u=x, \quad dv=e^x\,dx$$

$$du=dx, \quad v=e^x \quad (\text{ساده‌ترین تابع با ضابطهٔ } dv=e^x\,dx)$$

به‌کار می‌بریم. داریم

$$\int xe^x\,dx=xe^x-\int e^x\,dx$$

و

$$\int_0^1 xe^x\,dx=xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx=e-\Big[e^x\Big]_0^1$$

$$=e-[e-1]=1 \,.$$

بنابراین گشتاور ورقه حول محور y چنین است

$$M_y=\delta\int_0^1 xe^x\,dx=\delta\,.\,1=\delta\,.$$ ■

انتخاب u و dv

انتگرالگیری در مثال ۲، قاعده‌ای برای انتخاب u و dv در انتگرالگیری جزء به‌جزء به‌دست داد.

قاعدهٔ انتخاب u و dv

u را تابعی می‌گیریم که پس‌از مشتقگیری ساده‌تر شود.
dv را تابعی می‌گیریم که انتگرالش ساده باشد.

همواره نمی‌توان‌ازاین قاعده پیروی‌کرد. اما آنجاکه چنین کاری ممکن باشد، انتگرال طرف راست معادلهٔ

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

از انتگرال طرف چپ آن ساده‌تر است.

انتخاب درست: به‌ازای

$$u=x,\quad v=\int dv=\int e^x\,dx=e^x$$

داریم

$$\int xe^x\,dx=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x+C\,. \qquad (۴)$$

انتخاب نادرست: به‌ازای

$$u=e^x,\quad v=\int dv=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}$$

داریم

$$\int xe^x\,dx=e^x\,.\,\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}e^x\,dx\,. \qquad (۵)$$

برابری (۵) درست است، اما انتگرال طرف راست آن دشوارتر از انتگرال اصلی است. در واقع ازچاله درآمدیم ودر چاه افتادیم!

مثال ۳ انتگرال زیر را حساب‌کنید

$$\int \ln x\,dx\,.$$

حل: فرمول

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

را به‌ازای

$u=\ln x$ (پس‌از مشتقگیری ساده می‌شود)

$du=\frac{1}{x}dx$

$dv=dx$ (انتگرالگیری از آن ساده است)

$v=x$ (ساده‌ترین تابع با ضابطهٔ $dv=dx$)

به‌کار می‌بریم و داریم

$$\int \ln x\,dx=x\ln x-\int x\,.\,\frac{1}{x}dx=x\ln x-\int dx$$
$$=x\ln x-x+C\,.$$ ■

استفادهٔ مکرر

گاه لازم است برای رسیدن به جواب بیش‌از یك بار از انتگرالگیری جزء به‌جزء استفاده‌کنیم. به‌مثالی دراین مورد توجه کنید.

مثال ۴ انتگرال زیر را محاسبه‌کنید

$$\int x^2e^x\,dx\,.$$

حل: نخست به‌کمك فرمول

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

به‌ازای

$$u=x^2,\qquad dv=e^x\,dx$$
$$du=2x\,dx\qquad v=e^x\,.$$

چنین به‌دست می‌آوریم

$$\int x^2e^x\,dx=x^2e^x-2\int xe^x\,dx\,.$$

حال انتگرال طرف راست به‌انتگرالگیری جزء به جزء دیگری نیاز دارد. مقدار این انتگرال بنابه مثال ۲ برابر است با

$$\int xe^x\,dx=xe^x-e^x+C'\,.$$

بنابراین

$$\int x^2e^x\,dx=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C\,.$$ ■

حل کردن معادلهٔ انتگرالی نسبت به انتگرال مجهول

انتگرالهایی نظیر انتگرال مثال بعد درمسائل مهندسی بـرق پیش می‌آیند. محاسبهٔ آنها به دوانتگرالگیری جزء به‌جزء نیاز دارد و نهایتاً باید معادلهٔ انتگرالی نسبت به‌انتگرال مجهول حل شود.

مثال ۵ انتگرال زیر را محاسبه‌کنید

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx\,.$$

حل: نخست فرمول

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

را به‌ازای

$$u=e^{2x},\qquad dv=\cos 3x\,dx$$

$$du=2e^{2x},\qquad v=\frac{1}{3}\sin 3x$$

به‌کار می‌بریم و داریم

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx=\frac{e^{2x}\sin 3x}{3}-\frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3x\,dx\,.$$

انتگرال دوم همان انتگرال اول است با این تفاوت کـه $\cos 3x$ جای خود را به $\sin 3x$ داده است. بـرای محاسبهٔ این انتگرال، انتگرالگیری جزء به‌جزء را به‌ازای

$$U=e^{2x},\qquad dV=\sin 3x\,dx$$

$$dU=2e^{2x}\,dx,\qquad V=-\frac{1}{3}\cos 3x$$

به‌کار می‌بریم وچنین نتیجه می‌گیریم

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx=\frac{e^{2x}\sin 3x}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{e^{2x}\cos 3x}{3}+\frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x\,dx\right).$$

دراین رابطه انتگرال مجهول جز درطرف چپ در طرف راست هم باضریب ۴/۹ — ظاهرشده‌است. پس‌ازترکیب این دو داریم

$$\frac{13}{9}\int e^{2x}\cos 3x\,dx=\frac{e^{2x}\sin 3x}{3}+\frac{2e^{2x}\cos 3x}{9}$$

$$=\frac{3e^{2x}\sin 3x+2e^{2x}\cos 3x}{9}\,.$$

ازتقسیم دوطرف بر ۱۳/۹ چنین به‌دست می‌آید

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx=\frac{3e^{2x}\sin 3x+2e^{2x}\cos 3x}{13}+C\,.$$

فـرمـولهای کلـی انتگرالهای $e^{ax}\cos bx$ و $e^{ax}\sin bx$ در انتهای کتاب آمده‌است.

□ انتگرالگیری به‌کمك تشکیل جدول

چنانکه دیدیم روش انتگرالگیری جزء به‌جزء را می‌توان در مورد انتگرالهایی که به‌صورت زیرند به‌کار برد

$$\int f(x)g(x)\,dx$$

که درآن از f می‌تـوان بارها مشتق گـرفت تا صفر شود واز g می‌توان بدون هیچ مشکلی بارها انتگرال گرفت. اما اگـر تعداد عملیات زیـاد باشد ممکن است محاسبه خسته‌کننده شود. درچنین مواردی راهی برای سازمان دادن به محاسبات وجود داردکه کار را آسان می‌کند. این راه‌را **انتگرالگیری به کمك تشکیل جدول** می‌نامندکه درمثالهای زیر تشریح می‌شود.

مثال ۶ انتگـرال زیـر را از راه انتگرالگیری بـه‌کمك تشکیل جدول محاسبه کنید

$$\int x^2e^x\,dx$$

حل: با انتخاب $f(x)=x^2$ و $g(x)=e^x$ داریم

$f(x)$ و مشتقاتش		$g(x)$ وانتگرالهایش
x^2		e^x
$2x$	$(+)$	e^x
2	$(-)$	e^x
0	$(+)$	e^x.

حال توابعی راکه با پیکان به‌هم مربوطاند درهـم ضرب می‌کنیم ونتایـج را باتـوجه به‌علامت روی پیکان جمـع جبری می‌کنیم (عـلامتهای روی پیکانها یـك درمیان + و − هستند) و چنیـن به‌دست می‌آوریم

$$\int x^2e^x\,dx=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C\,.$$

توجه‌کنیدکه این نتیجه با نتیجهٔ مثال ۴ یکی است. ■

مثال ۷ انتگرال زیـر را از راه انتگرالگیری باتشکیل جـدول

محاسبه کنید

$$\int x^3 \sin x\,dx$$

حل: با انتخاب $f(x)=x^3$ و $g(x)=\sin x$، داریم

$f(x)$ ومشتقاتش		$g(x)$ وانتگرالهایش
x^3	$(+)$	$\sin x$
$3x^2$	$(-)$	$-\cos x$
$6x$	$(+)$	$-\sin x$
6	$(-)$	$\cos x$
0		$\sin x$.

حال توابعی راکه با پیکان به هم مربوط می‌شوند درهم ضرب می‌کنیم و نتایج را باتوجه به‌علامت روی پیکان به‌هم می‌افزاییم (علامتهای روی پیکانها یک درمیان + و − هستند) و چنین به‌دست می‌آوریم

$$\int x^3\sin x\,dx = -x^3\cos x + 3x^2\sin x$$
$$+6x\cos x - 6\sin x + C\,. \quad \blacksquare$$

مسأله‌ها

انتگرالهای مسائل ۱–۳۸ را محاسبه کنید.

۱. $\int x\sin x\,dx$

۲. $\int x\cos 2x\,dx$

۳. $\int x^2\sin x\,dx$

۴. $\int x^2\cos x\,dx$

۵. $\int_1^2 x\ln x\,dx$

۶. $\int x^2\ln x\,dx$

۷. $\int x^3\ln x\,dx$

۸. $\int_0^1 \ln(x+1)\,dx$

۹. $\int \tan^{-1}x\,dx$

۱۰. $\int \tan^{-1}ax\,dx$

۱۱. $\int \sin^{-1}x\,dx$

۱۲. $\int \sin^{-1}ax\,dx$

۱۳. $\int x\sec^2 x\,dx$

۱۴. $\int 2x\sec^2 2x\,dx$

۱۵. $\int x^3e^x\,dx$

۱۶. $\int x^4e^{-x}\,dx$

۱۷. $\int (x^2-5x)e^x\,dx$

۱۸. $\int (x^2+x+1)e^x\,dx$

۱۹. $\int x^5e^x\,dx$

۲۰. $\int x^2e^{4x}\,dx$

۲۱. $\int_0^{\pi/2} x^2\sin 2x\,dx$

۲۲. $\int_0^{\pi/2} x^3\cos 2x\,dx$

۲۳. $\int x^4\cos x\,dx$

۲۴. $\int x^5\sin x\,dx$

۲۵. $\int x^2\cos ax\,dx$

۲۶. $\int x\cos(2x+1)\,dx$

۲۷. $\int_{۱}^{۲} x\sec^{-۱}x\,dx$

۲۸. $\int_{۱}^{۴} \sec^{-۱}\sqrt{x}\,dx$

۲۹. $\int_{۱}^{e} \frac{\ln x}{x}\,dx$

۳۰. $\int_{۰}^{۱} x\sqrt{۱-x}\,dx$

۳۱. $\int x\sin^{-۱}\left(\frac{۱}{x}\right)dx$

۳۲. $\int x\sin^{-۱}\left(\frac{a}{x}\right)dx$

۳۳. $\int e^{x}\sin x\,dx$

۳۴. $\int e^{-x}\cos x\,dx$

۳۵. $\int e^{۲x}\cos ۳x\,dx$

۳۶. $\int e^{-۲x}\sin ۲x\,dx$

۳۷. $\int \sin(\ln x)\,dx$

۳۸. $\int x(\ln x)^{۲}dx$

۳۹. مطلوب است مساحت ناحیهٔ محدود به محور x و خم $y=x\sin x$ به‌ازای (الف) $۰\leqslant x\leqslant \pi$، (ب) $\pi\leqslant x\leqslant ۲\pi$.

۴۰. ناحیهٔ محدود به $x=۰$، $y=۰$، و $y=\cos x$، $۰\leqslant x\leqslant \pi/۲$ حول محور y دوران می‌کند. حجم حاصل را به‌کمك پوسته‌های استوانه‌ای بیابید.

۴۱. ناحیهٔ واقع در ربع اول و محدود به محورهای مختصات، خم $y=e^{-x}$، و خط $x=۱$ حول محور y دوران می‌کند. حجم حاصل را بیابید.

۴۲. مطلوب است مرکز جرم یك ورقهٔ نازك همگن که به‌خم $y=\sin x$، $۰\leqslant x\leqslant \pi$ ومحور x محدود است.

۴۳. مطلوب است مرکزجرم یك ورقهٔ نازك همگن که به‌خم $y=x^{۲}e^{x}$، محور x، وخط $x=۱$ محدود است.

۴۴. مطلوب است مرکز جرم یك ورقهٔ نازك همگن که به‌خم $y=\ln x$ و خطوط $x=۱$ و $y=۱$ محدود است.

۴۵. مطلوب است حجم ناشی از دوران ناحیهٔ واقع در ربع‌اول ومحدودبه‌محور x وخم $y=x\sin x$، $۰\leqslant x\leqslant \pi$ حول (الف) محور x، (ب) حول خط $x=\pi$.

۴۶. مطلوب است مرکزجرم یك ورقهٔ نازك همگن‌که به‌خم $y=\ln x$، محور x، وخط $x=۲$ محدود است.

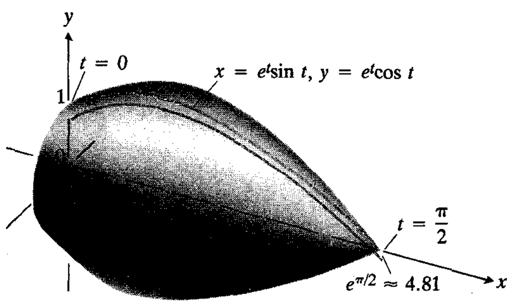
۴۷. یك ورقه نازك با چگالی $\delta=(x+۱)$ به‌محور x و خم $y=\sin x$، $۰\leqslant x\leqslant \pi$ محدود است. مطلوب است گشتاور این ورقه حول محور y.

۴۸. مطلوب است حجم جسم ایجاد شده از دوران ناحیهٔ محدود به محور x وخم $y=x\sqrt{۱-x}$، $۰\leqslant x\leqslant ۱$، حول محور y.

۴۹. مطلوب است مساحت رویهٔ ایجاد شده دراثر دوران خم

$$x=e^{t}\sin t,\quad y=e^{t}\cos t,\quad ۰\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{۲}$$

حول محور x (شکل ۳.۰۷).



۳.۰۷ رویهٔ مورد بحث در مسألهٔ ۴۹.

۵۰. انتگرال $\int_{۰}^{۱} e^{\sqrt{x}}\,dx$ را از راه انتگرالگیری جزء به‌جزء محاسبه کنید. (راهنمایی: نخست از $x=u^{۲}$ استفاده کنید.)

۵۱. گرچه معمولاً درانتگرالگیری جزء به‌جزء برای تعیین v به‌صورت $\int dv$ از ثابت انتگرالگیری صرفنظر می‌کنیم، اما گاه انتخاب ثابتی‌که برابر صفر نباشد سودمند است. مثلاً، انتگرال

$$\int x\tan^{-۱}x\,dx$$

را با $u=\tan^{-۱}x$ و $v=(x^{۲}/۲)+۱/۲$ محاسبه کنید.

۳.۷ حاصلضربها و توانهای تابعهای مثلثاتی (غیر از توانهای زوج سینوسها وکسینوسها)

در ریاضیات و علوم با انتگرالهای ترکیبات توابع مثلثاتی بسیار مواجه می‌شویم و باید بتوانیم آنها را محاسبه کنیم. خواننده

تاکنون با بسیاری از این ترکیبات روبه‌رو شده است و در این بخش با تعداد دیگری از آنها آشنا می‌شود. انتگرالهایی که به‌مطالعهٔ آنها می‌پردازیم عبارت‌اند از انتگرالهای توانهای فرد سینوسها وکسینوسها (همچنین توانهای زوج، اما به‌آنها دربخش آینده می‌پردازیم)؛ انتگرالهای سکانت و مکعبش؛ انتگرالهای توانهای زوج سکانتها و تانژانتها؛ و انتگرالهای حاصلضربهای سینوسها و کسینوسها نظیر $\cos 3x \cos 5x$ ، $\sin 2x \cos 2x$ ، و $\sin 3x \sin 4x$. پس‌از بررسی‌همهٔ اینها مختصری به‌انتگرالهای معین توابع فرد می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که از انتگرال سکانت درمقیاس‌بندی نقشه‌هایی که در دریانوردی به‌کارمی‌رود چگونه استفاده می‌شود.

توانهای فرد مثبت سینوسها وکسینوسها

برای‌انتگرالگیری ازیک‌توان‌فرد مثبت $\sin x$ ، مثلاً $\sin^{2n+1} x$ ، آن را به‌صورت حاصلضرب $\sin x$ وتوان مثبت زوجی‌از $\sin x$ درنظر می‌گیریم و توان مثبت زوج $\sin x$ را برحسب‌کسینوس می‌نویسیم به‌این ترتیب می‌توان با جانشانیهای $u=\cos x$ و $-du=\sin x\,dx$ انتگرالگیری را انجام داد. این جانشانیها انتگرالده را به‌صورت چندجمله‌ایی برحسب u در می‌آورد که انتگرالگیری از آن ساده است.

مثال ۱ مطلوب است

$$\int \sin^3 x\, dx .$$

حل: داریم

$$\int \sin^3 x\, dx = \int \sin^2 x \sin x\, dx$$
$$= \int (1-\cos^2 x)\sin x\, dx$$
$$= \int (1-u^2)(-du) \quad \begin{pmatrix} u=\cos x \\ -du=\sin x\, dx \end{pmatrix}$$
$$= \int (u^2-1)\, du$$
$$= \frac{u^3}{3} - u + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C . \quad \blacksquare$$

انتگرالهای سایر توانهای فرد مثبت $\sin x$ را می‌توان به‌همین‌ترتیب محاسبه‌کرد. داریم

$$\sin^{2n+1} x = \sin^{2n} x \sin x = (\sin^2 x)^n \sin x$$
$$= (1-\cos^2 x)^n \sin x .$$

سپس از $u=\cos x$ و $-du=\sin x\, dx$ استفاده می‌کنیم و انتگرال $\sin^{2n+1} x$ را به‌صورت زیر درمی‌آوریم

$$\int \sin^{2n+1} x\, dx = \int (1-\cos^2 x)^n \sin x\, dx$$
$$= -\int (1-u^2)^n\, du . \tag{1}$$

حال می‌توان عبارت $(1-u^2)^n$ را به‌کمک قضیهٔ دوجمله‌ای بسط داد و از چندجمله‌ای برحسب u انتگرال گرفت.

برای انتگرالگیری از یک توان فرد مثبت کسینوس مانند مورد سینوس عمل می‌کنیم. داریم

$$\cos^{2n+1} x = \cos^{2n} x \cos x = (\cos^2 x)^n \cos x$$
$$= (1-\sin^2 x)^n \cos x$$

که با قراردادن $u=\sin x$ و $du=\cos x\, dx$ چنین به‌دست می‌آید

$$\int \cos^{2n+1} x\, dx = \int (1-\sin^2 x)^n \cos x\, dx$$
$$= \int (1-u^2)^n\, du . \tag{2}$$

مثال ۲ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int \cos^5 x\, dx .$$

حل: داریم

$$\int \cos^5 x\, dx = \int \cos^4 x \cos x\, dx$$
$$= \int (1-\sin^2 x)^2 \cos x\, dx$$
$$= \int (1-u^2)^2\, du \quad \begin{pmatrix} u=\sin x \\ du=\cos x\, dx \end{pmatrix}$$
$$= \int (1-2u^2+u^4)\, du$$
$$= u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C$$
$$= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C . \quad \blacksquare$$

انتگرالهای سکانت وکسکانت

آیزك بارو معلم آیـزك نیوتن در دانشگاه کیمبریج، نخستین روش واضح محاسبهٔ انتگرال سکانت را در کتاب خود به نام درسهای هندسه[1] عرضه کرد. روش او برمبنای نمادهای جدید چنین است

$$\int \sec x\,dx=\int \frac{1}{\cos x}\,dx$$

$$=\int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$=\int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx$$

$$=\int \frac{\cos x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{\cos x}{1-\sin x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}[-\ln|1-\sin x|$$

$$+\ln|1+\sin x|]+C \qquad (3)$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\cdot\frac{1+\sin x}{1+\sin x}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+\sin x)^2}{(\cos x)^2}\right|+C$$

$$=\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|+C$$

$$=\ln|\sec x+\tan x|+C\,.$$

ضمناً، با یك شگرد می‌توان انتگرالگیری را بسیار کوتاهتر کرد. داریم

$$\sec x=\frac{\sec x(\tan x+\sec x)}{\sec x+\tan x}$$

$$=\frac{\sec x\tan x+\sec^2 x}{\sec x+\tan x}\,.$$

صورت این کسر مشتق مخرجش است. بنابراین

$$\int \sec x\,dx=\int \frac{\sec x\tan x+\sec^2 x}{\sec x+\tan x}\,dx$$

$$=\int \frac{du}{u}\qquad (u=\sec x+\tan x)$$

$$=\ln|u|+C\,.$$

از این‌رو

$$\int \sec x\,dx=\ln|\sec x+\tan x|+C\,. \qquad (4)$$

انتگرالگیری مشابهی نشان می‌دهد که فرمول نظیر انتگرال کسکانت چنین است (مسألهٔ ۲۳ را ببینید).

$$\int \csc x\,dx=-\ln|\csc x+\cot x|+C\,. \qquad (5)$$

حال که فرمولهای انتگرالگیری سکانت وکسکانت را در اختیار داریم، محاسبهٔ انتگرالهای مکعبهایشان آسان است.

مثال ۳ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int \sec^3 x\,dx\,.$$

حل: از انتگرالگیری جـزء به‌جـزء استفاده می‌کنیم. این انتگرال با جانشانیهای

$$u=\sec x,\quad du=\sec x\tan x\,dx$$

$$dv=\sec^2 x\,dx,\quad v=\tan x$$

چنین می‌شود

$$\int \sec^3 x\,dx=\sec x\tan x-\int \tan x\sec x\tan x\,dx$$

$$=\sec x\tan x-\int (\sec^2 x-1)\sec x\,dx$$

$$=\sec x\tan x+\int \sec x\,dx$$

$$-\int \sec^3 x\,dx\,.$$

1. *Geometrical Lectures*

بنابراین

$$2\int \sec^3 x\,dx=\sec x\tan x+\int \sec x\,dx$$

و

$$\int \sec^3 x\,dx=\frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|+C\cdot \quad ■$$

درمورد انتگرال $\csc^3 x$ مسألهٔ ۲۴ را ببینید.

توانهای زوج مثبت سکانت و تانژانت

درمورد این انتگرالده‌ها از اتحادهای زیر استفاده می‌کنیم

$$\tan^2 x=\sec^2 x-1 \quad \text{و} \quad \sec^2 x=1+\tan^2 x\cdot$$

مثال ۴ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int \tan^4 x\,dx\cdot$$

حل:

$$\begin{aligned}\int \tan^4 x\,dx&=\int \tan^2 x\cdot\tan^2 x\,dx\\&=\int \tan^2 x\cdot(\sec^2 x-1)\,dx\\&=\int \tan^2 x\sec^2 x\,dx-\int \tan^2 x\,dx\\&=\int \tan^2 x\sec^2 x\,dx-\int(\sec^2 x-1)\,dx\\&=\int \tan^2 x\sec^2 x\,dx-\int \sec^2 x\,dx+\int dx\,.\end{aligned}$$

در انتگرال اول با قراردادن

$$u=\tan x,\quad du=\sec^2 x\,dx$$

داریم

$$\int u^2\,du=\frac{1}{3}u^3+C'\cdot$$

سایر انتگرالها به‌صورت متداول‌اند، بنابراین

$$\int \tan^4 x\,dx=\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+C\cdot \quad ■$$

حاصلضربهای سینوسها و کسینوسها

با انتگرالهای

$$\int \sin mx\sin nx\,dx$$

$$\int \sin mx\cos nx\,dx$$

$$\int \cos mx\cos nx\,dx$$

دراین موارد مواجه می‌شویم: نظریهٔ جریان متناوب، مسائل انتقال گرما، خمش تیرها، تحلیل تنش کابلها درپلهای معلق، و در بسیاری ازمسائل مربوط به‌ریاضیات،علوم، و مهندسی که درآنها ازسریهای مثلثاتی استفاده می‌شود. برای‌محاسبهٔ آنها می‌توان از انتگرالگیری جزء به‌جزء بهره گرفت، اما در هرمورد باید دوبار از این‌روش استفاده کرد. راه ساده‌تر این است که از اتحادهای زیراستفاده کنیم

$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x] \tag{۶}$$

$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}[\sin(m-n)x+\sin(m+n)x] \tag{۷}$$

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x]\cdot \tag{۸}$$

این اتحادها را می‌توان بیدرنگ از اتحادهای زیر به‌دست آورد

$$\begin{aligned}\cos(A+B)&=\cos A\cos B-\sin A\sin B\\ \cos(A-B)&=\cos A\cos B+\sin A\sin B\end{aligned} \tag{۹}$$

و

$$\begin{aligned}\sin(A+B)&=\sin A\cos B+\cos A\sin B\\ \sin(A-B)&=\sin A\cos B-\cos A\sin B\,.\end{aligned} \tag{۱۰}$$

مثلاً اگر دو رابطهٔ (۹) را باهم جمع و حاصل را بر ۲ تقسیم کنیم؛ با قراردادن $A=mx$ و $B=nx$ رابطهٔ (۸) به‌دست می‌آید. اتحاد (۶) با تفریق رابطهٔ اول (۹) از رابطهٔ دوم آن به‌روش مشابهی به‌دست می‌آید. بالاخره، اگر دو رابطهٔ (۱۰) را به‌هم بیفزاییم، اتحاد (۷) حاصل خواهد شد.

مثال ۵ از رابطهٔ (۷) به‌ازای $m=3$ و $n=5$ داریم

$$\int \sin 3x \cos 5x\, dx = \frac{1}{2}\int [\sin(-2x)+\sin 8x]\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (\sin 8x - \sin 2x)\, dx$$

$$= -\frac{\cos 8x}{16} + \frac{\cos 2x}{4} + C\,. \qquad \blacksquare$$

مثال ۶ نشان دهید که اگر m و n اعدادی صحیح باشند، و $m^2 \neq n^2$، آنگاه

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\, dx = 0\,.$$

حل: از رابطهٔ (۸) داریم

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\, dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi}\,. \tag{11}$$

(برای انتگرالگیری باید $m-n\neq 0$ و $m+n\neq 0$ که اگر $m^2\neq n^2$، هردو برقرارند.) باری، $(m-n)$ و $(m+n)$ هردو اعدادی صحیح‌اند، زیرا m و n اعدادی صحیح‌اند. وانگهی، سینوس هرمضربی از 2π صفراست. بنابراین عبارات داخل کروشه در رابطهٔ (۱۱) به‌ازای هر دوحد بالایی و پایینی انتگرالگیری صفرند. از این‌رو

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\, dx = 0\,. \qquad \blacksquare$$

انتگرالهای توابع فرد

در بسیاری از موارد، از توابع در بازه‌هایی نظیر $-a \leqslant x \leqslant a$ انتگرال می‌گیریم که حول مبدأ متقارن‌اند. تعداد چشمگیری از این انتگرالها برابر صفرند. مثلاً

$$\int_{-1}^{1} 2x\, dx = x^2\Big]_{-1}^{1} = 1-1=0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\, dx = -\cos x\Big]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= -\cos\pi + \cos(-\pi)$$

$$= -(-1)+(-1)=0$$

$$\int_{-a}^{a} \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{\cos x}\Big]_{-a}^{a} = \frac{1}{\cos a} - \frac{1}{\cos(-a)} = 0\,.$$

علت صفر بودن این سه انتگرال این است که انتگرالهای توابع فرد بر بازه‌هایی هستند که حول مبدأ متقارن‌اند. درمورد هر سه تابع داریم $f(-x)=-f(x)$. بنابراین مساحت ناحیهٔ محدود به‌هریک از این توابع در بالای محور x و درسمت چپ مبدأ، برابراست با مساحت ناحیهٔ محدود به‌آن در زیرمحور x و درسمت‌راست مبدأ. مقدار این مساحات در انتگرالگیری یکدیگر را حذف می‌کنند. همین‌طور مساحت محدود به هر یک از این توابع در زیرمحور x و سمت چپ مبدأ، مساحت محدود به‌آن تابع در بالای محور x و سمت راست مبدأ را حذف می‌کند (شکل ۴۰۷ را ببینید).

چه توابعی فردند ؟

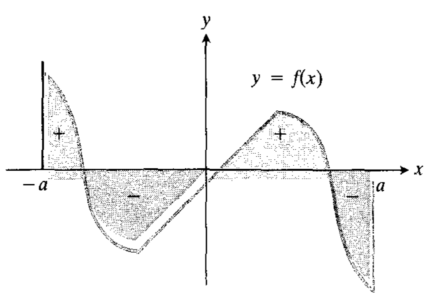
توانهای فرد x: x، x^{-1}، x^3، x^{-3}

سینوسها: $\sin ax$، $a\neq 0$

توانهای صحیح و فرد توابع فرد: $\sin^3 x$، $\dfrac{1}{\sin^5 x}$

حاصلضرب یک تابع فرد در یک تابع زوج: $\cos x \sin 3x$، $x^2 \sin x$

خارج قسمت یک تابع فرد بر یک تابع زوج: $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

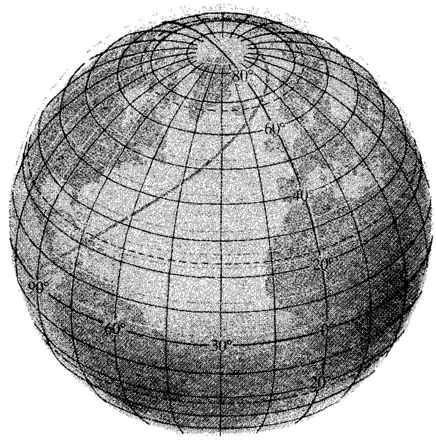


۴۰۷ نواحی محدود به محور x و نمودار یک تابع فرد، بر بازه‌ای که حول مبدأ متقارن است، در بالا و پایین محور برابرند. بنابراین انتگرال این تابع از $-a$ تا a صفراست.

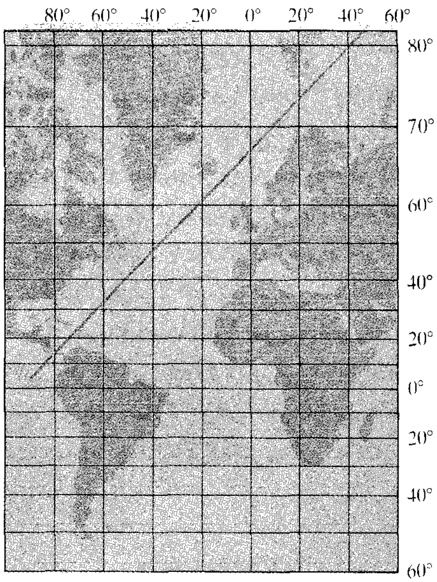
□ نقشهٔ مرکاتور جهان

انتگرال سکانت نقش‌مهمی در رسم نقشه برای دریانوردی به‌کمك قطبنما دارد. آسانترین‌مسیر برای دریانورد مسیری‌است که راستای عقربهٔ قطبنما در آن ثابت باشد. این مسیر مثلاً می‌تواند مسیر ۴۵° (شمال شرقی) یا ۲۲۵° (جنوب غربی) یـا نظایر آن باشد. چنین مسیری در امتداد مارپیچی است که به‌دور زمین می‌پیچد و به‌سوی یکی از قطبها می‌رود (شکل ۵.۷)، مگر آنـکه خطسیر دقیقاً از شمال یا جنوب بگذرد یا موازی خط استوا باشد.

گرهارد کرامر[1] مساح وجغرافیدان فلاندری که ما او را با صورت لاتینی نام خانوادگی‌اش یعنی مرکاتور، می‌شناسیم درسال ۱۵۶۹ نقشه‌ای از جهان کشید که در آن همهٔ مـارپیچهایی کـه راستای قطبنما در امتداد آنها ثابت است به‌صورت خطوط مستقیم درآمدنـد (شکل ۶.۷). ایـن دستاورد جـالب یکی از مبرمترین نیازمندیهای‌دریانوردی‌همهٔ اعصاررا براورده ساخت. به‌این‌ترتیب دریانورد می‌توانـد درسفر بین دونقطه امتداد عقربهٔ قطبنما را از روی جهت خط مستقیمی‌کـه درنقشهٔ مرکاتور آنها را به‌هم وصل می‌کند به‌دست‌آورد (شکل ۷.۷).



۵.۷ سفری بـا سمت‌الـرأس ثـابت ۴۵° شمال‌شرقی از جزایر گالاپاگوس دراقیانوس آرام تـا جزیرهٔ ژوزف‌فـرانز در اقیانوس منجمد شمالی.



۷.۷ سفر ذکرشده درشکل۵.۷ درنقشهٔ مرکاتور.

۶.۷ نقشه مرکاتور زمین‌که درسال ۱۵۶۹ رسم شد.

1. Gerhard Krämer

اگر به‌دقت به‌شکل ۷.۷ بنگرید، درمی‌یابید که خطوط قائم طول جغرافیایی که روی یک کره همدیگر را درقطبها قطع می‌کنند روی این نقشه به‌صورت خطوط موازی درآمده‌اند. خطوط افقی عرض جغرافیایی که هر ۱۰° به ۱۰° رسم شده‌اند، مانند وقتی که روی کره رسم می‌شوند موازی‌اند، اما فاصلهٔ آنها مساوی نیست. فاصلهٔ این خطوط با نزدیک شدن به‌قطبها افزایش می‌یابد.

تابع سکانت در تعیین مقدار صحیح فاصلهٔ بین این خطوط نقش دارد. ضریب تغییرمقیاسی که فواصل افقی درعرض جغرافیایی ثابت θ° با آن افزایش می‌یابند وخطوط طول جغرافیایی با آن باز می‌شوند دقیقاً برابر $\sec\theta$ است. در استوا که $\sec ۰^\circ = ۱$ است خطوط ازهم باز نمی‌شوند. در عرض جغرافیایی ۳۰° شمالی یا جنوبی تمام فواصل افقی با ضریب $\sec ۳۰^\circ = ۲/\sqrt{۳} \approx ۱٫۱۵$ ازهم باز می‌شوند. در عرض جغرافیایی ۶۰° ضریب برابراست با $\sec ۶۰^\circ = ۲$. هرچه به‌قطبها نزدیکترشویم خطوط طول جغرافیایی برای اینکه موازی بمانند باید بیشترازهم بازشوند. خطوط عرض جغرافیایی برای هماهنگی با بازشدن خطوط طول جغرافیایی با نزدیک‌شدن به‌قطبها بیشتر ازهم باز می‌شوند، اما فرمول بازشدن آنها ازهمدیگر پیچیده است زیرا ضریب تغییرمقیاس $\sec\theta$ با افزایش عرض جغرافیایی θ افزایش می‌یابد. بنابراین ضریبی که برای بازشدن در یک بازهٔ عرض جغرافیایی به‌کار می‌رود روی این بازه ثابت نیست. با انتگرالگیری این مشکل را می‌توان حل کرد. اگر R را شعاع کره درنظر بگیریم (شکل ۸.۷)، فاصلهٔ D بین استوا و عرض جغرافیایی α برابر است با حاصلضرب R در انتگرال سکانت از ۰ تا α:

$$D = R\int_۰^\alpha \sec x\, dx \,. \qquad (۱۲)$$

بنابراین فاصلهٔ بین‌دوخط با عرض جغرافیایی α° و β° $(\alpha<\beta)$ درشمال چنین است

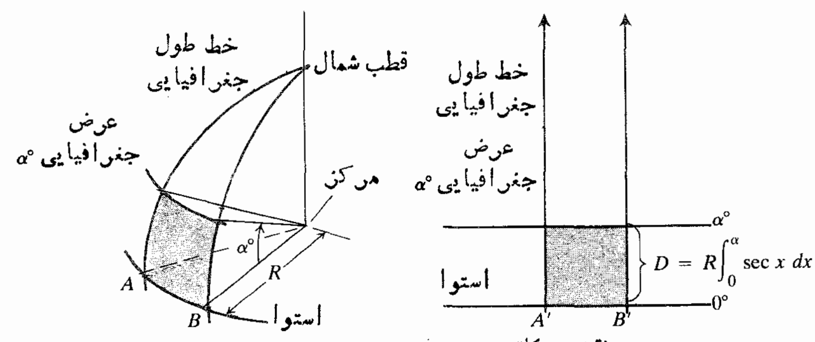
$$R\int_۰^\beta \sec x\, dx - R\int_۰^\alpha \sec x\, dx = R\int_\alpha^\beta \sec x\, dx$$

$$= R\ln|\sec x + \tan x|\Big]_\alpha^\beta . \qquad (۱۳)$$

مثال ۷ فرض کنید قراراست نقشهٔ مرکاتور کره‌ای به‌شعاع ۲۵ cm رسم شود. دراین‌نقشه، بنابه‌رابطهٔ (۱۳) فاصلهٔ بین خط استوا و خط با عرض جغرافیایی ۲۰° درشمال چنین است

$$۲۵\int_۰^{۲۰^\circ} \sec x\, dx = ۲۵ \ln|\sec x + \tan x|\Big]_۰^{۲۰^\circ}$$

$$\approx ۹\ \text{cm}.$$



۸.۷ خطوط عرض و طول جغرافیایی.

جدول ۲.۷ چگونگی انتگرال گرفتن از توانهای مثبت فرد توابع سینوسی و کسینوسی

برای محاسبهٔ	بنویسید	و از این‌جانشانیها بهره‌بگیرید
$\int \sin^{۲n+۱} x\, dx$	$(\sin^۲ x)^n \sin x = (۱-\cos^۲ x)^n \sin x\, dx$	$u=\cos x$ $du = -\sin x\, dx$
$\int \cos^{۲n+۱} x\, dx$	$(\cos^۲ x)^n \cos x = (۱-\sin^۲ x)^n \cos x\, dx$	$u=\sin x$ $du=\cos x\, dx$

فاصلهٔ بین خطوط با عرضهای جغرافیایی °۶۰ و °۸۰ درشمال بنا به‌رابطهٔ (۱۳) برابراست با

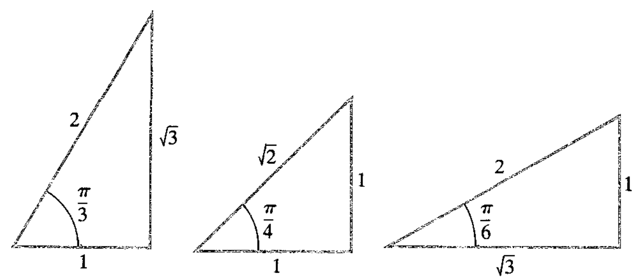
$$۲۵\int_{۶۰^\circ}^{۸۰^\circ} \sec x\,dx = ۲۵\ln|\sec x+\tan x|\Big]_{۶۰^\circ}^{۸۰^\circ}$$

$$\approx ۲۸\,\text{cm}.$$

سودمندیهای نقشه مرکاتور در دریانوردی به‌قیمت تغییرات قابل ملاحظه‌ای درفواصل به‌دست می‌آید.

مسأله‌ها

درمسائل ۱–۲۲، انتگرالها را محاسبه کنید. درمحاسبهٔ انتگرالهای معین می‌توانید از مثلثهای شکل ۹.۷ استفاده کنید.



۹.۷ مثلثهای مرجع برای محاسبهٔ توابع‌مثلثاتی در $\pi/۶$، $\pi/۴$، و $\pi/۳$ رادیان.

۱. $\int \sin^۵ x\,dx$

۲. $\int_۰^{\pi} \sin^۵ \frac{x}{۲}\,dx$

۳. $\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} \cos^۳ x\,dx$

۴. $\int \cos^۵ ۳x\,dx$

۵. $\int \sin^۷ x\,dx$

۶. $\int \cos^۷ x\,dx$

۷. $\int \cos^{۲/۳} x \sin^۵ x\,dx$

(راهنمایی: یک‌عامل $\sin x$ و dx را جداکنید وبقیه رابرحسب کسینوس بیان کنید.)

۸. $\int \sin^{۳/۲} x \cos^۳ x\,dx$

(راهنمایی: یک‌عامل $\cos x$ و dx را جداکنید وبقیه را برحسب سینوس بیان کنید.)

۹. $\int_۰^{\pi/۳} \sec x\,dx$

۱۰. $\int \sec ۴t\,dt$

۱۱. $\int_{-\pi/۳}^{۰} \sec^۳ x\,dx$

۱۲. $\int_۰^{\pi/۶} \frac{۲\sin^۲ x}{\cos x}\,dx$

۱۳. $\int e^x \sec^۳ e^x\,dx$

۱۴. $\int_۰^{\pi/۴} \sec^۴ x\,dx$

۱۵. $\int_{\pi/۴}^{\pi/۲} \frac{dx}{\sin^۴ x}$

۱۶. $\int \sec^۴ ۳x\,dx$

۱۷. $\int_۰^{\pi/۴} \sec^۸ x\,dx$

۱۸. $\int \frac{۲x\,dx}{\cos^۳(x^۲)}$

۱۹. $\int_۰^{\pi/۴} \tan^۳ x\,dx$

۲۰. $\int_{-\pi/۴}^{\pi/۴} \tan^۴ x\,dx$

۲۱. $\int \tan^۶ x\,dx$

۲۲. الف) $\int \cot^۲ x\,dx$

ب) $\int \cot^۴ x\,dx$

۲۳. نشان دهید

$$\int \csc x\,dx = -\ln|\csc x+\cot x|+C.$$

(راهنمایی: راه کوتاه به‌دست آوردن انتگرال سکانت را درمورد کسکانت تکرار کنید.)

۲۴. به‌کمك نتیجهٔ مسألهٔ ۲۳ نشان دهید

$$\int \csc^3 x\,dx = -\frac{1}{2}\csc x\cot x - \frac{1}{2}\ln|\csc x+\cot x| + C.$$

۲۵. مطلوب است محاسبهٔ

الف) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$

ب) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$

۲۶. مطلوب است محاسبهٔ

$$\int_0^{\pi/3}\frac{dx}{1+\sin x}.$$

(راهنمایی: صورت و مخرج را در $1-\sin x$ ضرب کنید.)

درمسائل ۲۷–۳۲، انتگرالها را محاسبه کنید.

۲۷. $\int_{-\pi}^{0} \sin 3x\cos 2x\,dx$

۲۸. $\int_0^{\pi/2}\cos 3x \sin 2x\,dx$

۲۹. $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 3x\,dx$

۳۰. $\int_0^{\pi/2}\sin x\cos x\,dx$

۳۱. $\int_0^{\pi} \cos 3x\cos 4x\,dx$

۳۲. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\cos 7x\,dx$

۳۳. به‌کمك نتیجهٔ مسألهٔ ۲۳ و اتحاد $2\sin A\cos A=\sin 2A$ انتگرال زیر را محاسبه‌کنید

$$\int \frac{\sec 2x\csc 2x}{2}\,dx.$$

۳۴. کدام‌یك از انتگرالهای زیر برابرصفراست وکدام‌یك برابر صفر نیست؟ (درمورد اکثر این انتگرالها بدون نوشتن چیزی می‌توان پاسخ داد.)

الف) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos^2 x\,dx$

ب) $\int_{-1}^{1}\sin 3x\cos 5x\,dx$

پ) $\int_{-L}^{L}\sqrt[3]{\sin x}\,dx$

ت) $\int_{-a}^{a}x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

ث) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x\sec x\,dx$

ج) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\tan^3 x\,dx$

چ) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin x\,dx$

ح) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}x\cos x\,dx$

خ) $\int_{-a}^{a}\sin mx\cos mx\,dx,\quad m\neq 0$

د) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^5 x\,dx$

ذ) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3 x\,dx$

ر) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^5 x\,dx$

ز) $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} x(e^x+e^{-x})\,dx$

ژ) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2 x\cos x\,dx$

س) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin x\sin 2x\,dx$

ش) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sec x\tan x\,dx$

ص) $\int_{-a}^{a}(e^x\sin x+e^{-x}\sin x)\,dx$

ض) $\int_{-1}^{1}\frac{\sin x\,dx}{e^x+e^{-x}}$

۳۵. مطلوب‌است مساحت ناحیه‌ای که از بالا به‌خم $y=2\cos x$ و از پایین به‌خم $y=\sec x$، $-\pi/4\leqslant x\leqslant \pi/4$ محدود است.

۳۶. طول خم زیررا بیابید

$$y=\ln(\cos x),\quad 0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{3}$$

۳۷. طول خم زیر را بیابید

$$y=\ln(\sec x),\quad 0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{4}$$

۳۸. مرکزجرم ناحیهٔ محدود به‌محور x، خم $y=\sec x$، و خطوط $x=-\pi/4$، و $x=\pi/4$ را بیابید.

۳۹. **ماشین حساب یا جدول** خطوط عرض جغرافیایی زیرروی نقشهٔ مرکاتور مثال ۷ چقدر ازهم فاصله دارند؟

الف) عرض جغرافیایی °۳۰ و °۴۵ درشمال،

ب) عرض جغرافیایی °۴۵ و °۶۰ درشمال.

۴۰. نشان دهیدکه هرگاه m، n، p، و q اعدادی صحیح باشند و $m^2\neq n^2$، داریم

الف) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin mx\sin nx\,dx=0$

ب) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin px\cos qx\,dx=0$

۴۱. دوتابع f و g را دربازهٔ $a\leqslant x\leqslant b$ متعامد گویند هرگاه

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=0\,.$$

الف) ثابت کنیدکه، هرگاه m و n اعدادی صحیح باشند و $m^2\neq n^2$، $\sin mx$ و $\sin nx$ در هر بازه‌ای به طول 2π متعامدند.

ب) ثابت کنیدکه $\cos mx$ و $\cos nx$ نیز درهمان شرایط متعامدند.

پ) ثابت کنیدکه $\sin mx$ و $\cos nx$ نیز درهمان شرایط و یا حتی اگر $m=n$، متعامدند.

(درمثال ۶ ومسألهٔ ۴۰ این احکام‌برای بازهٔ $[0,2\pi]$ ثابت می‌شود.)

۴۲. برهانی برای صفر بودن انتگرال یك تابع پیوستهٔ فرد چون $f(x)$ از $x=-a$ تا $x=a$.

الف) نخست نشان دهید

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx=-\int_0^a f(x)\,dx\,.$$

بـرای این منظور می‌توانید $u=-x$ و $du=-dx$ را در انتگرال طرف چپ قرار دهید.

ب) از نتیجهٔ قسمت (الف) بهره بگیرید و نشان دهید

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{-a}^{0} f(x)\,dx+\int_0^a f(x)\,dx=0\,.$$

۴.۷ توانهای زوج سینوسها وکسینوسها

دراین بخش خواهیم دیدکه چگونه اتحادهایی نظیر

$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}\qquad(1)$$

$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}\qquad(2)$$

و شمار دیگری از اتحادهایی‌که با آنها سروکار داریم به ما امکان می‌دهند انتگرالها را با کاهش توانهای زوج و حذف ریشه‌های دوم محاسبه کنیم.

کاهش توانهای زوج

مثال ۱

$$\begin{aligned}\int\cos^4 x\,dx&=\int(\cos^2 x)^2\,dx\\&=\int\frac{1}{4}(1+\cos 2x)^2\,dx \qquad \left(\begin{matrix}\text{معادلهٔ ۲}\\ \theta=x\ \text{به‌ازای}\end{matrix}\right)\\&=\frac{1}{4}\int(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx\\&=\frac{1}{4}\int\Big[1+2\cos 2x\\&\qquad+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\Big]dx \qquad \left(\begin{matrix}\text{معادلهٔ ۲}\\ \theta=2x\ \text{به‌ازای}\end{matrix}\right)\\&=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C\,.\end{aligned}$$

■

انتگرالی نظیر

$$\int\sin^2 x\cos^4 x\,dx$$

را کـه در آنها هم $\sin x$ و هم $\cos x$ توانهای زوج دارنـد می‌تـوان به‌مجموعی از انتگرالهایی تبدیل کـردکـه درآنها تنها توانهای $\sin x$ یا $\cos x$ موجود باشند. سپس این انتگرالها را می‌توان به‌روش مثال ۱ محاسبه‌کرد.

مثال ۲

$$\int \sin^{۲}x\cos^{۴}x\,dx=\int(۱-\cos^{۲}x)\cos^{۴}x\,dx$$
$$=\int\cos^{۴}x\,dx-\int\cos^{۶}x\,dx\,.$$

$\int\cos^{۴}x\,dx$ را درمثال۱ به‌دست آوردیم. درمورد $\int\cos^{۶}x\,dx$ داریم

$$\int\cos^{۶}x\,dx=\int(\cos^{۲}x)^{۳}\,dx=\frac{۱}{۸}\int(۱+\cos ۲x)^{۳}\,dx$$
$$=\frac{۱}{۸}\int(۱+۳\cos ۲x+۳\cos^{۲}۲x$$
$$+\cos^{۳}۲x)\,dx\,.$$

حال روش انتگرالگیری ازهریك از جملات انتگرالده را می‌دانیم. نتیجه چنین است

$$\int\cos^{۶}x\,dx=\frac{۵}{۱۶}x+\frac{۱}{۴}\sin ۲x$$
$$+\frac{۳}{۶۴}\sin ۴x-\frac{۱}{۴۸}\sin^{۳}۲x+C\,.$$

از ترکیب این‌نتیجه با نتیجهٔ مثال ۱ داریم

$$\int\sin^{۲}x\cos^{۴}x\,dx=\int\cos^{۴}x\,dx-\int\cos^{۶}x\,dx$$
$$=\frac{۱}{۱۶}x-\frac{۱}{۶۴}\sin ۴x$$
$$+\frac{۱}{۴۸}\sin^{۳}۲x+C\,.\qquad\blacksquare$$

حذف ریشه‌های دوم

مثال ۳ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int_{۰}^{\pi/۴}\sqrt{۱+\cos ۴x}\,dx\,.$$

حل: برای حذف ریشهٔ دوم اتحاد (۲) را به‌کارمی‌بریم

$$\cos^{۲}\theta=\frac{۱+\cos ۲\theta}{۲}\quad\text{یا}\quad ۱+\cos ۲\theta=۲\cos^{۲}\theta\,.$$

به‌ازای $\theta=۲x$ داریم

$$۱+\cos ۴x=۲\cos^{۲}۲x\,.$$

بنابراین

$$\int_{۰}^{\pi/۴}\sqrt{۱+\cos ۴x}\,dx=\int_{۰}^{\pi/۴}\sqrt{۲\cos^{۲}۲x}\,dx$$
$$=\int_{۰}^{\pi/۴}\sqrt{۲}\sqrt{\cos^{۲}۲x}\,dx$$
$$=\sqrt{۲}\int_{۰}^{\pi/۴}|\cos ۲x|\,dx$$
$$=\sqrt{۲}\int_{۰}^{\pi/۴}\cos ۲x\,dx$$

(چون بر $[۰,\pi/۴]$ داریم $\cos ۲x\geqslant ۰$)

$$=\sqrt{۲}\left[\frac{\sin ۲x}{۲}\right]_{۰}^{\pi/۴}$$
$$=\frac{\sqrt{۲}}{۲}[۱-۰]=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\,.\qquad\blacksquare$$

مثال ۴ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\sqrt{۱-\cos^{۲}t}\,dt\,.$$

حل ۱: با استفاده از اتحاد

$$\sin^{۲}t=۱-\cos^{۲}t$$

داریم

$$\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\sqrt{۱-\cos^{۲}t}\,dt=\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\sqrt{\sin^{۲}t}\,dt$$
$$=\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}|\sin t|\,dt$$

بدون بررسی علامت $\sin t$ روی دامنهٔ $-\pi/۲\leqslant t\leqslant\pi/۲$ نمی‌توان علامت قدرمطلق را حذف کرد. در این دامنه، $\sin t$ به‌ازای مقادیر کمتر از ۰ منفی است. پس

$$|\sin t|=\begin{cases}-\sin t & -\dfrac{\pi}{۲}\leqslant t\leqslant ۰\\ \sin t & ۰\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{۲}\,.\end{cases}$$

بنابراین روش درست انتگرالگیری چنین است

$$\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}|\sin t|\,dt=\int_{-\pi/۲}^{۰}-\sin t\,dt+\int_{۰}^{\pi/۲}\sin t\,dt$$
$$=\cos t\Big]_{-\pi/۲}^{۰}-\cos t\Big]_{۰}^{\pi/۲}$$
$$=(۱-۰)-(۰-۱)$$
$$=۲\,.$$

اگر علامت قدرمطلق را نادیده می‌گرفتیم و به اشتباه می‌نوشتیم $\sqrt{۱-\cos^۲ t}=\sin t$ چنین به‌دست می‌آمد

$$\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\sqrt{۱-\cos^۲ t}\,dt=\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\sin t\,dt$$

$$=-\cos t\Big]_{-\pi/۲}^{\pi/۲}=-۰+۰=۰$$

که نادرست است.

حل ۲: راه دیگر محاسبهٔ این انتگرال این است که مانند راه‌حل اول تا رسیدن به‌انتگرال $|\sin t|$ پیش‌برویم و از آن پس با توجه به‌اینکه تابع $|\sin t|$ زوج است چنین نتیجه بگیریم

$$\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}|\sin t|\,dt=۲\int_{۰}^{\pi/۲}|\sin t|\,dt=۲\int_{۰}^{\pi/۲}\sin t\,dt$$

$$=-۲\cos t\Big]_{۰}^{\pi/۲}=۲\,.$$ ■

مثال ۵ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int_{\pi/۴}^{۳\pi/۴}\sqrt{\csc^۲ x-۱}\,dx\,.$$

حل: به‌کمك اتحاد $\csc^۲ x-۱=\cot^۲ x$ می‌توان ریشهٔ دوم را حذف کرد و چنین نوشت

$$\int_{\pi/۴}^{۳\pi/۴}\sqrt{\csc^۲ x-۱}\,dx=\int_{\pi/۴}^{۳\pi/۴}\sqrt{\cot^۲ x}\,dx$$

$$=\int_{\pi/۴}^{۳\pi/۴}|\cot x|\,dx\,.$$

برای اینکه ببینیم چگونه می‌توان علامت قدرمطلق را حذف کرد، علامت $\cot x$ را در دامنهٔ انتگرالگیری بررسی‌می‌کنیم. با نگاهی به‌نمودار شکل ۱۰.۷ (الف) یا مثلثهای شکل ۱۰.۷ (ب) درمی‌یابیم که کتانژانت بین $\pi/۴$ و $\pi/۲$ مثبت و بین $\pi/۲$ و $۳\pi/۴$ منفی است. بنابراین بازهٔ انتگرالگیری را در $\pi/۲$ به‌دوقسمت می‌کنیم و محاسبات را چنین ادامه می‌دهیم

$$\int_{\pi/۴}^{۳\pi/۴}|\cot x|\,dx=\int_{\pi/۴}^{\pi/۲}|\cot x|\,dx+\int_{\pi/۲}^{۳\pi/۴}|\cot x|\,dx$$

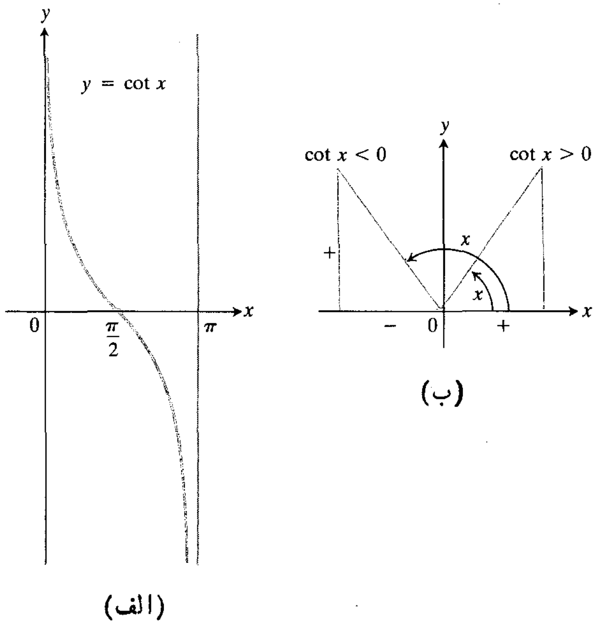
$$=\int_{\pi/۴}^{\pi/۲}\cot x\,dx+\int_{\pi/۲}^{۳\pi/۴}-\cot x\,dx$$

$$=\ln|\sin x|\Big]_{\pi/۴}^{\pi/۲}-\ln|\sin x|\Big]_{\pi/۲}^{۳\pi/۴}$$

$$=\ln|۱|-\ln\left|\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right|-\ln\left|-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right|+\ln|۱|$$

$$=-۲\ln\left|\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right|=\ln\left(\frac{۲}{\sqrt{۲}}\right)^۲$$

$$=\ln ۲\,.$$



۱۰.۷ نمودارهایی‌که به‌کمك آنها علامت $\cot x$ در بازهٔ $\pi/۴\leqslant x\leqslant ۳\pi/۴$ تعیین می‌شود. ■

جدول ۳.۷ چگونگی انتگرالگیری‌از $\sin^{۲m}x\cos^{۲n}x$ یعنی حاصلضرب توانهای زوج نامنفی $\sin x$ و $\cos x$

۱. بـه‌کمك اتحادهـای $\cos^۲ x=۱-\sin^۲ x$ یـا $\sin^۲ x=۱-\cos^۲ x$ حـاصلضرب را چنان تغییر دهید کـه در نتیجهٔ حاصل تنها توانی از $\sin x$ یـا توانی از $\cos x$ (هرکدام مناسبتر است) باشد.

۲. بـا یك یا چند بار استفاده از $\sin^۲ x=(۱-\cos ۲x)/۲$ یا $\cos^۲ x=(۱+\cos ۲x)/۲$، توان زوج نتیجه را بـه توانهای کوچکتر تبدیل کنید.

مسأله‌ها

مطلوب است محاسبهٔ انتگرالهای مسائل ۱ـ۲۶.

۱. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx$

۲. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t \, dt$

۳. $\int \sin^2 2t \, dt$

۴. $\int \cos^2 3\theta \, d\theta$

۵. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^2 x \cos^2 x \, dx$

۶. $\int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx$

۷. $\int_0^{\pi/a} \sin^4 ax \, dx$

۸. $\int_0^{1} \cos^4 2\pi t \, dt$

۹. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} \, dx$

۱۰. $\int \frac{\cos^6 x}{\sin^2 x} \, dx$

۱۱. $\int_0^{\pi} \sin^4 y \cos^2 y \, dy$

۱۲. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2 \sin^4 t \cos^4 t \, dt$

(راهنمایی: $2 \sin\theta \cos\theta = \sin 2\theta$)

۱۳. $\int \frac{\sin^6 \theta}{\cos^2 \theta} \, d\theta$

۱۴. $\int_{-\pi}^{0} \sin^6 x \, dx$

۱۵. $\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}} \, dt$

۱۶. $\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x} \, dx$

۱۷. $\int_0^{\pi/10} \sqrt{1+\cos 5\theta} \, d\theta$

۱۸. $\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos (y/4)} \, dy$

۱۹. $\int_0^{\pi/2} \theta \sqrt{1-\cos\theta} \, d\theta$

(راهنمایی: از رابطهٔ $\sqrt{1-\cos\theta} = \sqrt{2} \sin(\theta/2)$ استفاده کنید.)

۲۰. $\int_0^{\pi} \sqrt{1-\sin^2 t} \, dt$

۲۱. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1+\tan^2 x} \, dx$

۲۲. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{\sec^2 x - 1} \, dx$

۲۳. $\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos^2\theta} \, d\theta$

۲۴. $\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos^2 2x} \, dx$

۲۵. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{\cot^2\theta + 1} \, d\theta$

۲۶. $\int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos^2 t)^{3/2} \, dt$

انتگرالهای مسائل ۲۷ـ۳۴ را محاسبه کنید. به‌نظر می‌رسد که برای محاسبهٔ این انتگرالها باید توانها را کاهش‌داد یا ریشه‌های دوم را حذف کرد. اما اگر از راههای دیگری بهره بگیریم، سریعتر به نتیجه می‌رسیم.

۲۷. $\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1-\cos^2 x} \sin x \, dx$

۲۸. $\int \frac{1}{\cos^2 t} \, dt$

۲۹. $\int \frac{1}{\sin^4 x} \, dx$

۳۰. $\int \frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta} \, d\theta$

۳۱. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx$

۳۲. $\int \frac{\cos 2t}{\sin^4 2t} \, dt$

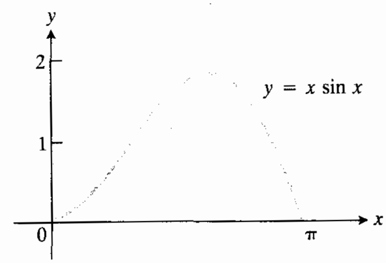
۳۳. $\int \frac{\sin^{2}t}{\cos t}dt$

۳۴. $\int \sin 2x(1-\cos 2x)^{3/2}\,dx$

۳۵. مطلوب است مساحت بین محور x و خم $y=\sqrt{1+\cos 4x}$، $0\leqslant x\leqslant \pi$.

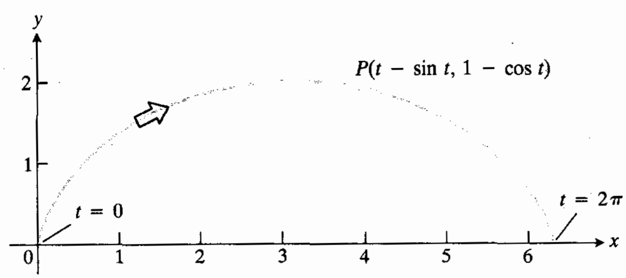
۳۶. مطلوب است حجم حاصل از دوران قوس $y=\sin x$، $0\leqslant x\leqslant \pi$، حول محور x.

۳۷. ناحیهٔ محدود به خم $y=x\sin x$ و بازهٔ $0\leqslant x\leqslant \pi$ حول محور x دوران می‌کند و جسمی ایجاد می‌شود (شکل ۱۱.۷). حجم جسم را بیابید.



۱۱.۷ خم مسألهٔ ۳۷.

۳۸. نمودار $x=t-\sin t$، $y=1-\cos t$، $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ طاقی است روی محور x (شکل ۱۲.۷) مطلوب است مساحت رویهٔ حاصل از دوران این طاق حول محور x.



۱۲.۷ خم مسألهٔ ۳۸. این خم را چرخزاد می‌نامند. خمی که یك ذرهٔ واقع در روی یك چرخ درحال غلتش طی می‌کند از همین نوع است. در بخش ۹.۸ برخی خواص جالب این خم بررسی می‌شود.

۵.۷ جانشانیهای مثلثاتی که درآنها تك جمله ایهای مربع به‌جای $a^{2}-u^{2}$، $a^{2}+u^{2}$، و $u^{2}-a^{2}$ قرار می‌گیرند

حال به یك برنامهٔ سه‌مرحله‌ای می‌پردازیم که با اجرای آن می‌توان از همهٔ توابع گویا انتگرال گرفت. نخستین مرحله که در این بخش به آن می‌پردازیم بررسی جانشانیهایی است که دوجمله ایهایی نظیر

$$a^{2}-u^{2}\text{، }a^{2}+u^{2}\text{، و }u^{2}-a^{2}$$

را به تك جمله ایهای مربع تبدیل می‌کنند. دومین مرحله که در بخش ۶.۷ بررسی می‌شود ساده کردن انتگرالهای شامل $ax^{2}+bx+c$ از راه کامل کردن مربع وسپس قراردادن تك جمله ایهای مربع به‌جای مجموعها و تفاضلهای مربعات حاصل است. سومین و آخرین مرحله که در بخش ۷.۷ به آن می‌پردازیم بیان توابع گویا به‌این صورتهاست: مجموعهای چندجمله ایها (که اکنون می‌دانیم چگونه از آنها انتگرال بگیریم)، کسرهایی که مخرجشان به‌صورت حاصلضرب عوامل درجه اول است (که پس از انتگرالگیری به‌صورت لگاریتم یا کسر درمی‌آیند)، و کسرهایی که مخرجشان به‌صورت درجه‌دوم است (که ازآنها می‌توان با روشهایی که در این بخش و بخش بعدی عرضه می‌شود انتگرال گرفت).

جانشانیهای مثلثاتی درمورد ترکیب مربعات

به کمك جانشانیهای مثلثاتی می‌توان به‌جای چندجمله ایهای

$$a^{2}-u^{2}\text{، }a^{2}+u^{2}\text{، و }u^{2}-a^{2}$$

تك جمله ایهای مربع قرارداد. به‌این ترتیب شماری از انتگرالهای مهم به انتگرالهایی تبدیل می‌شوند که یا آنها را می‌شناسیم یا می‌توانیم درجداول بیابیم. متداولترین جانشانیها عبارت‌اند از $u=a\sin\theta$، $u=a\tan\theta$، و $u=a\sec\theta$. با جانشانی $u=a\sin\theta$ داریم

$$a^{2}-u^{2}=a^{2}-a^{2}\sin^{2}\theta=a^{2}(1-\sin^{2}\theta)=a^{2}\cos^{2}\theta. \qquad (1)$$

با جانشانی $u=a\tan\theta$ داریم

$$a^{2}+u^{2}=a^{2}+a^{2}\tan^{2}\theta=a^{2}(1+\tan^{2}\theta)=a^{2}\sec^{2}\theta. \qquad (2)$$

با جانشانی $u=a\sec\theta$ داریم

$$u^{2}-a^{2}=a^{2}\sec^{2}\theta-a^{2}=a^{2}(\sec^{2}\theta-1)=a^{2}\tan^{2}\theta. \qquad (3)$$

به‌طور خلاصه

---

(۴) جانشانی $u=a\sin\theta$، $a^{2}-u^{2}$ را به $a^{2}\cos^{2}\theta$ تبدیل می‌کند.

(۵) جانشانی $u=a\tan\theta$، $a^{2}+u^{2}$ را به $a^{2}\sec^{2}\theta$ تبدیل می‌کند.

(۶) جانشانی $u=a\sec\theta$، $u^{2}-a^{2}$ را به $a^{2}\tan^{2}\theta$ تبدیل می‌کند.

همواره وقتی از جانشانی بهره می‌گیریم، میل داریم این عمل معکوسپذیر باشد، یعنی بتوان نتایج نهایی‌را برحسب متغیرهای اصلی بیان کرد. مثلاً، اگر $u=a\sin\theta$، مایلیم بتوانیم پس از انتگرالگیری رابطهٔ

$$\theta=\sin^{-1}\frac{u}{a}$$

را درنتایج قراردهیم، اگر $u=a\tan\theta$، مایلیم بتوانیم پس از انتگرالگیری رابطهٔ

$$\theta=\tan^{-1}\frac{u}{a}$$

را درنتایج قراردهیم، و همین‌طور درمورد $u=a\sec\theta$.
چنانکه دربخش ۲.۶ گفته شد، این جانشانیها تنها به‌ازای مقادیرخاصی از θ معکوس دارند. برای معکوسپذیر بودن

$u=a\sin\theta$ لازم است $\theta=\sin^{-1}\frac{u}{a}$ و $-\frac{\pi}{۲}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{۲}$

$u=a\tan\theta$ لازم است $\theta=\tan^{-1}\frac{u}{a}$ و $-\frac{\pi}{۲}<\theta<\frac{\pi}{۲}$

$u=a\sec\theta$ لازم است

$$\theta=\sec^{-1}\frac{u}{a} \quad \text{و} \quad \begin{cases} ۰\leqslant\theta<\frac{\pi}{۲} & \text{اگر } \frac{u}{a}\geqslant ۱ \\ \frac{\pi}{۲}<\theta\leqslant\pi & \text{اگر } \frac{u}{a}\leqslant -۱ \end{cases}$$

شکل ۱۳.۷ را ببینید.

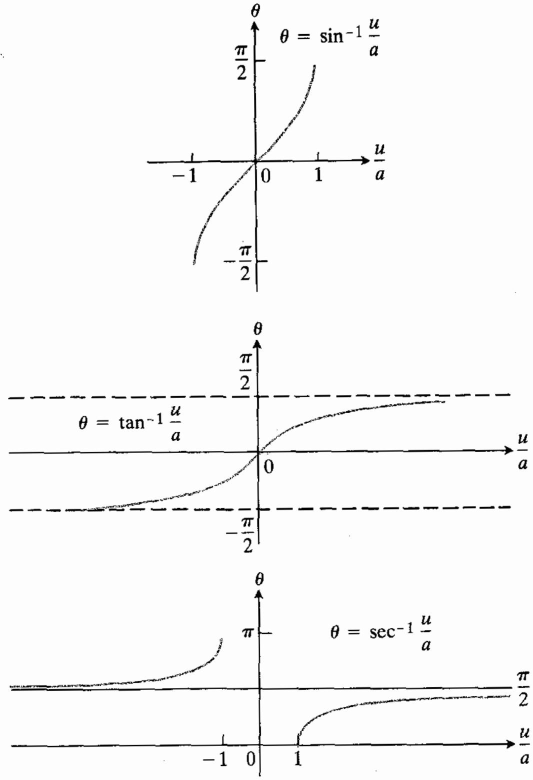
مثال ۱ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int\frac{du}{a^{۲}+u^{۲}}.$$

حل: با قراردادن

$$u=a\tan\theta,\quad du=a\sec^{۲}\theta\,d\theta$$

$$a^{۲}+u^{۲}=a^{۲}+a^{۲}\tan^{۲}\theta=a^{۲}(۱+\tan^{۲}\theta)=a^{۲}\sec^{۲}\theta$$



۱۳.۷ نمودارهای آرك سینوس، آرك تانژانت، و آرك سکانت برحسب u/a.

داریم

$$\int\frac{du}{a^{۲}+u^{۲}}=\int\frac{a\sec^{۲}\theta\,d\theta}{a^{۲}\sec^{۲}\theta}=\frac{۱}{a}\int d\theta$$

$$=\frac{۱}{a}\cdot\theta+C=\frac{۱}{a}\tan^{-۱}\frac{u}{a}+C. \qquad (۷)$$

■

مثال ۲ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int\frac{du}{\sqrt{a^{۲}-u^{۲}}},\quad a>۰.$$

حل: برای نشاندن يك تك‌جمله‌ای مربع به جای $a^{۲}-u^{۲}$ (و لذا حذف ریشهٔ دوم) چنین قرارمی‌دهیم

$$u=a\sin\theta,\quad \theta=\sin^{-۱}\frac{u}{a},\quad -\frac{\pi}{۲}<\theta<\frac{\pi}{۲}$$

$$du=a\cos\theta\,d\theta$$

$$a^{۲}-u^{۲}=a^{۲}(۱-\sin^{۲}\theta)=a^{۲}\cos^{۲}\theta.$$

پس

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \int \frac{a\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta}}$$

$$= \int \frac{a\cos\theta\, d\theta}{|a\cos\theta|}$$

$$= \int d\theta \qquad (۸)$$

(به‌ازای $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ ، $a\cos\theta>0$)

$$= \theta + C$$

$$= \sin^{-1}\frac{u}{a} + C. \quad \blacksquare$$

مثال ۳ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}}, \quad a>0.$$

حل: برای نشاندن یک تک‌جمله‌ای مربع به‌جای a^2+u^2 چنین قرارمی‌دهیم

$$u = a\tan\theta, \quad -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$$

$$du = a\sec^2\theta\, d\theta$$

$$a^2+u^2 = a^2(1+\tan^2\theta) = a^2\sec^2\theta.$$

پس

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2\sec^2\theta}}$$

$$= \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{|\sec\theta|} \quad (a>0)$$

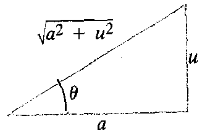
$$= \int \sec\theta\, d\theta$$

(به‌ازای $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ ، $\sec\theta>0$)

$$= \ln|\sec\theta+\tan\theta| + C \qquad (۹)$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{a}+\frac{u}{a}\right| + C \quad \text{(با توجه به‌شکل ۱۴۰۷)}$$

$$= \ln\left|\sqrt{a^2+u^2}+u\right| + C'$$



۱۴۰۷ با مراجعه به این مثلث که در آن $u=a\tan\theta$ ، توابع مثلثاتی θ را می‌توان برحسب u بیان‌کرد. مثلاً $\sec\theta=(\sqrt{a^2+u^2})/a$.

که‌در آن $C'=C-\ln a$. به‌چگونگی بیان $\ln|\sec\theta+\tan\theta|$ برحسب u توجه کنید: یک مثلث مرجع را چنان رسم می‌کنیم که جانشانی اصلی را توصیف‌کند (شکل ۱۴۰۷) و ازروی این مثلث نسبتها را می‌یابیم. ■

مثال ۴ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}, \quad \left|\frac{u}{a}\right|>1.$$

حل: برای نشاندن یک تک‌جمله‌ای مربع به‌جای u^2-a^2 ، چنین قرارمی‌دهیم

$$u = a\sec\theta, \qquad \theta = \sec^{-1}\frac{u}{a}$$

$$du = a\sec\theta\tan\theta$$

$$u^2-a^2 = a^2(\sec^2\theta-1) = a^2\tan^2\theta.$$

با این‌جانشانی نتیجه می‌گیریم

به‌ازای $\frac{u}{a}>1$ ، $0<\theta<\frac{\pi}{2}$

و

به‌ازای $\frac{u}{a}<-1$ ، $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$.

(شکل ۱۳۰۷ را ببینید). پس

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2\tan^2\theta}}$$

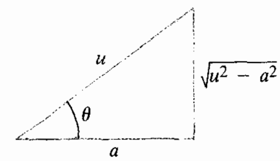
$$= \int \frac{\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{|\tan\theta|} \quad (a>0)$$

$$= \pm\int \sec\theta\, d\theta$$

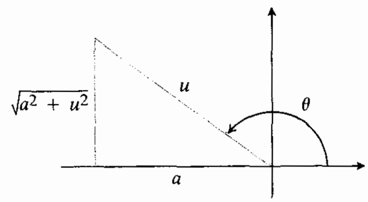
$$= \pm\ln|\sec\theta+\tan\theta| + C$$

$$= \pm\ln\left|\frac{u}{a}\pm\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a}\right| + C.$$

(شکل ۱۵۰۷)



(الف)



(ب)

۱۵.۷ (الف) مثلث مرجع برای
$u=a\sec\theta,\ ۰<\theta<\pi/۲$
(ب) مثلث مرجع برای
$u=a\sec\theta,\ \pi/۲<\theta<\pi$.

علامتها را چه بکنیم؟ وقتی $۰<\theta<\pi/۲$، تانژانت و سکانت مثبت‌اند و هردوعلامت مثبت است. وقتی که $\pi/۲<\theta<\pi$، سکانت و تانژانت هردومنفی‌اند. بنا براین

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^۲-a^۲}}=\begin{cases}\ln\left|\dfrac{u}{a}+\dfrac{\sqrt{u^۲-a^۲}}{a}\right|+C \\ \text{یا} \\ -\ln\left|\dfrac{u}{a}-\dfrac{\sqrt{u^۲-a^۲}}{a}\right|+C.\end{cases}\qquad(۱۰)$$

خوشبختانه نیازی به‌این فرمول دوسطری نیست زیرا هردوصورت طرف راست این فرمول واقعاً برابرند

$$-\ln\left|\frac{u}{a}-\frac{\sqrt{u^۲-a^۲}}{a}\right|=\ln\left|\frac{a}{u-\sqrt{u^۲-a^۲}}\right|$$

$$=\ln\left|\frac{a(u+\sqrt{u^۲-a^۲})}{(u-\sqrt{u^۲-a^۲})(u+\sqrt{u^۲-a^۲})}\right|$$

$$=\ln\left|\frac{a(u+\sqrt{u^۲-a^۲})}{a^۲}\right|$$

$$=\ln\left|\frac{u+\sqrt{u^۲-a^۲}}{a}\right|$$

$$=\ln|u+\sqrt{u^۲-a^۲}|-\ln a.$$

بنا براین

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^۲-a^۲}}=\ln|u+\sqrt{u^۲-a^۲}|+C'.\qquad(۱۱)\ \blacksquare$$

مثال ۵ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int\frac{x^۲\,dx}{\sqrt{۹-x^۲}}.$$

حل: بـرای نشاندن یك تك‌جمله‌ای مربع به‌جای $۹-x^۲$ چنین قرارمی‌دهیم

$$x=۳\sin\theta,\quad -\frac{\pi}{۲}<\theta<\frac{\pi}{۲}$$

$$dx=۳\cos\theta\,d\theta$$

$$۹-x^۲=۹(۱-\sin^۲\theta)=۹\cos^۲\theta.$$

پس

$$\int\frac{x^۲\,dx}{\sqrt{۹-x^۲}}=\int\frac{۹\sin^۲\theta\cdot ۳\cos\theta\,d\theta}{|۳\cos\theta|}$$

$$=۹\int\sin^۲\theta\,d\theta$$

($\cos\theta>۰$ ،$-\frac{\pi}{۲}<\theta<\frac{\pi}{۲}$ به‌ازای)

$$=۹\int\frac{۱-\cos ۲\theta}{۲}\,d\theta$$

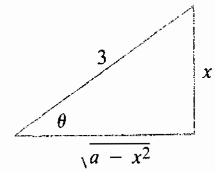
$$=\frac{۹}{۲}\left(\theta-\frac{\sin ۲\theta}{۲}\right)+C$$

$$=\frac{۹}{۲}(\theta-\sin\theta\cos\theta)+C$$

$$=\frac{۹}{۲}\left(\sin^{-۱}\frac{x}{۳}-\frac{x}{۳}\cdot\frac{\sqrt{۹-x^۲}}{۳}\right)+C$$

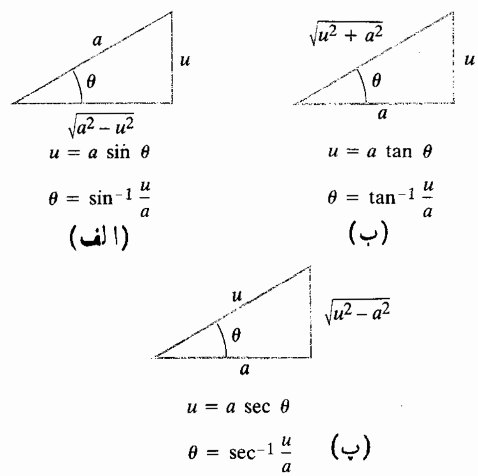
(شکل ۱۶.۷)

$$=\frac{۹}{۲}\sin^{-۱}\frac{x}{۳}-\frac{x}{۲}\sqrt{۹-x^۲}+C.$$



۱۶.۷ مثلث مرجع برای
$x=3\sin\theta\,,\ 0<\theta<\pi/2\,.$

مسأله‌ها



مثلثهای مرجع

درمسائل ۱–۱۵، انتگرالها را محاسبه کنید.

۱. $\displaystyle\int_{-2}^{2}\frac{dx}{4+x^2}$

۲. $\displaystyle\int_{0}^{2}\frac{dx}{8+2x^2}$

۳. $\displaystyle\int\frac{dx}{1+4x^2}$

۴. $\displaystyle\int_{0}^{3/2}\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

۵. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/8}\frac{2\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

۶. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4}\frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$

۷. $\displaystyle\int\frac{dy}{\sqrt{25+y^2}}$

۸. $\displaystyle\int\frac{3\,dy}{\sqrt{1+9y^2}}$

۹. $\displaystyle\int\frac{dy}{\sqrt{25+9y^2}}$

۱۰. $\displaystyle\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-4}}$

۱۱. $\displaystyle\int\frac{3\,dz}{\sqrt{9z^2-1}}$

۱۲. $\displaystyle\int\frac{dz}{\sqrt{25z^2-9}}$

۱۳. $\displaystyle\int_{8/\sqrt{3}}^{8}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-16}}$

۱۴. $\displaystyle\int_{2}^{\sqrt{6}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-3}}$

۱۵. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}/2}^{1}\frac{dx}{2x\sqrt{4x^2-1}}$

در مسائل ۱۶–۲۲، انتگرالها را با جانشانیهای داده‌شده محاسبه کنید.

۱۶. $\displaystyle\int\frac{dy}{y^2\sqrt{y^2-16}},\quad y=4\sec u$

۱۷. $\displaystyle\int_{2}^{4}\sqrt{x^2-4}\,dx,\quad x=2\sec u$

۱۸. $\displaystyle\int_{0}^{4/5}\frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad x=\cos u$

۱۹. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}},\quad x=3\sin u$

۲۰. $\displaystyle\int_{0}^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},\quad x=\tan u$

۲۱. $\displaystyle\int_{5/4}^{5/3}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}},\quad x=\csc u$

۲۲. $\int_{1/2}^{1}\frac{\sqrt{1-x}}{x}\,dx,\quad x=\cos^2 u$

درمسائل ۲۳–۳۸ ، انتگرالها را محاسبه کنید.

۲۳. $\int_0^5\sqrt{25-x^2}\,dx$

۲۴. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

۲۵. $\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}}$

۲۶. $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

۲۷. $\int_0^1\frac{12\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$

۲۸. $\int_0^{3/2}\frac{x\,dx}{\sqrt{4+x^2}}$

۲۹. $\int_0^1\frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$

۳۰. $\int\frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

۳۱. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1/4}}$

۳۲. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-5x^2}}$

۳۳. $\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$

۳۴. $\int_0^{(1/2)\ln 3}\frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$

۳۵. $\int_{3/4}^{4/5}\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

۳۶. $\int\frac{4x^2\,dx}{(1-x^2)^{3/2}}$

۳۷. $\int\frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$

۳۸. $\int\frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{2-\cos^2\theta}}$

۳۹. مطلوب است محاسبهٔ انتگرال

$$\int\frac{y\,dy}{\sqrt{16-y^2}}$$

الف) بدون استفاده از جانشانی مثلثاتی

ب) با استفاده از جانشانی مثلثاتی.

۴۰. مطلوب است محاسبهٔ

الف) $\int_0^2\frac{x\,dx}{4+x^2}$

ب) $\int_0^2\frac{dx}{4+x^2}$

۴۱. مطلوب است محاسبهٔ

$$\int\frac{x\,dx}{(x^2-1)^{3/2}}$$

الف) بدون استفاده از جانشانی مثلثاتی

ب) با استفاده از جانشانی مثلثاتی.

۴۲. مطلوب است محاسبهٔ

الف) $\int_0^{\sqrt{3}/2}\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

ب) $\int_0^{\sqrt{3}/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

۴۳. به‌کمك جانشانی $u=az$، انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int\frac{du}{u^2+a^2}$

ب) $\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$

۴۴. به‌فرض $\theta=\sin^{-1}(u/2)$، $\cos\theta$ و $\tan\theta$ را برحسب u بیابید.

۴۵. مطلوب است محاسبهٔ موارد زیر برحسب u و a.

الف) $\sin\left(\tan^{-1}\frac{u}{a}\right)$

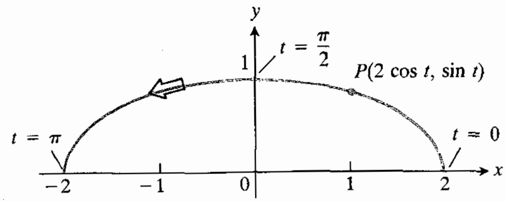
ب) $\cos\left(\sec^{-1}\frac{u}{a}\right)$

۴۶. مطلوب است مساحت ناحیه‌ای که در ربع اول واقع و به‌خم $y=\sqrt{۱-(x^۲/۹)}$ محدود است.

۴۷. مطلوب است مساحت رویهٔ حاصل از دوران خم

$$x=۲\cos t,\quad y=\sin t,\quad ۰\leqslant t\leqslant \pi$$

حول محور x. شکل ۱۷.۷ را ببینید.



۱۷.۷ خم $x=۲\cos t$، $y=\sin t$، $۰\leqslant t\leqslant\pi$ درمسألهٔ ۴۷، نیمهٔ بالایی یك بیضی است. پیکان جهت افزایش t را نشان می‌دهد.

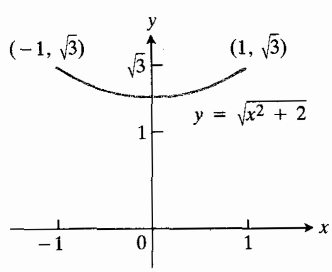
۴۸. مطلوب است طول بخشی‌از سهمی $y=x^۲$ که بین $x=۰$ تا $x=\pi/۳$ قراردارد.

۴۹. مطلوب است جوابی از معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx}=y^۲\left(۱-\frac{۱}{\sqrt{۴-x^۲}}\right)$$

که نقطهٔ $(\sqrt{۲},\ ۴/\pi)$ در آن صدق کند.

۵۰. مطلوب است مساحت رویهٔ حاصل از دوران خم $y=\sqrt{x^۲+۲}$، $-۱\leqslant x\leqslant ۱$ حول محور x. شکل ۱۸.۷ را ببینید.



۱۸.۷ خم مربوط به‌مسألهٔ ۵۰.

۵۱. مطلوب است گشتاوری که یك سیم همگن نازك به‌چگالی δ و واقع برخم $y=e^x$، $۰\leqslant x\leqslant \ln\sqrt{۳}$ حول محور x ایجاد می‌کند.

۶.۷ انتگرالهای شامل $ax^۲+bx+c$

به‌کمك کامل کردن مربع می‌توان سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم کلی

$$ax^۲+bx+c,\quad a\neq ۰$$

را به‌صورت $a(u^۲\pm A^۲)$ درآورد و سپس با استفاده از یکی از جانشانیهای مثلثاتی مورد بحث در بخش پیشین می‌توان به‌جای $u^۲\pm A^۲$ یك تك جمله‌ای مربع قرارداد. همان‌طور که درمثالهای زیر خواهیم دید از این راه یعنی از راه کامل کردن مربع و جانشانی مثلثاتی می‌توان شماری از انتگرالهای دیگر را محاسبه کرد.

مثال ۱ کامل‌کردن مربع.

$$\begin{aligned}
۴x^۲+۴x+۲&=۴(x^۲+x)+۲\\
&=۴\left(x^۲+x+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۴}\right)+۲\\
&=۴\left(x^۲+x+\frac{۱}{۴}\right)+۲-۱\\
&=۴\left(x+\frac{۱}{۲}\right)^۲+۱\\
&=۴\left(\left(x+\frac{۱}{۲}\right)^۲+\frac{۱}{۴}\right)=۴(u^۲+A^۲).
\end{aligned}$$
■

مثال ۲ کامل‌کردن مربع.

$$\begin{aligned}
۲x^۲-۶x+۴&=۲(x^۲-۳x)+۴\\
&=۲\left(x^۲-۳x+\frac{۹}{۴}-\frac{۹}{۴}\right)+۴\\
&=۲\left(x^۲-۳x+\frac{۹}{۴}\right)+۴-\frac{۹}{۲}\\
&=۲\left(x-\frac{۳}{۲}\right)^۲-\frac{۱}{۲}\\
&=۲\left(\left(x-\frac{۳}{۲}\right)^۲-\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲\right)=۲(u^۲-A^۲).
\end{aligned}$$
■

روش کلی چنین است

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$$
$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a}$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$
$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$$
$$=a(u^2\pm A^2) \qquad (1)$$

که در آن

$$x+\frac{b}{2a}=u \quad \text{و} \quad \frac{4ac-b^2}{4a^2}=\pm A^2 .$$

مثال ۳ کامل‌کردن مربع.

$$2x-x^2=-(x^2-2x)=-(x^2-2x+1)+1$$
$$=-(x-1)^2+1$$
$$=-((x-1)^2-1) \qquad (\text{به‌صورت رابطهٔ ۱})$$
$$=-(u^2-1)$$
$$=1-u^2 . \qquad (\text{صورت ساده‌تر})$$

■

سه مثال بعدی،چگونگی استفاده از محاسبات مثالهای ۱ــ۳ را درعملیات انتگرالگیری نشان می‌دهد.

مثال ۴ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} .$$

حل: بنا به‌مثال ۳ داریم

$$2x-x^2=1-(x-1)^2=1-u^2$$

پس انتگرال چنین محاسبه‌می‌شود

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}=\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$
$$=\sin^{-1}u+C$$
$$=\sin^{-1}(x-1)+C .$$

■

مثال ۵ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int\frac{dx}{4x^2+4x+2} .$$

حل: با توجه به‌اینکه

$$4x^2+4x+2=4(x^2+x)+2$$
$$=4\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+1$$
$$=4\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right)$$
$$=4\left(u^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$$

انتگرال چنین محاسبه می‌شود

$$\int\frac{dx}{4x^2+4x+2}=\frac{1}{4}\int\frac{du}{u^2+(1/2)^2}$$
$$=\frac{1}{4}\int\frac{du}{u^2+a^2} \quad \left(a=\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a}+C \quad \left(\text{بخش ۵.۷، مثال ۱}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\tan^{-1}(2x+1)+C .$$

■

مثال ۶ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int\frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{2x^2-6x+4}} .$$

حل: داریم

$$2x^2-6x+4=2(x^2-3x)+4$$
$$=2\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)+4-\frac{9}{2}$$
$$=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$$
$$=2\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) .$$

با جانشانیهای

$$u=x-\frac{۳}{۲}\text{،}\quad x+۱=u+\frac{۵}{۲}\text{،}\quad du=dx \text{ و } a=\frac{۱}{۲}$$

انتگرال به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\int\frac{(x+۱)\,dx}{\sqrt{۲x^۲-۶x+۴}}=\int\frac{(u+۵/۲)\,du}{\sqrt{۲(u^۲-a^۲)}}$$
$$=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\int\frac{u\,du}{\sqrt{u^۲-a^۲}}$$
$$+\frac{۵}{۲\sqrt{۲}}\int\frac{du}{\sqrt{u^۲-a^۲}}.$$

در انتگرال اول فرض می‌کنیم

$$z=u^۲-a^۲\text{،}\quad dz=۲u\,du \text{ و } u\,du=\frac{۱}{۲}dz$$

و درمورد انتگرال دوم رابطهٔ (۱۱) از بخش ۵.۷ را به‌کارمی‌بریم. به‌این‌ترتیب چنین نتیجه می‌گیریم

$$\int\frac{u\,du}{\sqrt{u^۲-a^۲}}=\int\frac{dz}{۲\sqrt{z}}$$
$$=\sqrt{z}+C_۱$$
$$=\sqrt{u^۲-a^۲}+C_۱$$

و

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^۲-a^۲}}=\ln|u+\sqrt{u^۲-a^۲}|+C_۲.$$

بنابراین

$$\int\frac{(x+۱)\,dx}{\sqrt{۲x^۲-۶x+۴}}$$
$$=\sqrt{\frac{u^۲-a^۲}{۲}}+\frac{۵}{۲\sqrt{۲}}\ln|u+\sqrt{u^۲-a^۲}|+C$$
$$=\sqrt{\frac{x^۲-۳x+۲}{۲}}$$
$$+\frac{۵}{۲\sqrt{۲}}\ln\left|x-\frac{۳}{۲}+\sqrt{x^۲-۳x+۲}\right|+C. \quad ■$$

مسأله‌ها

درمسائل ۱–۲۴، انتگرالها را محاسبه کنید.

۱. $\displaystyle\int_۱^۳\frac{dx}{x^۲-۲x+۵}$

۲. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^۲-۲x+۵}}$

۳. $\displaystyle\int_۱^۳\frac{x\,dx}{x^۲-۲x+۵}$

۴. $\displaystyle\int_۱^{۵/۲}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^۲-۲x+۵}}$

۵. $\displaystyle\int_۱^۲\frac{dx}{x^۲-۲x+۴}$

۶. $\displaystyle\int\frac{۳\,dx}{۹x^۲-۶x+۵}$

۷. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{۹x^۲-۶x+۵}}$

۸. $\displaystyle\int\frac{۳x\,dx}{۹x^۲-۶x+۵}$

۹. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{۹x^۲-۶x+۵}}$

۱۰. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^۲-۲x}}$

۱۱. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^۲+۲x}}$

۱۲. $\displaystyle\int_{-۲}^۱\frac{dx}{\sqrt{x^۲+۴x+۱۳}}$

۱۳. $\displaystyle\int_{-۲}^۲\frac{x\,dx}{\sqrt{x^۲+۴x+۱۳}}$

۱۴. $\displaystyle\int_{-۱}^۰\frac{dx}{\sqrt{۳-۲x-x^۲}}$

۱۵. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^۲-۲x-۳}}$

۱۶. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+۱)\sqrt{x^۲+۲x}}$

۱۷. $\displaystyle\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

۱۸. $\displaystyle\int \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$

۱۹. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

۲۰. $\displaystyle\int_5^6 \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-8}}$

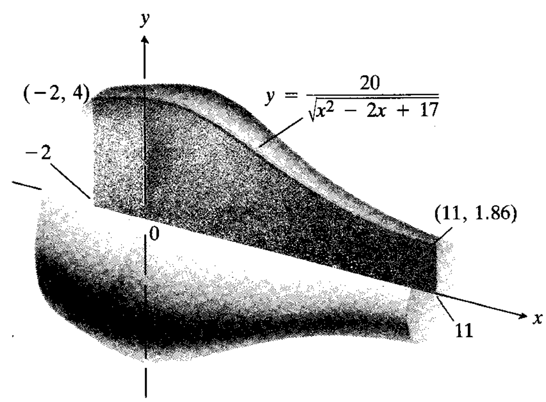
۲۱. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)\,dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$

۲۲. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$

۲۳. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{x\,dx}{x^2+4x+5}$

۲۴. $\displaystyle\int \frac{(2x+3)\,dx}{4x^2+4x+5}$

۲۵. مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ محدود به‌محور x، خم $y=20/\sqrt{x^2-2x+17}$، وخطوط $x=-2$ و $x=11$ حول محور x. شکل ۱۹.۷ را ببینید.



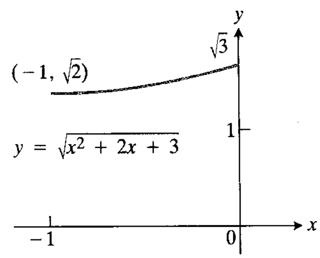
۱۹.۷ جسمی‌که از دوران ناحیهٔ مذکور در مسألهٔ ۲۵ ایجاد می‌شود.

۲۶. مطلوب است مقدار میانگین تابع

$$f(x)=\frac{4}{(x^2-4x+8)}$$

روی بازهٔ از $x=2$ تا $x=4$.

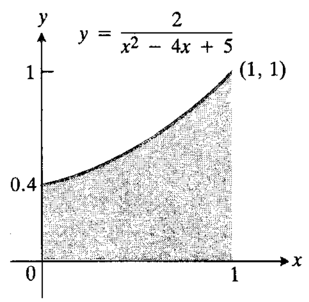
۲۷. مطلوب است مساحت رویهٔ حاصل از دوران قوس $y=\sqrt{x^2+2x+3}$، $-1\leqslant x\leqslant 0$ حول محور x. شکل ۲۰.۷ را ببینید.



۲۰.۷ قوس مسألهٔ ۲۷.

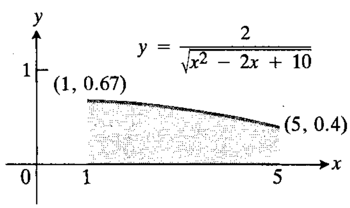
۲۸. الف) مطلوب است مساحت ناحیهٔ محدود به خم $y=2/(x^2-4x+5)$، محورهای‌مختصات، وخط $x=1$ (شکل ۲۱.۷).

ب) گشتاوری را بیابید که یك ورقهٔ همگن نازك به‌چگالی δ و منطبق بر ناحیهٔ ذکرشده درقسمت (الف) حول محور y ایجاد می کند.



۲۱.۷ ناحیهٔ مسألهٔ ۲۸.

۲۹. مطلوب است مرکزجرم یك ورقهٔ همگن نازك که به‌محور x، خم $y=2/\sqrt{x^2-2x+10}$ وخطوط $x=1$ و $x=5$ محدود است (شکل ۲۲.۷).



۲۲.۷ ورقهٔ مسألهٔ ۲۹.

مطلوب است حدهای مذکور درمسائل ۳۰ و ۳۱.

۳۰. $$\lim_{a\to 1^+}\int_a^3 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-3}}$$

۳۱. $$\lim_{a\to -5^+}\int_a^{-4} \frac{dx}{\sqrt{-x^2-8x-15}}$$

TOOLKIT PROGRAM

Super * Grapher

۷.۷ انتگرالگیری از توابع گویا به‌روش کسرهای ساده

حال به‌بررسی روش کسرهای ساده که روشی اساسی برای آماده ساختن توابع گویا برای انتگرالگیری است می‌پردازیم. با این روش می‌توان خارج قسمت دوچندجمله‌ای دلخواه را (مثلاً، تابع گویایی را که می‌خواهیم ازآن انتگرال بگیریم) به مجموعی ازکسرهای ساده‌تر تبدیل کرد که با روشهایی که در اختیار داریم قابل انتگرالگیری باشند مثلاً، رابطهٔ

$$\frac{4x^5-15x^3+4x^2+9x+8}{4x^4-4x^3-3x^2+2x+1} = \underbrace{x+1}_{(1)}\underbrace{-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}}_{(2)}+\underbrace{\frac{1}{4x^2+4x+2}}_{(3)}$$

تابع گویای طرف چپ را به‌صورت مجموعی بیان می‌کند که مشتمل است بر (۱) یك چندجمله‌ای، (۲) کسرهایی که مخرجشان عامل درجهٔ اول یا عوامل درجهٔ اول مکررند و انتگرال آنها به صورت لگاریتمی یا کسری است، و (۳) کسری که مخرجش چندجمله‌ای درجهٔ دوم است و ازآن می‌توان با روشهای جانشانی بخشهای ۵.۷ و ۶.۷ انتگرال گرفت.

از بزرگی این مثال نترسید، در مسائل پایان این بخش به‌نمونه‌ای به‌این پیچیدگی برنخواهید خورد. این مثال را تنها از آن جهت آوردیم که نشان دهیم چگونه می‌توانیم از روشهایی که آموختیم برای انتگرالگیری از توابع گویا، دست‌کم از لحاظ نظری، بهره بگیریم. اکنون نگاهی برچند مثال ساده‌تر می‌افکنیم، روش کسرهای ساده را به‌صورت کلی عرضه می‌کنیم، و سپس روش ساده‌ای را توصیف می‌کنیم به‌نام **روش پوشاندن هویساید** (به‌یاد اولیور هویساید، ۱۸۵۰–۱۹۲۵، پیشگام در مهندسی برق و آنالیز برداری).

مثال ۱ نمونه‌ای از جمع دوکسر که می‌خواهیم حاصلجمع آنها را تجزیه کنیم.

$$\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-3}=\frac{2(x-3)+3(x+1)}{(x+1)(x-3)}$$

$$=\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} \qquad (1)$$

با جمع کردن کسرهای سمت چپ، کسرسمت راست به‌دست می‌آید. عمل عکس آن عبارت است از یافتن ثابتهای A و B چنان‌که داشته باشیم

$$\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}.$$

(لحظه‌ای تصور کنید که نمی‌دانید $A=2$، $B=3$.) ثابتهای A و B را **ضرایب مجهول** می‌نامیم. اگر دوطرف تساوی را درمخرج مشترك ضرب کنیم، داریم

$$5x-3=A(x-3)+B(x+1)$$
$$=(A+B)x-3A+B.$$

این رابطه اتحادی‌است برحسب x اگر وتنها اگرضرایب توانهای متساوی x دردوطرف آن باهم برابر باشند

$$A+B=5, \quad -3A+B=-3.$$

از این دومعادله ضرایب مجهول چنین به‌دست می‌آیند

$$A=2, \quad B=3.$$ ■

مثال ۲ دوعامل درجهٔ اول در مخرج. مطلوب است محاسبهٔ

$$\int\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}\,dx.$$

حل: بنا به‌مثال ۱ داریم

$$\int\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}\,dx=\int\frac{2}{x+1}\,dx+\int\frac{3}{x-3}\,dx$$
$$=2\ln|x+1|$$
$$+3\ln|x-3|+C.$$ ■

مثال ۳ عامل درجهٔ اول مکرر در مخرج. کسر

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2}$$

را به‌صورت مجموع کسرهای ساده بنویسید.

حل: چون مخرج یك‌عامل درجهٔ اول‌مکرر، یعنی $(x+۲)^۲$ دارد، باید کسر را به‌صورت زیر نوشت

$$\frac{۶x+۷}{(x+۲)^۲}=\frac{A}{x+۲}+\frac{B}{(x+۲)^۲}. \qquad (۲)$$

اگرطرفین رابطهٔ (۲) را درمخرج مشترك ضرب‌کنیم داریم

$$۶x+۷=A(x+۲)+B=Ax+(۲A+B).$$

با مساوی قرار دادن ضرایب جملات همانند نتیجه می‌گیریم: $A=۶$ و $B=-۵$. بنابراین

$$\frac{۶x+۷}{(x+۲)^۲}=\frac{۶}{x+۲}-\frac{۵}{(x+۲)^۲}. \qquad (۳) \quad \blacksquare$$

مثال ۴ عامل درجهٔ دوم در مخرج. کسر

$$\frac{-۲x+۴}{(x^۲+۱)(x-۱)^۲}$$

را به‌صورت مجموع کسرهای ساده بنویسید.

حل: چون مخرج یك‌عامل درجهٔ دوم و یك‌عامل درجهٔ اول مکرر دارد، چنین می‌نویسیم

$$\frac{-۲x+۴}{(x^۲+۱)(x-۱)^۲}=\frac{Ax+B}{x^۲+۱}+\frac{C}{x-۱}+\frac{D}{(x-۱)^۲}. \qquad (۴)$$

توجه‌کنید که صورت کسری که مخرجش $x^۲+۱$ است یك عامل درجهٔ اول است و نه ثابت. بنابراین

$$\begin{aligned}-۲x+۴&=(Ax+B)(x-۱)^۲+C(x-۱)(x^۲+۱)\\&\quad+D(x^۲+۱)\\&=(A+C)x^۳+(-۲A+B-C+D)x^۲\\&\quad+(A-۲B+C)x+(B-C+D).\end{aligned}$$

برای اینکه این رابطه اتحادی برحسب x باشد، لازم وکافی‌است که ضرایب توانهای متساوی x دردوطرف باهم برابرباشند. اگر این ضرایب را مساوی قراردهیم به‌معادلات زیرمی‌رسیم

ضریب $x^۳$: $\quad ۰=A+C$

ضریب $x^۲$: $\quad ۰=-۲A+B-C+D$

ضریب $x^۱$: $\quad -۲=A-۲B+C$

ضریب $x^۰$: $\quad ۴=B-C+D$

اگرمعادلهٔ چهارم را ازمعادلهٔ دوم کم‌کنیم، داریم

$$-۴=-۲A, \quad A=۲.$$

حال از معادلهٔ اول داریم

$$C=-A=-۲.$$

با دانستن A و C، می‌توان B را ازمعادلهٔ سوم یافت

$$B=۱.$$

سرانجام از معادلهٔ چهارم چنین به‌دست می‌آید

$$D=۴-B+C=۱.$$

بنابراین

$$\frac{-۲x+۴}{(x^۲+۱)(x-۱)^۲}=\frac{۲x+۱}{x^۲+۱}-\frac{۲}{x-۱}+\frac{۱}{(x-۱)^۲}. \quad \blacksquare$$

مثال ۵ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int\frac{-۲x+۴}{(x^۲+۱)(x-۱)^۲}\,dx.$$

حل: انتگرالده را مانند مثال ۴ به‌کسرهای ساده تجزیه می‌کنیم، و سپس ازکسرهای ساده انتگرال می‌گیریم

$$\begin{aligned}\int&\frac{-۲x+۴}{(x^۲+۱)(x-۱)^۲}\,dx\\&=\int\left(\frac{۲x+۱}{x^۲+۱}-\frac{۲}{x-۱}+\frac{۱}{(x-۱)^۲}\right)dx\\&=\int\left(\frac{۲x}{x^۲+۱}+\frac{۱}{x^۲+۱}-\frac{۲}{x-۱}+\frac{۱}{(x-۱)^۲}\right)dx\\&=\ln(x^۲+۱)+\tan^{-۱}x\\&\quad-۲\ln|x-۱|-\frac{۱}{x-۱}+C. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

حال از تابع‌گویایی‌که این بخش را با آن آغازکردیم انتگرال می‌گیریم تا با روش انتگرالگیری ازآن آشنا شوید. دوباره می‌گوییم که ازپیچیدگی‌انتگرالده نهراسید. درمسائل بعدی انتگرالدهی نظیر این نخواهید دید.

مثال ۶ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int\frac{۴x^۵-۱۵x^۳+۴x^۲+۹x+۸}{۴x^۴-۴x^۳-۳x^۲+۲x+۱}\,dx.$$

حل: با اینکه تجزیهٔ انتگرالده به‌کسرهای ساده زحمت زیادی دارد، اما مراحل کار نظیر موارد دیگر است. درجهٔ صورت از درجهٔ مخرج بزرگتر است، بنابراین نخست صورت را برمخرج تقسیم می‌کنیم و چنین به‌دست می‌آوریم

$$\frac{4x^5-15x^3+4x^2+9x+8}{4x^4-4x^3-3x^2+2x+1} = x+1-\frac{8x^3-5x^2-6x-7}{4x^4-4x^3-3x^2+2x+1}. \quad (5)$$

حال مخرج کسر طرف راست‌را به‌حاصلضرب‌عوامل تجزیه می‌کنیم

$$4x^4-4x^3-3x^2+2x+1 = (x-1)^2(4x^2+4x+2).$$

با انجام چند عمل دیگرچنین به‌دست می‌آوریم

$$\frac{8x^3-5x^2-6x-7}{4x^4-4x^3-3x^2+2x+1} = \frac{2}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{4x^2+4x+2}. \quad (6)$$

سرانجام طرف راست رابطهٔ (۶) را در رابطهٔ (۵) قرار می‌دهیم، نتیجه‌را در dx ضرب می‌کنیم، و انتگرال می‌گیریم. نتیجهٔ نهایی چنین است

$$\int\frac{4x^5-15x^3+4x^2+9x+8}{4x^4-4x^3-3x^2+2x+1}dx = \int\Big(x+1-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2} + \underbrace{\frac{1}{4x^2+4x+2}}_{\text{(بخش ۶.۷ مثال ۵)}}\Big)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}+x-2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\tan^{-1}(2x+1)+C. \quad \blacksquare$$

توصیف کلی روش

توفیق در تجزیهٔ

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

به‌مجموع کسرهای ساده بردوچیز متکی است:

۱. درجهٔ $f(x)$ باید کمتر از درجهٔ $g(x)$ باشد. (اگرچنین نباشد، صورت را برمخرج تقسیم می‌کنیم، آنگاه کار را با کسری که صورتش باقیمانده تقسیم و مخرجش $g(x)$ است دنبال می‌کنیم. همواره می‌توان باقیمانده را به شکل مطلوب درآورد.)

۲. عوامل اول $g(x)$ باید معلوم باشند. (از لحاظ نظری، هرچند جمله‌ای با ضرایب حقیقی را می‌توان به‌صورت حاصلضرب عوامل حقیقی درجهٔ اول ودرجهٔ دوم بیان کرد. اما ممکن است چنین‌کاری درعمل دشوار باشد.)

اگر این دوشرط برقرار باشند، می‌توان گامهای زیر را طی کرد.

گام ۱: فرض می‌کنیم $x-r$ یك عامل درجهٔ اول $g(x)$ باشد و $(x-r)^m$ بالاترین توان $x-r$ باشد که $g(x)$ را عاد کند. دراین صورت مجموع m کسرساده زیر را به‌این‌عامل نسبت‌می‌دهیم

$$\frac{A_1}{x-r}+\frac{A_2}{(x-r)^2}+\cdots+\frac{A_m}{(x-r)^m}.$$

همین‌کار را درمورد همهٔ عوامل درجه اول مجزای $g(x)$ انجام می‌دهیم.

گام ۲: فرض‌می‌کنیم x^2+px+q یك‌عامل درجهٔ دوم غیرقابل تجزیهٔ $g(x)$ باشد و

$$(x^2+px+q)^n$$

بالاترین‌توان این‌عامل باشدکه $g(x)$ را عاد می‌کند. دراین‌صورت به‌این عامل مجموع n کسرساده زیر را نسبت می‌دهیم

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} +\cdots+\frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n}.$$

همین‌کار را درمورد همهٔ عوامل درجهٔ دوم مجزای $g(x)$ انجام می‌دهیم.

گام ۳: کسر $f(x)/g(x)$ را با مجموع همهٔ این کسرهای ساده مساوی‌قرارمی‌دهیم. طرفین‌رابطهٔ حاصل‌را درمخرج مشترك ضرب، و نتیجه را برحسب توانهای نزولی x مرتب می‌کنیم.

گام ۴: ضرایب توانهای نظیر x را برابر قرارمی‌دهیم ومعادلات حاصل را نسبت به‌ضرایب مجهول حل می‌کنیم.

اثبات این مطلب که $f(x)/g(x)$ را می‌توان به‌صورت

مجموع کسرهای ساده‌ای نوشت (آن‌طور که در اینجا توصیف شد) در کتابهای پیشرفتهٔ جبر آمده است.

□ روش «پوشاندن» هویساید

اگر درجهٔ چندجمله‌ای $f(x)$ از درجهٔ چندجمله‌ای $g(x)$ کمتر باشد، و

$$g(x)=(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)$$

حاصلضرب n عامل درجهٔ اول مجزا و غیرمکرر باشد، راه سریعی برای تجزیهٔ $f(x)/g(x)$ به‌کسرهای ساده وجود دارد.

مثال ۷ مطلوب است A، B، و C درتجزیه به‌کسرهای سادهٔ

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}\cdot \quad (7)$$

حل: اگر طرفین رابطهٔ (۷) را در $(x-1)$ ضرب کنیم چنین به‌دست می‌آید

$$\frac{x^2+1}{(x-2)(x-3)}=A+\frac{B(x-1)}{x-2}+\frac{C(x-1)}{x-3}\cdot \quad (8)$$

دراین معادله x را برابربا ۱ قرارمی‌دهیم و A را تعیین می‌کنیم

$$\frac{(1)^2+1}{(1-2)(1-3)}=A+0+0$$

$$A=1\,.$$

بنا بر این، اگر درمخرج کسر اصلی

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \quad (9)$$

عامل $(x-1)$ را بپوشانیم، مقدار آنچه باقی می‌ماند به‌ازای $x=1$ برابرمقدار A است

$$A=\frac{(1)^2+1}{\boxed{(x-1)}\ (1-2)(1-3)}=\frac{2}{(-1)(-2)}=1. \quad (10)$$

می‌پوشانیم

مقدار B درمعادلهٔ (۷) نیز با پوشاندن عامل $(x-2)$ درمعادلهٔ (۹) و محاسبهٔ باقیمانده به‌ازای $x=2$ به‌دست می‌آید

$$B=\frac{(2)^2+1}{(2-1)\ \boxed{(x-2)}\ (2-3)}=\frac{5}{(1)(-1)}=-5\,. \quad (11)$$

می‌پوشانیم

سرانجام C را نیز می‌توان با پوشاندن $(x-3)$ درمعادلهٔ (۹) و محاسبهٔ باقیمانده به‌ازای $x=3$ به‌دست آورد

$$C=\frac{(3)^2+1}{(3-1)(3-2)\ \boxed{(x-3)}}=\frac{10}{(2)(1)}=5\,. \quad (12)$$

می‌پوشانیم

■

گامهای روش پوشاندن از این قرارند:

گام ۱: مخرج را به‌حاصلضرب عوامل تجزیه می‌کنیم

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)}\cdot \quad (13)$$

گام ۲: هر بار یکی ازعوامل $(x-r_i)$ از $g(x)$ درمعادلهٔ (۱۳) را می‌پوشانیم و به‌جای xهای پوشیده نشده r_i را قرار می‌دهیم. به‌این‌ترتیب به‌ازای هر ریشهٔ r_i، یك مقدار A_i به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} A_1&=\frac{f(r_1)}{(r_1-r_2)\cdots(r_1-r_n)}\\ A_2&=\frac{f(r_2)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)\cdots(r_2-r_n)} \quad (14)\\ &\vdots\\ A_n&=\frac{f(r_n)}{(r_n-r_1)(r_n-r_2)\cdots(r_n-r_{n-1})}\,. \end{aligned}$$

گام ۳: حاصل تجزیهٔ $f(x)/g(x)$ به‌کسرهای‌ساده را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_1}{(x-r_1)}+\frac{A_2}{(x-r_2)}+\cdots+\frac{A_n}{(x-r_n)}\,. \quad (15)$$

مثال ۸ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int\frac{x+4}{x^3+3x^2-10x}\,dx\,.$$

حل: درجهٔ $f(x)=x+۴$ از درجهٔ

$$g(x)=x^۳+۳x^۲-۱۰x$$

کمتر است. بنابراین $g(x)$ را تجزیه می‌کنیم

$$\frac{x+۴}{x^۳+۳x^۲-۱۰x}=\frac{x+۴}{x(x-۲)(x+۵)}.$$

ریشه‌های $g(x)$ عبارت‌اند از $r_۱=۰$، $r_۲=۲$، و $r_۳=-۵$.
بنابراین

$$A_۱=\frac{۰+۴}{\underset{\Uparrow}{\boxed{x}}\ (۰-۲)(۰+۵)}=\frac{۴}{(-۲)(۵)}=-\frac{۲}{۵}$$

می‌پوشانیم

$$A_۲=\frac{۲+۴}{۲\ \underset{\Uparrow}{\boxed{(x-۲)}}\ (۲+۵)}=\frac{۶}{(۲)(۷)}=\frac{۳}{۷}$$

می‌پوشانیم

$$A_۳=\frac{-۵+۴}{(-۵)(-۵-۲)\ \underset{\Uparrow}{\boxed{(x+۵)}}}=\frac{-۱}{(-۵)(-۷)}$$

می‌پوشانیم

$$=-\frac{۱}{۳۵}.$$

از این‌رو

$$\frac{x+۴}{x(x-۲)(x+۵)}=-\frac{۲}{۵x}+\frac{۳}{۷(x-۲)}-\frac{۱}{۳۵(x+۵)}$$

و در نتیجه

$$\int\frac{x+۴}{x(x-۲)(x+۵)}\,dx=-\frac{۲}{۵}\ln|x|+\frac{۳}{۷}\ln|x-۲| -\frac{۱}{۳۵}\ln|x+۵|+C.$$ ■

روشهای دیگر تعیین ثابتها

چنانکه درمثال بعدی خواهیم دید، راه دیگری برای تعیین ثابتهای کسرهای ساده، مشتق‌گیری است.

مثال ۹ مطلوب است A، B، و C درمعادلهٔ

$$\frac{x-۱}{(x+۱)^۳}=\frac{A}{x+۱}+\frac{B}{(x+۱)^۲}+\frac{C}{(x+۱)^۳}.$$

حل: نخست طرفین را درمخرج مشترك ضرب می‌کنیم و چنین به‌دست می‌آوریم

$$x-۱=A(x+۱)^۲+B(x+۱)+C.$$

اگر $x=-۱$ را در این رابطه قرار دهیم نتیجه می‌گیریم: $C=-۲$. حال از طرفین نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$۱=۲A(x+۱)+B.$$

اگر $x=-۱$ را در این رابطه قرار دهیم، نتیجه‌می‌گیریم: $B=۱$. دوباره مشتق می‌گیریم و $۲A=۰$ را به‌دست‌می‌آوریم که از آن داریم $A=۰$. بنابراین

$$\frac{x-۱}{(x+۱)^۳}=\frac{۱}{(x+۱)^۲}-\frac{۲}{(x+۱)^۳}.$$ ■

دربسیاری از مسائل، با نسبت‌دادن مقادیرکوچکی نظیر ۰، ±۱، ±۲ به x و به‌دست‌آوردن معادلاتی برحسب A، B، C، و D، و غیره روش سریعی به‌دست می‌آید که می‌تواند جای روش هویساید را بگیرد.

مثال ۱۰ مطلوب است A، B، و C در

$$\frac{x^۲+۱}{(x-۱)(x-۲)(x-۳)}=\frac{A}{x-۱}+\frac{B}{x-۲}+\frac{C}{x-۳}.$$

حل: پس از ضرب طرفین کسر در مخرج مشترك چنین به‌دست می‌آوریم

$$x^۲+۱=A(x-۲)(x-۳)+B(x-۱)(x-۳)$$
$$+C(x-۱)(x-۲).$$

حال برای یافتن A، B، و C مقدار x را به‌ترتیب برابر ۱، ۲، و ۳ قرار می‌دهیم

$$x=۱:\qquad (۱)^۲+۱=A(-۱)(-۲)+B(۰)+C(۰)$$

$$۲=۲A$$

$$A=۱$$

$$x=۲: \quad (۲)^۲+۱=A(۰)+B(۱)(-۱)+C(۰)$$
$$۵=-B$$
$$B=-۵$$
$$x=۳: \quad (۳)^۲+۱=A(۰)+B(۰)+C(۲)(۱)$$
$$۱۰=۲C$$
$$C=۵\,.$$

درنتیجه

$$\frac{x^۲+۱}{(x-۱)(x-۲)(x-۳)}=\frac{۱}{x-۱}-\frac{۵}{x-۲}+\frac{۵}{x-۳}\,. \quad \blacksquare$$

مسأله‌ها

درمسائل ۱ــ۱۰، کسرها را به‌کسرهای ساده تجزیه کنید.

۱. $\dfrac{۵x-۱۳}{(x-۳)(x-۲)}$

۲. $\dfrac{۵x-۷}{x^۲-۳x+۲}$

۳. $\dfrac{x+۴}{(x+۱)^۲}$

۴. $\dfrac{۲x+۲}{x^۲-۲x+۱}$

۵. $\dfrac{x+۱}{x^۲(x-۱)}$

۶. $\dfrac{z}{z^۳-z^۲-۶z}$

۷. $\dfrac{x^۲+۸}{x^۲-۵x+۶}$ (یادتان باشد که اول تقسیم کنید.)

۸. $\dfrac{۴}{x^۳+۴x}$

۹. $\dfrac{۳}{x^۲(x^۲+۹)}$

۱۰. $\dfrac{x^۳-۱}{(x^۲+x+۱)^۲}$

درمسائل ۱۱ــ۴۹، انتگرالها را محاسبه کنید.

۱۱. $\displaystyle\int_۰^{۱/۲}\frac{dx}{۱-x^۲}$

۱۲. $\displaystyle\int_۱^۲\frac{dx}{x^۲+۲x}$

۱۳. $\displaystyle\int_۰^{۲\sqrt{۲}}\frac{x^۳}{x^۲+۱}\,dx$

۱۴. $\displaystyle\int_۱^۲\frac{dx}{x^۳+x}$

۱۵. $\displaystyle\int_{۱/۴}^{۳/۴}\frac{dx}{x-x^۲}$

۱۶. $\displaystyle\int_{-۱}^{۰}\frac{x\,dx}{x^۲-۳x+۲}$

۱۷. $\displaystyle\int\frac{x+۴}{x^۲+۵x-۶}\,dx$

۱۸. $\displaystyle\int\frac{۲x+۱}{x^۲-۷x+۱۲}\,dx$

۱۹. $\displaystyle\int_۰^۱\frac{۳x^۲}{x^۲+۲x+۱}\,dx$

۲۰. $\displaystyle\int\frac{d\theta}{\theta^۳+\theta^۲-۲\theta}$

۲۱. $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x^۲+۴x-۵}$

۲۲. $\displaystyle\int_۴^۸\frac{x\,dx}{x^۲-۲x-۳}$

۲۳. $\displaystyle\int\frac{(x+۱)\,dx}{x^۲+۴x-۵}$

۲۴. $\displaystyle\int\frac{x^۳\,dx}{x^۲+۲x+۱}$

۲۵. $\displaystyle\int_۱^۳\frac{dx}{x(x+۱)^۲}$

۲۶. $\displaystyle\int_۰^۱\frac{dx}{(x+۱)(x^۲+۱)}$

۲۷. $\displaystyle\int\frac{(x+۳)\,dx}{۲x^۳-۸x}$

۲۸. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^۲ x+\sin x-۶}$

۲۹. $\int_۰^{\sqrt{۳}} \frac{۵x^۲\,dx}{x^۲+۱}$

۳۰. $\int_۲^۶ \frac{x^۳\,dx}{x^۲-۲x+۱}$

۳۱. $\int_{-۱}^{۱} \frac{x^۳+x}{x^۲+۱}\,dx$

۳۲. $\int_{\pi/۳}^{\pi/۲} \frac{\sin\theta\,d\theta}{\cos^۲\theta+\cos\theta-۲}$

۳۳. $\int \frac{۳x^۲+x+۴}{x^۳+x}\,dx$

۳۴. $\int \frac{dx}{(x^۲-۱)^۲}$

۳۵. $\int \frac{x^۳+۴x^۲}{x^۲+۴x+۳}\,dx$

۳۶. $\int \frac{۴x+۴}{x^۲(x^۲+۲)}\,dx$

۳۷. $\int_۰^۱ \frac{x^۲+۲x+۱}{(x^۲+۱)^۲}\,dx$

۳۸. $\int_{-۱}^{۰} \frac{x^۳-x}{(x^۲+۱)(x-۱)^۲}\,dx$

۳۹. $\int_{-۱}^{۰} \frac{۲x}{(x^۲+۱)(x-۱)^۲}\,dx$

۴۰. $\int \frac{x^۲}{(x-۱)(x^۲+۲x+۱)}\,dx$

۴۱. $\int_۰^{\ln ۲} \frac{e^t\,dt}{e^{۲t}+۳e^t+۲}$

۴۲. $\int_۰^۱ \frac{dx}{(x^۲+۱)^۲}$

۴۳. $\int_۰^۱ \frac{x^۴\,dx}{(x^۲+۱)^۲}$

۴۴. $\int \frac{(۴x^۳-۲۰x)\,dx}{x^۴-۱۰x^۲+۹}$

۴۵. $\int \frac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}\,dx$ (راهنمایی: جانشانی $u=\sqrt{x}$ را به‌کار ببرید.)

۴۶. $\int \frac{dx}{۱+\sqrt{x}}$ (راهنمایی: جانشانی $u=\sqrt{x}$ را به‌کار ببرید.)

۴۷. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[۳]{x}}$ (راهنمایی: جانشانی $x=u^۶$ را به‌کار ببرید.)

۴۸. $\int x\ln(x+۵)\,dx$

۴۹. $\int_۰^۱ \ln(x^۲+۱)\,dx$

۵۰. برای محاسبهٔ $\int x^۲dx/(x^۲-۱)$ از راه کسرهای ساده، نخست $x^۲$ را بر $x^۲-۱$ تقسیم می‌کنیم

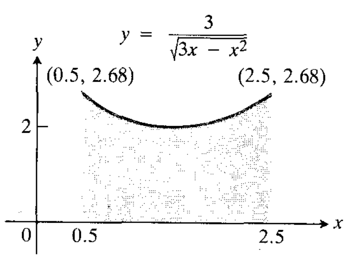
$$\frac{x^۲}{x^۲-۱}=۱+\frac{۱}{x^۲-۱}.$$

اگرمتوجه هم‌درجه بودن $x^۲$ و $x^۲-۱$ نشویم و چنین بنویسیم

$$\frac{x^۲}{x^۲-۱}=\frac{x^۲}{(x-۱)(x+۱)}=\frac{A}{x-۱}+\frac{B}{x+۱}.$$

چه اشتباهی پیش می‌آید؟ بکوشید A و B را به‌دست آورید.

۵۱. مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ محدود به‌محور x، خم $y=۳/\sqrt{۳x-x^۲}$، و خطوط $x=۱/۲$ و $x=۵/۲$ حول محور x. شکل ۲۳۰۷ را ببینید.



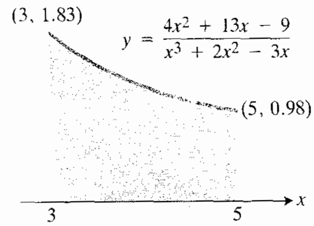
۲۳۰۷ ناحیهٔ مذکور درمسألهٔ ۵۱.

۵۲. مطلوب است مختص x مرکزجرم یک‌ورقهٔ همگن نازک که در ربع اول واقع و به‌محور x، خم $y=\tan^{-۱}x$، و خط $x=\sqrt{۳}$ محدود است.

۵۳. مطلوب است مختص x مرکزجرم یك‌ورقهٔ همگن‌نازك محدود به‌محور x، خطوط $x=۳$ و $x=۵$، و خم

$$y=\frac{۴x^{۲}+۱۳x-۹}{x^{۳}+۲x^{۲}-۳x}$$

(شکل ۲۴.۷).



۲۴.۷ ورقهٔ مورد بحث درمسألهٔ ۵۳.

۵۴. مطلوب است طول قوس

$$y=\ln(۱-x^{۲}),\quad ۰\leqslant x\leqslant \frac{۱}{۲}\cdot$$

۵۵. پخش خبر در جامعه. دراینجا منظور از خبر هرنوع اطلاعی از قبیل یك شایعه، خبر یك موضوع جالب فرهنگی، یا خبر مربوط به یك اختراع فنی است. دریك جامعهٔ نسبتاً بزرگ، تعدادکسانی که از خبرآگاه‌اند، x، تابعی مشتق‌پذیر از زمان، t، درنظر گرفته می‌شود. همچنین فرض می‌شود آهنگ پخش خبر، dx/dt، با حاصلضرب تعداد کسانی که خبر را شنیده‌اند و تعداد آنان که نشنیده‌اند متناسب است. یعنی داریم

$$\frac{dx}{dt}=kx(N-x)$$

که درآن N تعدادکل افراد آن جامعه است.

فرض می‌کنیم t برحسب روز باشد، $k=۱/۲۵۰$، و در جامعه‌ای با جمعیت $N=۱۰۰۰$ و دونفر از لحظهٔ $t=۰$ شروع به‌پخش شایعه کنند.

الف) x را به‌صورت تابعی از t بیابید.

ب) پس‌از چه‌مدتی نیمی از افراد جامعه شایعه‌را می‌شنوند؟ (درچنین زمانی شایعه با بیشترین سرعت پخش می‌شود.)

۵۶. واکنشهای شیمیایی مرتبهٔ دوم. بسیاری از واکنشهای‌شیمیایی نتیجهٔ برهمکنش دوملکول‌است که دراثرآن ملکول‌جدیدی به‌وجود می‌آید. معمولاً آهنگ واکنش به غلظت دونوع ملکول بستگی دارد. اگرمقدار مادهٔ A و B را درلحظهٔ $t=۰$ به‌ترتیب با a و b و مقدار ملکول جدید را درلحظهٔ t با x نشان دهیم، آهنگ تشکیل x را می‌توان به‌صورت معادلهٔ دیفرانسیل زیربیان کرد

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x)$$

یا

$$\frac{۱}{(a-x)(b-x)}\,\frac{dx}{dt}=k$$

(k ثابت واکنش‌است.) دردوحالت (الف) $a=b$ و (ب) $a\neq b$ از طرفین این معادله نسبت به t انتگرال بگیرید و رابطهٔ میان x و t را بیابید. درهر دوحالت فرض‌کنید به‌ازای $t=۰$ داریم $x=۰$.

۵۷. واکنشهای خودکاتالیزوری. معادله‌ای را که واکنش خودکاتالیزوری مسألهٔ ۵۵ بخش ۵.۳ را توصیف می‌کند می‌توان به‌صورت زیرنوشت

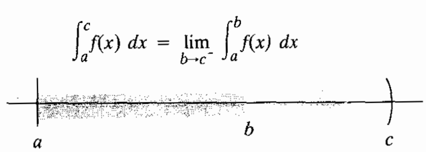
$$\frac{dx}{dt}=kx(a-x)\cdot$$

برای به‌دست‌آوردن اطلاعاتی در این باره، مسألهٔ ۵۵ را مطالعه کنید(ضرورتی ندارد آن را حل‌کنید) و سپس ازمعادلهٔ بالا x را برحسب t به‌دست‌آورید. فرض‌کنید به‌ازای $t=۰$ داریم $x=x_۰$.

TOOLKIT PROGRAMS
Partial Fractions

۸.۷ انتگرالهای غیرعادی

دربسیاری ازکاربردها لازم است‌که از یك تابع روی یك بازهٔ غیربسته انتگرال بگیریم. بدین‌منظور نخست ازتابع روی یك‌بازهٔ بسته که درون بازهٔ غیربسته قرار دارد انتگرال می‌گیریم، سپس حد این انتگرال را وقتی‌که بازهٔ بسته گسترش می‌یابد تا بازهٔ غیربسته را بپوشاند محاسبه می‌کنیم. شکل ۲۵.۷ چگونگی این‌کار را برای یك بازهٔ نیمباز چون $[a,c)$ نشان می‌دهد. معمولاً حد حاصل را، خواه وجود داشته باشد خواه وجود نداشته باشد، **انتگرال غیرعادی** تابع روی بازهٔ غیربسته می‌نامند.



۲۵.۷ برای انتگرال‌گرفتن از تابع f روی بازهٔ نیمباز $[a,c)$، نخست از f روی یك بازهٔ‌بسته چون $[a,b]$ واقع در درون $[a,c)$ انتگرال می‌گیریم، سپس حدآن را وقتی $[a,b]$ گسترش می‌یابد تا $[a,c)$ را بپوشاند محاسبه می‌کنیم.

درچه صورت انتگرال غیرعادی وجود دارد؟ در این بخش به‌این پرسش پاسخ می گوییم. وقتی که دانستیم انتگرال وجود دارد، مقدار آن اگر فوراً مشخص نشود، با روشهای عددی قابل تعیین است.

همگرایی و واگرایی

در نظریهٔ خط بالابرنده درآئرودینامیك لازم می‌شود که از

$$f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \qquad (1)$$

روی بازهٔ از $x=0$ تا $x=1$ انتگرال بگیریم. این تابع در $x=1$ تعریف نمی‌شود، اما در هرجای دیگری از بازهٔ $[0,1]$ تعریف می‌شود و پیوسته است. برای انتگرال گرفتن از f از صفر تا ۱، نخست از این تابع ازصفر تا عدد مثبتی چون b که کوچکتر از ۱ است انتگرال‌می گیریم، سپس حد انتگرال معین حاصل را وقتی b به ۱ میل‌می کند محاسبه می کنیم. اگر این‌حد وجود داشت، انتگرال f ازصفرتا ۱ را برابرمقدار این حد تعریف می کنیم و چنین می نویسیم

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx=\lim_{b\to 1^-}\int_0^b \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx. \qquad (2)$$

دراین مورد، این‌طور نیز می‌توان گفت که انتگرال

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$$

همگراست و مساحت زیرخم $y=\sqrt{(1+x)/(1-x)}$ از ۰ تا ۱ برابرمقدار این انتگرال است. اگرحد مذکور در رابطهٔ (۲) وجود نداشت، می گوییم انتگرال **واگرا**ست.

مثال ۱ انتگرال

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$$

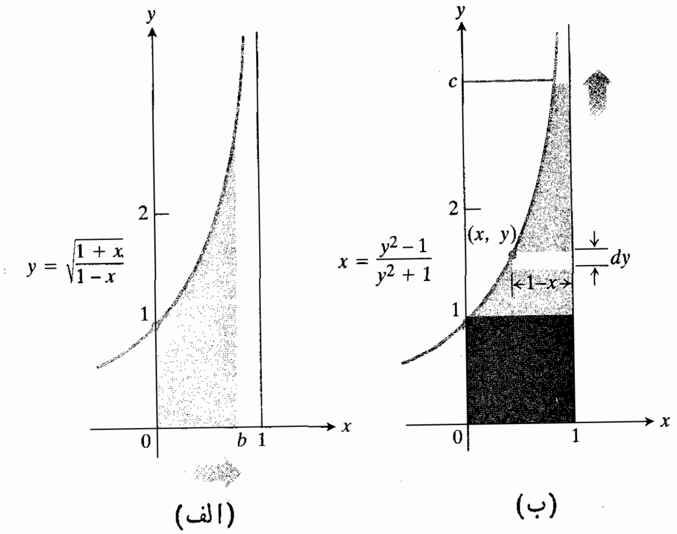
همگراست یا واگرا؟

حل: شکل ۲۶.۷ (الف) را ببینید. صورت و مخرج را در $\sqrt{1+x}$ ضرب می کنیم

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx=\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$=\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx+\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$=\sin^{-1}x-\sqrt{1-x^2}+C.$$



۲۶.۷ (الف) برای محاسبهٔ

$$\int_0^1 \sqrt{(1+x)/(1-x)}\,dx$$

مقدار

$$\int_0^b \sqrt{(1+x)/(1-x)}\,dx$$

را محاسبه می‌کنیم و b را ازچپ به ۱ میل می‌دهیم. (ب) اگر خم را نمودار تابع $x=(y^2-1)/(y^2+1)$ در نظر بگیریم می‌توانیم محاسبه‌ای معادل با محاسبهٔ قبلی انجام دهیم به‌این‌ترتیب که از این تابع از ۱ تا c نسبت به y انتگرال می‌گیریم و c را به‌بینهایت میل می‌دهیم. سپس ۱ راکه مساحت مربع مشخص‌شده درشکل‌است به نتیجهٔ حاصل می‌افزاییم.

بنابراین

$$\lim_{b\to 1^-}\int_0^b \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$$

$$=\lim_{b\to 1^-}\left[\sin^{-1}x-\sqrt{1-x^2}\right]_0^b$$

$$=\lim_{b\to 1^-}[\sin^{-1}b-\sqrt{1-b^2}+1]$$

$$=\sin^{-1}1-0+1=\frac{\pi}{2}+1.$$

پس انتگرال همگراست و مقدارش $(\pi/2)+1$ است.

در محاسبات بالا از نوارهای قائم نسبت به x انتگرال می گیریم. اگر ازنوارهای‌افقی نسبت به y انتگرال بگیریم بازهم

همین نتیجه به‌دست می‌آید (شکل ۲۶.۷ ب). دراین مورد،

$$dA=(۱-x)\,dy=\frac{۲}{y^{۲}+۱}\,dy$$

و بخشی از مساحت که بالای مربع سایه‌دار است برابراست با

$$\int_{۱}^{\infty}\frac{۲}{y^{۲}+۱}\,dy=\lim_{c\to\infty}\int_{۱}^{c}\frac{۲}{y^{۲}+۱}\,dy$$

$$=\lim_{c\to\infty}\Big[۲\tan^{-۱}y\Big]_{۱}^{c}$$

$$=\lim_{c\to\infty}۲\tan^{-۱}c-۲\cdot\frac{\pi}{۴}$$

$$=۲\cdot\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۲}=\frac{\pi}{۲}\cdot$$

اگر مربع سایه‌دار را منظور کنیم، مساحت برابر $۱+(\pi/۲)$ می‌شودکه با محاسبهٔ نخست تطابق دارد. ■

نماد

$$\int_{a}^{b}f(x)\,dx$$

که برای انتگرالهای غیرعادی به‌کارمی‌رود همان نماد انتگرالهای معین است. درهرمورد مفروض، معمولاً[۴] به‌سادگی می‌توان گفت که یك انتگرال خاص باید به صورت یك انتگرال معین عادی محاسبه شود یا به‌صورت یك حد. اگر a و b متناهی و f در هرنقطه‌ای از $[a,b]$ پیوسته باشد، انتگرال یك انتگرال معین عادی است. اگر f در یك یا چند نقطه از بازهٔ انتگرالگیری بینهایت باشد، یا یك یا هردوحد انتگرالگیری بینهایت باشند، انتگرال یك انتگرال غیرعادی است و باید به‌صورت یك حد محاسبه شود.

تعریف

انتگرالهای غیرعادی

انتگرال $\int_{a}^{b}f(x)\,dx$ یك **انتگرال غیرعادی** است اگر

۱. f در یك یا چند نقطه از بازهٔ انتگرالگیری بینهایت شود، یا
۲. یك یا هردو حد انتگرالگیری بینهایت باشند، یا
۳. هم (۱) و هم (۲) برقرار باشد.

مثال ۲ در انتگرال

$$\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{x}$$

تابع

$$f(x)=\frac{۱}{x}$$

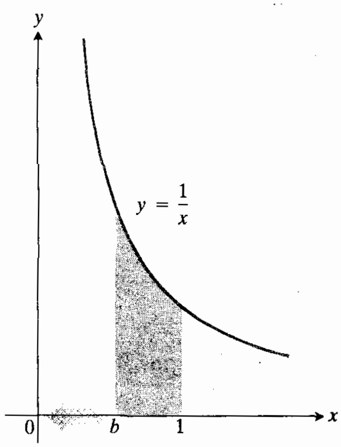
در $x=۰$ بینهایت می‌شود. نقطهٔ $x=۰$ را جدا می‌کنیم و انتگرالگیری را از یك عدد مثبت کوچکتر از ۱ مانند b آغاز می‌کنیم. (شکل ۲۷.۷ را ببینید.) یعنی محاسبهٔ زیر را انجام می‌دهیم

$$\int_{b}^{۱}\frac{dx}{x}=\ln x\Big]_{b}^{۱}=\ln ۱-\ln b=\ln\frac{۱}{b}$$

و مقدار نتیجه را وقتی‌که b از راست به‌صفر میل می‌کند به دست می‌آوریم. چون

$$\lim_{b\to ۰^{+}}\int_{b}^{۱}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to ۰^{+}}\left(\ln\frac{۱}{b}\right)=+\infty$$

می‌گوییم این انتگرال از $x=۰$ تا $x=۱$ واگراست.



۲۷.۷ $\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to ۰^{+}}\int_{b}^{۱}\frac{dx}{x}$. ■

اگر تابع f درنقطه‌ای واقع در درون بازهٔ انتگرالگیری بینهایت‌شود از روشی که درمثال‌زیر به‌کاررفته‌است استفاده‌می‌کنیم.

مثال ۳ در انتگرال

$$\int_{۰}^{۳}\frac{dx}{(x-۱)^{۲/۳}}$$

تابع

$$f(x)=\frac{۱}{(x-۱)^{۲/۳}}$$

در $x=۱$ که بین حدود انتگرالگیری ۰ و ۳ قرار دارد بینهایت می‌شود. در این موارد نیز نقطه‌ای را کـه $f(x)$ بینهایت می‌شود جدا می‌کنیم. در اینجا از ۰ تا b، که b انـدکی کوچکتر از ۱ است، انتگرال می‌گیریم، و دوبـاره از c درآن طرف ۱ شروع می‌کنیم و از c تا ۳ انتگرال می‌گیریم (شکل ۲۸۰۷). به‌این‌ترتیب دو انتگرال زیر به‌دست می‌آید

$$\int_۰^b \frac{dx}{(x-۱)^{۲/۳}} \quad \text{و} \quad \int_c^۳ \frac{dx}{(x-۱)^{۲/۳}}.$$

اگر انتگرال اول وقتی‌که $b \to ۱^-$ حد معینی‌داشته‌باشد و انتگرال دوم نیز وقتی‌که $c \to ۱^+$ دارای حد معینی باشد، گوییم انتگرال f از ۰ تا ۳ همگراست و مقدار آن برابراست با

$$\int_۰^۳ \frac{dx}{(x-۱)^{۲/۳}} = \lim_{b\to ۱^-} \int_۰^b \frac{dx}{(x-۱)^{۲/۳}} + \lim_{c\to ۱^+} \int_c^۳ \frac{dx}{(x-۱)^{۲/۳}}.$$

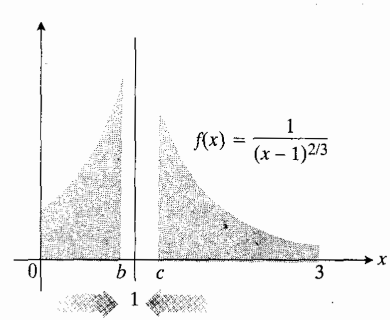
اگر یکی ازحدود یـا هردوی‌آنها وجود نداشته بـاشد می‌گوییم انتگرال f از ۰ تا ۳ واگراست. دراین‌مثال

$$\lim_{b\to ۱^-} \int_۰^b (x-۱)^{-۲/۳}\, dx = \lim_{b\to ۱^-} [۳(b-۱)^{۱/۳} - ۳(۰-۱)^{۱/۳}] = +۳$$

و

$$\lim_{c\to ۱^+} \int_c^۳ (x-۱)^{-۲/۳}\, dx = \lim_{c\to ۱^+} [۳(۳-۱)^{۱/۳} - ۳(c-۱)^{۱/۳}] = ۳\sqrt[۳]{۲}.$$

چون هـردوحد وجود دارند و متناهی‌انـد، انتگرال f همگرا و



۲۸۰۷ $\int_۰^۳ f(x)\, dx = \lim_{b\to ۱^-} \int_۰^b f(x)\, dx + \lim_{c\to ۱^+} \int_c^۳ f(x)\, dx$.

مقدارش برابر $۳+۳\sqrt[۳]{۲}$ است. ■

انتگرال $\int_۱^\infty dx/x^p$

همگرایی انتگرال

$$\int_۱^\infty \frac{dx}{x^p}$$

به مقدار نمای p بستگی دارد. در مثال بعدی ایـن مطلب به ازای $p=۱$ و $p=۲$ تشریح می‌شود.

مثال ۴ آیا انتگرالهای

$$\int_۱^\infty \frac{dx}{x} \quad \text{و} \quad \int_۱^\infty \frac{dx}{x^۲}$$

همگرایند یا واگرا؟

حل: هردو خم

$$y=\frac{۱}{x} \quad \text{و} \quad y=\frac{۱}{x^۲}$$

وقتی $x\to\infty$ به‌محور x میل‌می‌کنند (شکل ۲۹۰۷). برای‌تابع $y=۱/x$ داریم

$$\int_۱^b \frac{dx}{x} = \ln x\Big]_۱^b = \ln b$$

و

$$\lim_{b\to\infty} \int_۱^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty.$$

بنابراین

$$\int_۱^\infty \frac{dx}{x} = \infty.$$

پس این انتگرال واگراست.

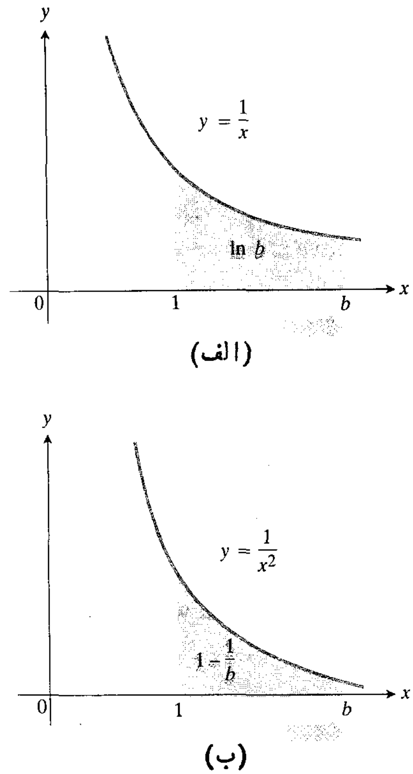
درمورد تابع $y=۱/x^۲$ داریم

$$\int_۱^b \frac{dx}{x^۲} = -\frac{۱}{x}\Big]_۱^b = ۱-\frac{۱}{b}$$

و

$$\int_۱^\infty \frac{dx}{x^۲} = \lim_{b\to\infty} \int_۱^b \frac{dx}{x^۲} = \lim_{b\to\infty}\left(۱-\frac{۱}{b}\right) = ۱.$$

این انتگرال همگرا و مقدارش برابر ۱ است.



۲۹٫۷ (الف) مساحت قسمت سایه‌دار یعنی $\ln b$ وقتی $b \to \infty$ به‌یك حد متناهی‌میل نمی‌کند. (ب) مساحت قسمت سایه‌دار یعنی $1-(1/b)$ وقتی $b \to \infty$ به ۱ میل‌می‌کند. ■

به‌طور کلی، انتگرال

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$$

وقتی‌که $p > 1$ همگرا و وقتی $p \leqslant 1$ واگراست (مسألهٔ ۴۳).

آزمون تسلط برای همگرایی و واگرایی

گاه می‌توان همگرایی یا واگرایی یك انتگرال غیرعادی را بدون محاسبهٔ آن تعیین‌کرد. برای این منظور، انتگرال غیرعادی را با انتگرالی‌که از همگرایی یا واگرایی‌آن مطلعیم مقایسه می‌کنیم. این مطلب را درمثال زیر درمورد انتگرال مهمی از نظریهٔ احتمال تشریح می‌کنیم.

مثال ۵ آیا انتگرال

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$$

همگراست یا واگرا؟

حل: حتی اگر نتوان

$$I(b)=\int_1^b e^{-x^2}\,dx$$

را به‌صورت ساده‌تری بیان‌کرد، می‌توان نشان دادکه $I(b)$ وقتی که $b \to \infty$ یك حد متناهی دارد.

تابع $I(b)$ مساحت ناحیهٔ بین محور x و خم $y=e^{-x^2}$ از $x=1$ تا $x=b$ را نشان می‌دهد. این تابع، تابعی‌صعودی از b است. بنابراین وقتی $b \to \infty$، این‌تابع یا به‌بینهایت یا به‌یك حد متناهی میل می‌کند.

حال نشان می‌دهیم‌که وقتی $b \to \infty$، تابع به‌بینهایت میل نمی‌کند. برای این منظور مساحت زیرخم مفروض $y=e^{-x^2}$ را با مساحت زیرخم $y=e^{-x}$ مقایسه می‌کنیم (شکل ۳۰٫۷). مساحت زیرخم $y=-e^{x}$ از $x=1$ تا $x=b$ چنین به‌دست می‌آید

$$\int_1^b e^{-x}\,dx=-e^{-x}\Big]_1^b=e^{-1}-e^{-b}$$

کـه وقتی $b \to \infty$ به‌حد متناهی e^{-1} میل می‌کند. چون به‌ازای همهٔ مقادیـر x بـزرگتر از ۱، مقدار e^{-x^2} از e^{-x} کمتر است، مساحت زیرخم مفروض، هـرقدرهم‌کـه b بزرگ باشد، قطعاً از e^{-1} بزرگتر نیست.

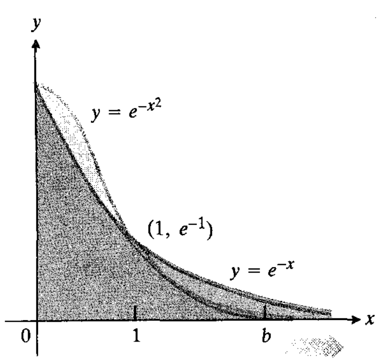
بحث فوق درنابرابریهای زیرخلاصه می‌شود

$$I(b)=\int_1^b e^{-x^2}dx \leqslant \int_1^b e^{-x}\,dx=e^{-1}-e^{-b}\leqslant e^{-1}.$$

یعنی، $I(b)\leqslant e^{-1} < 0.37$. بنابراین وقتی $b \to \infty$، $I(b)$ بینهایت نمی‌شود. از این‌رو باید شق دیگر برقرار باشد؛ یعنی

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x^2}\,dx$$

همگراست و مقدارآن متناهی و معین است. گـرچه این حـد را محاسبه نکرده‌ایم، امـا می‌دانیم کـه وجود دارد وکمتر از ۰٫۳۷ است.



۳۰٫۷ نمودارهای $y=e^{-x^2}$ و $y=e^{-x}$. ■

گوییم تابع مثبتی چون f وقتی $x\to\infty$ بر تابع مثبتی چون g مسلط است هرگاه نابرابری

$$g(x)\leqslant f(x)$$

به‌ازای همهٔ مقادیر x فراتر از نقطه‌ای چون a برقرار باشد. مثلاً $f(x)=e^{-x}$ وقتی $x\to\infty$ بر $g(x)=e^{-x^2}$ مسلط است زیرا به‌ازای همهٔ x های بزرگتر از $a=1$ داریم $e^{-x^2}\leqslant e^{-x}$.
اگر وقتی $x\to\infty$، f بر g مسلط باشد، آنگاه

$$\int_a^b g(x)\,dx\leqslant\int_a^b f(x)\,dx,\quad b>a.$$

به‌کمک این رابطه مانند مثال ۵ می‌توان ثابت کرد که

اگر $\int_a^\infty f(x)$ همگرا باشد $\int_a^\infty g(x)\,dx$ همگراست.

یا

اگر $\int_a^\infty g(x)$ واگرا باشد $\int_a^\infty f(x)\,dx$ نیز واگراست.

این نتایج را به‌صورت یک قضیه بیان می‌کنیم و سپس مثالی می‌آوریم.

قضیهٔ ۱

آزمون تسلط برای مشخص‌کردن همگرایی یا واگرایی انتگرالهای غیرعادی

اگر به‌ازای همهٔ xهای بزرگتر از a، $0\leqslant g(x)\leqslant f(x)$، آنگاه

۱. اگر $\int_a^\infty f(x)\,dx$ همگرا باشد $\int_a^\infty g(x)\,dx$ نیز همگراست،

۲. اگر $\int_a^\infty g(x)\,dx$ واگرا باشد $\int_a^\infty f(x)\,dx$ نیز واگراست.

درقضیهٔ ۱ فرض براین است که f و g روی هر بازهٔ متناهی چون $[a,b]$ انتگرال‌پذیرند، که این فرض مثلاً اگر این توابع پیوسته باشند برقرار است.

مثال ۶

الف) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx$ همگراست چون $\frac{1}{x^2+1}<\frac{1}{x^2}$، و $\int_1^\infty\frac{1}{x^2}\,dx$ همگراست.

ب) $\int_1^\infty \frac{1}{e^{2x}}\,dx$ همگراست چون $\frac{1}{e^{2x}}<\frac{1}{e^x}$، و $\int_1^\infty\frac{1}{e^x}\,dx$ همگراست.

پ) $\int_1^\infty\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ واگراست چون به ازای $x>1$، $\frac{1}{\sqrt{x}}>\frac{1}{x}$، و $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ واگراست.

ت) $\int_1^\infty\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$ واگراست چون $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>\frac{1}{x}$، و $\int_1^\infty\frac{1}{x}\,dx$ واگراست. ■

آزمون مقایسهٔ حدی

نتیجهٔ سودمند دیگری که آن را اثبات نخواهیم کرد، آزمون مقایسهٔ حدی برای تعیین همگرایی یا واگرایی انتگرالهای غیرعادی است. (نتیجهٔ مشابهی را درمورد سریهای نامتناهی در فصل ۱۱ خواهید دید.) این آزمون چنین است:

قضیهٔ ۲

آزمون مقایسهٔ حدی برای مشخص‌کردن همگرایی یا واگرایی انتگرالهای غیرعادی

اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابعی مثبت باشند و

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L,\quad 0<L<\infty$$

آنگاه، $\int_a^\infty f(x)\,dx$ و $\int_a^\infty g(x)\,dx$ یا هردو همگرایند یا هردو واگرا.

درقضیهٔ ۲ نیز مانند قضیهٔ ۱ فرض براین است که f و g روی هر بازهٔ متناهی چون $[a,b]$ انتگرال‌پذیرند.

قضیهٔ ۲ به‌زبان بخش ۸.۶ حاکی است که اگر دوتابع مثبت وقتی که $x\to\infty$ با آهنگ برابر رشد کنند، انتگرالهایشان از a تا ∞ نظیرهم عمل می‌کنند: یا هر دو همگرایند یا هر دو واگرا. البته همان‌طور که در مثال بعد می‌بینیم این بدان معنی نیست که مقدار انتگرالهایشان یکی است.

مثال ۷ به‌کمک آزمون مقایسهٔ حدی دو انتگرال زیر را باهم مقایسه کنید

$$\int_1^\infty\frac{dx}{x^2}\quad \text{و}\quad \int_1^\infty\frac{dx}{1+x^2}.$$

حل: با فرض

$$f(x)=\frac{1}{x^2}, \quad g(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

داریم

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\,\frac{1+x^2}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)=0+1=1$$

که یك حد متناهی و مثبت است. بنابراین

$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ همگراست چون $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ همگراست.

اما مقدار انتگرالها برابر نیستند. بنابه‌مثال ۴ داریم

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}=1$$

و درمورد انتگرال دیگر داریم

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{1+x^2} \qquad \text{(تعریف)}$$

$$=\lim_{b\to\infty}[\tan^{-1}b-\tan^{-1}1]$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}. \quad ■$$

مثال ۸

$\int_1^\infty \frac{3}{e^x+5}dx$ همگـراست زیـرا $\int_1^\infty \frac{1}{e^x}dx$ همگراست و داریم

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}\cdot\frac{e^x+5}{3}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+5}{3e^x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{3e^x}\right)=\frac{1}{3}+0=\frac{1}{3}$$

که یك حد متناهی و مثبت است. بنابراین، تا جایی‌که به‌همگرایی انتگرالهای غیرعـادی مربوط می‌شود، رفتار $3/(e^x+5)$ نظیر رفتار $1/e^x$ است. ■

مثال ۹

$\int_3^\infty \frac{1}{e^{2x}-10e^x}dx$ همگراست زیرا $\int_3^\infty \frac{1}{e^{2x}}dx$ همگراست

و داریم

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{2x}}\cdot\frac{e^{2x}-10e^x}{1}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{10}{e^x}\right)=1+0=1$$

که یك حد متناهی و مثبت است. بنابراین تـا جایی‌که به‌همگرایی انتگرالهای غیرعـادی مربوط می‌شود، رفتار $1/(e^{2x}-10e^x)$ نظیر رفتار $1/e^{2x}$ است. ■

نکاتی دیگر

می‌دانیم‌که

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$$

همگراست، ولی انتگرالهای زیرچطور؟

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2}dx \quad \text{و} \quad \int_{100}^\infty \frac{1}{x^2}dx\,.$$

پاسخ این است‌که آنها نیز همگرایند. وجود حدهای

$$\lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{1}{x^2}dx \quad \text{و} \quad \lim_{b\to\infty}\int_{100}^b \frac{1}{x^2}dx$$

به‌نقاط شروع $a=2$ و $a=100$ بستگی‌ندارد، بلکه‌تنها به‌مقادیر $1/x^2$ وقتی x به‌بینهایت میل‌می‌کند بستگی‌دارد. به‌ازای هرمقدار مثبت a داریم

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{1}{x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}\,.$$

مقدار این‌حد به‌مقدار a بستگی دارد، امـا وجود آن به a بستگی ندارد. این حد به‌ازای هرمقدار مثبت a وجود دارد.

همین‌طور، انتگرالهای

$$\int_2^\infty \frac{1}{x}dx \quad \text{و} \quad \int_{100}^\infty \frac{1}{x}dx$$

هردو واگرایند. به‌ازای هرمقدار مثبت a داریم

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{1}{x}dx=\lim_{b\to\infty}(\ln b-\ln a)=\infty\,.$$

همگرایی و واگرایی انتگرالهایی کـه غیرعادی‌بودن آنها تنها به‌علت بینهایت‌بودن حد بالایی آنهاست، هرگز به‌حـد پایینی انتگرالگیری بستگی ندارد.

درآخرین مثال، نشان می‌دهیم کـه یك انتگرال غیرعـادی ممکن است واگرا باشد بدون اینکه بینهایت شود.

مثال ۱۰ انتگرال

$$\int_0^b \cos x\, dx = \sin b$$

وقتی‌که b از $2n\pi - \pi/2$ تا $2n\pi + \pi/2$ تغییر می‌کند (n می‌تواند هر عدد صحیحی باشد)، تمام مقادیر از -1 تا $+1$ را اختیار می‌کند. بنابراین

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b \cos x\, dx$$

وجود ندارد. می‌توان گفت این انتگرال «واگرای نوسانی» است. ■

مسأله‌ها

درمسائل ۱ـ۱۰، انتگرالها را محاسبه کنید.

۱. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$

۲. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

۳. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$

۴. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1.001}}$

۵. $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

۶. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

۷. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{0.999}}$

۸. $\displaystyle\int_{-\infty}^2 \frac{dx}{4-x}$

۹. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^2-x}\, dx$

۱۰. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

درمسائل ۱۱ـ۴۰، تعیین کنید که آیا انتگرالها همگرایند یا واگرا. (در برخی از موارد، ضرورتی ندارد انتگرال را محاسبه کنید تا بتوانید به‌این پرسش پاسخ دهید. نام آزمونی‌را که به‌کارمی‌برید ذکر کنید.)

۱۱. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$

۱۲. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$

۱۳. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^3+1}$

۱۴. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^3}$

۱۵. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^{3/2}+1}$

۱۶. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+e^x}$

۱۷. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan x\, dx$

۱۸. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$

۱۹. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{2/5}}$

۲۰. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$

۲۱. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

۲۲. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{5}{x}\, dx$

۲۳. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{1-x^2}$

۲۴. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{(x+1)^2}$

۲۵. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^6+1}}$

۲۶. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

۲۷. $\int_{0}^{\infty} x^{2} e^{-x}\, dx$

۲۸. $\int_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x^{2}}\, dx$

۲۹. $\int_{\pi}^{\infty} \frac{2+\cos x}{x}\, dx$

۳۰. $\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx$

۳۱. $\int_{6}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+5}}\, dx$

۳۲. $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2x+10}}$

۳۳. $\int_{2}^{\infty} \frac{2}{x^{2}-1}\, dx$

۳۴. $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{e^{\ln x}}\, dx$

۳۵. $\int_{2}^{\infty} \frac{1}{\ln x}\, dx$

۳۶. $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^{x}-x}}\, dx$

۳۷. $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{e^{x}-2^{x}}\, dx$

۳۸. $\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x^{3}-5}\, dx$

۳۹. $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^{4}}}$

(راهنمایی: این انتگرال را به‌ازای xهای نزدیک صفر با $\int dx/\sqrt{x}$ و به‌ازای xهای بزرگ با $\int dx/x^{2}$ مقایسه کنید.)

۴۰. $\int_{0}^{\infty} e^{-x} \cos x\, dx$

۴۱. برآورد کردن مقدار یک انتگرال غیرعادی همگرا که دامنه‌اش نامتناهی است. نشان دهید که

$$\int_{3}^{\infty} e^{-3x}\, dx = \frac{1}{3} e^{-9} < 0.000042$$

و در نتیجه $\int_{3}^{\infty} e^{-x^{2}}\, dx < 0.000042$. بنابراین به جای $\int_{0}^{\infty} e^{-x^{2}}\, dx$ می‌توان $\int_{0}^{3} e^{-x^{2}}\, dx$ را گذاشت بدون اینکه خطا افزایش یابد. انتگرال دوم را به کمک قاعدهٔ سیمپسون با ضابطهٔ $n=6$ محاسبه کنید. (این یک روش به‌دست‌آوردن مقدار تقریبی عددی برای انتگرالهای غیرعادی همگراست.)

۴۲. قوطی رنگ نامتناهی. چنانکه در مثال ۴ دیدیم، انتگرال $\int_{1}^{\infty} (dx/x)$ واگراست. این بدان معنی است که انتگرال

$$\int_{1}^{\infty} 2\pi \frac{1}{x} \sqrt{1+\frac{1}{x^{4}}}\, dx$$

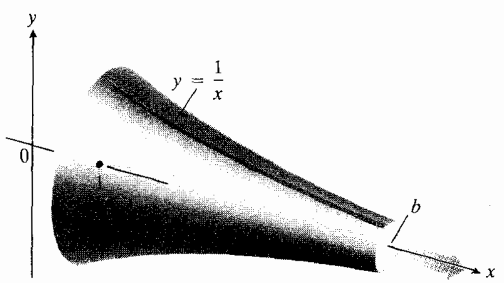
نیز که مقدار مساحت رویهٔ جسم دوار حاصل از دوران خم $y=1/x$، $1 \leqslant x$ حول محور x را به‌دست می‌دهد، واگراست. زیرا مقایسهٔ این دو انتگرال نشان می‌دهد که به‌ازای هر مقدار متناهی $b>1$ داریم

$$\int_{1}^{b} 2\pi \frac{1}{x} \sqrt{1+\frac{1}{x^{4}}}\, dx > \int_{1}^{b} \frac{dx}{x}.$$

اما، انتگرال

$$\int_{1}^{\infty} \pi \left(\frac{1}{x}\right)^{2} dx$$

که حجم جسم دوار را به‌دست می‌دهد همگراست. مقدار آن را محاسبه کنید. گاه این جسم دوار را به‌صورت یک قوطی رنگ توصیف می‌کنند که رنگی که داخل آن جای می‌گیرد به آن اندازه نیست که بتوان با آن رویهٔ بیرونی‌اش را رنگ زد. (شکل ۳۱۰۷)



۳۱۰۷ اگر جسمی که در این شکل دیده می‌شود از طرف راست تا بینهایت امتداد یابد، جسمی «نامتناهی» ایجاد می‌شود که حجمش متناهی و مساحت رویه‌اش نامتناهی است. علت این امر را می‌توانید با مطالعهٔ مسألهٔ ۴۲ دریابید.

۴۳. نشان دهید که

$$\int_{۱}^{\infty}\frac{dx}{x^{p}}=\frac{۱}{p-۱},\quad p>۱$$

و نیز نشان دهید که همین انتگرال به‌ازای $p<۱$ نامتناهی است. درمثال ۴ مقدار انتگرال به‌ازای $p=۱$ مشخص شده‌است.

۴۴. به‌ازای چه مقادیری از p انتگرالهای زیر همگرایند؟

الف) $\displaystyle\int_{۱}^{۲}\frac{dx}{x(\ln x)^{p}}$

ب) $\displaystyle\int_{۲}^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^{p}}$

ناحیهٔ مورد نظر در هریك از مسائل ۴۵–۴۸ در ربع اول واقع و به‌خم $y=e^{-x}$ و محور x محدود است.

۴۵. مطلوب است مساحت ناحیه.

۴۶. مطلوب است مرکز جرم ناحیه.

۴۷. مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران ناحیه حول محور y.

۴۸. مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران این ناحیه حول محور x.

۴۹. مطلوب است مرکز جرم ناحیهٔ محدود به خمهای $y=\pm(۱-x^{۲})^{-۱/۲}$ و خطوط $x=۰$ و $x=۱$.

۵۰. مطلوب است مساحت ناحیهٔ واقع در بین‌خمهای $y=\sec x$ و $y=\tan x$ به‌ازای $۰\leqslant x\leqslant\pi/۲$.

۵۱. نشان دهید که مساحت ناحیهٔ بین‌خم $y=۱/(۱+x^{۲})$ و سراسرمحور x برابرمساحت قرص واحد $x^{۲}+y^{۲}\leqslant ۱$ است.

۹.۷ استفاده از جدولهای انتگرالها

فرمولهای شماره‌دار انتگرالها در انتهای این کتاب برحسب ثابتهای a، b، c، m، n، و غیره بیان شده‌اند. ضرورتی ندارد که این ثابتها اعداد صحیح باشند و همواره می‌توان فرض کرد که آنها اعداد حقیقی‌اند. گاه این ثابتها محدودیتهایی دارند که این محدودیتها همراه فرمولهای انتگرالها ذکرشده‌اند. مثلاً در فرمول ۵ باید $n\neq -۱$ و درفرمول ۱۱ باید $n\neq -۲$ باشد.

همچنین فرض براین است که این ثابتها مقادیری اختیار نمی‌کنند که مستلزم تقسیم عددی برصفر یا ریشهٔ زوج گرفتن از اعداد منفی باشد. مثلاً در فرمول ۸ باید $a\neq ۰$ و در فرمول ۱۳(الف) باید b منفی باشد.

مثالهای زیر نشان می‌دهند که از فرمولهای انتگرالها درانتهای کتاب معمولاً چگونه استفاده می‌شود.

مثال ۱ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int x(۲x+۵)^{-۱}\,dx.$$

حل: فرمول ۸ (و نه‌فرمول ۷ که درآن باید $n\neq -۱$)، یعنی

$$\int x(ax+b)^{-۱}\,dx=\frac{x}{a}-\frac{b}{a^{۲}}\ln|ax+b|+C$$

را به‌ازای $a=۲$ و $b=۵$ به‌کارمی‌بریم

$$\int x(۲x+۵)^{-۱}\,dx=\frac{x}{۲}-\frac{۵}{۴}\ln|۲x+۵|+C. \quad\blacksquare$$

مثال ۲ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{۲x+۴}}.$$

حل: فرمول ۱۳ (ب) یعنی

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}=\frac{۱}{\sqrt{b}}\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right|+C,\quad b>۰$$

را به‌ازای $a=۲$ و $b=۴$ به‌کارمی‌بریم

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{۲x+۴}}=\frac{۱}{\sqrt{۴}}\ln\left|\frac{\sqrt{۲x+۴}-\sqrt{۴}}{\sqrt{۲x+۴}+\sqrt{۴}}\right|+C$$

$$=\frac{۱}{۲}\ln\left|\frac{\sqrt{۲x+۴}-۲}{\sqrt{۲x+۴}+۲}\right|+C.$$

دراینجا فرمول ۱۳ (الف) که درآن باید $b<۰$، مناسب نیست. اما استفاده از این فرمول درمثال بعدی مناسب است. ■

مثال ۳ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-4}}\cdot$$

حل: فرمول ۱۳ (الف) یعنی

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{\sqrt{-b}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{ax+b}{-b}}+C,\quad b<0$$

را به‌ازای $a=2$ و $b=-4$ به‌کارمی‌بریم

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-4}} = \frac{2}{\sqrt{-(-4)}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{2x-4}{-(-4)}}+C$$

$$=\tan^{-1}\sqrt{\frac{x-2}{2}}+C\cdot$$

■

مثال ۴ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}}\cdot$$

حل: نخست فرمول ۱۵ یعنی

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}+C$$

را به‌ازای $a=2$ و $b=-4$ به‌کار می‌بریم

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x-4}} = -\frac{\sqrt{2x-4}}{-4x} + \frac{2}{2\times 4}\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-4}}+C\cdot$$

سپس برای محاسبهٔ انتگرال طرف راست، فرمول ۱۳ (الف) را به‌کارمی‌بریم (مثال ۳) و نتیجهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x+4}} = \frac{\sqrt{2x-4}}{4x} + \frac{1}{4}\tan^{-1}\sqrt{\frac{x-2}{2}}+C\cdot$$

■

مثال ۵ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int x\sin^{-1}x\,dx\cdot$$

حل: فرمول ۹۹ یعنی

$$\int x^n\sin^{-1}ax\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\sin^{-1}ax - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{1-a^2x^2}},\quad n\neq -1$$

را به‌ازای $n=1$ و $a=1$ به‌کارمی‌بریم

$$\int x\sin^{-1}x\,dx = \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\cdot$$

انتگرال سمت راست را می‌توان به‌کمک فرمول ۳۳ یعنی

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$$

به‌ازای $a=1$ محاسبه‌کرد

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\sin^{-1}x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C\cdot$$

نتیجهٔ نهایی این است

$$\int x\sin^{-1}x\,dx = \frac{x^2}{2}\sin^{-1}x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\right)+C$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\right)\sin^{-1}x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}+C\cdot$$

■

مثال ۶ ناحیهٔ واقع در ربع اول و محدود به محور x، خط $x=1$، و خم $y=\sin^{-1}x$ حول محور y دوران و جسمی را ایجاد می‌کند. حجم این جسم را بیابید.

حل: شکل ناحیه‌را رسم می‌کنیم (شکل ۳۲۰۷) و برمبنای آن تصمیم‌می‌گیریم که از روش پوسته‌های‌استوانه‌ای بهره بگیریم.

حجم عبارت است از

$$V=\int_0^1 2\pi(\text{شعاع})(\text{ارتفاع})\,dx$$

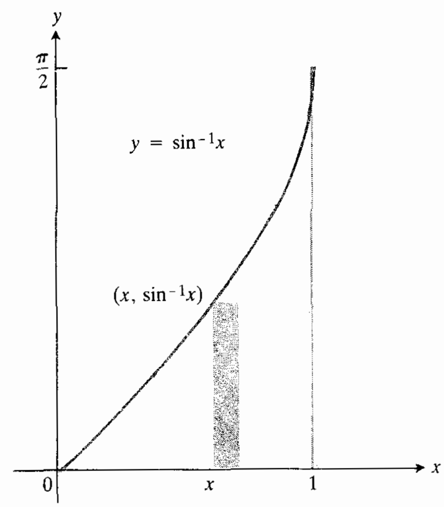
$$=\int_0^1 2\pi x\sin^{-1}x\,dx$$

$$=2\pi\left[\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4}\right)\sin^{-1}x+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}\right]_0^1$$

(مثال ۵)

$$=2\pi\left[\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)+0\right]-2\pi[0+0]$$

$$=\frac{\pi^2}{4}.$$



۳۲۰۷ ناحیهٔ مورد بحث درمثال ۶. ■

مسألهها

بهکمك فرمولهای انتگرال موجود در انتهای اینکتاب، انتگرالهای مسائل ۱ــ۱۶ را محاسبهکنید.

۱. $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$

۲. $\int x\cos^{-1}x\,dx$

۳. $\int_6^9 \frac{dx}{x\sqrt{x-3}}$

۴. $\int_0^{1/2} x\tan^{-1}2x\,dx$

۵. $\int \frac{dx}{(9-x^2)^2}$

۶. $\int_4^{10} \frac{\sqrt{4x+9}}{x^2}\,dx$

۷. $\int_3^{11} \frac{dx}{x^2\sqrt{7+x^2}}$

۸. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{7-x^2}}$

۹. $\int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x}\,dx$

۱۰. $\int_{-\pi/12}^{\pi/4} \frac{dx}{5+4\sin 2x}$

۱۱. $\int \frac{dx}{4+5\sin 2x}$

۱۲. $\int_3^6 \frac{x}{\sqrt{x-2}}\,dx$

(راهنمایی: درفرمول ۷ ضرورتی ندارد n عدد صحیح باشد.)

۱۳. $\int x\sqrt{2x-3}\,dx$

۱۴. $\int \frac{\sqrt{3x-4}}{x}\,dx$

۱۵. $\int_0^\infty x^{10}e^{-x}\,dx$

۱۶. $\int_0^1 x^2\tan^{-1}x\,dx$

در مسائل ۱۷ــ۲۰، بهکمك جانشانیهای داده شده، انتگرال را به انتگرالی تبدیل کنیدکه بتوان آن را درجداول موجود درانتهای این کتاب یافت. سپس انتگرال را محاسبهکنید.

۱۷. $\int_0^1 \sin^{-1}\sqrt{x}\,dx,\quad u=\sqrt{x}$

۱۸. $\int_{3/4}^1 \frac{\cos^{-1}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx,\quad u=\sqrt{x}$

۱۹. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx, \quad u=\sqrt{x}$

۲۰. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot x\sqrt{1-\sin^2 x}\,dx, \quad u=\sin x$

۲۱. مرکزوار ناحیه‌ای از ربع اول را بیابید که به‌خم $y=1/\sqrt{x+1}$ و خط $x=3$ محدود است.

۲۲. یك ورقهٔ نازك با چگالی ثابت $\delta=1$ ناحیه‌ای از ربع اول را که به‌خم $y=36/(2x+3)$ و خط $x=3$ محدود است اشغال می‌کند. مطلوب است گشتاوری که این ورقه حول محور y ایجاد می‌کند.

فرمولهایی که درمسائل ۲۳-۲۶ به‌آنها اشاره شده‌است فرمولهای موجود درصفحات انتهای این کتاب‌اند.

۲۳. فرمول ۵۵ را با مشتقگیری از طرف راست ثابت کنید.

۲۴. فرمول ۷۶ را با مشتقگیری از طرف راست ثابت کنید.

۲۵. فرمول ۹ را با انتگرالگیری از

$$\int \frac{x}{(ax+b)^2}\,dx$$

و با جانشانی $u=ax+b$ ثابت کنید.

۲۶. فرمول ۴۶ را با انتگرالگیری از

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$$

و با جانشانی $x=a\sec u$ ثابت کنید.

۱۰.۷ فرمولهای کاهش توان

فرمولی که انتگرال توانی از یك تابع را برحسب انتگرال توان کوچکتری از آن تابع بیان کند فرمول کاهش توان نام دارد. گاه با استفاده مکرر از این فرمول می‌توان توان بزرگی از یك تابع را آن‌قدر کاهش داد که بتوان از تابع به‌دست‌آمده مستقیماً انتگرال گرفت. دراین بخش، تعدادی از این فرمولهای کاهش توان را به‌دست می‌آوریم و چگونگی استفاده ازآنها را شرح می‌دهیم. چنانکه خواهیدید برای‌این‌کار عمدتاً ازانتگرالگیری‌جزء به‌جزء بهره می‌گیریم.

فرمولهای این بخش را لازم نیست حفظ کنید. درعمل‌هر گاه به‌این‌فرمولها نیاز داشتید می‌توانید به‌آنها مراجعه‌کنید. فرمولهای نظیر این فرمولها در دسترس‌اند و باید در به‌کار بردن آنها مهارت پیدا کرد.

مثال ۱ انتگرال

$$\int \cos^n x\,dx$$

را برحسب انتگرال توان‌کوچکتری از $\cos x$ بیان‌کنید.

حل: انتگرالگیری جزء به‌جزء را با

$$dv=\cos x\,dx \qquad u=\cos^{n-1}x$$

$$v=\sin x \qquad du=(n-1)\cos^{n-2}x(-\sin x\,dx)$$

$$=-(n-1)\cos^{n-2}x\sin x\,dx$$

به‌کارمی‌بریم. دراین‌صورت فرمول

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned}\int\cos^n x\,dx&=\int\cos^{n-1}x\cos x\,dx\\&=\cos^{n-1}x\sin x\\&\quad+(n-1)\int\cos^{n-2}x\sin^2 x\,dx\\&=\cos^{n-1}x\sin x\\&\quad+(n-1)\int\cos^{n-2}x(1-\cos^2 x)\,dx\\&=\cos^{n-1}x\sin x+(n-1)\int\cos^{n-2}x\,dx\\&\quad-(n-1)\int\cos^n x\,dx\,.\end{aligned}$$

اگر

$$(n-1)\int\cos^n x\,dx$$

را به‌دوطرف این رابطه بیفزاییم، داریم

$$\begin{aligned}n\int\cos^n x\,dx&=\cos^{n-1}x\sin x\\&\quad+(n-1)\int\cos^{n-2}x\,dx\,.\end{aligned}$$

حال طرفین را بر n تقسیم می‌کنیم و نتیجهٔ نهایی زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1}x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx. \qquad (1)$$

با استفاده از این‌فرمول می‌توان ازتوان $\cos x$ به‌اندازهٔ ۲ کاست که این‌امر بسیار مهم است. اگر n یك عدد صحیح مثبت باشد، از این‌فرمول می‌توان مکرراً استفاده‌کرد تا انتگرال باقیمانده به‌یکی از دوصورت زیر تبدیل شود

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

یا

$$\int \cos^0 x\,dx = \int dx = x + C. \quad \blacksquare$$

فرمول مشابه درمورد سینوس (مسألهٔ ۲۹) چنین‌است

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{\sin^{n-1}x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx. \qquad (2)$$

مثال ۲ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int \cos^4 x\,dx.$$

حل: رابطهٔ (۱) به‌ازای $n=4$ به‌صورت

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{\cos^3 x \sin x}{4} + \frac{3}{4}\int \cos^2 x\,dx$$

و به‌ازای $n=2$ به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{\cos x \sin x}{2} + \frac{1}{2}\int dx.$$

بنا بر این

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{\cos^3 x \sin x}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{\cos x \sin x}{2} + \frac{1}{2}x\right) + C. \quad \blacksquare$$

مثال ۳ مطلوب است یك فرمول کاهش توان برای

$$\int \tan^n x\,dx, \quad n > 1.$$

حل: به‌جای استفاده از انتگرال‌گیری جزء به‌جزء، $\sec^2 x - 1$ را جایگزین یك عامل $\tan^2 x$ می‌کنیم

$$\int \tan^n x\,dx = \int \tan^{n-2}x \tan^2 x\,dx$$

$$= \int \tan^{n-2}x(\sec^2 x - 1)\,dx$$

$$= \int \tan^{n-2}x \sec^2 x\,dx - \int \tan^{n-2}x\,dx$$

$$= \frac{\tan^{n-1}x}{n-1} - \int \tan^{n-2}x\,dx.$$

نتیجهٔ نهایی چنین است

$$\int \tan^n x\,dx = \frac{\tan^{n-1}x}{n-1} - \int \tan^{n-2}x\,dx. \qquad (3) \quad \blacksquare$$

فرمول کاهش توان برای کتانژانتها به‌ازای $n > 1$ چنین است

$$\int \cot^n x\,dx = -\frac{\cot^{n-1}x}{n-1} - \int \cot^{n-2}x\,dx. \qquad (4)$$

مثال ۴ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int \cot^5 x\,dx.$$

حل: رابطهٔ (۴) به‌ازای $n=5$ چنین است

$$\int \cot^5 x\,dx = -\frac{\cot^4 x}{4} - \int \cot^3 x\,dx.$$

برای محاسبهٔ انتگرال باقیمانده بازهم از رابطهٔ (۴) اما به‌ازای $n=3$ استفاده می‌کنیم

$$\int \cot^3 x\,dx = -\frac{\cot^2 x}{2} - \int \cot x\,dx$$

$$= -\frac{\cot^2 x}{2} - \ln|\sin x| + C.$$

بنابراین

$$\int \cot^5 x\,dx = -\frac{\cot^4 x}{4} + \frac{\cot^2 x}{2} + \ln|\sin x| + C.$$

■

مثال ۵ مطلوب است یك فرمول کاهش توان برای

$$\int \sec^n x\,dx, \quad n > 1.$$

حل: یك‌عامل $\sec^2 x$ را جدا و آن‌را با dx همراه‌می‌کنیم و انتگرالگیری جزء به‌جزء را به‌کارمی‌بریم. با جانشانیهای

$$u = \sec^{n-2} x \qquad dv = \sec^2 x\,dx$$

$$du = (n-2)\sec^{n-3} x\,d(\sec x) \qquad v = \tan x$$

$$= (n-2)\sec^{n-2} x \tan x\,dx$$

ازفرمول

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

چنین به‌دست می‌آید

$$\int \sec^n x\,dx = \int \sec^{n-2} x \sec^2 x\,dx$$

$$= \sec^{n-2} x \tan x - \int \tan x (n-2)\sec^{n-2} x \tan x\,dx$$

$$= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2)\int \sec^{n-2} x \tan^2 x\,dx$$

$$= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2)\int \sec^{n-2} x (\sec^2 x - 1)\,dx$$

$$= \sec^{n-2} x \tan x + (n-2)\int \sec^{n-2} x\,dx - (n-2)\int \sec^n x\,dx.$$

با حل این معادله نسبت به $\int \sec^n x\,dx$ داریم

$$\int \sec^n x\,dx = \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\,dx. \tag{۵}$$

■

فرمول مشابه درمورد کسکانت چنین است

$$\int \csc^n x\,dx = -\frac{\csc^{n-2} x \cot x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} x\,dx. \tag{۶}$$

برای امتحان کردن فرمول (۵)، از آن برای محاسبهٔ انتگرال $\sec^3 x$ که نتیجهٔ آن را می‌دانیم (بخش ۳.۷، مثال ۳) استفاده می کنیم.

مثال ۶ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int \sec^3 x\,dx.$$

حل: از فرمول (۵) به‌ازای $n = 3$ استفاده می کنیم

$$\int \sec^3 x\,dx = \frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{1}{2}\int \sec x\,dx$$

$$= \frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C.$$

■

مسأله‌ها

درمسائل ۱ــ۲۲، انتگرالها را به‌کمك فرمولهای‌کاهش توان این بخش محاسبه‌کنید.

۱. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^4 x\,dx$

۲. $\int \cos^4 2x\,dx$

۳. $\int \cos^6 x\,dx$

۴. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^6 3x\,dx$

۵. $\int_0^{\pi} \sin^4 x\,dx$

۶. $\int \sin^4\left(\frac{x}{2}\right)dx$

۷. $\int_0^{\pi/2}\sin^5 x\,dx$

۸. $\int_0^{\pi/4}\sin^5 2x\,dx$

۹. $\int\tan^3 2x\,dx$

۱۰. $\int_0^{\pi/2}\tan^4\left(\frac{x}{2}\right)dx$

۱۱. $\int\tan^5 x\,dx$

۱۲. $\int\tan^5 2x\,dx$

۱۳. $\int\cot^3 x\,dx$

۱۴. $\int\cot^3\left(\frac{x}{3}\right)dx$

۱۵. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\cot^4 x\,dx$

۱۶. $\int\cot^4 2x\,dx$

۱۷. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\sec^4 x\,dx$

۱۸. $\int_0^{\pi/4}\sec^4 4x\,dx$

۱۹. $\int\sec^5 x\,dx$

۲۰. $\int\sec^5\left(\frac{x}{2}\right)dx$

۲۱. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\csc^3 x\,dx$

۲۲. $\int_{\pi}^{2\pi}\csc^3\left(\frac{x}{3}\right)dx$

۲۳. $\int\csc^4 x\,dx$

۲۴. $\int\csc^5 x\,dx$

برای محاسبهٔ انتگرالها درمسائل ۲۵–۲۸ ، از یك جانشانی‌مثلثاتی و یك‌فرمول کاهش توان استفاده کنید.

۲۵. $\int_0^1 (x^2+1)^{-3/2}\,dx$

۲۶. $\int_0^1 (x^2+1)^{3/2}\,dx$

۲۷. $\int_0^{3/5}\frac{dx}{(1-x^2)^3}$

۲۸. $\int_1^2\frac{(x^2-1)^{3/2}}{x}\,dx$

۲۹. فرمول

$$\int\sin^n x\,dx=-\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n}+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}x\,dx$$

را به‌این‌ترتیب ثابت‌کنیدکه از طرف راست‌آن مشتق بگیرید و نتایج را ترکیب‌کنید تا $\sin^n x$ به‌دست‌آید.

۳۰. فرمول

$$\int\csc^n x\,dx=-\frac{\csc^{n-2}x\cot x}{n-1}+\frac{n-2}{n-1}\int\csc^{n-2}x\,dx$$

را به‌این‌ترتیب ثابت‌کنیدکه از طرف راست‌آن مشتق بگیرید و نتایج را ترکیب‌کنید تا $\csc^n x$ به‌دست‌آید.

۳۱. الف) فرمول زیر را به‌دست‌آورید

$$\int x^n\sin x\,dx=-x^n\cos x+n\int x^{n-1}\cos x\,dx.$$

ب) فرمول نظیر برای $x^n\sin ax$ چیست؟

۳۲. الف) فرمول زیر را به‌دست‌آورید

$$\int x^n\cos x\,dx=x^n\sin x-n\int x^{n-1}\sin x\,dx.$$

ب) فرمول نظیر برای $x^n\cos ax$ چیست؟

۳۳. فرمول زیر را به‌دست‌آورید

$$\int x^m(\ln x)^n\,dx=\frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1}-\frac{n}{m+1}\int x^m(\ln x)^{n-1}\,dx.$$

از این فرمول استفاده کنید و انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_{1}^{3} x^3(\ln x)^2\, dx\,.$$

۳۴. فرمول زیر را به‌دست آورید

$$\int x^n e^x\, dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x\, dx\,.$$

از این فرمول استفاده کنید و انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_{0}^{1} x^3 e^x\, dx\,.$$

پرسشها و تمرینهای مروری

۱. روشهای کلی یافتن انتگرالهای نامعین کدام‌اند؟

۲. اگر انتگرالده شامل جملات زیر باشد از چه جانشانیی (یا جانشانیهایی) می‌توان استفاده کرد؟

الف) $\sqrt{x^2+9}$

ب) $\sqrt{x^2-9}$

پ) $\sqrt{9-x^2}$

ت) $\sin^3 x\cos^2 x$

ث) $\sin^2 x\cos^2 x$

۳. اگر انتگرالده شامل جملات زیر باشد از چه روشی (یا روشهایی) می‌توان استفاده کرد؟

الف) $\sin^{-1}x$

ب) $\ln x$

پ) $\sqrt{1+2x-x^2}$

ت) $x\sin x$

ث) $\dfrac{2x+3}{x^2-5x+6}$

ج) $\sin 5x\cos 3x$

چ) $\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}$

ح) $x\sqrt{2x+3}$

۴. دربارهٔ دونوع انتگرال غیرعادی بحث کنید. همگرایی و واگرایی هریك از این‌دونوع را تعریف کنید. برای هریك ازاین دونوع نمونه‌هایی از انتگرالهای همگرا یا واگرا ذکر کنید. چه آزمونهایی درمورد همگرایی یا واگرایی انتگرالهای غیرعادی می‌توان انجام داد؟

۵. فرمول‌کاهش توان یعنی چه؟ چگونه فرمولهای کاهش توان را به‌کارمی‌برند؟ این مطلب را با استفاده از فرمول

$$\int \tan^n ax = \frac{\tan^{n-1}ax}{a(n-1)} - \int \tan^{n-2}ax\, dx$$

برای محاسبهٔ

$$\int_{0}^{\pi/2} \tan^3\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

توضیح دهید.

مسأله‌های گوناگون

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

۱. $\displaystyle\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{1+\sin x}}$

۲. $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{2}/2} \frac{\sin^{-1}x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$

۳. $\displaystyle\int \frac{\tan x\, dx}{\cos^2 x}$

۴. $\displaystyle\int \frac{y}{y^4+1}\, dy$

۵. $\displaystyle\int_{0}^{9} e^{\ln\sqrt{x}}\, dx$

۶. $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

۷. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

۸. $\displaystyle\int_{4}^{5} \frac{(3x-7)\, dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

۹. $\displaystyle\int x^2 e^x\, dx$

۱۰. $\int \sqrt{x^2+1}\, dx$

۱۱. $\int \frac{e^t\, dt}{1+e^{2t}}$

۱۲. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

۱۳. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$

۱۴. $\int_0^{64} \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

۱۵. $\int t^{2/3}(t^{5/3}+1)^{2/3}\, dt$

۱۶. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cot x\, dx}{\ln(e \sin x)}$

۱۷. $\int \frac{dt}{\sqrt{e^t+1}}$

۱۸. $\int \frac{\sin x e^{\sec x}}{\cos^2 x}\, dx$

۱۹. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{1+\sin^2 x}$

۲۰. $\int_{1/2}^{(1+\sqrt{2})/2} \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

۲۱. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x}$

۲۲. $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2t}{1+\sin 2t}\, dt$

۲۳. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin x \cos x}$

۲۴. $\int \sqrt{1+\sin x}\, dx$

۲۵. $\int_{-\pi/2}^{0} \sqrt{1-\sin x}\, dx$

۲۶. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$

۲۷. $\int \frac{e^{2x}\, dx}{\sqrt[3]{1+e^x}}$

۲۸. $\int_0^1 \ln \sqrt{1+x^2}\, dx$

۲۹. $\int_{5/4}^{5/3} \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}}$

۳۰. $\int_0^{3/5} \frac{x^3\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$

۳۱. $\int \frac{dx}{x(2+\ln x)}$

۳۲. $\int \frac{\cos 2x - 1}{\cos 2x + 1}\, dx$

۳۳. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}\, dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$

۳۴. $\int \frac{2 \sin \sqrt{x}\, dx}{\sqrt{x} \sec \sqrt{x}}$

۳۵. $\int_0^3 (16+x^2)^{-3/2}\, dx$

۳۶. $\int_0^{(e-1)^2} \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$

۳۷. $\int \sin \sqrt{x+1}\, dx$

۳۸. $\int \cos \sqrt{1-x}\, dx$

۳۹. $\int_0^1 \frac{dx}{4-x^2}$

۴۰. $\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}$

۴۱. $\int \frac{dy}{y(2y^3+1)^2}$

۴۲. $\int \frac{x\, dx}{1+\sqrt{x}}$

۴۳. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$

۴۴. $\int \ln \sqrt{x-1}\, dx$

۴۵. $\int \frac{dx}{e^x-1}$

۴۶. $\int \frac{(x+1)\,dx}{x^2(x-1)}$

۴۷. $\int \frac{x\,dx}{x^2+4x+3}$

۴۸. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{15\,du}{(e^u-e^{-u})^2}$

۴۹. $\int \frac{4\,dx}{x^3+4x}$

۵۰. $\int \frac{dx}{5x^2+8x+5}$

۵۱. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$

۵۲. $\int e^x \cos 2x\, dx$

۵۳. $\int \frac{dx}{x(3\sqrt{x}+1)}$

۵۴. $\int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})}$

۵۵. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cot\theta\, d\theta}{1+\sin^2\theta}$

۵۶. $\frac{z^5\,dz}{\sqrt{1+z^2}}$

۵۷. $\int \frac{e^{4t}\,dt}{(1+e^{2t})^{2/3}}$

۵۸. $\int \frac{dx}{x^{1/5}\sqrt{1+x^{4/5}}}$

۵۹. $\int \frac{(x^3+x^2)\,dx}{x^2+x-2}$

۶۰. $\int_2^3 \frac{x^3+1}{x^3-x}\,dx$

۶۱. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2}$

۶۲. $\int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+2x-3)^{2/3}}$

۶۳. $\int \frac{dy}{(2y+1)\sqrt{y^2+y}}$

۶۴. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$

۶۵. $\int (1-x^2)^{3/2}\,dx$

۶۶. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$

۶۷. $\int x\tan^2 x\,dx$

۶۸. $\int x\cos^2 x\,dx$

۶۹. $\int_0^{\pi} x^2\sin x\,dx$

۷۰. $\int x\sin^2 x\,dx$

۷۱. $\int_0^1 \frac{dt}{t^4+4t^2+3}$

۷۲. $\int \frac{du}{e^{4u}+4e^{2u}+3}$

۷۳. $\int_0^2 x\ln\sqrt{x+2}\,dx$

۷۴. $\int (x+1)^2 e^x\,dx$

۷۵. $\int \sec^{-1}x\,dx$

۷۶. $\int \frac{8\,dx}{x^4+2x^3}$

۷۷. $\int \frac{x\,dx}{x^4-16}$

۷۸. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\cos x}}$

۷۹. $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x-\sin x}$

۸۰. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{du}{(e^u+e^{-u})^2}$

۸۱. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}+x}$

۸۲. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 t\,dt}{\sec^2 t-3\tan t+1}$

۸۳. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sec^2 t+\tan^2 t}$

۸۴. $\displaystyle\int_0^{\tan^{-1}\sqrt{2}} \frac{dx}{1+\cos^2 x}$

۸۵. $\displaystyle\int e^{2t}\cos(e^t)\,dt$

۸۶. $\displaystyle\int_0^1 \ln\sqrt{x^2+1}\,dx$

۸۷. $\displaystyle\int x\ln(x^3+x)\,dx$

۸۸. $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{x^2}\,dx$

۸۹. $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{4-\cos^2 x}}$

۹۰. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{4-\sec^2 x}}$

۹۱. $\displaystyle\int x^2\sin(1-x)\,dx$

۹۲. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)(2+\tan^{-1}x)}$

۹۳. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cot^3 x}$

۹۴. $\displaystyle\int_0^{1/3} x\ln\sqrt[3]{3x+1}\,dx$

۹۵. $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+1)^2}$

۹۶. $\displaystyle\int_0^{3/4} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x}}$

۹۷. $\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{2x+1}\,dx$

۹۸. $\displaystyle\int \ln(x+\sqrt{x^2-1})\,dx$

۹۹. $\displaystyle\int \ln(x-\sqrt{x^2-1})\,dx$

۱۰۰. $\displaystyle\int_0^{\ln\sqrt{3}} e^{-x}\tan^{-1}(e^x)\,dx$

۱۰۱. $\displaystyle\int \ln(x+\sqrt{x})\,dx$

۱۰۲. $\displaystyle\int \tan^{-1}\sqrt{x}\,dx$

۱۰۳. $\displaystyle\int_1^2 \ln(x^2+x)\,dx$

۱۰۴. $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \cos\sqrt{x}\,dx$

۱۰۵. $\displaystyle\int_0^{\pi^2/4} \sin\sqrt{x}\,dx$

۱۰۶. $\displaystyle\int_0^2 \tan^{-1}\sqrt{x+1}\,dx$

۱۰۷. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x\,dx$

۱۰۸. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin^2(2x)\,dx$

۱۰۹. $\displaystyle\int \frac{\tan x\,dx}{\tan x+\sec x}$

۱۱۰. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{e^{2t}+1}}$

۱۱۱. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\cos^2 x+4\sin x-5)\cos x}$

۱۱۲. $\displaystyle\int \frac{dt}{a+be^{ct}}$ ، $a,b,c\neq 0$

۱۱۳. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-\cos x}{\cos\alpha-\cos x}}\,dx$

$0<\alpha<x<\pi$ (α ثابت است)

۱۱۴. $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^4+x^2}$

۱۱۵. $\displaystyle\int_0^1 \ln(2x^2+4)\,dx$

۱۱۶. $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x-5\cos x+4}$

۱۱۷. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{1-e^{-t}}}$

۱۱۸. $\displaystyle\int \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,dx$

انتگرالهای مسائل ۱۱۹–۱۲۸ را محاسبه کنید. حتماً می‌توانید از عهدهٔ این کار برآیید.

۱۱۹. $\displaystyle\int (\sin^{-1}x)^2\,dx$

۱۲۰. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+m)}$

۱۲۱. $\displaystyle\int x\sin^{-1}x\,dx$

۱۲۲. $\displaystyle\int \sin^{-1}\sqrt{x}\,dx$

۱۲۳. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{1-\tan^2\theta}$

۱۲۴. $\displaystyle\int \ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})\,dx$

۱۲۵. $\displaystyle\int \frac{dt}{t-\sqrt{1-t^2}}$

۱۲۶. $\displaystyle\int \frac{(2e^{2x}-e^x)\,dx}{\sqrt{3e^{2x}-6e^x-1}}$

۱۲۷. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+4}$

۱۲۸. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6-1}$

درمسائل ۱۲۹–۱۳۱، هریك ازحدها را محاسبه کنید. بدین‌منظور هر یك را با یك انتگرال معین مناسب بیان، و این انتگرال را محاسبه کنید.

۱۲۹. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+0^2}+\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+(n+1)^2}\right)$$

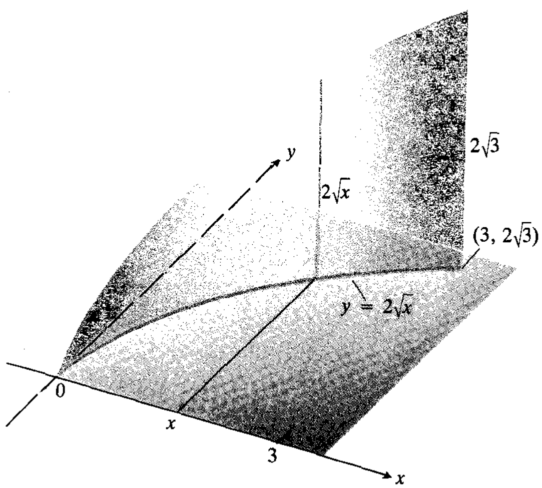
۱۳۰. $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\sqrt[n]{1+\frac{k}{n}}$$

۱۳۱. $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$$

۱۳۲. نشان دهید که $\int_0^\infty x^3e^{-x^2}\,dx$ همگراست. مقدار آن را بیابید.

۱۳۳. نشان دهید که $\int_0^1 \ln x\,dx$ همگراست. مقدار آن را بیابید.

۱۳۴. از نقاط روی خم $y=2\sqrt{x}$ خطوطی به‌طول $h=y$ عمود برصفحهٔ مختصات رسم شده‌اند (شکل ۳۳.۷). مطلوب است مساحت رویهٔ حاصل از این خطوط از $(0, 0)$ تا $(3, 2\sqrt{3})$.



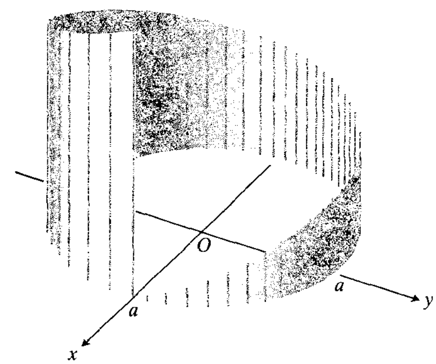
۳۳.۷ رویهٔ مسألهٔ ۱۳۴.

۱۳۵. ورقه‌ای به‌یك خط مستقیم و یك قوس $90°$ از دایره‌ای به‌شعاع a محدود است. مساحت و مرکزوارش را بیابید.

۱۳۶. مطلوب است مختصات مرکز جرم ناحیهٔ محدود به خمهای $y=e^x$، $x=1$، و $y=1$.

۱۳۷. از نقاط واقع بردایره‌ای به‌شعاع a، عمودهایی از صفحهٔ

آن اخراج می‌شوند. طول هرعمود درنقطه‌ای مانند P برابر ks است که s طول قوسی از دایره از $(a,۰)$ تا P و k یك عدد ثابت مثبت است. مطلوب است مساحت رویهٔ حاصل از عمودهای اخراج شده از قوسی که از $(a,۰)$ شروع می‌شود و پس‌از یکبار دورزدن دایره پایان می‌یابد. **شکل ۳۴.۷ را ببینید.**



۳۴.۷ رویهٔ مسألهٔ ۱۳۷.

۱۳۸. ورقه‌ای در ربع اول واقع و به‌خمهای $y=e^x$، $y=۱$، و $x=۱$ محدود است. این ورقه به‌صورت قائم درآب قراردارد و گوشهٔ بالای آن در سطح آب است. خط $y=e$ سطح آب را نشان می‌دهد. مطلوب است نیروی کل وارد بر یکی از وجوه ورقه به‌فرض اینکه وزن مخصوص آب ۶۲٫۵ $\mathrm{lb/ft^۳}$ و x و y برحسب فوت باشند.

۱۳۹. مطلوب است طول قوس $y=\ln x$ از $x=۱$ تا $x=e$.

۱۴۰. مطلوب است مساحت رویه‌ای که از دوران قوس مسألهٔ ۱۳۹ حول محور y ایجاد می‌شود.

۱۴۱. مطلوب است مساحت رویه‌ای که از دوران خم $y=e^x$، $۰\leqslant x\leqslant ۲$ حول محور x ایجاد می‌شود.

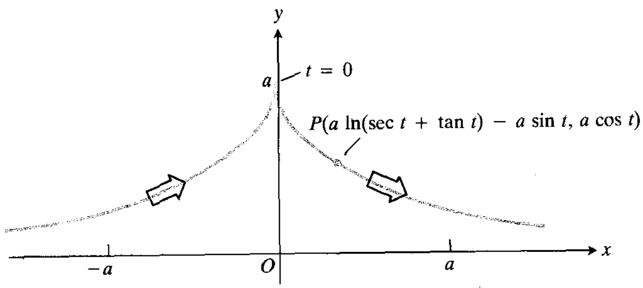
۱۴۲. مطلوب است مساحت رویه‌ای که ازدوران خم $y=\cos x$، $-\pi/۲\leqslant x\leqslant\pi/۲$ حول محور x ایجاد می‌شود.

۱۴۳. ناحیه‌ای در ربع اول واقع و به خم $y=\ln(۱/x)$ و محورهای مختصات محدود است. مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران این ناحیه حول محور x.

۱۴۴. مطلوب است مساحت ناحیهٔ واقع بین محور x و خم

$$x=a\ln(\sec t+\tan t)-a\sin t,\quad y=a\cos t,$$

$-\pi/۲<t<\pi/۲$. شکل ۳۵.۷ را ببینید.



۳۵.۷ خم مسألهٔ ۱۴۴ چون چتری همهٔ محور x را زیرپوشش دارد. پیکانها جهت افزایش t را نشان می‌دهند.

۱۴۵. مطلوب است حجم جسم‌حاصل ازدوران ناحیهٔ مسالهٔ ۱۴۴ حول محور x.

۱۴۶. مطلوب است مساحت رویهٔ حاصل از دوران ناحیهٔ مسألهٔ ۱۴۴ حول محور x.

۱۴۷. آیا انتگرال

$$\int_۱^\infty \frac{\ln x\,dx}{x^۲}$$

همگراست یا واگرا؟

۱۴۸. خمهای زیر را رسم کنید و رفتارآنها را به‌ازای $|x|$های بزرگ شرح دهید.

الف) $y=x-e^x$

ب) $y=e^{(x-e^x)}$

نشان دهید که انتگرالهای‌زیرهمگرایند ومقدارشان را محاسبه کنید.

پ) $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} e^{(x-e^x)}\,dx$

ت) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{(x-e^x)}\,dx$

۱۴۹. مطلوب است محاسبهٔ

$$\lim_{n\to\infty}\int_۰^۱ \frac{ny^{n-۱}}{۱+y}\,dy.$$

۱۵۰. نشان دهید که اگر $p(x)$ یك چندجمله‌ای درجهٔ n باشد، آنگاه

$$\int e^x p(x)\,dx=e^x[p(x)-p'(x)+p''(x)-\cdots+(-۱)^n p^{(n)}(x)].$$

جانشانی $z=\tan(x/2)$

جانشانی

$$z=\tan\frac{x}{2} \qquad (1)$$

مسألهٔ انتگرالگیری از هر تابع گویایی از $\sin x$ و $\cos x$ را به مسألهٔ انتگرالگیری از تابع گویایی از z تبدیل می‌کند. از تابع اخیرهم می‌توان به‌کمك روش کسرهای ساده انتگرال گرفت. بنابراین جانشانی (۱) وسیلهٔ بسیار نیرومندی است، اما استفاده از آن خسته‌کننده است و تنها وقتی به‌کار می‌رود که از سایر روشها کاری بر نیاید.

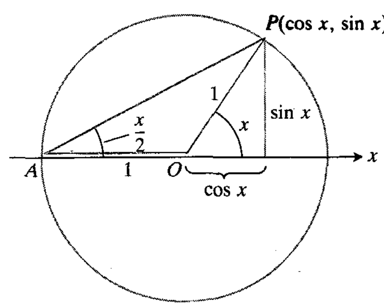
شکل ۳۶۰۷، $\tan(x/2)$ را به‌صورت تابعی گویا از $\sin x$ و $\cos x$ نشان می‌دهد. برای مشاهدهٔ اثر این جانشانی چنین عمل می‌کنیم

$$\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1=\frac{2}{\sec^2(x/2)}-1$$
$$=\frac{2}{1+\tan^2(x/2)}-1$$
$$=\frac{2}{1+z^2}-1$$

یا

$$\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2} \qquad (2)$$

و



۳۶۰۷ رابطهٔ $\tan(x/2)=\dfrac{(\sin x)}{(1+\cos x)}$

از این شکل به‌دست می‌آید. بحث جانشانی $z=\tan(x/2)$ را ملاحظه کنید.

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\,\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}\cdot\cos^2\frac{x}{2}$$
$$=2\tan\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\sec^2(x/2)}$$
$$=\frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$$

یا

$$\sin x=\frac{2z}{1+z^2}\cdot \qquad (3)$$

بالاخره چون $x=2\tan^{-1}z$، داریم

$$dx=\frac{2\,dz}{1+z^2}\cdot \qquad (4)$$

مثال ۱

$$\int\frac{dx}{1+\cos x}=\int\frac{1+z^2}{2}\,\frac{2\,dz}{1+z^2}$$
$$=\int dz=z+C=\tan\frac{x}{2}+C\cdot \quad ■$$

مثال ۲

$$\int\frac{dx}{2+\sin x}=\int\left(\frac{1+z^2}{2+2z+2z^2}\right)\frac{2\,dz}{1+z^2}$$
$$=\int\frac{dz}{z^2+z+1}=\int\frac{dz}{(z+1/2)^2+3/4}$$
$$=\int\frac{du}{u^2+a^2}\qquad\left(u=z+\frac{1}{2},\ a=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a}+C$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}+C$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{1+2\tan(x/2)}{\sqrt{3}}+C\cdot \quad ■$$

انتگرالهای مسائل ۱۵۱–۱۵۸ را به کمك جانشانیهای (۱)–(۴) محاسبه کنید. انتگرالهایی نظیر انتگرالهای مسائل ۱۵۱ و ۱۵۳ درمحاسبات مربوط به‌تعیین سرعت زاویه‌ای متوسط محورخروجی یك مفصل چندسویی (چهارشاخهٔ کاردان) پیش می‌آیند وقتی که

محورهای ورودی و خروجی در یک امتداد نیستند.

۱۵۱. $\int_{\circ}^{\pi} \frac{dx}{۱+\sin x}$

۱۵۲. $\int_{\pi/۲}^{\pi} \frac{dx}{۱-\cos x}$

۱۵۳. $\int \frac{dx}{۱-\sin x}$

۱۵۴. $\int_{\circ}^{\pi/۲} \frac{dx}{۲+\cos x}$

۱۵۵. $\int \frac{\cos x\, dx}{۱-\cos x}$

۱۵۶. $\int \frac{dx}{۱+\sin x+\cos x}$

۱۵۷. $\int \frac{dx}{\sin x-\cos x}$

۱۵۸. $\int_{\pi/۲}^{۲\pi/۳} \frac{dx}{\sin x+\tan x}$

۸

مقاطع مخروطی وسایرخمهای مسطح

چشم‌انداز

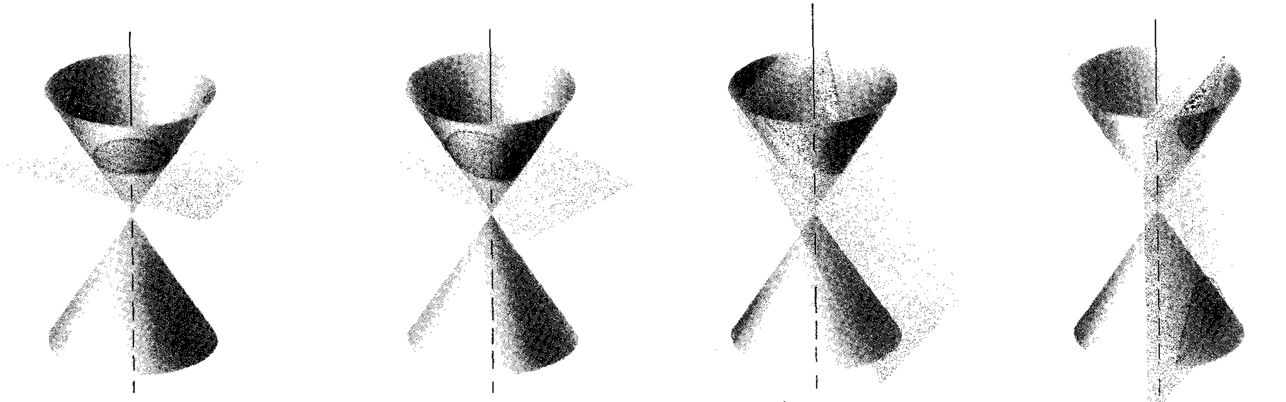
دراین فصل عمدتاً به‌این مطلب می‌پردازیم که مقاطع مخروطی که منشأ آنها هندسهٔ یونانی‌است چگونه امروز به‌صورت نمودارهای معادلات درجهٔ دوم در صفحهٔ مختصات مشخص می‌شوند. یونانیان دوران افلاطون این خمها را به صورت مقاطـع یك صفحه با یك مخروط دوپارچه توصیف می‌کردند، و نام «مقاطع مخروطی» از اینجا آمده‌است. از شکل ۱.۸ برمی‌آیدکه‌این مقاطع گوناگون‌اند. دراواخر فصل با معادلات پارامتری‌مقاطع مخروطی آشنامی‌شویم‌و چرخزاد ودیگرخمهای‌مسطح(واقع درصفحه)خاص‌رامطرح‌می‌کنیم.

استفادهٔ کپلرازمقاطع مخروطی دراثرش تحت عنوان توضیح حرکتهای مریخ در ۱۶۰۹، اثری کـه درآن دو قانـون اولش را عرضه‌کرد (مدارهای بیضوی، مساحتهای برابردر زمانهای برابر)، سبب شدکه برای یافتن ویژگیهایی از مقاطع مخروطی کـه ممکن بود در اخترشناسی مورد استفاده قرار گیرند، این مقاطع مجدداً و به‌طور جدی بررسی شوند. اپتیك هم‌کـه از زمان یونانیان مورد توجه ریاضیدانان بود (کلادیوس بطلمیوس به‌شکست نورپی برده بود، اما چون قانونی نظیر قانون اسنل به‌نظرش نرسید، یافته‌های خـودرا بایك سهمی تقـریب زد)، پس‌از اختـراع تلسکـوپ و میکروسکوپ دراوایل قرن هفدهم توجه بسیار زیادتری را به‌خود جلب کـرد. نتایج حاصل‌از مطالعهٔ عدسی وآینه به‌بـررسی شکل رویهٔ آنها انجامید، و چون این رویه‌ها دورانی‌اند، مطالعهٔ خـم مولد آنهارا درپی داشت. این خمها درمورد بسیاری ازآینه‌هایی که درتلسکوپهای بازتابنده به‌کار می‌روند، مقاطع مخروطی‌اند.

پذیرش این امرکه سیارات به‌دور خورشید می‌چرخنـد (و نه به‌دور زمین) اصول جـدیـدی ازمکانیك را ایجاب کردکـه بتوانند مدار سیارات را، وبه‌طورکلی مسیر اشیایی راکـه تحت تأثیر نیرویی حرکت می‌کنند، توضیح دهند. مطالعاتی‌کـه دراین زمینه به‌عمل‌آمد، به‌بررسی خمهای مسطح، از مسیر سیارات گرفته تا مسیر پرتابه‌ها، منجر شد. قبل‌از قرن هفدهم توپ می‌تـوانست هـدفهایی در فواصل هزاران متری را نشانـه‌گیری‌کنـد، و لذا پیشگویی دقیق مسیرپرتابه به‌طور فزاینده‌ای‌اهمیت یافت. (نپرکه لگاریتم را ابداع کرد، اسلحه‌ای نیز اختراع نمودکه می‌توانست گاوی درفاصلهٔ یك مایلی را بـزنـد. نپر چنان ازدقت این اسلحه وحشت زده شده بود کـه کار تکمیل آن را کنارگـذاشت.) در فصل ۱۳ خواهیم دیدکـه در تقریب اول، مسیر پرتابه یك مقطع مخروطی است.

وقتی ریاضیدانان قرون شانزدهم و هفدهـم به‌مطالعهٔ آثار یونانیان پرداختند، کم‌کم فهمیدندکه روشهای اثبات یونانیان از کلیت برخوردارنیست. همان‌گونه که دربخش ۶.۴ هنگام‌محاسبهٔ مساحت دیدیم، تقریباًهرقضیه‌ای به‌استدلال ومحاسبات خاص خود نیاز داشت. سرانجام، طرز برخورد با مقاطع مخروطی از صورت برخـورد بایك مسألهٔ هنـدسی محض (مقطعهای یـك مخـروط) به‌برخوردی تغییرکردکه درآن، مفاهیم مختصات و فاصلـه مورد توجه بـود. مثلاً در سال ۱۵۷۹، گویدوبالدو دل‌مونته بیضی را بـه‌صورت مجموعـه‌ای از نقاط صفحه تعریف کـردکـه مجموع فواصلشان از دونقطـهٔ ثابت مقـداری ثابت است. (دربخش ۴.۸ ازاین تعریف استفاده خواهیم‌کرد.)

(الف)



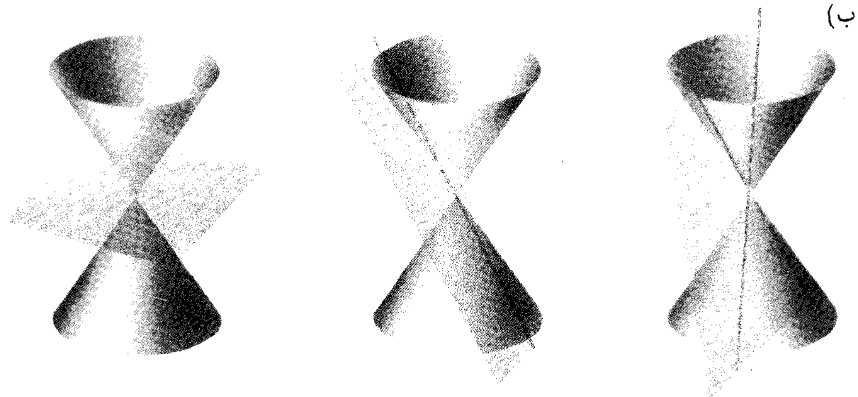
هذلولی: صفحه موازی
با محور مخروط

سهمی: صفحه موازی
با یال مخروط

بیضی

دایره: صفحه عمود
برمحور مخروط

(ب)



یك جفت خط متقاطع: صفحه از رأس
مخروط می‌گذرد و آن را قطع می‌کند

خط تنها: صفحه
مماس برمخروط

نقطه: صفحه فقط از
رأس مخروط می‌گذرد

۱۰۸ (الف) مقاطع مخروطی «متعارف» خمهایی هستند که‌ازتقاطع یك صفحه با یك مخروط دوپارچه به‌دست می‌آیند. درمورد هذلولی، مقطع از دوخم تشکیل می‌شود، نه‌ازیك خم، وهرکدام یك «شاخهٔ» هذلولی نامیده می‌شود. مقاطع مخروطی «تباهیده» که در (ب) نشان داده شده‌اند درصورتی به‌دست می‌آیند که صفحه از رأس مخروط بگذرد.

از نظـر جبری، ما دراین فصل زمینه را بـرای این نتیجهٔ شگفت‌آور مهیا می‌کنیم که نمودار یك معادلهٔ درجهٔ دوم برحسب x و y درصفحه (درصورت وجود) یا یك مقطع مخروطی است یا دوخط متوازی. هیچ شکل دیگری نمی‌تواند نمودار یك معادلـهٔ درجهٔ دوم برحسب x و y باشد.

ازنظـر کاربـرد (و در اینجاست کـه حساب دیفرانسیل و انتگرال وارد صحنه می‌شود)، ریاضیات مقاطع مخروطی درست همان است که برای توصیف مسیر سیارات، ستارگان دنبالـه‌دار، قمرها، اختروارها، ماهواره‌ها، یاهرچیز دیگری که درفضا تحت نیروهای گرانشی حرکت می‌کند، موردنیازاست. وقتی بدانیم که مسیر حرکت یك جسم متحرك یکی‌از مقاطع مخروطی‌است، همان گونه کـه در فصل ۱۲ خـواهیم دیـد، اطلاعات زیادی دربارهٔ سرعتش، شتابش، ونیرویی‌که آن را به‌پیش می‌برد، دراختیارمان قرار می‌گیرد.

اگر از تاریخ خوشتان می‌آیـد، کتاب **اندیشهٔ‌ریـاضی از دوران بـاستان تـا عصر جدیـد**[1] نـوشتهٔ موریس‌کلاین حـاوی مطالب جالبی دربارهٔ مقاطع مخروطی است. مرجع خوب دیگر کتاب **ریاضیات درفرهنگ غرب**[2] نوشتهٔ همین نویسنده است.

۱.۸ معادله‌های حاصل از فرمول فاصله

دراین بخش برای به‌دست‌آوردن معادلات خمهای واقع درصفحهٔ

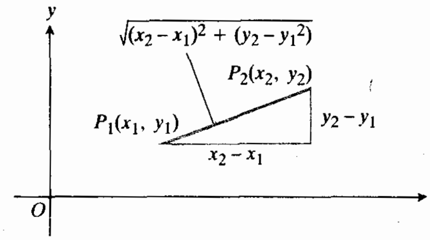
1. Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, (1972).
2. Morris Kline, *Mathematics in Western Culture*, Oxford University Press, (1964).

دکارتی ازفرمول فاصله استفاده می‌کنیم.

همان‌طور که می‌دانید، فاصلهٔ d بین دو نقطهٔ $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$ درصفحه، از روی مختصاتشان به‌وسیلهٔ فرمول

$$d=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲} \qquad (۱)$$

به‌دست می‌آید. این فرمول با استفاده ازقضیهٔ فیثاغورس در مورد مثلث شکل ۲.۸ حاصل می‌شود. همان‌گونه که مثال زیر نشان می‌دهد، این فرمول برای یافتن معادلات خمهایی که مشخصهٔ هندسی آنها به‌یك یاچند فاصله وابسته است، بسیار مفید است.



۲.۸ فاصلهٔ بین دونقطه درصفحه از روی مختصات آنها با فرمول حاصل از قضیهٔ فیثاغورس محاسبه می‌شود.

مثال ۱ برای مجموعهٔ نقاطی چون $P(x, y)$ که فاصلهٔ آنها از مبدأ O وخط $L: x=۴$ برابر باشد، معادله‌ای بنویسید.

حل: فاصلهٔ بین P و L عبارت است از فاصلهٔ عمودی PQ بین $P(x, y)$ ونقطهٔ $Q(۴, y)$ واقع بر L که مختص y آن با مختص y مربوط به P یکی است. (شکل ۳.۸ را ببینید.) پس

$$PQ=\sqrt{(۴-x)^۲+(y-y)^۲}=|۴-x|\,.$$

فاصلهٔ OP برابر است با

$$OP=\sqrt{x^۲+y^۲}\,.$$

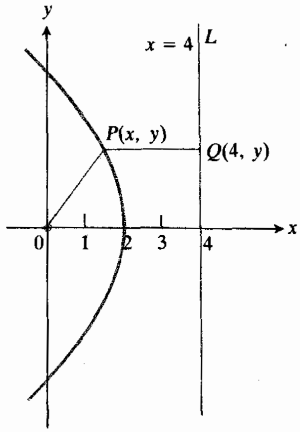
P باید درشرط زیر صدق کند

$$OP=PQ \quad \text{یا} \quad \sqrt{x^۲+y^۲}=|۴-x|. \qquad (۲)$$

اگر (۲) برقرار باشد، از مجذورکردن دوطرف آن معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید که آن هم برقرار است

$$x^۲+y^۲=۱۶-۸x+x^۲$$
$$y^۲=۱۶-۸x\,. \qquad (۳)$$

لذا، اگر نقطه‌ای از O و L به‌یك فاصله باشد، آنگاه مختصاتش باید درمعادلهٔ (۳) صدق کنند.



۳.۸ خم حاصل از حرکت نقطه‌ای چون P که ازمبدأ وخط $x=۴$ به‌یك فاصله است.

این مطلب هم صحیح است که هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ (۳) صدق کنند، از O و L به‌یك فاصله است؛ زیرا اگر

$$y^۲=۱۶-۸x$$

آنگاه

$$\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{x^۲+(۱۶-۸x)}=\sqrt{(x-۴)^۲}$$
$$=|x-۴|=|۴-x|$$

و در نتیجه

$$OP=PQ\,.$$

بنابراین، برای اینکه $P(x, y)$ از O و L به یك فاصله باشد، معادلهٔ (۳) هم شرط لازم و هم شرط کافی را بیان می‌کند. به عبارت دیگر، معادلهٔ (۳) معادله‌ای برای این نقاط همفاصله است. ■

مسأله‌ها

در هریك ازمسائل ۱-۱۱، با استفاده از فرمول فاصله، معادلهٔ مجموعهٔ نقاطی چون $P(x, y)$ را بیابیدکه درشرط داده شده صدق کنند.

۱. فاصلهٔ P از مبدأ واز خط $y=-۴$ یکی باشد.

۲. فاصلهٔ P ازنقطهٔ $(۰, ۱)$ واز خط $y=-۱$ یکی باشد.

۳. فاصلهٔ P از دونقطهٔ $A(-۲, ۱)$ و $B(۲, -۳)$ یکی باشد.

۴. فاصلهٔ P تا $F_۱(-۱, ۰)$ دوبرابر فاصله‌اش تا $F_۲(۲, ۰)$ باشد.

۵. حاصلضرب فاصله‌های P تا $F_1(-2, 0)$ و تا $F_2(2, 0)$، ۴ باشد.

۶. مجموع فاصله‌های P تا $F_1(1, 0)$ و $F_2(0, 1)$ ثابت باشد، و خم ازمبدأ بگذرد.

۷. فاصلهٔ P تا خط $x=-2$ دو برابر فاصله‌اش تا نقطهٔ $(2, 0)$ باشد.

۸. فاصلهٔ P تا $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ برابر باشد با ۲ به‌علاوهٔ فاصلهٔ P تا $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

۹. فاصلهٔ P تا نقطهٔ $(-3, 0)$ برابر باشد با ۴ به‌علاوهٔ فاصلهٔ P تا نقطهٔ $(3, 0)$.

۱۰. فاصلهٔ P تا خط $y=1$ از فاصله‌اش تا مبدأ ۳ واحد کمتر باشد.

۱۱. فاصلهٔ P تا نقطهٔ $(2, 3)$ سه‌واحد باشد.

۱۲. نقاطی ازخط $x-y=1$ را بیابید که فاصله‌شان تا نقطهٔ $(3, 0)$ برابر با ۲ واحد باشد.

۱۳. نقطه‌ای بیابید که ازسه‌نقطهٔ $A(0, 1)$، $B(1, 0)$، و $C(4, 3)$ به‌یک‌فاصله باشد. شعاع دایرهٔ گذرنده از نقاط A، B، و C چیست؟

۲.۸ دایره

در این بخش معادلات دوایر واقع در صفحهٔ مختصات را به‌دست می‌آوریم و نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان مستقیماً از هریک از این معادلات، شعاع و مرکز را یافت.

تعریف

دایره مجموعهٔ نقاطی از یک‌صفحه است که فاصلهٔ آنها از یک نقطهٔ ثابت مفروض درصفحه، مقداری ثابت باشد.

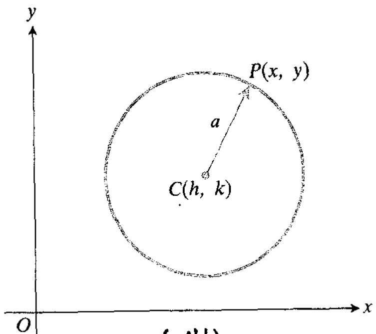
معادلهٔ دایره

فرض‌کنید نقطهٔ ثابت مفروض $C(h, k)$، **مرکز** دایره و فاصلهٔ ثابت a، **شعاع** دایره باشد. نیز فرض‌کنید $P(x, y)$ یکی از نقاط دایره (شکل ۴.۸ الف) باشد. آنگاه

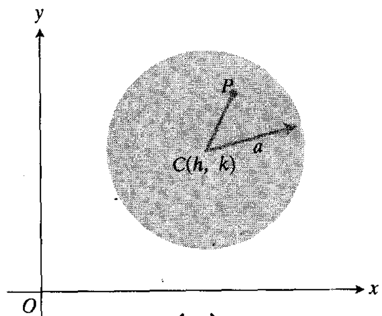
$$CP=a \qquad (1)$$

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=a$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2. \qquad (2)$$



(الف)



(ب)

۴.۸ (الف) $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$. (ب) ناحیهٔ $(x-h)^2+(y-k)^2<a^2$ قسمت درونی دایرهٔ به مرکز $C(h, k)$ و به شعاع a است.

اگر (۱) برقرار باشد، (۲) نیز برقرار است، و اگر (۲) برقرار باشد (۱) هم برقرار است. بنابراین، معادلهٔ (۲) معادله‌ای برای نقاط دایره است.

معادلهٔ متعارف دایرهٔ به شعاع a و به‌مرکز (h, k) عبارت است از

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2. \qquad (3)$$

مثال ۱ معادله‌ای برای دایرهٔ به مرکز مبدأ و به‌شعاع a بیابید.

حل: اگر $h=k=0$، معادلهٔ (۳) به‌صورت زیردرمی‌آید

$$x^2+y^2=a^2. \qquad (4) \quad ■$$

مثال ۲ دایرهٔ مار بر مبدأ و به مرکز $C(2, -1)$ را بیابید.

حل: اگر $(h, k)=(2, -1)$، معادلهٔ (۳) به‌صورت

زیر درمی‌آید

$$(x-۲)^{۲}+(y+۱)^{۲}=a^{۲}.$$

چون دایره ازمبدأ می‌گذرد، $x=y=۰$ باید درمعادله صدق کند. پس

$$(۰-۲)^{۲}+(۰+۱)^{۲}=a^{۲} \quad \text{یا} \quad a^{۲}=۵.$$

لذا معادله عبارت‌است از

$$(x-۲)^{۲}+(y+۱)^{۲}=۵. \qquad \blacksquare$$

مثال ۳ چه نقاط $P(x, y)$یی در نابرابری زیر صدق می‌کنند؟

$$(x-h)^{۲}+(y-k)^{۲}<a^{۲} \qquad (۵)$$

حل: طرف چپ (۵) مربع فاصلهٔ $C(h, k)$ تا $P(x, y)$ است. نابرابری برقرار است اگر و تنها اگر

$$CP<a$$

یعنی، اگر و تنها اگر P درون دایرهٔ به‌شعاع a و با مرکز $C(h, k)$ قرار گیرد (شکل ۴.۸ ب). ■

مثال ۴ مرکز و شعاع دایرهٔ زیررا بیابید

$$x^{۲}+y^{۲}+۴x-۶y=۱۲.$$

حل: جملات برحسب x و برحسب y را به صورت مربع کامل درمی‌آوریم

$$(x^{۲}+۴x+۴)+(y^{۲}-۶y+۹)=۱۲+۴+۹$$

یا

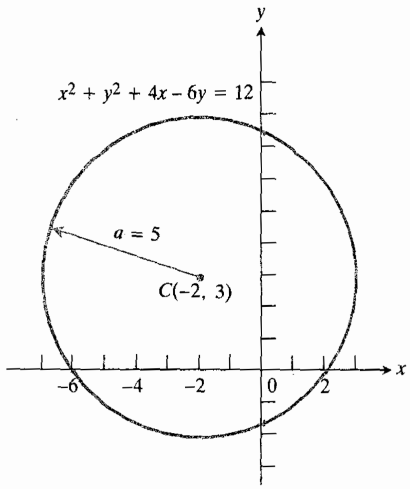
$$(x+۲)^{۲}+(y-۳)^{۲}=۲۵.$$

این همان معادلهٔ (۳) با ضابطهٔ $(h, k)=(-۲, ۳)$ و $a^{۲}=۲۵$ است؛ بنابراین نمایش‌دهندهٔ دایره‌ای است با مشخصات زیر

مرکز: $C(-۲, ۳)$

شعاع: $a=۵$.

شکل ۵.۸ را ببینید.



۵.۸ نمودار $x^{۲}+y^{۲}+۴x-۶y=۱۲$.

معادلهٔ $Ax^{۲}+Ay^{۲}+Dx+Ey+F=۰$، $A\neq ۰$ معادلهٔ به‌صورت

$$Ax^{۲}+Ay^{۲}+Dx+Ey+F=۰, \quad A\neq ۰ \qquad (۶)$$

را می‌توان با کامل کردن مربعات، نظیر آنچه که درمثال ۴ انجام دادیم، به‌صورت معادلهٔ (۳) درآورد. ابتدا (۶) را بر A بخش می‌کنیم و می‌نویسیم

$$\left(x^{۲}+\frac{D}{A}x\right)+\left(y^{۲}+\frac{E}{A}y\right)=-\frac{F}{A}. \qquad (۷)$$

سپس با افزودن عبارات $(D/۲A)^{۲}=D^{۲}/(۴A^{۲})$ و $(E/۲A)^{۲}=E^{۲}/(۴A^{۲})$، مربعها را کامل می‌کنیم. البته اینها را باید به هر دوطرف معادله افزود. لذا داریم

$$\left(x+\frac{D}{۲A}\right)^{۲}+\left(y+\frac{E}{۲A}\right)^{۲}=-\frac{F}{A}+\frac{D^{۲}}{۴A^{۲}}+\frac{E^{۲}}{۴A^{۲}}$$

$$=\frac{D^{۲}+E^{۲}-۴AF}{۴A^{۲}}. \qquad (۸)$$

معادلهٔ (۸) نظیرمعادلهٔ (۳) است که در آن

$$a^{۲}=\frac{D^{۲}+E^{۲}-۴AF}{۴A^{۲}} \qquad (۹)$$

با این شرط که عبارت سمت راست مثبت باشد. پس معادلهٔ (۶) نمایش‌دهندهٔ دایره‌ای است با مشخصات زیر

مرکز: $\left(-\frac{D}{۲A}, -\frac{E}{۲A}\right)$

شعاع: $a=\sqrt{(D^{۲}+E^{۲}-۴AF)/۴A^{۲}}$ (۱۰)

اگر طرف راست معادلهٔ (۹) صفر باشد، خم به یك تك‌نقطه بدل می‌شود. اگر طرف راست معادلهٔ (۹) منفی باشد، هیچ نقطه‌ای ازصفحه در (۸) و یا در (۶) صدق نمی‌کند.

در تحلیل معادلهٔ

$$Ax^۲+Ay^۲+Dx+Ey+F=۰,\quad A\neq ۰ \quad (۱۱)$$

توصیه می‌کنیم به‌جای حفظ کردن فرمول (۱۰)، از روش مذکور درمثال ۴ استفاده کنید. کافی است به‌یاد داشته‌باشید که یك معادلهٔ درجهٔ دوم نظیر (۶) که درآن ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ برابرند و جملهٔ xy وجود ندارد، یك دایره را نمایش می‌دهد (یا یك تك‌نقطه را نمایش می‌دهد، یا هیچ نقطه‌ای را نمایش نمی‌دهد).

اگر معادله (۶) را بر A تقسیم کنیم، معادله‌ای به‌صورت

$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰ \quad (۱۲)$$

به‌دست می‌آید که در آن a، b، و c ثابت‌اند. ثابتهای a، b، و c را غالباً می‌توان از مفروضات هندسی به‌دست آورد. مثلاً، ممکن‌است بدانیم که دایره ازسه‌نقطهٔ مشخص (غیرواقع بر یك‌خط) می‌گذرد، یا اینکه مماس بر سه‌خط مفروض‌است که هرسه از یك نقطه نمی‌گذرند، یا اینکه از یك نقطهٔ مفروض می‌گذرد و بر دوخط داده‌شده‌ای که از این نقطه نمی‌گذرند، مماس است.

مثال ۵ برای دایرهٔ مار بر سه‌نقطهٔ (۸, ۰)، (۰,۶)، و (۰, ۰) معادله‌ای بنویسید.

حل: درمعادلهٔ (۱۲) مختصات این سه‌نقطه را قرارمی‌دهیم و سه معادله به‌دست می‌آوریم که از حل آنها a، b، و c به‌دست می‌آیند:

$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$$

$$(۸,۰):\quad ۶۴+۰+۸a+۰+c=۰ \quad (۱۳)$$

$$(۰,۶):\quad ۰+۳۶+۰+۶b+c=۰ \quad (۱۴)$$

$$(۰,۰):\quad ۰+۰+۰+۰+c=۰. \quad (۱۵)$$

ازمعادلهٔ (۱۵)، $c=۰$ به‌دست می‌آید. با قراردادن $c=۰$ در معادلات (۱۳) و (۱۴) داریم

$$۶۴+۸a=۰ \qquad ۳۶+۶b=۰$$

$$a=-۸ \qquad b=-۶.$$

معادلهٔ مطلوب، معادلهٔ (۱۲) به‌ازای $a=-۸$، $b=-۶$، و $c=۰$ است

$$x^۲+y^۲-۸x-۶y=۰. \quad ■$$

مسأله‌ها

درمسائل ۱-۴، دایرهٔ به‌مرکز $C(h,k)$ و شعاع a را بیابید.

۱. $C(۰,۲),\quad a=۲$

۲. $C(-۲,۰),\quad a=۳$

۳. $C(۳,-۴),\quad a=۵$

۴. $C(۱,۱),\quad a=\sqrt{۲}$

۵. یك نابرابری بنویسید که نقاط درون دایرهٔ به‌مرکز $C(-۲,-۱)$ و به‌شعاع $a=\sqrt{۶}$ را توصیف‌کند.

۶. یك نابرابری بنویسید که‌نقاط بیرون‌دایرهٔ به‌مرکز $C(-۴,۲)$ و به‌شعاع $a=۴$ را توصیف‌کند.

در مسائل ۷-۱۶، مرکز و شعاع دایرهٔ مفروض را بیابید. سپس دایره را رسم کنید. (راهنمایی برای رسم دایره: ابتدا دایره را رسم، و مرکز آن را مشخص‌کنید. سپس با استفاده از این مرکز و شعاع جای محورهای مختصات را تعیین، وآنها را رسم‌کنید.)

۷. $x^۲+y^۲=۱۶$

۸. $x^۲+y^۲+۶y=۰$

۹. $x^۲+y^۲-۲y=۳$

۱۰. $x^۲+y^۲+۲x=۸$

۱۱. $x^۲+۴x+y^۲=۱۲$

۱۲. $۳x^۲+۳y^۲+۶x=۱$

۱۳. $x^۲+y^۲+۲x+۲y=-۱$

۱۴. $x^۲+y^۲-۶x+۲y+۱=۰$

۱۵. $۲x^۲+۲y^۲+x+y=۰$

۱۶. $۲x^۲+۲y^۲-۲۸x+۱۲y+۱۱۴=۰$

درمسائل ۱۷ و ۱۸، چه‌نقاطی درنابرابری صدق‌می‌کنند؟

۱۷. $x^۲+y^۲+۲x-۴y+۵\leqslant ۰$

۱۸. $x^۲+y^۲+۴x+۴y+۹\geqslant ۰$

۱۹. برای دایرهٔ گذرنده از نقطهٔ (۴,۵) و به‌مرکز (۲, ۲) معادله‌ای بیابید.

۲۰. برای‌دایرهٔ گذرنده‌ازنقاط (۰, ۰) و (۶, ۰) و مماس برخط $y=-۱$ معادله‌ای بنویسید.

۲۱. برای دایرهٔ به‌مرکز (۱ ,۱ −) که برخط $x+2y=4$ مماس باشد، معادله‌ای بنویسید.

۲۲. برای دایرهٔ گذرنده از نقاط $(0, 0)$ و $(17, 7)$ که مرکزش برخط $12x-5y=0$ قرار داشته‌باشد، معادله‌ای بنویسید.

۲۳. برای دایرهٔ گذرنده از نقاط $(2, 3)$، $(3, 2)$، و $(-4, 3)$ معادله‌ای بنویسید.

۲۴. برای دایرهٔ گذرنده از نقاط $(1, 0)$، $(0, 1)$، و $(2, 2)$ معادله‌ای بنویسید.

۲۵. برای دایرهٔ گذرنده از نقاط $(7, 1)$، $(0, 0)$، و $(-1, 7)$ معادله‌ای بنویسید. مرکز و شعاع این دایره را بیابید.

۲۶. آیا نقطهٔ (۱ر۳ ,۱ر۰) درون دایرهٔ

$$x^2+y^2-2x-4y+3=0$$

واقع است، یا بیرون آن یا روی آن؟ چرا؟

۲۷. اگرفاصلهٔ نقطهٔ $P(x, y)$ تا نقطهٔ $(6, 0)$ دوبرابر فاصله‌اش تا نقطهٔ $(3, 0)$ باشد، نشان‌دهید که P بریك‌دایره واقع‌است. مرکز و شعاع این‌دایره را بیابید.

۲۸. مجموع مجذورات فواصل نقطهٔ $P(x, y)$ تا دونقطهٔ $A(-5,2)$ و $B(1, 4)$ برابر با ۵۲ است. نشان‌دهید که مکان P دایره‌ای است که مرکزش وسط پاره‌خط AB است. آیا A و B، درون این دایره واقع‌اند یا بیرون‌آن یا روی‌آن؟

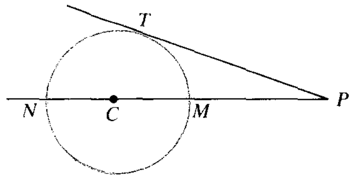
۲۹. مطلوب‌است ابعاد مستطیلی با بیشترین‌مساحت که درون‌بخش کوچکترحاصل از تقاطع دایرهٔ $x^2+y^2=36$ با خط $x=1$ جای می گیرد. فرض‌کنید‌که یکی‌از اضلاع این مستطیل در امتداد خط مفروض قرارداشته باشد.

۳۰. مطلوب‌است طول قاعدهٔ بالایی‌ذوزنقه‌ای با بیشترین‌مساحت که دریك نیمدایره به‌شعاع a محاط می‌شود، با این شرط که قاعدهٔ پایینی‌آن روی قطر نیمدایره قرار داشته باشد. مساحت ذوزنقه را بیابید.

۳۱. به‌طریق هندسی نشان دهید که طول s هر یك از خطوطی که از یك نقطهٔ (x_1, y_1) واقع در بیرون دایرهٔ $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ بر دایره مماس شود، در معادلهٔ $s^2=(x_1-h)^2+(y_2-k)^2-a^2$ صدق می کند.

۳۲. نشان دهید که خط عمود بردایرهٔ $x^2+y^2=a^2$ درنقطهٔ دلخواه (x_1, y_1) ازمبدأ می گذرد.

۳۳. در شکل ۶.۸ خط PT درنقطهٔ T بردایره مماس‌است، و خط ماربرنقاط P و مرکزدایره، C، دایره را درنقاط M و N قطع می کند. ثابت کنیدکه $(PM)(PN)=(PT)^2$.



۶.۸ دایره و خطوط مذکور در مسألهٔ ۳۳.

۳۴. می‌دانیم که هرزاویهٔ محاط دریك نیمدایره یك‌زاویهٔ قائمه است. عکس این مطلب را ثابت‌کنید: نشان دهیدکه اگر به‌ازای هرنقطهٔ $P(x, y)$ واقع بر یك خم C که O و A را به هم وصل می کند زاویهٔ OPA یك زاویهٔ قائمه باشد، آنگاه خم یك دایره به قطر OA است.

TOOLKIT PROGRAMS

Conic Sections   Super * Grapher

۳.۸ سهمی

دراین بخش، معادلات سهمیهایی‌را به‌دست‌می‌آوریم‌که محورشان با یکی‌از محورهای مختصات موازی‌است، و نشان‌می‌دهیم چگونه می‌توان کانونها و هادیهای این سهمیها را مستقیماً از این معادلات به‌دست‌آورد. همچنین توضیح می‌دهیم‌که چرا آینه‌های سهموی بازتابنده‌های خوبی هستند و نیز نشان می‌دهیم با کمك نخ‌ـ‌ابزار مورد استفادهٔ کپلر برای رسم سهمی‌ـ چگونه می توان سهمی رسم کرد.

تعریف

سهمی مجموعهٔ نقاطی ازصفحه است‌که از یك‌نقطه و یك‌خط ثابت مفروض درصفحه به‌یك فاصله باشند.

نقطهٔ ثابت را **کانون** سهمی و خط ثابت را **هادی** آن می‌نامند.

اگرکانون F برهادی L واقع باشد، آنگاه سهمی چیزی جزخط عمود بر L وگذرنده از F نیست. این‌حالت، حالت تباهیدهٔ سهمی است.

سهمیهایی‌که روبه‌بالا باز می‌شوند

اگر F بر L قرار نداشته باشد، محور y مثبت را چنان انتخاب می کنیم که‌از F بگذرد و بر L عمود باشد. مبدأ را درنیمه‌راه F و L اختیارمی کنیم و بدین ترتیب دستگاه مختصاتی به‌دست‌می‌آوریم

که معادلهٔ سادهای برای سهمی بهدست میدهد. اگر فاصلهٔ بین F و L، $2p$ فرض شود، آنگاه F نقطهٔ $(0, p)$ و L خط $y=-p$ خواهد بود. شکل ۷.۸ را ببینید.

بـا توجه به نمادهای شکل ۷.۸ ، نقطهٔ $P(x, y)$ برسهمی قراردارد اگروتنها اگر فواصل PF و PQ برابر باشند

$$PF=PQ. \qquad (1)$$

بنا برفرمول فاصله داریم

$$PF=\sqrt{x^2+(y-p)^2} \quad \text{و} \quad PQ=\sqrt{(y+p)^2}.$$

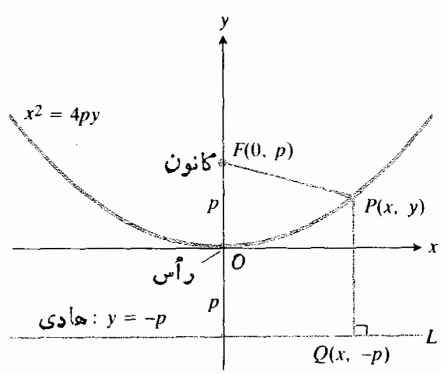
با برابرقراردادن این دوعبارت، مجذورکردن‌حاصل، و ساده کردن نتیجه داریم

$$\underline{\overline{x^2=4py.}} \quad \text{(روبه‌بالا باز می‌شود)} \qquad (2)$$

هرنقطه از سهمی درمعادلهٔ فوق صدق می کند. به عکس، اگر (۲) برقرار باشد، آنگاه

$$PF=\sqrt{x^2+(y-p)^2}=\sqrt{4py+(y^2-2py+p^2)}$$
$$=\sqrt{(y+p)^2}=PQ$$

یعنی $P(x, y)$ برسهمی قـرار می گیرد. خلاصه، نمودار معادلـهٔ $x^2=4py$ سهمی است.



۷.۸ سهمی $x^2=4py$. توجه کنید که یک‌سهمی همواره ازمیان کانون و هادی‌اش می گذرد.

محور و راس

چون در معادلـهٔ (۲) ، p مثبت است، (اگر x عددی حقیقی باشد) y نمی‌تواند منفی بـاشد، و این خم هیچگاه زیرمحور x قـرار نمی گیرد.

این خم نسبت به محور y متقارن است زیرا نمای x زوج است.

محور تقارن سهمی را **محور** سهمی می‌نامند. نقطه‌ای کـه روی این محور قرار داشته، و درنیمه‌راه کانون و خط هادی باشد نقطه‌ای ازسهمی است، زیرا فاصله‌اش ازکانون وهادی یکی است. این نقطه، **رأس سهمی** نـام دارد. درشکل ۷.۸ مبدأ، رأس سهمی است. خط مماس برسهمی در رأس، بـا هادی موازی است. از معادلـهٔ (۲) درمی‌یـابیم کـه شیب مماس در هـر نقطهٔ دلخواه، $dy/dx=x/2p$ است که درمبدأ صفراست.

مثال ۱ کانون و هادی سهمی زیررا بیابید

$$x^2=8y. \qquad (3)$$

حل: شکل ۸.۸ را ببینید. از مقایسهٔ معادلهٔ (۳) بـا معادلهٔ (۲) داریم

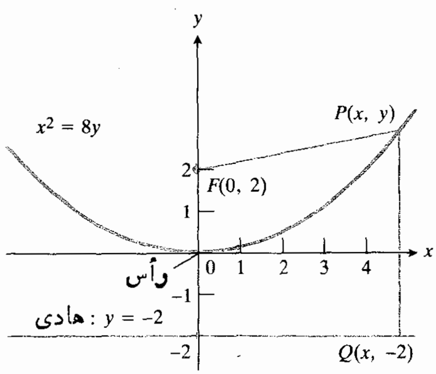
$$4p=8, \quad p=2.$$

کانون برمحور y و به فاصلهٔ $p=2$ واحد از رأس قـرار دارد، یعنی، داریم

$$\text{کانون:} \qquad F(0, 2)$$

هادی $y=-p$ خط $y=-2$ است

$$\text{هادی:} \qquad y=-2$$

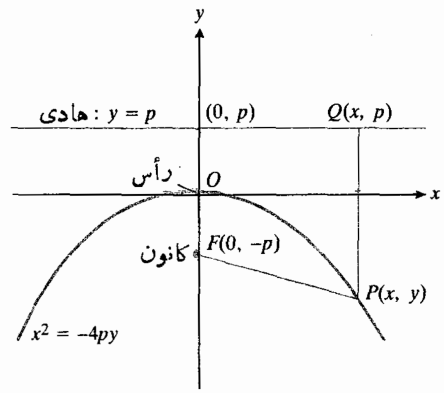


۸.۸ سهمی $x^2=8y$. ■

سهمیهایی که روبه‌پایین باز می‌شوند

اگر سهمی مطابق شکل ۹.۸ روبه پـایین باز شود و کانونش در $F(0, -p)$ و هادی‌اش $y=p$ باشد، آنگاه‌معادلهٔ (۲) به‌صورت زیر درمی آید

$$\underline{\overline{x^2=-4py.}} \quad \text{(روبه‌پایین باز می‌شود)} \qquad (4)$$



۹.۸ سهمی $x^{۲}=-۴py$.

سهمیهایی که روبه‌راست یا روبه‌چپ باز می‌شوند

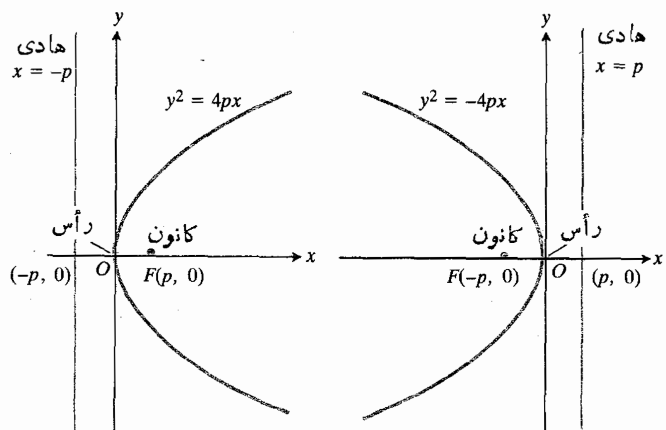
اگـر نقش x و y را درمعادلات (۲) و (۴) بـا هم عوض کنیم، معادلات حاصل

$$y^{۲}=۴px \qquad \text{(روبه‌راست باز می‌شود)} \qquad (۵\ \text{الف})$$

و

$$y^{۲}=-۴px \qquad \text{(روبه‌چپ باز می‌شود)} \qquad (۵\ \text{ب})$$

نیزسهمیهایی را نمایش می‌دهند (شکل ۱۰.۸). این سهمیها نسبت به‌محور x متقارن‌اند زیرا y تنها با یك توان زوج ظاهر می‌شود. بازهم رأس درمبدأ است. هادی برمحور تقارن عمود، و فاصلهٔ آن تـا رأس p واحد است. کانون برمحور تقارن و در «درون» خم قرار دارد، و فاصله‌اش تـا رأس p واحد است. سهمی (۵ الف) روبه‌راست باز می‌شود زیرا x نبایدکمتر از صفر باشد، حال آنکه سهمی (۵ ب) روبه‌چپ باز می‌شود.



(الف) (ب)

۱۰.۸ (الف) سهمی $x^{۲}=۴px$، (ب) سهمی $y^{۲}=-۴px$.

انتقال محورها

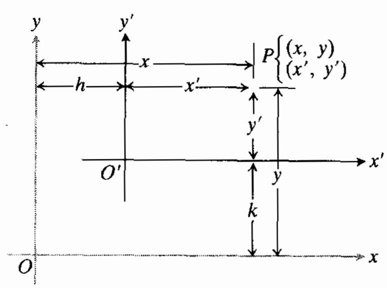
اگر رأس سهمی درنقطه‌ای غیر ازمبدأ مانند $V(h, k)$ واقع باشد، معادلات (۲)، (۴)، و (۵) دیگربه‌کارنمی آیند. اما، بادرنظر گرفتن دستگاه مختصات جدیدی کـه مبدأ آن O' در V واقـع بـاشد و محورهایش موازی با محورهای اصلی باشند، می‌توان به‌معادلات مناسبی برای سهمی‌دست یافت. دراین‌صورت، هرنقطه چون P از صفحه دودسته مختصات دارد، مثلاً (x, y) در دستگـاه اصلی، و (x', y') در دستگاه جدید. بـرای اینکه از O به P برویم، یك انتقال افقی به‌انـدازهٔ x، و سپس یك انتقال قائم به‌انـدازهٔ y انجام می‌دهیم. مقدار x از دوانتقال افقی به‌دست‌می‌آید: h برای رسیدن از O به O' و x' برای‌رسیدن از O' به P (شکل۱۱.۸). به‌همین‌ترتیب، y از دوانتقال قائم به‌دست‌می‌آید: k برای‌رسیدن از O به O' و y' بـرای رسیدن از O' به P. پس ایـن دو دسته مختصات با معادلات زیر به‌هم مربوط می‌شوند

$$\begin{cases} x=x'+h \\ y=y'+k \end{cases} \qquad (۶\ \text{الف})$$

یا

$$\begin{cases} x'=x-h \\ y'=y-k \text{.} \end{cases} \qquad (۶\ \text{ب})$$

معادلات (۶) را معادلات **انتقال محورها** می‌نامند زیرا محورهای مختصات جدید را می‌توان بـا انتقال محورهـای مختصات قدیم به‌دست‌آورد.

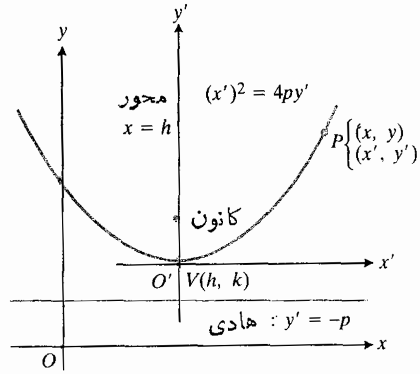


۱۱.۸ انتقال محورهای مختصات. تـوجه کنید که $x=h+x'$ و $y=k+y'$. x' و y' را به‌دست‌می‌آوریم: $x'=x-h$، $y'=y-k$.

حال فرض‌کنید یك‌سهمی با رأس $V(h, k)$ نظیرشکل ۱۲.۸ داده شده باشد کـه روبه بـالا بـاز شود. معادلهٔ (۲) در دستگاه مختصات $x'O'y'$ معادلهٔ سهمی‌را به‌صورت

$$(x')^{۲}=۴py' \qquad (۷)$$

به‌دست می‌دهد. با استفاده از معادلات (۶ الف)، معادلـهٔ اخیر در



۱۲۰۸ یک سهمی با رأس $V(h, k)$ که رو به بالا باز می‌شود.

دستگاه مختصات xOy به‌صورت معادلهٔ زیر درمی‌آید

(۸ الف) $$(x-h)^{2}=4p(y-k).$$

محور سهمی (۸ الف) خط $x=h$ است. معادلهٔ این خط از مساوی صفر قرار دادن جملهٔ درجهٔ دوم $(x-h)^2$ مذکور در (۸ الف) به‌دست می‌آید. کانون بر محور تقارن و p واحد بالاتر از رأس، در $x=h$، $y=k+p$، واقع است. هادی p واحد پایینتر از رأس و عمود بر محور تقارن است؛ لذا معادله‌اش $y=k-p$ است.

صورتهای دیگر معادلات سهمی همراه با معادلهٔ (۸ الف) در فهرست زیر آمده‌اند.

معادلات متعارف سهمیهای با رأس (h, k) و محوری که با یکی از محورهای مختصات موازی است

(۸ الف) (رو به بالا باز می‌شود) $(x-h)^{2}=4p(y-k)$

(۸ ب) (رو به پایین باز می‌شود) $(x-h)^{2}=-4p(y-k)$

(۸ پ) (رو به راست باز می‌شود) $(y-k)^{2}=4p(x-h)$

(۸ ت) (رو به چپ باز می‌شود) $(y-k)^{2}=-4p(x-h)$

p برابر است با فاصلهٔ کانون تا رأس یا فاصلهٔ رأس تا هادی

سهمیهای (۸ الف) و (۸ ب) نسبت به خط $x=h$ و سهمیهای (۸ پ) و (۸ ت) نسبت به خط $y=k$ متقارن‌اند.

مثال ۲ معادلهٔ سهمیی به رأس $V(-1, 2)$ و کانون $F(3, 2)$ را بیابید. هادی آن چیست؟

حل: چون سهمی رو به راست باز می‌شود، از معادلهٔ (۸ پ) به‌ازای $h=-1$ و $k=2$ استفاده می‌کنیم

$$(y-2)^{2}=4p(x+1).$$

عدد p فاصلهٔ بین V و F است، پس

$$p=\sqrt{(-1-3)^{2}+(2-2)^{2}}=\sqrt{(-4)^{2}+(0)^{2}}=4.$$

معادلهٔ مطلوب عبارت است از

$$(y-2)^{2}=4(4)(x+1) \quad \text{یا} \quad (y-2)^{2}=16(x+1).$$

هادی خط قائمی است که به‌فاصلهٔ p واحد درسمت چپ رأس $(-1, 2)$ قرار دارد. چون $p=4$، هادی خط $x=-5$ است. ■

مثال ۳ برای سهمی با رأس $V(1, 2)$ و هادی $y=3$، معادله‌ای بیابید. مختصات کانون آن چه هستند؟

حل: چون سهمی رو به پایین باز می‌شود، از معادلهٔ (۸ ب) به‌ازای $h=1$ و $k=2$ استفاده می‌کنیم

$$(x-1)^{2}=-4p(y-2).$$

عدد p، فاصلهٔ بین رأس $(1, 2)$ و هادی $y=3$، برابر است با

$$p=3-2=1.$$

معادلهٔ مطلوب چنین است

$$(x-1)^{2}=-4(y-2).$$

کانون به فاصلهٔ $p=1$ واحد در پایین رأس $(1, 2)$، در نقطهٔ $F(1, 1)$ قرار دارد. ■

تبدیل معادلهٔ سهمی به‌صورت متعارف

ویژگی اصلی معادلهٔ یک سهمی واقع در صفحهٔ xy که محورش موازی با یکی از محورهای مختصات است، این است که نسبت به یکی از مختصها خطی، و نسبت به دیگری از درجهٔ دوم است. هرگاه چنین معادله‌ای در دست باشد، می‌توانیم با طی کردن مراحل زیر آن را به یکی از چهار صورت متعارف معادلهٔ (۸) درآوریم:

۱. جملات مربوط به مختصی را که به‌صورت درجهٔ دوم ظاهر می‌شود، به‌صورت مربع کامل درمی‌آوریم.

۲. بقیهٔ جملات را به‌صورت $\pm 4p(x-h)$ یا $\pm 4p(y-k)$، که p مثبت است، می‌نویسیم.

رأس سهمی، فاصلهٔ رأس تا کانون، محور تقارن، و جهت باز شدن را طبق معمول می‌توان از صورت متعارف به‌دست آورد.

مثال ۴ رأس، محور، کانون، و هادی سهمی زیر را بیابید

$$y^{2}-2y-12x-23=0.$$

حل: این‌معادله نسبت به y ازدرجهٔ دوم ونسبت به x خطی است. معادله را به‌صورت زیرمی‌نویسیم

$$y^2-2y=12x+23$$

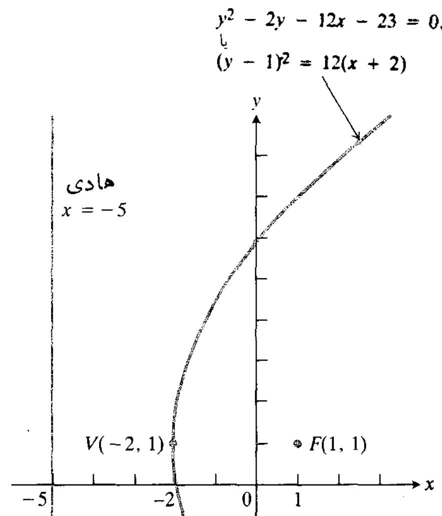
وباافزودن $1=(-2/2)^2$ به‌دوطرف، طرف‌راست‌را به‌صورت مربع‌کامل درمی‌آوریم. درنتیجه

$$y^2-2y+1=12x+24 \quad \text{یا} \quad (y-1)^2=12(x+2).$$

معادلهٔ اخیر به‌صورت

$$(y-k)^2=4p(x-h)$$

است کـه در آن $h=-2$ ، $k=1$ ، و $p=3$. پس رأس، $V(-2,1)$ است. محور سهمی خـط $y=k$ یا $y=1$ است. سهمی روبه‌راست بازمی‌شود زیرا برای اینکه y حقیقی بـاشد، x باید درنابرابری $(x+2)\geqslant 0$ یا $x\geqslant -2$ صدق‌کند. کانون به‌فاصلهٔ ۳ واحد درطرف راست رأس $(-2,1)$، یعنی در نقطهٔ $F(1,1)$ است. هادی‌خطی‌است موازی با محور y که به‌فاصلهٔ p واحد درسمت چپ رأس $(-2,1)$ واقـع است. چون $p=3$، هادی خط $x=-5$ است. شکل ۱۳.۸ را ببینید.

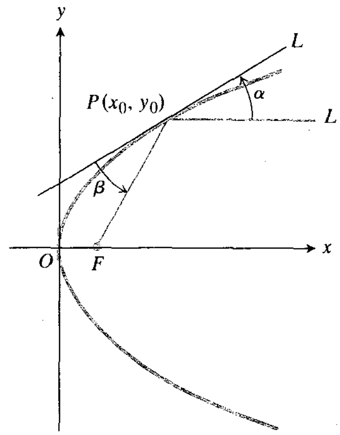


۱۳.۸ سهمی $y^2-2y-12x-23=0$ مذکور درمثال ۴.

■

ویژگی بازتابندگی سهمیها

کاربرد عمدهٔ سهمی بـازتاباندن نـور و امواج رادیـویی است. پرتوهایی‌که ازکانون سهمی‌ساطع‌شوند، موازی با محور ازسهمی خارج می‌شوند، و پرتوهایی‌که موازی بـا محور به‌سهمی بتابند، درکانون جمع می‌شوند. شکل ۱۴.۸ دلیل این‌امر را نشان‌می‌دهد. خط L برسهمی مماس، F کانـون، و پرتو PL' بـا محور سهمی موازی است. چون α و β برابرند (مسألهٔ ۳۴)، هرپرتوی‌که از F به‌P بتابد درامتداد PL' خارج‌می‌شود. به‌همین‌ترتیب،هرپرتوی که درامتداد PL' به‌سهمی بتابد، به‌طرف F بازمی‌تابد.

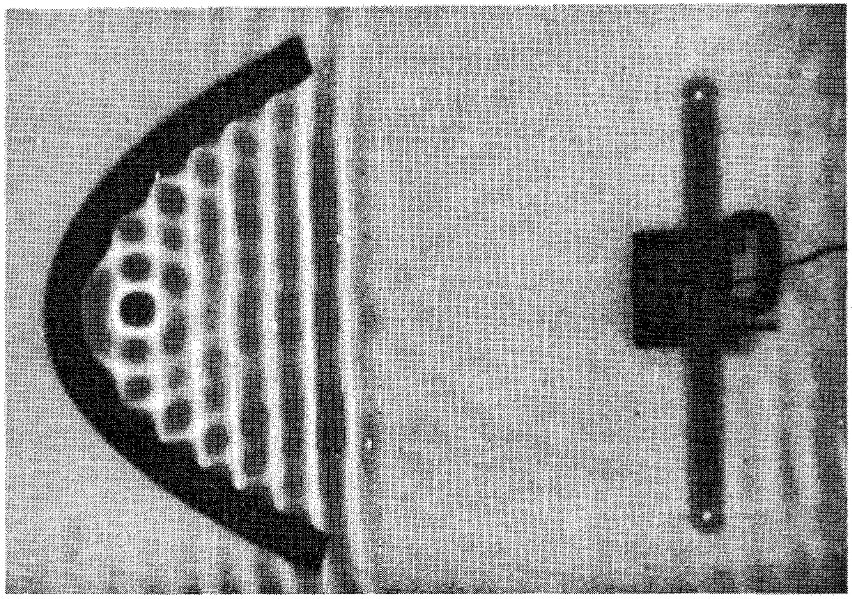


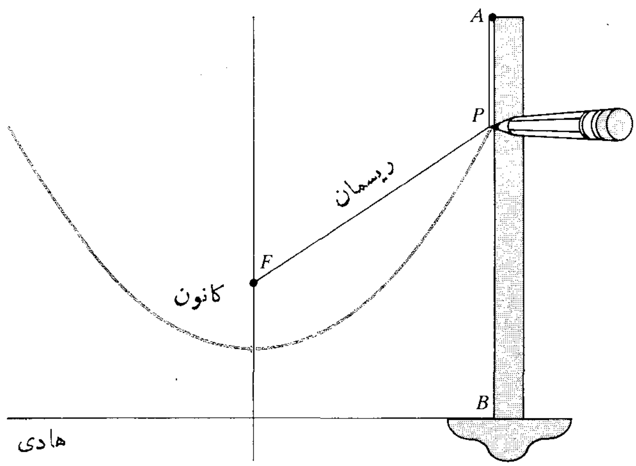
۱۴.۸ بازتابندهٔ سهموی تمام پرتوهای نور ساطع شده ازکانون را موازی با محور سهمی به‌خارج بازمی‌تاباند.

درآینه‌های سهموی تلسکوپ، درچراغهای جلو اتـومبیل، درانواع چراغهای‌جستجو، درآنتنهای‌سهموی رادار و میکروویو، و درگیرنده‌های «بشقابی» تلویزیون از این‌ویژگی‌استفاده‌می‌شود.

ترسیم سهمی به‌روش کپلر

برای رسم سهمی به‌روش‌کپلر (با ابزارهای جدید) باید ریسمانی به‌طول یك‌خطکش $\top$ ونیز میزی داشت‌که لبهٔ آن بتواند به‌عنوان هادی سهمی به‌کاررود. طبق شکل ۱۵.۸، یك‌طرف ریسمان را در نقطه‌ای‌که می‌خواهیدکانون سهمی باشد محکم‌کنید و طرف‌دیگرش را به‌انتهای خطکش $\top$ وصل‌کنید. سپس در حالی‌که ریسمان را با مدادی درامتداد خطکش $\top$ نگه‌می‌دارید، خطکش‌را درامتداد لبهٔ میز حرکت دهید. مداد حین حـرکت یك سهمی رسم می‌کند: PF همواره با PB برابراست زیرا طول‌خط ثابت است ومقدار آن AB است.





۱۵۰۸ نحوهٔ استفادهٔ کپلر از ریسمان برای رسم سهمی.

کاربرد

سطح مایع در یك استوانهٔ قائم که با آهنگ ثابت می‌چرخد، سهموی‌شکل است. اما، کوششهایی که برای ساختن تلسکوپ از دوران‌دادن جیوه به‌عمل‌آمده ناموفق بوده است، زیرا بدون حرکت نگاه داشتن سطح به‌طوری‌که واقعاً صاف باشد مشکلاتی دارد.

مسأله‌ها

در هر یك از مسائل ۱-۸ رأس V و کانون F یك سهمی داده شده‌اند. معادلات سهمی و هادی آن را بیابید. سپس سهمی را بکشید، و کانون، رأس و هادی‌اش را مشخص کنید.

۱. $V(۰, ۰)$, $F(۰, ۲)$

۲. $V(۰, ۰)$, $F(-۲, ۰)$

۳. $V(۰, ۰)$, $F(۰, -۴)$

۴. $V(۰, ۰)$, $F(۴, ۰)$

۵. $V(-۲, ۳)$, $F(-۲, ۴)$

۶. $V(۰, ۳)$, $F(-۱, ۳)$

۷. $V(-۳, ۱)$, $F(۰, ۱)$

۸. $V(۱, ۳)$, $F(۱, ۰)$

درهریك ازمسائل ۹-۱۴، رأس و هادی یك‌سهمی داده شده‌اند. معادلهٔ سهمی و مختصات‌کانونش را بیابید. سپس سهمی را بکشید، و کانون، رأس، و هادی‌اش را مشخص کنید.

۹. $V(۲, ۰)$، محور y

۱۰. $V(۱, -۲)$، محور x

۱۱. $V(-۳, ۱)$، خط $x = ۱$

۱۲. $V(-۲, -۲)$، خط $y = -۳$

۱۳. $V(۰, ۱)$، خط $x = -۱$

۱۴. $V(۰, ۱)$، خط $y = ۲$

در مسائل ۱۵-۲۶ ، رأس، محور، کانون، و هادی سهمی مفروض

را بیابید. سپس سهمی را رسم کنید، و این‌مشخصات را روی‌شکل نشان دهید.

۱۵. $y^۲=۸x$

۱۶. $y^۲=-۳۶x$

۱۷. $x^۲=۱۰۰y$

۱۸. $x^۲=-۹y$

۱۹. $x^۲-۲x+۸y-۷=۰$

۲۰. $x^۲+۸x-۴y+۴=۰$

۲۱. $y^۲+۴x-۸=۰$

۲۲. $x^۲+۸y-۴=۰$

۲۳. $x^۲+۲x-۴y-۳=۰$

۲۴. $x^۲+۲x+۴y-۳=۰$

۲۵. $y^۲-۴y-۸x-۱۲=۰$

۲۶. $y^۲+۶y+۲x+۵=۰$

۲۷. چه نواحیی از صفحه درنابرابریهای $y^۲ > x$ و $x > y^۲$ صدق می‌کنند؟ شکل بکشید.

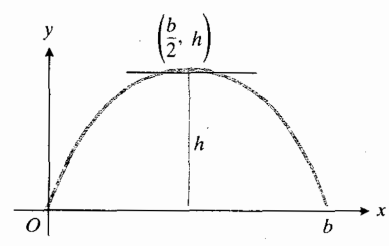
۲۸. چه‌نواحیی‌ازصفحه درنابرابریهای $x^۲ < ۸y$ و $x^۲ > ۸y$ صدق می‌کنند؟ شکل بکشید.

۲۹. نشان دهیدکه مماسهایی‌که از هرنقطهٔ خط $x=-p$ برخم $y^۲=۴px$ رسم شوند برهم عمودند.

۳۰. فرمول ارشمیدس در مورد مساحت ناحیهٔ محدود به یک طاق سهموی.

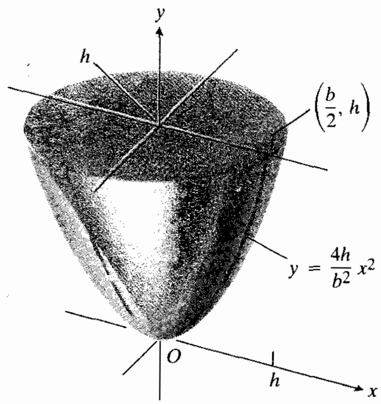
الف) معادلهٔ طاق سهموی شکل ۱۶.۸ را که قاعدهٔ آن b و ارتفاع آن h است، بیابید.

ب) نشان دهید کــه مساحت ناحیهٔ محصور بین این طاق و محور x عبارت است از $(۲/۳)bh$.



۱۶.۸ طاق سهموی مذکور درمسألهٔ ۳۰.

۳۱. فرمول ارشمیدس در مورد حجم یك جسم سهموی. ناحیهٔ محدود به‌سهمی $y=(۴h/b^۲)x^۲$ وخط $y=h$ را حول محور y دوران می‌دهیم تا جسمی به‌دست آید. نشان دهیدکه حجم این‌جسم ۳/۲ برابرحجم مخروط محاطی است. شکل ۱۷.۸ را ببینید.



۱۷.۸ مخروط و جسم سهموی مــذکور در مسألهٔ ۳۱.

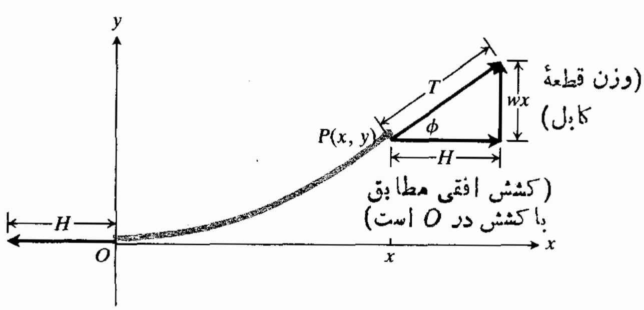
۳۲. کابل پل معلق. شرط تعادل برای قطعهٔ OP از کابلی‌که وزن یکنواخت w کیلوگرم برهــرمتر، درامتداد افق، را تحمل می‌کند (شکل ۱۸.۸) عبارت است از

$$\frac{dy}{dx}=\tan\phi=\frac{\sin\phi}{\cos\phi}=\frac{T\sin\phi}{T\cos\phi}=\frac{wx}{H}$$

یا

$$\frac{dy}{dx}+\left(\frac{w}{H}\right)x$$

که درآن مبدأ O در پایینترین نقطهٔ کابل انتخاب شده‌است، و H کشش افقی در O است. نشان دهیدکــه کابل به‌صورت یك سهمی آویزان می‌شود. (به‌همین‌دلیل، کابلهای اصلی پلهای معلق‌را به‌شکل سهمی درنظرمی‌گیرند. کابلها و زنجیرهایی که «آزادانه» ازدوانتها



۱۸.۸ قطعهٔ کابل در مسألهٔ ۳۲.

آویزان شوند، و هیچ بار اضافی نداشته باشند به‌شکل خمی موسوم به خم زنجیری درمی‌آیند که در بخش ۳.۹ مورد مطالعه قرار خواهند گرفت.)

۳۳. رسم مماس برسهمی. نشان دهید که مماس برسهمی $y^2=4px$ در $P_1(x_1, y_1)$، محور تقارن سهمی را در نقطه‌ای قطع می‌کند که به فاصلهٔ x_1 واحد درسمت چپ رأس آن است. از اینجا راه ساده‌ای برای رسم مماس برسهمی درهر نقطه بجز رأس (که درآنجا محور y برسهمی مماس است) به دست می‌آید: نقطهٔ تماس P را برسهمی مشخص کنید. ازآن نقطه خطی برمحور x عمود کنید، به‌اندازهٔ $2x_1$ واحد به چپ بروید، نقطهٔ حاصل را علامتگذاری کنید، و بالاخره آن نقطه را به P وصل کنید.

۳۴. ویژگی بازتابندگی سهمی.

الف) نشان دهید که زوایای α و β درشکل ۱۴.۸ برابرند (راهنمایی: محل تقاطع خط مماس L ومحور x را بیابید. خط L و محور x چه زاویه‌ای تشکیل می‌دهند؟)

ب) فرض کنید وقتی یك پرتو نور به‌یك آینه می‌تابد، زاویهٔ تابش و زاویهٔ بازتاب برابر باشند. اگر یك‌سهمی را حول محورش دوران دهیم، و با نقره اندودکردن رویهٔ حاصل آینه‌ای بسازیم، نشان دهید هرپرتو نوری که ازکانون سهمی ساطع شود، موازی با محورسهمی ازآن خارج می‌شود.

TOOLKIT PROGRAMS
Conic Sections Super * Grapher

۴.۸ بیضی

در این بخش معادلهٔ بیضی واقع درصفحهٔ مختصات را به دست می‌آوریم، و چگونگی یافتن ابعاد و کانونهای بیضی را با استفاده از معادلهٔ آن نشان می‌دهیم. همچنین عددی موسوم به‌خروج ازمرکز بیضی‌را معرفی‌می‌کنیم که میزان کشیدگی بیضی‌را مشخص می‌کند. از این‌عدد برای توصیف شکل‌مدارهای بیضوی‌سیارات وستارگان دنباله‌داری که حول خورشید می‌چرخند و ماهواره‌هایی که حول زمین می‌چرخند استفاده می‌شود.

تعریف

بیضی مجموعهٔ نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل هر یك از آنها از دونقطهٔ ثابت واقع درصفحه مقدار ثابتی باشد.

معادلهٔ بیضی

اگر دونقطهٔ ثابت، به‌نام **کانونها**، نقاط $F_1(-c, 0)$ و $F_2(c, 0)$ باشند، و مجموع فاصله‌ها، PF_1+PF_2، با $2a$ نمایش داده شود، آنگاه مختصات نقطه‌ای چون $P(x, y)$ واقع بر بیضی در معادلهٔ زیرصدق می‌کنند (شکل ۱۹.۸)

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

برای ساده‌کردن این معادله، رادیکال دوم را به‌سمت راست معادله می‌بریم، رابطهٔ حاصل را دوبار به‌توان دو می‌رسانیم، و پس از ساده کردن نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1. \qquad (1)$$

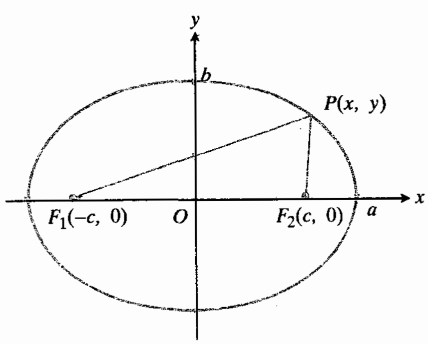
چون‌مجموع دوضلع‌مثلث F_1F_2P، $PF_1+PF_2=2a$، ازضلع سوم، $F_1F_2=2c$، بزرگتر است، عبارت (a^2-c^2) در(۱) مثبت است، و ریشهٔ دوم حقیقی مثبتی داردکه با b نمایش داده می‌شود

$$b=\sqrt{a^2-c^2}. \qquad (2)$$

پس (۱) به‌صورت فشرده‌تر زیر درمی‌آید

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (3)$$

معادلهٔ (۳) نشان می‌دهد که این خم نسبت به هردومحور متقارن است، و داخل مستطیلی با اضلاع $x=a$، $x=-a$، $y=b$، $y=-b$ قرارداردِ. نقاط تقاطع این خم با محورها عبارت‌اند از $(\pm a, 0)$ و $(0, \pm b)$. خم، هریك از محورها



۱۹.۸ بیضی نشان‌داده‌شده درشکل بامعادلهٔ زیر تعریف می‌شود

$$PF_1+PF_2=2a.$$

همان‌گونه که‌درمتن‌ملاحظه‌می‌شود، این‌معادله به‌معادلهٔ زیرمی‌انجامد

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

را به‌زاویهٔ 90° قطع می‌کند، زیرا شیب

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-b^2x}{a^2y}$$

در $x=0$، $y=\pm b$ برابر با صفر، و در $y=0$، $x=\pm a$ برابر با بینهایت است.

نشان داده‌ایم که مختصات P در (۱) صدق می‌کنند، هر گاه P درشرط هندسی $PF_1+PF_2=2a$ صدق کند. حال عکس این مطلب را ثابت می‌کنیم. فرض کنید x و y در (۱) با شرط $0<c<a$ صدق کنند. آنگاه

$$y^2=(a^2-c^2)\frac{a^2-x^2}{a^2}.$$

اگر این مقدار را در رادیکالهای زیر قراردهیم، داریم

$$PF_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\left|a+\frac{c}{a}x\right| \qquad \text{(۴ الف)}$$

و

$$PF_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\left|a-\frac{c}{a}x\right| \qquad \text{(۴ ب)}$$

چون x به بازهٔ $-a\leqslant x\leqslant a$ محدود می‌شود، مقدار $(c/a)x$ بین $-c$ و c قرار می‌گیرد، و لذا هم $a+(c/a)x$ مثبت است و هم $a-(c/a)x$، چون که هر دو بین $a+c$ و $a-c$ هستند. پس قدرمطلقهای موجود در (۴ الف) و (۴ ب) را می‌توان حذف کرد

$$PF_1=a+\frac{c}{a}x,\quad PF_2=a-\frac{c}{a}x. \qquad (۵)$$

با جمع کردن این دو می‌بینیم که مقدار PF_1+PF_2 به ازای هر موضع P روی خم، برابر با $2a$ است. پس ویژگی هندسی و معادلهٔ جبری فوق هم‌ارزند.

محورها

درمعادلهٔ (۳)، $b^2=a^2-c^2$ از a^2 کمتر است. **قطر بزرگ** بیضی پاره‌خط به طول $2a$ بین نقاط تقاطع بیضی با محور x، $(\pm a, 0)$، است. **قطرکوچك** آن پاره‌خط به طول $2b$ بین نقاط تقاطع بیضی با محور y، $(0, \pm b)$، است. عدد a را **نصف [طول] قطر بزرگ** و عدد b را **نصف [طول] قطر کوچك** می‌نامند. اگر $a=4$، $b=3$، آنگاه معادلهٔ (۳) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1. \qquad \text{(۶ الف)}$$

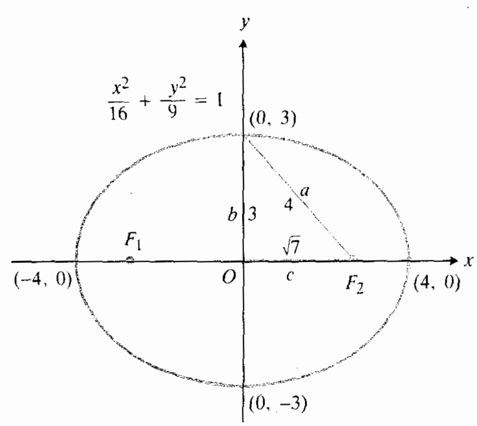
اگر در (۶ الف) جای x و y را باهم عوض کنیم، معادلهٔ

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1 \qquad \text{(۶ ب)}$$

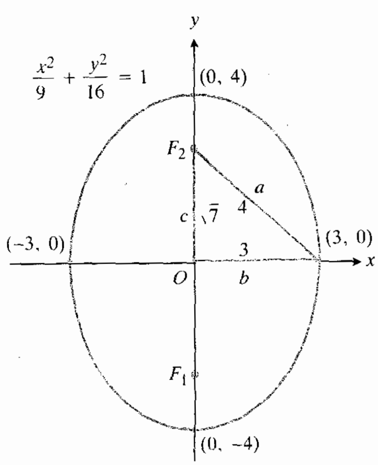
را به دست می‌آوریم که یك بیضی را نشان می‌دهد که قطر بزرگش به‌جای اینکه افقی باشد، قائم است. شکل ۲۰۰۸ را ببینید.

در تحلیل معادلاتی نظیر (۶ الف) و (۶ ب) دلیلی برای سردرگمی وجود ندارد. کافی است نقاط تقاطع با محورهای تقارن را بیابیم و از این‌راه می‌توانیم امتداد قطر بزرگ را معلوم کنیم، زیرا این قطر بزرگترینِ دوقطر است. کانونها همواره بر قطر بزرگ قراردارند.

اگر ازحروف a، b، و c به‌ترتیب برای نمایش نصف قطر بزرگ، نصف قطر کوچك، و **نصف فاصلهٔ** بین کانونها استفاده



(الف)



(ب)

۲۰۰۸ (الف) قطربزرگ $(x^2/16)+(y^2/9)=1$ افقی است. (ب) قطربزرگ $(x^2/9)+(y^2/16)=1$ قائم است.

کنیم، از معادلهٔ (۲) درمی‌یابیم که

$$b^{۲}=a^{۲}-c^{۲} \quad \text{یا} \quad a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}. \qquad (۷)$$

پس a وتر یك مثلث قائم‌الزاویه است که دوضلع دیگرش b و c اند؛ شکل ۲۰.۸ را ببینید. وقتی با معادله‌ای نظیر (۶ الف) یا (۶ ب) آغاز می‌کنیم، بلافاصله می‌توانیم $a^{۲}$ و $b^{۲}$ را بیابیم. سپس اختلاف آنها را می‌یابیم و از معادلهٔ (۷)، $c^{۲}$ را تعیین می‌کنیم. پس در هریك از معادلات (۶ الف) و (۶ ب) داریم

$$c^{۲}=a^{۲}-b^{۲}=۱۶-۹=۷.$$

بنابراین، کانونها به‌فاصلهٔ $c=\sqrt{۷}$ واحد ازمرکز بیضی واقع‌اند.

وقتی مرکز درمبدأ نباشد

مرکز بیضی محل تقاطع اقطار آن است. درزیر، فهرست معادلات متعارف بیضیهایی که اقطارشان موازی با محورهای مختصات هستند و مرکزشان درنقطهٔ (h, k) قرار دارد، آمده است.

معادلات متعارف بیضیهایی که مرکزشان (h, k) است و اقطارشان با محورهای مختصات موازی‌اند

$$\frac{(x-h)^{۲}}{a^{۲}}+\frac{(y-k)^{۲}}{b^{۲}}=۱ \qquad \text{(قطر بزرگ، افقی)} \qquad (۸)$$

کانونها: $(h\pm\sqrt{a^{۲}-b^{۲}}, k)$ رأسها: $(h\pm a, k)$

$$\frac{(x-h)^{۲}}{b^{۲}}+\frac{(y-k)^{۲}}{a^{۲}}=۱ \qquad \text{(قطر بزرگ، قائم)} \qquad (۹)$$

کانونها: $(h, k\pm\sqrt{a^{۲}-b^{۲}})$ رأسها: $(h, k\pm a)$

درهرحالت، a نصف قطر بزرگ، و b نصف قطر کوچك است.

معادلات (۸) و (۹) بااستفاده ازانتقال $x'=x-h$ ، $y'=y-k$ و با ملاحظهٔ این‌امرکه معادلات حاصل برحسب مختصات پریم‌دار به‌صورت زیرند، به‌دست می‌آیند

$$\frac{x'^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y'^{۲}}{b^{۲}}=۱ \quad \text{و} \quad \frac{x'^{۲}}{b^{۲}}+\frac{y'^{۲}}{a^{۲}}=۱.$$

مثال ۱ مرکز، رأسها، و کانونهای بیضی زیررا بیابید

$$۹x^{۲}+۴y^{۲}+۳۶x-۸y+۴=۰.$$

حل: xها را با هم و yها را با هم در نظر می‌گیریم تا رابطهٔ

$$۹(x^{۲}+۴x)+۴(y^{۲}-۲y)=-۴$$

حاصل شود. حال اگر هریك از پرانتزها را به‌صورت مربع کامل درآوریم، داریم

$$۹(x^{۲}+۴x+۴)+۴(y^{۲}-۲y+۱)=-۴+۳۶+۴.$$

دوطرف را بر ۳۶ بخش می‌کنیم تا معادله به‌صورت متعارف زیر درآید

$$\frac{(x+۲)^{۲}}{۴}+\frac{(y-۱)^{۲}}{۹}=۱.$$

چون $۹ > ۴$، این همان معادلهٔ (۹) با ضوابط $a=۳$ ، $b=۲$ ، $h=-۲$، و $k=۱$ است. مرکز این بیضی نقطهٔ $(h, k)=(-۲, ۱)$ است

مرکز: $(-۲, ۱)$.

رأسها نقاط $(h, k\pm a)=(-۲, ۱\pm ۳)$ اند:

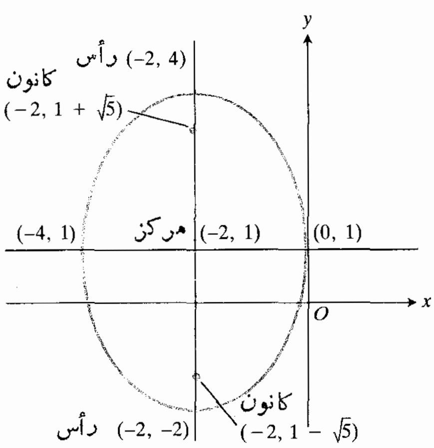
رأسها: $(-۲, ۴)$ و $(-۲, -۲)$.

کانونها عبارت‌اند از نقاط

$$(h, k\pm\sqrt{a^{۲}-b^{۲}})=(-۲, ۱\pm\sqrt{۹-۴})=(-۲, ۱\pm\sqrt{۵})$$

کانونها: $(-۲, ۱+\sqrt{۵})$ و $(-۲, ۱-\sqrt{۵})$.

شکل ۲۱.۸ را ببینید.



۲۱.۸ بیضی $۹x^{۲}+۴y^{۲}+۳۶x-۸y+۴=۰$.

خروج از مرکز

برای بحث دقیقتر دربارهٔ ویژگیهای بیضی، فرض می‌کنیم که

معادله‌اش به‌صورت زیر نوشته شده باشد

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad a>b>0. \qquad (۱۰)$$

هرچند c ، فاصلهٔ مرکز بیضی تا هریك از کانونها، در این معادله به‌چشم نمی‌خورد، ولی c را می‌توان ازمعادلهٔ زیر به‌دست آورد

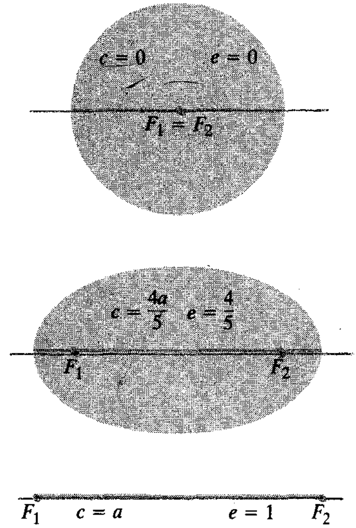
$$c=\sqrt{a^2-b^2}\,. \qquad (۱۱)$$

اگر a را ثابت نگه‌داریم و فاصلهٔ کانونی c را در بازهٔ $0\leqslant c\leqslant a$ تغییر دهیم، شکل بیضیهای حاصل تغییرخواهد کرد. وقتی $c=0$ (یعنی $a=b$) این بیضیها مستدیرهستند و وقتی به‌مقدار c افزوده شود، بیضی کشیده‌تر می‌شود، تا اینکه درحالت نهایی، $c=a$ ، «بیضی» به‌صورت پاره‌خط F_1F_2 درمی‌آید که دوکانون را به‌هم می‌پیوندد (شکل ۲۲۰۸). نسبت

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \qquad (۱۲)$$

را **خروج ازمرکز** بیضی می‌نامند؛ این‌عدد از ۰ تا ۱ تغییرمی‌کند و میزان اختلاف شکل بیضی با دایره را نشان می‌دهد.

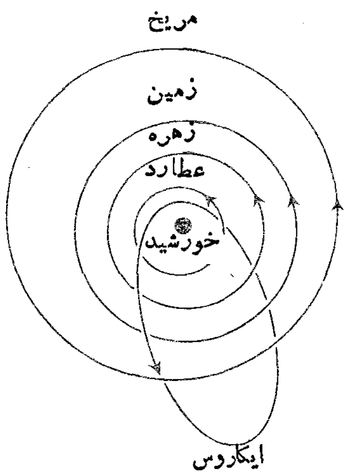
سیارات منظومهٔ شمسی در مدارهایی بیضوی‌که خورشید در یکی از کانونهای آنها واقع است، حول خورشید می گردند. بیشترسیارات، از جمله زمین، مداری تقریباً مستدیر دارند. خروج ازمرکز چند سیاره که درجدول ۱۰۸ دیده می‌شود مؤید این مطلب است. امـا، پلوتون بـا $e=$ ۰ر۲۵ ، و عطارد بـا $e=$ ۰ر۲۱ ، مـداری تقریباً بیضوی دارند. مدار سیارات دیگر منظومهٔ شمسی از این‌دومدار هم کشیده‌ترند. ایکاروس، اختروار ی‌است‌که حدوداً ۱ مایل قطر دارد و در هر ۴۰۹ روز (به‌مقیاس روزهـای زمین) یك بار دور خورشید مـی‌چرخد. خـروج از مرکز این اختروار ۰ر۸۳ است (شکل ۲۳۰۸).



۲۲۰۸ خروج ازمرکز بیضی، شکل آن را توصیف می‌کند.

جدول ۱۰۸ خروج ازمرکزهای مدارهای سیارات

عطارد	۰ر۲۱	زحل	۰ر۰۶
زهره	۰ر۰۱	اورانوس	۰ر۰۵
زمین	۰ر۰۲	نپتون	۰ر۰۱
مریخ	۰ر۰۹	پلوتون	۰ر۲۵
مشتری	۰ر۰۵		



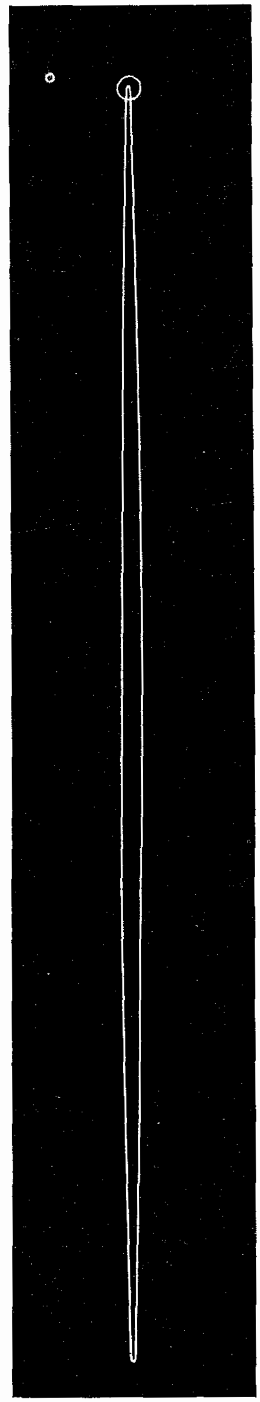
۲۳۰۸ مدار اختروار ایکاروس.

مثال ۲ مدار ستارهٔ دنباله‌دار کوهوتك[1] (شکل ۲۴۰۸) تقریباً ۴۴ واحد نجومی پهنا و ۳۶۰۰ واحد نجومی درازا دارد. (یك واحد نجومی (AU) برابر است با نصف قطر بزرگ مدار زمین، یعنی تقریباً ۹۲۶۰۰۰۰۰ مایل.) خروج ازمرکز مدارآن را بیابید.

حل:

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{(1800)^2-(22)^2}}{1800}\approx 0.99990.$$

1. Kohoutek



۲۴۰۸ در اینجا مدار ستارهٔ دنباله‌دار کوهوتک تقریباً با مقیاس دقیق رسم شده است. دایرهٔ کوچک حد نهایی مدار پلوتون را نشان می‌دهد.

ستارهٔ دنباله‌دار هالی

ادموند هالی انگلیسی، زیست‌شناس، زمین‌شناس، ناخدا، جاسوس، مسافر اقیانوس منجمد جنوبی، اخترشناس، مشاور استحکامات، مؤسس و مدیر شرکت، استاد ادبیات کلاسیک، و بالاخره، ریاضیدانی بود که برای نشر کتاب پرینکیپیا [اصول]، اثر نیوتن، سرمایه‌گذاری کرد و از نظریهٔ نیوتن برای محاسبهٔ مدار ستارهٔ دنباله‌دار بزرگ ۱۶۸۲ استفاده نمود. چون بازگشت بعدی این ستاره طبق پیش‌بینی هالی در ۱۸۵۱ اتفاق افتاد، از این زمان به بعد آن را ستارهٔ دنباله‌دار هالی نامیدند.

آخرین باری که ستارهٔ دنباله‌دار هالی خورشید را دور زد، در زمستان و بهار ۱۹۸۵–۱۹۸۶ بود؛ تاریخ بازگشت بعدی این ستاره سال ۲۰۶۲ است. نخستین مدرک موجود دربارهٔ این ستاره مربوط است به سال ۲۴۰ قبل از میلاد که از آن تاریخ تا به حال ۳۰ بار خورشید را دور زده است. مطالعات اخیر حاکی است که دنباله‌دار هالی تاکنون تقریباً ۲۰۰۰ بار خورشید را دور زده است، و قبل از اینکه خورشید کاملاً از میان برود، ۲۰۰۰ بار دیگر هم آن را دور خواهد زد.

مدار دنباله‌دار هالی یک بیضی به درازای ۳۶٫۱۸ AU و پهنای ۹٫۱۲ AU است. پس خروج از مرکزش عبارت است از

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{(18.09)^2-(4.56)^2}}{18.09}\approx 0.970$$

رده‌بندی مقاطع مخروطی برحسب خروج از مرکز

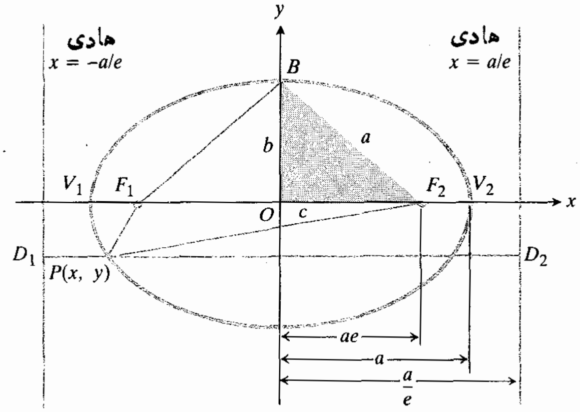
سهمی یک کانون و یک هادی دارد، درحالی که بیضی دارای دو کانون و دو هادی است. هادیها دو خط عمود بر قطر بزرگ بیضی هستند که فاصله‌شان از مرکز بیضی $\pm a/e$ است. ویژگی سهمی این است که به‌ازای هر نقطهٔ P روی آن،

$$PF=1\cdot PD \qquad (13)$$

که در آن F کانون، و D نزدیکترین نقطهٔ هادی به P است. در مورد بیضی به‌آسانی می‌توان نشان داد که دو معادلهٔ زیر جای معادلهٔ (۱۳) را می‌گیرند

$$PF_1=e\cdot PD_1,\quad PF_2=e\cdot PD_2. \qquad (14)$$

در اینجا e خروج از مرکز، P نقطهٔ دلخواهی از بیضی، F_1 و F_2 کانونها، و D_1 و D_2 نزدیکترین نقاط هادیها به P هستند. در معادلهٔ (۱۴)، هادی و کانون باید متناظر باشند به این معنا که اگر فاصلهٔ P تا کانون F_1 را درنظر می‌گیریم، باید فاصلهٔ P تا هادی واقع در همان طرف بیضی را هم درنظر بگیریم (شکل ۲۵۰۸ را ببینید). لذا هادی $x=-a/e$ را با کانون $F_1(-c,0)$ و هادی $x=a/e$ را با کانون $F_2(c,0)$ در تناظر قرار می‌دهیم. اگر a نصف قطر بزرگ و $e<1$ خروج از مرکز باشد، وقتی در امتداد



۲۵۰۸ بیضی $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1$.

قطر بزرگ از مرکز دور می‌شویم به ترتیب به موارد زیر برمی‌خوریم:

یك کانون به‌فاصلهٔ ae ازمرکز

یك رأس به‌فاصلهٔ a ازمرکز

یك هادی به‌فاصلهٔ a/e ازمرکز.

ویژگی «کانون‌ـ‌به‌هادی»، سهمی، بیضی و هذلولی را به‌روش زیرتحت لوای واحدی درمی‌آورد (بخش بعد). فرض کنید که فاصلهٔ PF یعنی فاصلهٔ P تا یك نقطهٔ ثابت F (کانون)، با حاصلضرب مقداری ثابت درفاصلهٔ P تا یك خط ثابت (هادی) برابر باشد، یعنی

$$PF=e\cdot PD \qquad (۱۵)$$

که در آن e ثابت تناسب است. دراین‌صورت مسیری که P می‌پیماید

الف) یك سهمی است، هرگاه $e=1$،

ب) یك بیضی با خروج ازمرکز e است هرگاه $e<1$، و

پ) یك هذلولی باخروج ازمرکز e است هرگاه $e>1$.

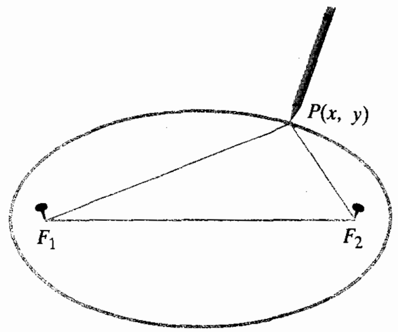
همان‌گونه‌که مشاهده می‌شود سهمی حالت بسیارخاصی است.

ترسیم

سریعترین راه‌رسم یك بیضی از به‌کاربردن مستقیم تعریف آن به‌دست می‌آید. دوسرریسمانی‌را گره می‌زنیم، ازیك مداد و دومیخ ثابت F_1 و F_2 استفاده می‌کنیم و طبق شکل ۲۶۰۸، مداد را به‌ریسمان تکیه می‌دهیم و خم را رسم می‌کنیم. این خم بیضی است زیرا PF_1+PF_2 مقداری ثابت است (این مقدار ثابت برابراست با طول ریسمان منهای فاصلهٔ بین میخها).

کاربرد

از شکل بیضی در بال هواپیما، و گاه در طراحی چرخ زنجیر



۲۶۰۸ شیوهٔ رسم یك بیضی.

دوچرخه‌های مسابقه استفاده می‌شود. دستگاههای استریو غالباً سوزنهای بیضوی دارند. مقاطع لوله‌های آب‌گاه به‌شکل بیضی طراحی می‌شوند، تا هنگام یخ‌زدن آب لوله‌ها بتوانند بدون شکسته‌شدن منبسط شوند. در دستگاههای مورد استفاده درتونلهای بادی برای مطالعهٔ صدای هواپیما نیز بیضی ظاهرمی‌شود (صدای موجود دریك‌کانون را می‌توان درکانون دیگرشنید، حال‌آنکه در بقیهٔ جاها صدا نسبتاً خفیف است). مکانیسم چکاندن در بعضی از لیزرها بیضوی است. برخورد موج آب‌دریا به‌سنگهای موجود در ساحل آنها را رفته‌رفته به‌صورت بیضوی درمی‌آورد. درمبحث تشکیل فسیل نیز شکل بیضی مطرح است.

مسأله‌ها

درمسائل ۱ـ۴، مطلوب است معادلهٔ بیضیی‌که مرکزآن C، کانون آن F، و نصف قطربزرگ آن a باشد. سپس خروج ازمرکز را محاسبه و بیضی را رسم کنید.

۱. $C(0,0),\quad F(0,2),\quad a=4$

۲. $C(0,0),\quad F(-3,0),\quad a=5$

۳. $C(0,2),\quad F(0,0),\quad a=3$

۴. $C(-3,0),\quad F(-3,-2),\quad a=4$

مرکز، رأسها، و کانونهای بیضیهای مسائل ۵ـ۱۸ را بیابید.

۵. $\dfrac{(x-7)^2}{4}+\dfrac{(y-5)^2}{25}=1$

۶. $\dfrac{(x+3)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$

۷. $\dfrac{(x+1)^2}{9}+\dfrac{(y+4)^2}{25}=1$

۰۸ $\frac{(x-۸)^۲}{۲۵}+\frac{y^۲}{۸۱}=۱$

۰۹ $۲۵(x-۳)^۲+۴(y-۱)^۲=۱۰۰$

۰۱۰ $۹(x-۴)^۲+۱۶(y-۳)^۲=۱۴۴$

۰۱۱ $x^۲+۱۰x+۲۵y^۲=۰$

۰۱۲ $x^۲+۱۶y^۲+۹۶y+۱۲۸=۰$

۰۱۳ $x^۲+۹y^۲-۴x+۱۸y+۴=۰$

۰۱۴ $۴x^۲+y^۲-۳۲x+۱۶y+۱۲۴=۰$

۰۱۵ $۴x^۲+y^۲-۱۶x+۴y+۱۶=۰$

۰۱۶ $x^۲+۴y^۲+۲x+۸y+۱=۰$

۰۱۷ $۹x^۲+۱۶y^۲+۱۸x-۹۶y+۹=۰$

۰۱۸ $۲۵x^۲+۹y^۲-۱۰۰x+۵۴y-۴۴=۰$

۰۱۹ بیضیهای زیر را رسم کنید.

الف) $۹x^۲+۴y^۲=۳۶$

ب) $۴x^۲+۹y^۲=۱۴۴$

پ) $\frac{(x-۱)^۲}{۱۶}+\frac{(y+۲)^۲}{۴}=۱$

ت) $۴x^۲+y^۲=۱$

ث) $۱۶(x-۲)^۲+۹(y+۳)^۲=۱۴۴$

۰۲۰ مطلوب است معادلهٔ بیضیی گذرنده از مبدأ با کانونهای $(-۱, ۱)$ و $(۱, ۱)$.

۰۲۱ نقاط انتهایی قطرهای بزرگ وکوچك یك بیضی عبارت‌اند از $(۱, ۱)$، $(۳, ۴)$، $(۱, ۷)$ و $(-۱, ۴)$. بیضی‌را رسم کنید، معادلهٔ آن‌را بیابید، وکانونهایش را پیدا کنید.

۰۲۲ خروج از مرکز یك بیضی ۲/۳ است، خط $x=۹$ یکی از هادیها، و نقطهٔ $(۴, ۰)$ کانون متناظر آن هادی است. معادله‌ای برای این بیضی بیابید.

در هر یك از مسائل ۲۳-۲۶، شکل ناحیه‌ای را رسم کنید که مختصات نقاطش درنابرابری یا نابرابریهای داده شده صدق کنند.

۰۲۳ $۹x^۲+۱۶y^۲\leqslant ۱۴۴$

۰۲۴ $x^۲+y^۲\geqslant ۱$ و $۴x^۲+y^۲\leqslant ۴$

۰۲۵ $x^۲+۴y^۲\geqslant ۴$ و $۴x^۲+۹y^۲\leqslant ۳۶$

۰۲۶ $(x^۲+y^۲-۴)(x^۲+۹y^۲-۹)\leqslant ۰$

۰۲۷ یك بیضی با خروج از مرکز ۴/۵ رسم کنید.

۰۲۸ مدار پلوتون را با مقیاس رسم کنید.

۰۲۹ ستارهٔ دنباله‌دار هالی.

الف) معادلهٔ مدار ستارهٔ دنباله‌دار هالی را نسبت به‌دستگاه مختصاتی بنویسید که در آن خورشید درمبدأ قراردارد، کانون دیگر بربخش مثبت محور x واقع است، و مقیاس برحسب واحد نجومی است.

ب) این ستاره برحسب واحد نجومی چقدر به خورشید نزدیك می‌شود؟ برحسب مایل چقدر؟

پ) این ستاره برحسب واحد نجومی حداکثر چقدر از خورشید دور می‌شود؟ برحسب مایل چقدر؟

۰۳۰ مطلوب است ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت که بتواند درون بیضی $x^۲+۴y^۲=۴$ جاگیرد و اضلاعش با محورهای مختصات موازی باشند. مساحت این مستطیل چقدراست؟

۰۳۱ مرکزجرم ورق همگن نازکی را بیابیدکه از پایین به‌محور x، و از بالا به‌بیضی $(x^۲/۹)+(y^۲/۱۶)=۱$ محدود باشد.

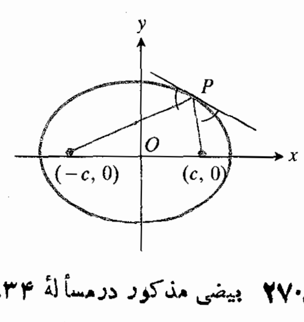
۰۳۲ مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ محدود به بیضی $(x^۲/۴)+(y^۲/۹)=۱$ حول (الف) محور x، (ب) محور y.

۰۳۳ به‌ازای چه‌مقادیر ثابت a، b، و c بیضی

$$۴x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$$

درمبدأ برمحور x مماس است و ازنقطهٔ $(-۱, ۲)$ می‌گذرد؟

۰۳۴ ویژگی بازتابندگی بیضی. بیضیوار از دوران بیضی حول قطر بزرگش پدید می‌آید. آینه را با نقره‌اندودکردن درون رویهٔ بیضیوار می‌سازند. نشان دهید پرتویی ازنورکه از یکی ازکانونها ساطع شود به‌کانون دیگر بازمی‌تابد. امواج صوتی هم این مسیر را طی می‌کنند، و از این ویژگی بیضیوار برای ساختن برخی از تالارهای هنری استفاده می‌کنند. (راهنمایی: مطابق شکل ۲۷۰۸ بیضی را در وضع متعارف قرار دهید، و نشان دهیدکه خطوط



۲۷۰۸ بیضی مذکور درمسألهٔ ۳۴.

گذرنده از نقطهٔ P واقع بر بیضی و دوکانون آن با خط مماس بر بیضی در P زوایای برابر تشکیل می‌دهند.)

TOOLKIT PROGRAMS
Conic Sections   Super * Grapher

۵.۸ هذلولی

در این بخش معادلهٔ هذلولی واقع درصفحهٔ مختصات را به‌دست می‌آوریم، و نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان کانونها و مجانبهای هذلولی را مستقیماً از این معادله به‌دست آورد.

تعریف

هذلولی مجموعهٔ نقاطی ازصفحه است که تفاضل فواصل هر یك از آنها از دونقطهٔ ثابت درصفحه مقدار ثابتی باشد.

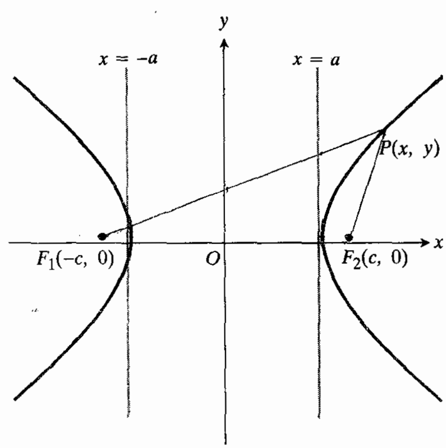
معادلهٔ هذلولی

اگر دونقطهٔ ثابت موسوم به **کانونها** را در $F_1(-c, 0)$ و $F_2(c, 0)$ بگیریم و مقدار ثابت را $2a$ فرض کنیم (شکل ۲۸.۸ را ببینید)، آنگاه نقطه‌ای چون $P(x, y)$ برهذلولی واقع است اگر و تنها اگر

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

یا

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a.$$



۲۸.۸ هذلولی دوشاخه دارد. درمورد نقاط واقع برشاخهٔ راست این شکل داریم $PF_1-PF_2=2a$. درمورد نقاط واقع برشاخهٔ چپ داریم $PF_2-PF_1=2a$.

معادله دوم نظیرمعادلهٔ اول است، با این تفاوت که به جای $2a$، $-2a$ قرار گرفته است. پس در اولی می‌نویسیم $\pm 2a$. یکی از رادیکالها را به‌طرف راست معادله منتقل، دوطرف را مجذور، و نتیجه را ساده می‌کنیم. باز یك رادیکال باقی خواهد ماند آن را دریك طرف تنها نگه می‌داریم، و نتیجه را بازهم مجذور می‌کنیم و سرانجام به‌معادلهٔ زیر دست می‌یابیم

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1. \qquad (1)$$

تا اینجا، معادلهٔ (۱) کاملاً شبیه معادلهٔ بیضی است. اما دراین‌حالت a^2-c^2 منفی‌است زیرا تفاضل دوضلع‌مثلث F_1F_2P ازضلع سوم کوچکتر است

$$2a<2c.$$

لذا دراین‌حالت c^2-a^2 مثبت است و یك ریشهٔ دوم حقیقی مثبت داردکه آن را با b نمایش می‌دهیم

$$b=\sqrt{c^2-a^2} \quad \text{یا} \quad a^2-c^2=-b^2. \qquad (2)$$

پس معادلهٔ هذلولی به‌صورت زیراست

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (3)$$

که شبیه معادلهٔ بیضی است. اختلاف آنها تنها درعلامت منهای (−) موجود درمعادلهٔ هذلولی و رابطهٔ جدید بین a، b، و c مذکور درمعادلهٔ (۲) است.

هذلولی هم مانند بیضی نسبت به هردومحور و نسبت به‌مبدأ متقارن است، اما با محور y تقاطعی ندارد. در واقع، هیچ بخشی ازخم بین‌خطوط $x=a$ و $x=-a$ قرار نمی‌گیرد.

اگر با یك‌نقطهٔ $P(x, y)$ که مختصاتش‌درمعادلهٔ (۳) صدق می‌کنند، آغاز کنیم، می‌بینیم که مانند حالت بیضی فاصله‌های PF_1 و PF_2 از

$$PF_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\left|a+\frac{c}{a}x\right| \qquad (\text{۴ الف})$$

$$PF_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\left|a-\frac{c}{a}x\right| \qquad (\text{۴ ب})$$

به‌دست می‌آیند. اما در اینجا c از a بزرگتر است، و P یا در سمت راست خط $x=a$ قرار می‌گیرد، یعنی $x>a$، یا در سمت چپ خط $x=-a$ واقع می‌شود، یعنی $x<-a$. قدرمطلقهای موجود درمعادلات (۴) را می‌توان چنین از میان

برداشت

$$\text{(۵ الف)}\quad \text{اگر } x>a\text{،}\quad \left\{\begin{aligned} PF_1&=a+\frac{c}{a}x\\ PF_2&=\frac{c}{a}x-a\end{aligned}\right.$$

و

$$\text{(۵ ب)}\quad \text{اگر } x<-a\text{،}\quad \left\{\begin{aligned} PF_1&=-\left(a+\frac{c}{a}x\right)\\ PF_2&=a-\frac{c}{a}x\end{aligned}\right.$$

پس، وقتی P در سمت راست خط $x=a$ قرار داشته باشد، $PF_1-PF_2=2a$، حال آنکه اگر P در سمت چپ $x=-a$ واقع باشد، $PF_2-PF_1=2a$ (شکل ۲۸۰۸). در هر حالت، هر نقطهٔ P که درشرایط هندسی صدق کند، باید درمعادلهٔ (۳) نیز صدق کند. برعکس، هر نقطه‌ای که درمعادلهٔ (۳) صدق کند، شرایط هندسی را نیز برمی‌آورد.

مجانبها

همان‌گونه‌که درفصل ۳ دیدیم، ممکن است وقتی نقطه‌ای چون P واقع بریك‌خم ازمبدأ دور و دورتر می‌شود، فاصلهٔ بین P و خط ثابتی به‌سمت صفر میل کند. چنین خطی را **مجانب** خم می‌نامیم. حال نشان می‌دهیم که هذلولی

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (۳)$$

دومجانب دارد که عبارت‌اند از خطهای

$$y=\pm\frac{b}{a}x\,.$$

عبارت سمت‌چپ معادلهٔ (۳) را می‌توان تجزیه‌کرد و معادله را به‌صورت

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=1$$

یا

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{ab}{bx+ay} \qquad \text{(۶ الف)}$$

نوشت. تحلیل معادلهٔ (۳) نشان می‌دهدکه یکی از شاخه‌های خم در ربع اول قرار دارد و تا بینهایت امتداد دارد. اگر نقطهٔ P واقع براین شاخه رفته رفته از مبدأ دور شود، x و y بینهایت می‌شوند، و عبارت سمت راست (۶ الف) به‌صفر نزدیك می‌شود. پس، طرف چپ هم باید همین وضع را پیدا کند. درنتیجه

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=0 \qquad \text{(۶ ب)}$$

که منجر می‌شود به‌اینکه فکرکنیم خط

$$y=\frac{b}{a}x \quad \text{یا} \quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \qquad (۷)$$

ممکن است مجانبی برای خم باشد.

برای اینکه ببینیم آیا واقعاً چنین است، به بررسی فاصلهٔ قائم بین این خط و خم

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

می‌پردازیم (شکل ۲۹۰۸). وقتی $x\to\infty$، می‌بینیم که

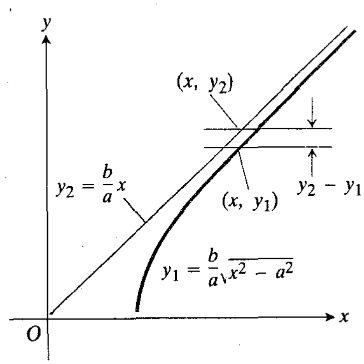
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right)=b\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{a}-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)$$

$$=b\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right) \qquad (۸)$$

$$=b\cdot 0 \qquad \text{(بنا به‌رابطهٔ ۶ ب)}$$

$$=0\,.$$

چون فاصلهٔ قائم بین خط و هذلولی وقتی $x\to\infty$، به‌صفر میل می‌کند، فاصلهٔ عمودی بین نقاط هذلولی و خط $y=(b/a)x$ نیز به صفر میل می‌کند. بنابراین، خط $y=(b/a)x$ مجانب هذلولی است.



۲۹۰۸ وقتی $x\to\infty$، نقطهٔ (x, y_1) روی هذلولی صعود می‌کند، و به‌طرف مجانب $y_2=(b/a)x$ می‌رود.

بنا به‌تقارن، خط

$$y=-\frac{b}{a}x \quad \text{یا} \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0 \qquad (۹)$$

نیز مجانب این هذلولی است.

هردو مجانب را می‌توان با قراردادن ۰ به‌جای ۱ درطرف راست معادلهٔ (۳) و سپس تجزیه‌کردن طرف راست، به‌دست آورد.

نکته گاه مجانب‌راچنان‌تعریف‌می‌کنندکه لازم‌است‌وقتی $x\to\infty$، شیب خم به‌شیب مجانب نزدیك شود. برای اینکه نشان دهیم این تعریف‌نیز دراینجا صادق است، شیب‌خم رامحاسبه می‌کنیم. داریم

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}, \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{b}{a}\,\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

و از آن نتیجه می‌گیریم که

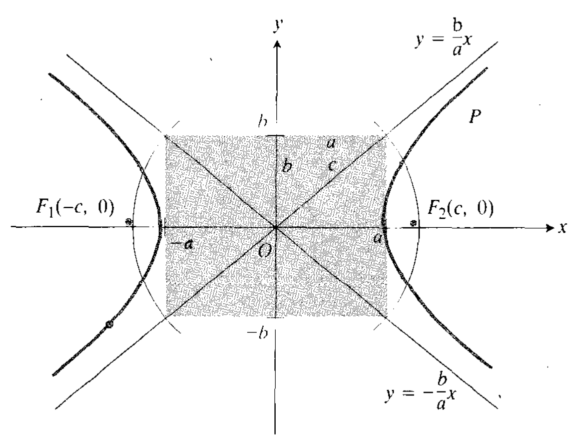
$$\lim_{x\to\infty}\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{b}{a}\cdot 1=\frac{b}{a} \qquad (۱۰)$$

که همان شیب مجانب $y=(b/a)x$ است.

رسم هذلولی

در رسم‌هذلولی مفید است‌که برمحور x، نقاط $\pm a$، و برمحور y، نقاط $\pm b$ را مشخص‌کنیم، ومستطیلی بکشیم که اضلاع آن موازی با محورهای مختصات باشند و از این نقاط نیز بگذرند. اگرقطرهای این مستطیل را امتداد دهیم، مجانبهای‌هذلولی به‌دست می‌آیند (شکل ۳۰.۸). *نیمقطر* $c=\sqrt{a^2+b^2}$ را می‌توان به عنوان شعاع دایره‌ای که محور x را درکانونها، $F_1(-c,0)$ و $F_2(c,0)$، قطع می‌کند، درنظر گرفت.

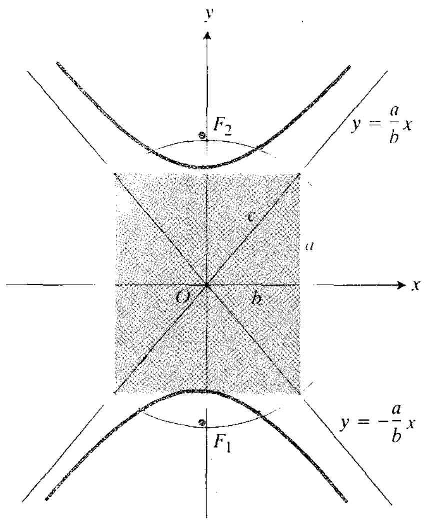
اگردرمعادلهٔ (۳) جای x و y را عوض‌کنیم، معادله جدید



۳۰.۸ هذلولی $(x^2/a^2)-(y^2/b^2)=1$.

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \qquad (۱۱)$$

یك هذلولی را نشان می‌دهدکه‌کانونهایش برمحور y واقع‌اند (شکل ۳۱.۸).



۳۱.۸ هذلولی $(y^2/a^2)-(x^2/b^2)=1$.

وقتی مرکز در مبدأ نباشد

مرکز یك‌هذلولی محل تقاطع محورهای تقارن آن است. فهرست زیرمعادلات متعارف هذلولیهایی را نشان می‌دهدکه محورهایشان با محورهای مختصات موازی‌اند، و مرکزشان درنقطهٔ (h,k) واقع است.

معادلات متعارف هذلولیهایی‌که محورهایشان بامحورهای مختصات موازی‌اند و مرکزشان در (h,k) واقع است.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \qquad (۱۲)$$

(خط گذرنده ازکانونها موازی با محور x)

رأسها: $(h\pm a,\ k)$

کانونها: $(h\pm\sqrt{a^2+b^2},\ k)$

مجانبها: $(y-k)=\pm(b/a)(x-h)$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1 \qquad (۱۳)$$

(خط گذرنده از کانونها موازی با محور y)

رأسها: $(h,\ k\pm a)$

کانونها: $(h,\ k\pm\sqrt{a^2+b^2})$

مجانبها: $(y-k)=\pm(a/b)(x-h)$

معادلات (۱۲) و (۱۳) را می‌توان با انتقال $x'=x-h$، $y'=y-k$ و توجه به این مطلب که معادلات حاصل برحسب مختصات پریم‌دار به‌صورت زیرند، به‌دست آورد

$$(14) \qquad \frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1 \quad \text{و} \quad \frac{y'^2}{a^2}-\frac{x'^2}{b^2}=1 .$$

توجه کنید که درمعادلهٔ مجانب مربوط به (۱۲)، b بر a، و در معادلهٔ مجانب مربوط به (۱۳)، a بر b تقسیم می‌شود.

مثال ۱ مرکز، رأسها، کانونها، و مجانبهای هذلولی زیر را بیابید

$$4x^2-y^2+8x+2y-1=0.$$

حل: جملات شامل x و y را جداگانه به صورت مجذور کامل درمی‌آوریم و معادله را به‌صورت متعارف می‌نویسیم

$$4x^2-y^2+8x+2y-1=0$$
$$4(x^2+2x+1)-(y^2-2y+1)=1+4-1$$
$$4(x+1)^2-(y-1)^2=4$$
$$(x+1)^2-\frac{(y-1)^2}{4}=1.$$

این همان معادلهٔ (۱۲) به‌ازای $a=1$، $b=2$، $h=-1$، و $k=1$ است. مرکز هذلولی نقطهٔ $(h,k)=(-1,1)$ است

مرکز: $(-1,1)$.

رأسها عبارت‌اند از نقاط $(h\pm a,k)=(-1\pm 1,1)$

رأسها: $(0,1)$ و $(-2,1)$.

کانونها نقاط زیرند

$$(h\pm\sqrt{a^2+b^2},k)=(-1\pm\sqrt{1+4},1)$$
$$=(-1\pm\sqrt{5},1)$$

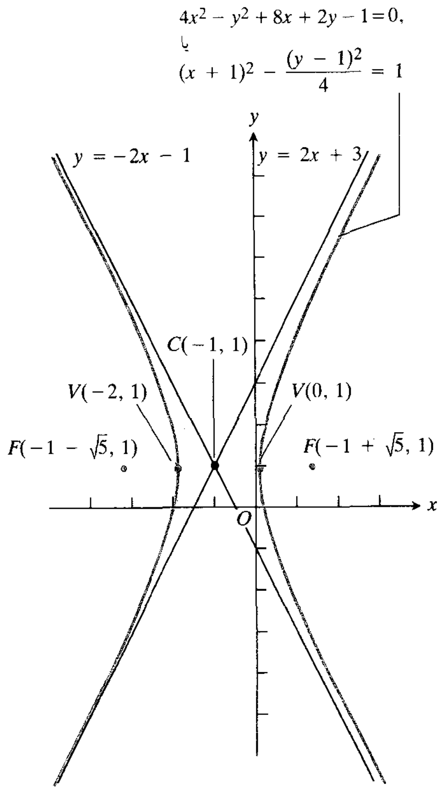
کانونها: $(-1+\sqrt{5},1)$ و $(-1-\sqrt{5},1)$.

مجانبها عبارت‌اند از خطوط $(y-k)=\pm(b/a)(x-h)$، یا

$$(y-1)=\pm\frac{2}{1}(x+1)$$

مجانبها: $y=2x+3$ و $y=-2x-1$.

شکل ۳۲۰۸ را ببینید.



۳۲۰۸ هذلولی مذکور درمثال ۱. ■

مثال ۲ مرکز، رأسها، کانونها، و مجانبهای هذلولی زیر را بیابید

$$x^2-y^2-4x+2y+11=0.$$

حل: ترتیب جملات معادله را تغییرمی‌دهیم، مجذورهای کامل را به دست می‌آوریم، و معادلهٔ حاصل را به‌صورت متعارف می‌نویسیم

$$x^2-y^2-4x+2y+11=0$$
$$x^2-4x+4-(y^2-2y+1)=-11+4-1$$
$$(x-2)^2-(y-1)^2=-8$$
$$\frac{(y-1)^2}{8}-\frac{(x-2)^2}{8}=1.$$

این‌همان معادلهٔ (۱۳) به‌ازای $a=2\sqrt{2}$، $b=2\sqrt{2}$، $h=2$، و $k=1$ است. مرکز هذلولی $(h,k)=(2,1)$ است

مرکز: $(2,1)$.

رأسها عبارت‌اند از نقاط $(h,k\pm a)=(2,1\pm 2\sqrt{2})$ یا

رأسها: $(2,1+2\sqrt{2})$ و $(2,1-2\sqrt{2})$.

کانونها عبارت‌اند از نقاط

$$(h,\ k\pm\sqrt{a^۲+b^۲})=(۲,\ ۱\pm\sqrt{۸+۸})=(۲,\ ۱\pm۴)$$

یا

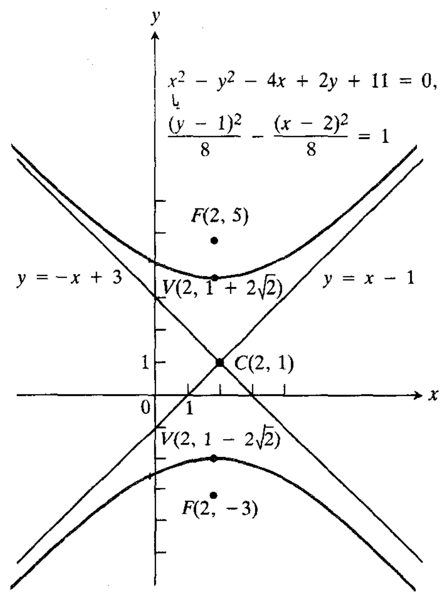
کانونها: $(۲,\ ۵)$ و $(۲,\ -۳)$.

مجانبها عبارت‌اند از خطوط $(y-k)=\pm(a/b)(x-h)$ یا

$$(y-۱)=\pm\frac{۲\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲}}(x-۲)=\pm(x-۲),$$

مجانبها: $y=x-۱$ و $y=-x+۳$.

شکل ۳۳.۸ را ببینید.



۳۳.۸ هذلولی مذکور درمثال ۲. ■

خروج از مرکز

محدودیت $a>b$ که درمورد بیضی‌وجود دارد، درمورد‌هذلولی وجود ندارد. جهت باز شدن هذلولی را علامتها مشخص می‌کنند، و نه نسبت اندازه‌های ضرایب جملات درجهٔ دوم.

برای بحث بیشتردر بارهٔ هذلولی، فرض‌می‌کنیم که محورهای مختصات از مرکز هذلولی بگذرند و نیز فرض می‌کنیم که معادلهٔ آن به‌صورت زیر باشد

$$\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱. \qquad (۱۵)$$

در این صورت

$$b=\sqrt{c^۲-a^۲}$$

و

$$c^۲=a^۲+b^۲. \qquad (۱۶)$$

خروج از مرکزهذلولی، e، را نظیر خروج ازمرکز بیضی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$e=\frac{c}{a}.$$

چون $c>a$، خروج از مرکز هذلولی از ۱ بزرگتر است. خطوط

$$x=\frac{a}{e},\quad x=-\frac{a}{e}$$

هادیهای هذلولی هستند.

ویژگی کانون-هادی

حال نشان می‌دهیم که اگرمختصات نقطه‌ای چون $P(x,y)$ در معادلهٔ (۱۵) صدق‌کنند، P این ویژگی را نیز دارد که

$$PF_۱=e\cdot PD_۱ \qquad (\text{۱۷ الف})$$

و

$$PF_۲=e\cdot PD_۲ \qquad (\text{۱۷ ب})$$

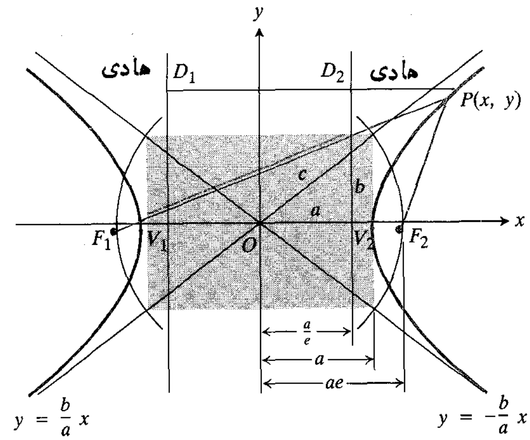
که‌درآنها $F_۱(-c,\ ۰)$ و $F_۲(c,\ ۰)$ کانونها، و $D_۱(-a/e,\ y)$ و $D_۲(a/e,\ y)$ نزدیکترین نقاط هادیها به P هستند.

دراینجا معادلات (۱۷ الف) و (۱۷ ب) را تنها برای‌شاخهٔ راست هذلولی اثبات می‌کنیم؛ روش اثبات برای شاخهٔ چپ شبیه همین است. با مراجعه به‌معادلات (۵ الف) داریم

$$PF_۱=\frac{c}{a}x+a=e\left(x+\frac{a}{e}\right)$$
$$PF_۲=\frac{c}{a}x-a=e\left(x-\frac{a}{e}\right). \qquad (\text{۱۸ الف})$$

با توجه به‌شکل ۳۴.۸ دیده‌می‌شود که

$$PD_۱=x+\frac{a}{e},\quad PD_۲=x-\frac{a}{e}. \qquad (\text{۱۸ ب})$$



۳۴.۸ $PF_۱ = e \cdot PD_۱$ ، و $PF_۲ = e \cdot PD_۲$.

ازتلفیق این نتایج می توان ویژگی «کانون‌ـهادی» هذلولی را که درمعادلات (۱۷ الف، و ب) ذکر شده، به‌دست‌آورد. به‌عکس، اگر (۱۸ الف) برقرار باشد، معادلهٔ زیر نیز برقرار است

$$PF_۱ - PF_۲ = ۲a .$$

درنتیجه، P در این شرط که تفاضل فواصلش ازدوکانون ثابت باشد صدق می کند.

کاربرد

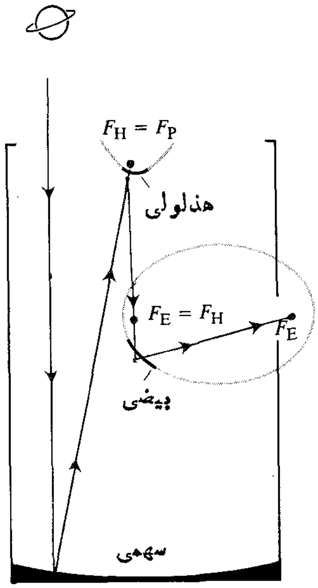
مسیرهای هذلولی درنظریهٔ نسبیت اینشتین مطرح می‌شوند، و اساس سیستم هوانوردی راديویی لوران[1] نیز هستند. مسیرستارهٔ دنباله‌داری که به‌خورشید خودش بر نمی‌گردد، هذلولی است (احتمال اینکه سهموی باشد صفر است). تلسکوپهای بازتابنده، نظیر تلسکوپ ۲۰۰ اینچی هاله[2]، واقع درکوه پالومار کالیفرنیا، و تلسکوپ فضایی ناساکه قرار بوده در ۱۹۸۸ به‌فضا پرتاب شود، از آینه‌های هذلولوی کوچك، همراه با آینه‌های سهموی بزرگتر، استفاده می کنند. (شمایی از آن درشکل ۳۵.۸ آمده است.)

مسأله‌ها

درمسائل ۱ـ۴، هذلولی و مجانبهای آن را رسم کنید.

۱. $\frac{x^۲}{۹} - \frac{y^۲}{۱۶} = ۱$

۲. $\frac{x^۲}{۱۶} - \frac{y^۲}{۹} = ۱$



۳۵.۸ دراین شکل شماتیك ازیك تلسکوپ بازتابنده، نور یك سیاره پس از برخورد با یك آینه سهموی اصلی به‌کانون آینه، F_P، بازتابانده می‌شود. سپس این پرتو نور را آینهٔ هذلولوی کوچکی که یکی از کانونهایش $F_H = F_P$ است به‌طرف کانون دوم هذلولی، $F_E = F_H$ ، باز می‌تاباند. چون این کانون بریك کانون یك آینهٔ بیضوی منطبق است، نور به کانون دیگر بیضی بازتابانده می‌شود و در آنجا ناظری آن را می‌بیند. برای به دست آوردن اطلاعات بیشتری دربارهٔ ویژگی بازتابندگی هذلولی به‌کاررفته، مسألهٔ ۲۳ را ببینید.

۳. $\frac{y^۲}{۹} - \frac{x^۲}{۱۶} = ۱$

۴. $\frac{x^۲}{۹} - \frac{y^۲}{۱۶} = -۱$

در مسائل ۵ـ۱۴ ، مرکز، رأسها، کانونها، خروج از مرکز، و مجانبهای هذلولی داده شده را بیابید. سپس هذلولی را رسم کنید و در آن این مشخصات را نشان دهید.

۵. $۹(x-۲)^۲ - ۴(y+۳)^۲ = ۳۶$

۶. $x^۲ - ۹(y-۱)^۲ = ۹$

---

1. LORAN (Long Range Navigation)
2. Hale

۷. $۴(x-۲)^{۲}-۹(y+۳)^{۲}=۳۶$

۸. $(y+۳)^{۲}-۹(x-۲)^{۲}=۹$

۹. $۱۶(y-۳)^{۲}-۹(x-۴)^{۲}=۱۴۴$

۱۰. $y^{۲}-(x+۲)^{۲}=۸$

۱۱. $۵x^{۲}-۴y^{۲}+۲۰x+۸y=۴$

۱۲. $۴x^{۲}=y^{۲}-۴y+۸$

۱۳. $۲y^{۲}=x^{۲}-۴x$

۱۴. $۴x^{۲}-۵y^{۲}-۱۶x+۱۰y+۳۱=۰$

۱۵. معادله‌ای بـرای هذلولیی بـا کانونهای $(۰,۰)$ و $(۰,۴)$ بنویسیدکه ازنقطهٔ $(۱۲,۹)$ می‌گذرد.

۱۶. یکی‌ازکانونهای یک‌هذلولی‌درنقطهٔ $(۱,-۳)$ است، وهادی مربوط به‌آن خط $y=۲$ است. اگرخروج ازمرکز این هذلولی $۳/۲$ باشد، معادله‌ای برای آن بنویسید.

۱۷. لوران. از دوبرج A و B واقـع برسواحل کالیفرنیا کـه چندصد مایل ازهم فاصله دارند به‌طور همزمان سیگنالی رادیویی فرستاده شده است. یک‌کشتی سیگنال فرستاده‌شده از A را ۱۴۰۰ میکروثانیه زودتر از سیگنال فرستاده شده از B دریافت می‌کند. فرض‌کنید سیگنالهای رادیـویی در هرمیکروثانیه ۹۸۰ فوت از فرستنده دور می‌شوند. دربارهٔ محل تقریبی‌کشتی نسبت به‌دوبـرج چه می‌توانید بگویید؟

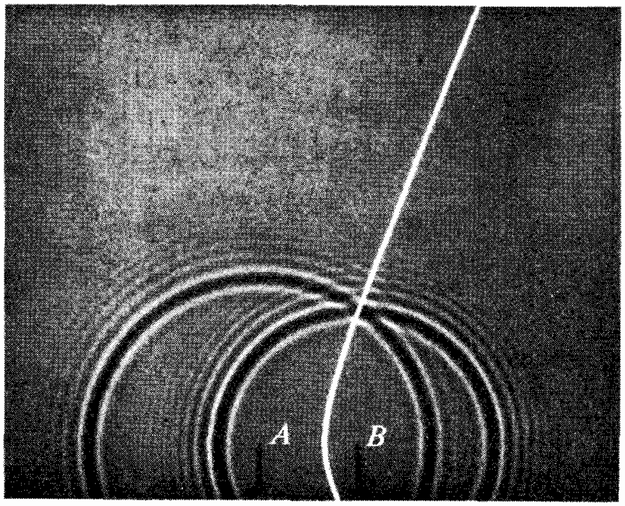
۱۸. مطلوب است حجم جسم‌حاصل از دوران ناحیهٔ محصور بین خط $x=۵$ و شاخهٔ راست هذلولی $x^{۲}-y^{۲}=a^{۲}$ حـول محور (الف) x، (ب) y.

۱۹. مطلوب است حجم جسم حـاصل از دوران نـاحیهٔ محصور بین هذلولی $x^{۲}-y^{۲}=۱$ وخطوط $y=-۳$ و $y=۳$ حول‌محور (الف) x، (ب) y.

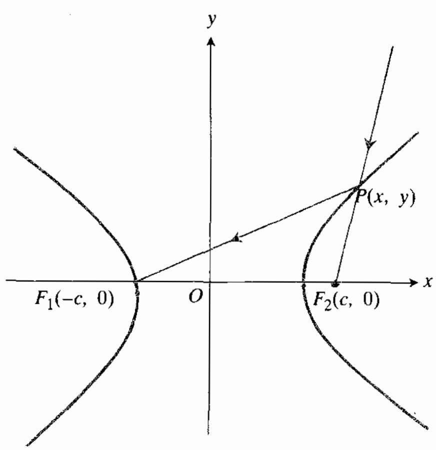
۲۰. ناحیهٔ محصور بین‌شاخهٔ راست‌هذلولی $۳x^{۲}-۴y^{۲}=۱۲$ وخط $x=۵$ را حول محور y دوران می‌دهیم وجسمی‌را به‌دست می‌آوریم. حجم این جسم را بیابید.

۲۱. مطلوب‌است مرکزجرم ورق‌نازک همگنی‌که ازچپ وراست به‌هذلولی $x^{۲}-y^{۲}=۹$، از پایین به‌محور x، و از بـالا به‌خط $y=۴$ محدود است.

۲۲. امواج مستدیر شکل‌زیر به‌این صورت ایجاد شده‌اندکه سطح مایع درون یک مخزن را ابتدا در نقطهٔ A و پس از چند لحظه در نقطهٔ B لمس کرده‌ایم. وقتی امواج گسترده می‌شوند، نقاط تقاطع آنها هذلولیی پدید می‌آورندکه کانونهایش A و B انـد. چرا؟ (راهنمایی: سرعت حرکت موج ثابت است.)

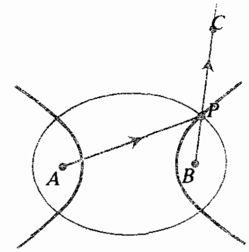


۲۳. ویژگی بازتابندگی هذلولی. نشان دهیدکـه اگر طبق شکل ۳۶.۸ یک پرتونور را به‌طرف یک‌کانون آینه‌ای‌هذلولوی‌بتابانیم، بازتاب‌آن به‌طرف‌کانون دیگر است. (راهنمایی: نشان دهیدکـه مماس برهذلولی درنقطهٔ P از شکل ۳۶.۸ زاویهٔ بین پاره‌خطهای $PF_{۱}$ و $PF_{۲}$ را نصف می‌کند.)



۳۶.۸ ویژگی بازتابندگی هذلولی مربوط به‌مسألهٔ ۲۳.

۲۴. نشان‌دهیدکه اگر،مطابق‌شکل ۳۷.۸، یک بیضی و یک‌هذلولی دارای کانونهای مشترک A و B باشند، تحت زاویهٔ قائمه یکدیگر را قطع می‌کنند. (راهنمایی: اگر ازکانون A یک‌پرتو نور ساطع شود و هذلولی‌را در P قطع کند، چنان ازهذلولی‌بازتابیده می‌شود که گویی مستقیماً از B ساطع شده است (مسألهٔ ۲۳). همین پرتو



۳۷.۸ بیضی و هذلولی هم‌کانون درمسألهٔ ۲۴.

نور را بیضی چنان بازمی‌تاباندکه ازنقطهٔ B بگذرد. لذا BPC خط مستقیم است.)

TOOLKIT PROGRAMS
Conic Sections   Super * Grapher

۶.۸ نمودار معادلات درجهٔ دوم

دراین بخش، به اثبات یکی از شگفت‌انگیزترین قضایای هندسهٔ تحلیلی می‌پردازیم. این قضیه‌حاکی‌است که‌نمودار دکارتی هرمعادلهٔ به‌صورت

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (1)$$

که درآن A، B، و C همه صفر نیستند، تقریباً همیشه یک مقطع مخروطی است. تنها موارد استثنا، مربوط به‌معادلاتی می‌شوندکه نمودارشان‌دوخط متوازی‌است،یامعادلاتی که‌اصلاً نمودار ندارند. بنا به‌قرارداد تمام نمودارهای معادلهٔ (۱) را **خمهای درجهٔ دوم** می‌نامیم، هرچند برخی از آنها خمیدگی نداشته‌باشند.

جدول ۲.۸ مثالهایی از خمهای درجهٔ دوم

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

	A	B	C	D	E	F	معادله	ملاحظات
دایره	۱		۱			-4	$x^2+y^2=4$	$A=C$
سهمی			۱	-9			$y^2=9x$	نسبت به y درجهٔ دوم، نسبت به x خطی
بیضی	۴		۹			-36	$4x^2+9y^2=36$	C، A هم‌علامت، $A\neq C$
هذلولی	۱		-1			-1	$x^2-y^2=1$	C، A با علامات مختلف
یک‌خط (که بازهم یک‌مقطع‌مخروطی است)	۱						$x^2=0$	محور y
خطوط‌متقاطع (که باز هم یک مقطع مخروطی است)		۱		۱	-1	-1	$xy+x-y-1=0$	به‌صورت: $(x-1)(y+1)=0$ تجزیه می‌شود، پس $x=1$، $y=-1$.
خطوط متوازی (مقطع‌مخروطی نیست)	۱			-3		۲	$x^2-3x+2=0$	به‌صورت زیر تجزیه می‌شود $(x-1)(x-2)=0$، لذا $x=1$ و $x=2$.
نقطه	۱		۱				$x^2+y^2=0$	مبدأ
نمودار ندارد	۱					۱	$x^2=-1$	

جملهٔ xy

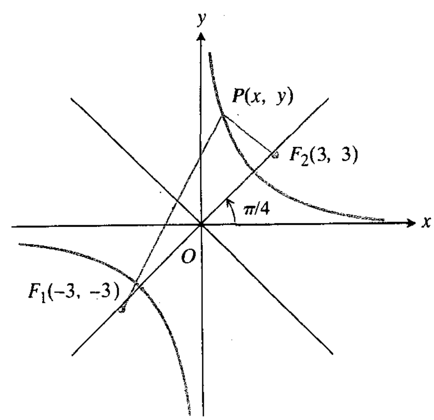
شاید توجه کرده باشید که دراین‌فصل تابه‌حال به معادله‌ای درمورد مقاطع‌مخروطی برنخورده‌ایم که شامل‌جملهٔ Bxy باشد. دلیل این امر این است‌که محورهای مختصات و محورهای‌مقاطع مخروطی همواره متوازی‌بوده‌اند. برای اینکه ببینیم درغیراین‌صورت چه رخ می‌دهد، برای‌هذلولی‌شکل ۳۸.۸ که‌کانونهایش‌در $F_1(-3, -3)$ و $F_2(3, 3)$ قراردارند معادله‌ای می‌نویسیم. به‌ازای هر نقطهٔ P واقع براین هذلولی، معادلهٔ $|PF_1 - PF_2| = 2a$ به‌صورت $|PF_1 - PF_2| = 2(3) = 6$ درمی‌آید و داریم

$$\sqrt{(x+3)^2+(y+3)^2}-\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}=\pm 6 .$$

اگر یکی از رادیکالها را به‌طرف دیگر منتقل، و دوطرف عبارت حاصل را مجذورکنیم، و سپس رادیکال حاصل را در یك طرف نگهداریم، و مجدداً دوطرف‌را مجذورکنیم، به‌معادلهٔ زیرمی‌رسیم

$$2xy = 9 \qquad (2)$$

که حالت‌خاصی‌ازمعادلهٔ (۱) است، و درآن‌جملهٔ شامل‌حاصلضرب x و y وجود دارد. مجانبهای هذلولی معادلهٔ (۲) محورهای x و y هستند، و محور تقارنی‌که کانونها برآن قراردارند، با قسمت مثبت محور x زاویهٔ $\pi/4$ رادیان می‌سازد. معادلهٔ (۱) تنها وقتی شامل جملهٔ xy است‌که محورهای مقطع مخروطی مانند این مثال کج باشند.



۳۸.۸ محورکانونی(محور تقارن‌گذرنده از کانونهای) هذلولی $2xy=9$ با قسمت مثبت محور x زاویه‌ای برابر با $\pi/4$ رادیان می‌سازد.

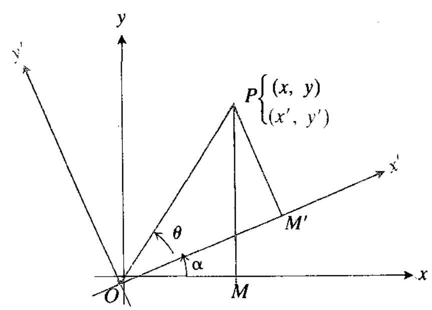
دوران‌دادن محورهای مختصات برای حذف جملهٔ xy

برای حذف جملهٔ xy از معادلهٔ یك مقطع مخروطی، محورهای مختصات را دوران می‌دهیم و «کجی» محورهای مقطع مخروطی را ازبین‌می‌بریم. معادلاتی‌که برای دوران به‌کارمی‌روند چنین به‌دست می‌آیند. با استفاده ازنمادهای شکل ۳۹.۸، که نشان‌دهندهٔ دوران درخلاف جهت ساعت حول مبدأ به‌اندازهٔ زاویهٔ α است، داریم

$$\begin{aligned} x &= OM = OP\cos(\theta+\alpha) \\ &= OP\cos\theta\cos\alpha - OP\sin\theta\sin\alpha \\ y &= MP = OP\sin(\theta+\alpha) \\ &= OP\cos\theta\sin\alpha + OP\sin\theta\cos\alpha . \end{aligned} \qquad (\text{۳ الف})$$

چون

$$OP\cos\theta = OM' = x' \quad \text{و} \quad OP\sin\theta = M'P = y' \qquad (\text{۳ ب})$$



۳۹.۸ دوران درخلاف جهت ساعت حول مبدأ و به‌اندازهٔ زاویهٔ α.

معادلات (۳ الف) به‌صورت زیر درمی‌آیند.

معادلات دوران محورهای مختصات

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha , \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha . \end{aligned} \qquad (4)$$

مثال ۱ محورهای x و y را حول مبدأ به‌اندازهٔ $\pi/4$ رادیان دوران می‌دهیم. معادلهٔ هذلولی $2xy=9$ را برحسب مختصات جدید بیابید.

حل: چون $\cos\pi/4 = \sin\pi/4 = \sqrt{2}/2$، با استفاده از معادلات (۴) جانشانیهای

$$x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$$

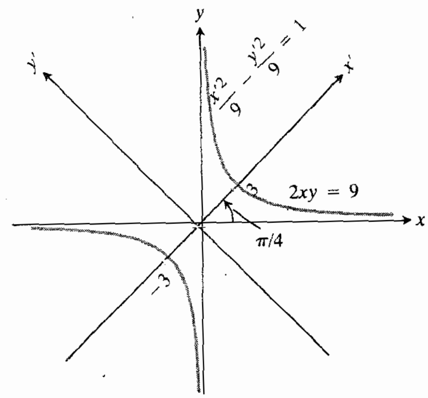
را درمعادلهٔ $۲xy=۹$ انجام می‌دهیم. داریم

$$۲\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{۲}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{۲}}\right)=۹$$

$$x'^{۲}-y'^{۲}=۹$$

$$\frac{x'^{۲}}{۹}-\frac{y'^{۲}}{۹}=۱\,.$$

شکل ۴۰.۸ را ببینید.



۴۰.۸ هذلولی مذکور درمثال ۱. ■

اگرمعادلات دورانی (۴) را در معادلهٔ درجهٔ دوم کلی (۱) به‌کار بریم، معادلهٔ درجهٔ دوم جدیدی به‌دست می‌آوریم

$$A'x'^{۲}+B'x'y'+C'y'^{۲}+D'x'+E'y'+F'=۰\,. \quad (۵)$$

معادلات زیر ارتباط بین ضرایب جدید و قدیم را نشان می‌دهند

$$\begin{aligned}
A'&=A\cos^{۲}\alpha+B\cos\alpha\sin\alpha+C\sin^{۲}\alpha\\
B'&=B\cos ۲\alpha+(C-A)\sin ۲\alpha\\
C'&=A\sin^{۲}\alpha-B\sin\alpha\cos\alpha+C\cos^{۲}\alpha\\
D'&=D\cos\alpha+E\sin\alpha\\
E'&=-D\sin\alpha+E\cos\alpha\\
F'&=F\,.
\end{aligned} \quad (۶)$$

این معادلات، از این مطلب نیز حکایت دارند که اگر در معادلهٔ خمی جملهٔ xy نیز باشد $(B\neq ۰)$، می‌توانیم یک زاویه دوران چون α بیابیم که با استفاده از آن معادله‌ای فاقد جملهٔ حاصلضرب xy $(B'\neq ۰)$ به‌دست آید. برای یافتن α، در معادلهٔ دوم ازمعادلات (۶)، به‌جای B' صفر می‌گذاریم، و معادلهٔ حاصل را حل می‌کنیم

$$B\cos ۲\alpha+(C-A)\sin ۲\alpha=۰$$

لذا درعمل باید α را از یکی از دومعادلهٔ زیر به‌دست آوریم

$$\cot ۲\alpha=\frac{A-C}{B} \quad \text{یا} \quad \tan ۲\alpha=\frac{B}{A-C}\,. \quad (۷)$$

مثال ۲ می‌خواهیم محورهای مختصات را به‌اندازهٔ زاویه‌ای چون α دوران دهیم که برای خم

$$x^{۲}+xy+y^{۲}-۶=۰ \quad (۸)$$

معادله‌ای به‌دست آید که جملهٔ xy نداشته‌باشد. α و معادلهٔ جدید را بیابید.

حل (۱): با استفاده ازمعادلات (۷)، (۶)، و (۵).
در معادلهٔ (۸) داریم $A=B=C=۱$. برای‌یافتن α این مقادیر را درمعادلهٔ (۷) قرارمی‌دهیم

$$\cot ۲\alpha=\frac{A-C}{B}=\frac{۱-۱}{۱}=۰,\quad ۲\alpha=\frac{\pi}{۲},\quad \alpha=\frac{\pi}{۴}\,.$$

اگر درمعادلات (۶) جانشانیهای $\alpha=\pi/۴$ ، $A=B=C=۱$ ، $D=E=۰$ ، و $F=-۶$ را انجام دهیم، داریم

$$A'=\frac{۳}{۲},\quad B'=۰,\quad C'=\frac{۱}{۲}$$

$$D'=E'=۰,\quad F'=-۶\,.$$

لذا، بنا به‌معادلهٔ (۵)

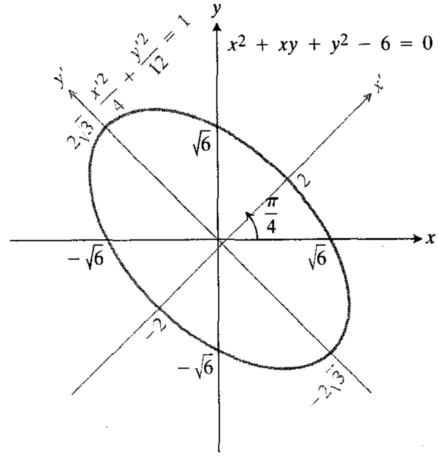
$$\frac{۳}{۲}x'^{۲}+\frac{۱}{۲}y'^{۲}-۶=۰ \quad \text{یا} \quad \frac{x'^{۲}}{۴}+\frac{y'^{۲}}{۱۲}=۱\,.$$

این،معادلهٔ بیضیی‌است که کانونهایش برمحورجدید y' قراردارند. شکل ۴۱.۸ را ببینید.

حل (۲): مستقیماً از معادلات دورانی استفاده می‌کنیم. این روش به‌فرمولهای کمتری نیاز دارد، ولی محاسبات آن بیشتر است. ابتدا مانند راه‌حل (۱)، α را می‌یابیم، و مقدار حاصل، $\alpha=\pi/۴$، را درمعادلات دورانی قرار می‌دهیم و نتایج زیر را به‌دست‌می‌آوریم

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha=\frac{\sqrt{۲}}{۲}x'-\frac{\sqrt{۲}}{۲}y'$$

$$y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha=\frac{\sqrt{۲}}{۲}x'+\frac{\sqrt{۲}}{۲}y'\,.$$



۴۱۰۸ بیضی مثال ۲.

حال عبارتهای پریم‌دار x و y را در معادلهٔ اصلی $x^{۲}+xy+y^{۲}-۶=۰$ قرارمی‌دهیم. و نتیجه می گیریم که

$$\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}x'-\frac{\sqrt{۲}}{۲}y'\right)^{۲}$$

$$+\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}x'-\frac{\sqrt{۲}}{۲}y'\right)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}x'+\frac{\sqrt{۲}}{۲}y'\right)$$

$$+\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}x'+\frac{\sqrt{۲}}{۲}y'\right)^{۲}-۶=۰$$

پس از انجام محاسبات لازم داریم

$$\frac{x'^{۲}}{۴}+\frac{y'^{۲}}{۱۲}=۱. \quad ■$$

نمودار معادلات درجهٔ دوم

حال به‌بررسی نمودار معادلهٔ درجهٔ دوم کلی می پردازیم.

چون همواره می‌توان محورها را دوران‌داد و جملهٔ xy را حذف کرد، بدون از بین‌رفتن کلیت بحث می توانیم فرض کنیم که معادله به‌صورت زیر است

$$Ax^{۲}+Cy^{۲}+Dx+Ey+F=۰. \qquad (۹)$$

معادلهٔ (۹) یکی از اشکال زیر را نمایش‌می‌دهد:

الف) دایره، اگر $A=C\neq ۰$ (حالات خاص: نمودار یك‌نقطه است، یا اصلاً نموداری وجود ندارد)؛

ب) سهمی، اگر معادلهٔ (۹) نسبت به یکی از متغیرها از درجهٔ دوم، و نسبت به‌دیگری خطی باشد؛

پ) بیضی، اگر A و C هر دومثبت یا هر دومنفی باشند (حالات خاص: نمودار یك‌نقطه است، یا اصلا نموداری وجود ندارد)؛

ت) هذلولی، اگر A و C علامتهای مختلف داشته‌باشند (حالت خاص: یك‌جفت خط متقاطع)؛

ث) خط مستقیم، اگر A و C صفر باشند، و دست‌کم یکی‌از دوضریب D یا E مخالف با صفر باشد؛

ج) یك یا دوخط مستقیم، اگرعبارت سمت‌چپ معادلهٔ (۹) را بتوان به‌حاصلضرب دوعامل خطی تجزیه‌کرد.

□ نحوهٔ استفادهٔ ماشین‌حساب از دوران

برخی از ماشینهای حساب برای محاسبهٔ سینوس وکسینوس یك زاویهٔ دلخواه از دوران استفاده‌می کنند. شیوهٔ کار از این‌قراراست: به‌حافظهٔ ماشین

۱. مثلاً ده‌زاویه نظیر

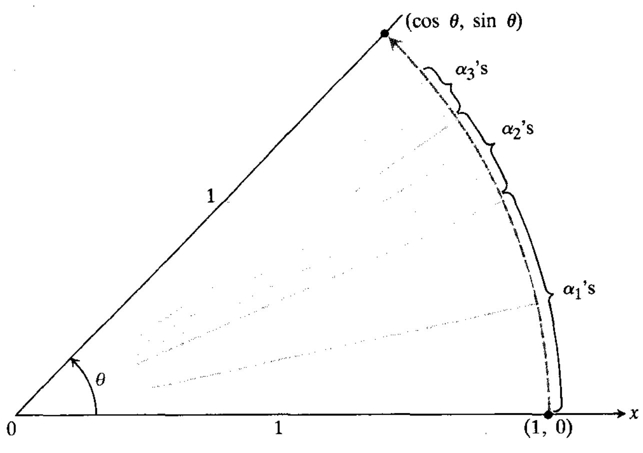
$$\alpha_{۱}=\sin^{-۱}(۱۰^{-۱}),$$

$$\alpha_{۲}=\sin^{-۱}(۱۰^{-۲}),\ \ldots,\ \alpha_{۱۰}=\sin^{-۱}(۱۰^{-۱۰})$$

و

۲. بیست عدد، سینوس وکسینوس زوایای $\alpha_{۱}$، $\alpha_{۲}$، ...، $\alpha_{۱۰}$، داده می‌شود.

برای محاسبهٔ سینوس وکسینوس زاویهٔ دلخواهی‌چون θ (برحسب رادیان)، θ را به‌ماشین می‌دهیم. ماشین ضرایبی از ۲π را به θ می‌افزاید یا از آن‌کم می‌کند تا زاویه‌ای بین ۰ و ۲π به‌دست آورد که سینوس وکسینوس آن همان سینوس وکسینوس θ باشند. (این زاویه را هم θ می‌نامیم). سپس ماشین θ را به صورت



۴۲۰۸ برای محاسبهٔ سینوس وکسینوس‌زاویه‌ای چون θ که بین ۰ و ۲π است، ماشین‌حساب نقطهٔ $(۱, ۰)$ را به‌موضع مناسبی‌واقع بردایرهٔ واحد می‌برد و مختصات حاصل را به‌نمایش می گذارد.

مجموعی از مضرب α_1 (بزرگترین مضرب ممکن به‌طوری‌که حاصل از θ بیشتر نشود) به‌علاوهٔ مضربی از α_2 (بازهم بزرگترین مضرب ممکن)، و همین‌طور تا α_{10}، «می‌نویسد». درنتیجه

$$\theta \approx m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \dots + m_{10}\alpha_{10}.$$

سپس ماشین‌حساب نقطهٔ $(1, 0)$ را به‌اندازهٔ m_1 برابر α_1 (به‌طور متوالی به‌اندازهٔ m_1 بار α_1)، به‌علاوهٔ m_2 برابر α_2، ...، و بالاخره m_{10} برابر α_{10}، دوران می‌دهد. شکل ۴۲.۸ را ببینید. مختصات نقطهٔ نهایی $(1, 0)$ واقع بر دایرهٔ واحد، مقادیری هستند که ماشین برای $(\cos\theta, \sin\theta)$ ارائه می‌کند.

مسأله‌ها

درمسائل ۱ـ۱۰ با دوران دادن محورهای‌مختصات معادلهٔ مفروض را به‌معادله‌ای تبدیل کنید‌که جملهٔ xy نداشته باشد. آنگاه نمودار معادله را مشخص کنید. (معادلات جدید به اندازه و جهت دورانی بستگی دارندکه انتخاب می‌کنید.)

۱. $xy=2$

۲. $x^2+xy+y^2=1$

۳. $3x^2+2\sqrt{3}xy+y^2-8x+8\sqrt{3}y=0$

۴. $x^2-\sqrt{3}xy+2y^2=1$

۵. $x^2-2xy+y^2=2$

۶. $x^2-3xy+y^2=5$

۷. $\sqrt{2}x^2+2\sqrt{2}xy+\sqrt{2}y^2-8x+8y+4\sqrt{2}=0$

۸. $xy-y-x+1=0$

۹. $3x^2+2xy+3y^2=19$

۱۰. $3x^2+4\sqrt{3}xy-y^2=7$

۱۱. سینوس وکسینوس زاویه‌ای را بیابید که اگر محورهای مختصات به اندازهٔ آن دوران کنند جملهٔ xy از معادلهٔ زیر حذف می‌شود

$$14x^2+16xy+2y^2-10x+26{,}370y-17=0.$$

دوران را انجام ندهید.

۱۲. $F_1(-1, 0)$ و $F_2(0, \sqrt{3})$ کانونهای یك بیضی هستند و این بیضی از نقطهٔ $(1, 0)$ می‌گذرد. (با استفاده از تعریف) معادله‌ای برای این بیضی بنویسید. سپس زاویه‌ای چون α بیابید که اگر محورهای مختصات به اندازهٔ آن دوران کنند، معادلهٔ حاصل فاقد جملهٔ xy باشد. اما، دوران را انجام ندهید.

۱۳. نشان دهید که درمعادلات دورانی، زاویهٔ α هرچه باشد معادلهٔ $x^2+y^2=a^2$ به‌صورت $x'^2+y'^2=a^2$ درمی‌آید.

۱۴. نشان دهید‌که هرگاه درمعادلهٔ (۱) داشته باشیم $A=C$، با دوران محورها به اندازهٔ زاویهٔ $\pi/4$ رادیان، جملهٔ xy از معادله حذف می‌شود.

۱۵. مطلوب‌است معادلهٔ‌خم $x^2+2xy+y^2=1$ پس‌از دوران محورها، چنانکه A' مذکور درمعادلهٔ (۶) صفر شود.

TOOLKIT PROGRAMS

Conic Sections   Super * Grapher

۷.۸ سهمی، بیضی یا هذلولی؟ مبین پاسخ می‌دهد

دراین بخش، راهی‌را ارائه می‌کنیم‌که فوراً به‌ما می‌گویدنمودار

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (1)$$

سهمی‌است یا بیضی یا هذلولی. دراین‌آزمون نیازی به‌حذف‌جملهٔ xy نیست.

مبین

دربخش قبل‌دیدیم‌که اگر B صفر نباشد، آنگاه با دوران محورها به‌اندازهٔ زاویهٔ α که از معادلهٔ

$$\cot 2\alpha=\frac{A-C}{B} \qquad (2)$$

به‌دست می‌آید معادلهٔ (۱) به‌صورت

$$A'x'^2+C'y'^2+D'x'+E'y'+F'=0 \qquad (3)$$

درمی‌آیدکه درآن جملهٔ xy وجود ندارد.

حال نمودار معادلهٔ (۳):

الف) سهمی (واقعی یا تباهیده) است هرگاه $A'=0$ یا $C'=0$؛ یعنی، اگر $A'C'=0$؛

ب) بیضی (واقعی یا تباهیده) است هرگاه A' و C' هم‌علامت باشند؛ یعنی، اگر $A'C'>0$؛

پ) هذلولی (واقعی یا تباهیده) است هرگاه A' و C' مختلف‌العلامه باشند؛ یعنی، اگر $A'C'<0$.

با استفاده ازمعادلات (۶) بخش قبل می‌توان نشان دادکه

به‌ازای هردورانی از محورها داریم

$$B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C'. \qquad (4)$$

این‌مطلب به‌این معناست که مقدار $B^2 - 4AC$ با دوران تغییر نمی‌کند. اما وقتی دوران به اندازهٔ زاویهٔ αی مذکور در معادلهٔ (۲) انجام شود، B' صفرمی‌شود و لذا داریم

$$B^2 - 4AC = -4A'C'.$$

چون خم سهمی است هر گاه $A'C' = 0$، بیضی است هر گاه $A'C' > 0$، و هذلولی است هرگاه $A'C' < 0$، پس خم

الف) اگر $B^2 - 4AC = 0$، سهمی است؛

(۵) ب) اگر $B^2 - 4AC < 0$، بیضی است؛

پ) اگر $B^2 - 4AC > 0$، هذلولی است.

عدد $B^2 - 4AC$ را مبین معادلهٔ (۱) می‌نامند. هم‌اینك دیدیم که معادلهٔ (۱) یك‌سهمی است هر گاه مبین صفر باشد، بیضی است هرگاه مبین منفی باشد، وهذلولی است هرگاه مبین مثبت باشد (با توجه به‌این‌مطلب که،گهگاه موارد تباهیده هم‌پیش‌می‌آید).

مثال ۱

الف) معادلهٔ $3x^2 - 6xy + 3y^2 + 2x - 7 = 0$ یك‌سهمی است زیرا

$$B^2 - 4AC = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 36 - 36 = 0.$$

ب) معادلهٔ $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ یك بیضی است زیرا

$$B^2 - 4AC = (1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0.$$

پ) معادلهٔ $xy - y^2 - 5y + 1 = 0$ یك هذلولی است زیرا

$$B^2 - 4AC = (1)^2 - 4(0)(-1) = 1 > 0. \quad ■$$

نامتغیر [ناوردای] $A + C$

مقدار نامتغیر دیگری که می‌توان در ارتباط با معادلات (۱) و (۳) درنظر گرفت عبارت‌است ازمجموع ضرایب جملات مجذور. چون به‌ازای هرزاویهٔ α، $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$، ازمعادلات (۶) در بخش ۶.۸ داریم

$$\begin{aligned} A' + C' &= A(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) \\ &\quad + C(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = A + C. \end{aligned} \qquad (6)$$

با استفاده از دونامتغیر $B^2 - 4AC$ و $A + C$ می‌توان احتمال وقوع خطاهای عددی در دوران محورها را بررسی کرد. همچنین ازآنهامی‌توان برای‌محاسبهٔ ضرایب A' و C' موجود درمعادلهٔ (۳)، وقتی که محورها را دوران می‌دهیم تا B' را صفر کنیم، استفاده کرد.

مثال ۲ با دوران دادن محورها، جملهٔ xy موجود درمعادلهٔ

$$x^2 + xy + y^2 = 1$$

را حذف کنید و معادلهٔ جدید را بنویسید.

حل: ازمعادلهٔ مفروض روابط زیر را می‌یابیم

$$B^2 - 4AC = -3, \quad A + C = 2.$$

حال، اگر B' را برابر باصفربگیریم، از معادلات (۴)و (۶) داریم

$$-4A'C' = -3, \quad A' + C' = 2$$

و ازآن نتیجه می‌گیریم که خم یك بیضی‌است. اگر $C' = 2 - A'$ ازمعادلهٔ دوم را درمعادلهٔ اول قراردهیم، داریم

$$-4A'(2 - A') = -3$$

$$4A'^2 - 8A' + 3 = 0$$

$$(2A' - 3)(2A' - 1) = 0$$

و

$$A' = \frac{3}{2} \quad \text{یا} \quad A' = \frac{1}{2}.$$

مقادیرمتناظر C' عبارت‌اند از

$$C' = \frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad C' = \frac{3}{2}.$$

پس معادله برحسب مختصات جدید به‌صورت

$$\frac{3}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 = 1 \qquad (\text{۷ الف})$$

یا

$$\frac{1}{2}x'^2 + \frac{3}{2}y'^2 = 1 \qquad (\text{۷ ب})$$

است. برتری معادلات (۷ الف و ب) برمعادلهٔ اصلی این است که فوراً اطلاعاتی دربارهٔ شکل بیضی یعنی طول قطرها، فاصلهٔ مرکز تا کانون، و خروج ازمرکز به ما می‌دهند. ■

مسأله‌ها

درمسائل ۱–۱۷ به‌کمك مبین تعیین کنید که معادلهٔ مفروض دایره است، یا سهمی، یا بیضی، و یا هذلولی.

۱. $x^۲-y^۲-۱=۰$

۲. $۲۵x^۲+۹y^۲-۲۲۵=۰$

۳. $y^۲-۴x-۴=۰$

۴. $x^۲+y^۲-۱۰=۰$

۵. $x^۲+۴y^۲-۴x-۸y+۴=۰$

۶. $x^۲+y^۲+xy+x-y=۳$

۷. $۲x^۲-y^۲+۴xy-۲x+۳y=۶$

۸. $x^۲+۴xy+۴y^۲-۳x=۶$

۹. $x^۲+y^۲+۳x-۲y=۱۰$

۱۰. $xy+y^۲-۳x=۵$

۱۱. $۳x^۲+۶xy+۳y^۲-۴x+۵y=۱۲$

۱۲. $x^۲-y^۲=۱$

۱۳. $۲x^۲+۳y^۲-۴x=۷$

۱۴. $x^۲-۳xy+۳y^۲+۶y=۷$

۱۵. $۲۵x^۲-۴y^۲-۳۵۰x=۰$

۱۶. $۶x^۲+۳xy+۲y^۲+۱۷y+۲=۰$

۱۷. $۳x^۲+۱۲xy+۱۲y^۲+۴۳۵x-۹y+۷۲=۰$

۱۸. یك فرمول جالب برای مساحت بیضی. وقتی $B^۲-۴AC$ منفی باشد، خم

$$Ax^۲+Bxy+Cy^۲=۱$$

بیضی است. اگر نصف قطرها a، و b باشند، مساحت این بیضی πab است. نشان دهید مساحت این بیضی از فرمول $۲\pi/\sqrt{۴AC-B^۲}$ نیز به‌دست می‌آید. (راهنمایی: محورهای مختصات را دوران دهید تا جملهٔ xy حذف شود، سپس معادلهٔ ۴ را درمورد معادلهٔ جدید به‌کار ببرید.)

۱۹. با استفاده از معادلات (۶) دربخش ۶.۸ نشان‌دهید که به‌ازای هرزاویهٔ دوران α،

$$D'^۲+E'^۲=D^۲+E^۲.$$

۲۰. اگر در معادلهٔ (۱) داشته باشیم $C=-A$، نشان دهید دوران خاصی ازمحورها وجود دارد به‌قسمی که درمعادلهٔ حاصل، معادلهٔ ۳، داشته باشیم $A'=C'=۰$. دراین حالت زاویهٔ α، زاویهٔ دوران، را بیابید. (راهنمایی: چون $A'+C'=۰$، کافی است درمعادلهٔ (۳)، A' را مساوی صفر قراردهید.)

۲۱. اثبات رابطهٔ (۴). برای اینکه نشان‌دهید به‌ازای هردورانی ازمحورها داریم $B'^۲-۴A'C'=B^۲-۴AC$، ازمعادلات (۶) در بخش ۶.۸ استفاده کنید. (محاسبات با شکیبایی به نتیجه می‌رسند.)

۸.۸ مقاطع مخروطی

دراین بخش نشان می‌دهیم که اگر یك مخروط دو دامنه را با صفحه‌ای قطع کنیم، خم حاصل درمعادلهٔ $PF=e\cdot PD$، که در آن F و D به‌طرز مناسبی انتخاب شده‌اند، صدق می‌کند. پس، هرمقطع مخروطی «هندسی» یك مقطع مخروطی «جبری» هم هست.

فرض می‌کنیم صفحهٔ قاطع با محور مخروط زاویهٔ حاده‌ای چون α بسازد، و زاویهٔ حادهٔ بین مولد و محور مخروط β باشد (شکل ۴۳.۸ را ببینید). بدین‌ترتیب مقطع

i) دایره است، هرگاه $\alpha=۹۰°$؛

ii) بیضی است، هرگاه $\beta<\alpha<۹۰°$؛

iii) سهمی است، هرگاه $\alpha=\beta$؛

iv) هذلولی است، هرگاه $۰\leqslant\alpha<\beta$.

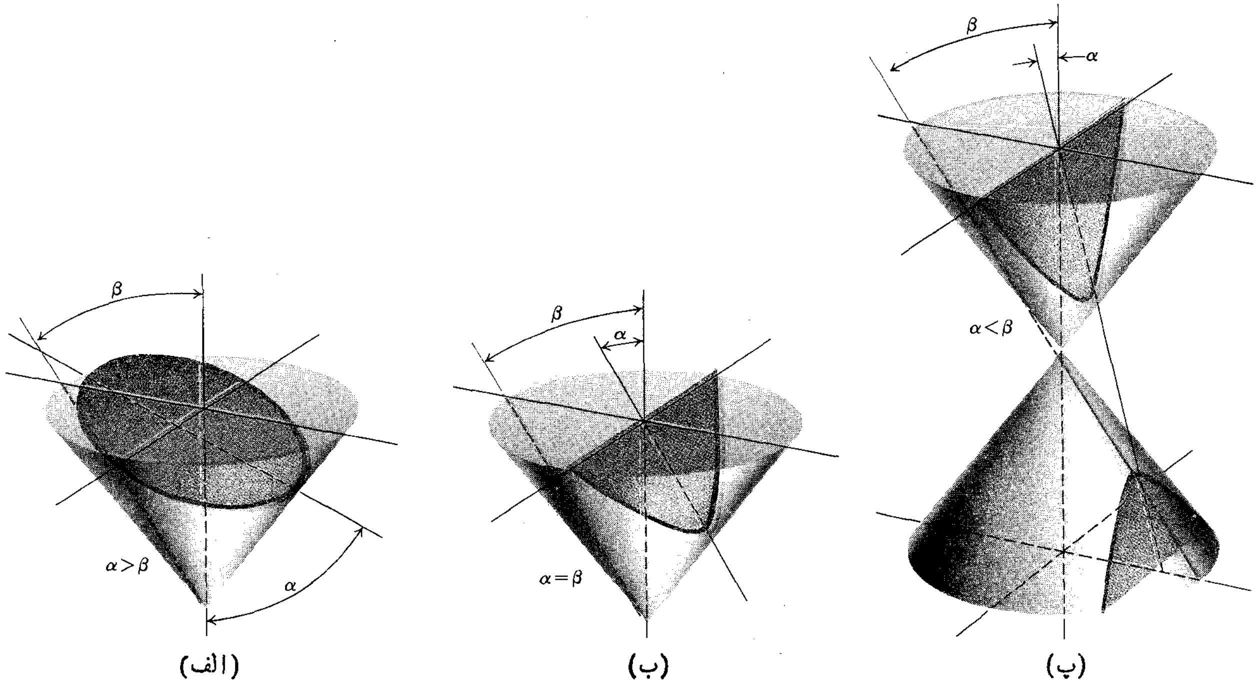
شکل ۴۴.۸ ارتباط بین خمهایی را که به‌صورت فوق تعریف کرده‌ایم با مقاطع یك‌مخروط نشان می‌دهد. هرچند شکلی که دیده می‌شود، بیضی است، اما استدلال درسایر موارد هم‌کاراست. روش کلی به‌دست آوردن آن به‌شرح زیر است:

کره‌ای را چنان درمخروط محاط می‌کنیم که دایرهٔ C محل تماس آن با مخروط، و نقطهٔ F محل‌تماس آن با صفحهٔ قاطع باشد. نقطهٔ P نقطهٔ دلخواهی ازمقطع مخروطی است. خواهیم دید که F یکی ازکانونهای این خم است، و خط L یعنی فصل مشترك صفحهٔ قاطع و صفحه دایرهٔ C یك هادی ازخم‌است. برای رسیدن به‌این نتایج، فرض کنید Q محل تلاقی صفحهٔ C باشد با خطی که از P به‌موازات محور مخروط رسم‌می‌شود، و A نقطهٔ تماس C با خطی باشد که P را به رأس مخروط وصل می‌کند، و فرض کنید خط PD در نقطهٔ D برخط L عمود باشد. آنگاه دو خط PA و PF از نقطهٔ مشترك P برکره مماس شده‌اند، و در نتیجه طول برابر دارند:

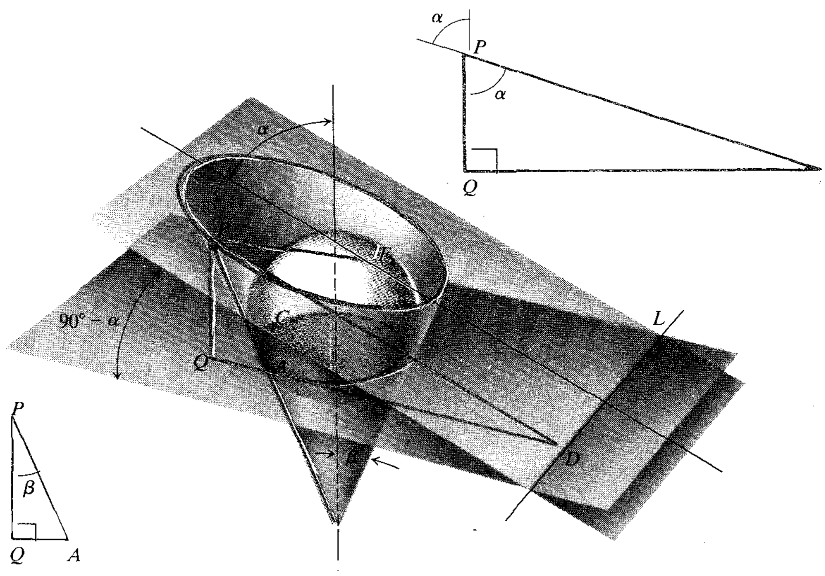
$$PA=PF.$$

همچنین، با توجه به‌مثلث قائم‌الزاویهٔ PQA داریم

$$PQ=PA\cos\beta$$



۴۳۰۸ مقطع یک‌صفحه با یک مخروط دوپارچه،(الف) یک بیضی (ب) یک سهمی، (پ) یک هذلولی. زاویهٔ β زاویه بین یال و محورمخروط است. زاویهٔ α زاویهٔ حادهٔ بین صفحه و محور مخروط است.



۴۴۰۸ خط L هادی متناظر باکانون F بیضی‌است.

و از مثلث قائم‌الزاویهٔ PQD می‌بینیم که

$$PQ = PD\cos\alpha.$$

پس

$$PA\cos\beta = PD\cos\alpha$$

یا

$$\frac{PA}{PD}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}. \qquad (۱)$$

اما، چون $PA=PF$، داریم

$$\frac{PF}{PD}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \qquad (۲)$$

یا

$$PF=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}PD. \qquad (۳)$$

ازآنجاکه α و β برای یك مخروط و یك صفحهٔ قاطع ثابت‌اند، معادلهٔ (۳) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$PF=e\ .\ PD. \qquad (۴)$$

این‌مطلب حاکی‌است که بسته به‌اینکه $e=1$، $e<1$، یا $e>1$، که در آن

$$e=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$$

نقطهٔ P به‌ترتیب متعلق است به‌یك‌سهمی، یك‌بیضی، یا یك‌هذلولی به‌کانون F و هادی L. بنابراین در اینجا عدد e همان خروج از مرکز است.

مسأله‌ها

۱. برای حالتی‌که مقطع مخروطی سهمی باشد شکلی نظیر شکل ۴۴.۸ رسم کنید، و براساس این شکل، استدلال این بخش را تکرار کنید.

۲. برای حالتی‌که مقطع مخروطی هذلولی باشد شکلی نظیر شکل ۴۴.۸ رسم کنید، و براساس این شکل، استدلال این بخش را تکرار کنید.

۳. درحالتی که‌مقطع‌مخروطی‌دایره باشد، چه بخشهایی‌از ترسیمات مذکور دراین بخش ناممکن می‌شود؟

۴. فرض‌کنید یکی از هادیها خط $x=-p$ وکانون متناظر این هادی، مبدأ باشد. با استفاده از معادلهٔ $PF=e\ .\ PD$ معادلهٔ کلی مقطع مخروطی با خروج ازمرکز e را به دست‌آورید. اگر e نه ۰ باشد، و نه ۱، نشان دهیدکه مرکز مقطع مخروطی نقطهٔ زیر است

$$\left(\frac{pe^2}{1-e^2},0\right).$$

۹.۸ معادلات پارامتری‌مقاطع‌مخروطی وخمهای‌دیگر

در این بخش، به بررسی معادلات پارامتری حرکت ذره در امتداد مقاطع‌مخروطی و دیگرخمهای واقع درصفحه می‌پردازیم. ازجمله چرخه‌زادها و چرخزادها را بررسی می‌کنیم که ازحرکت ذرات واقع برچرخهای غلتان به‌دست می‌آیند. توصیه می‌شود قبل از مطالعهٔ این بخش، بخش ۸.۲ را به‌اختصار مرورکنید.

معادلات پارامتری مقاطع مخروطی

معادلات پارامتری موضع یك ذرهٔ متحرك درصفحه را گاه معادلات پارامتری مسیرحاصل ازحرکت ذره می‌نامند. پس، معادلاتی راکه حرکت یك ذره به‌دور یك دایره را توصیف می‌کنند می‌توان معادلات پارامتری دایره نامید. همچنین معادلاتی راکه حرکت یك‌ذره برسهمی را توصیف می‌کنند می‌توان معادلات پارامتری سهمی خواند. مثالهای زیر این مطلب را نشان می‌دهند.

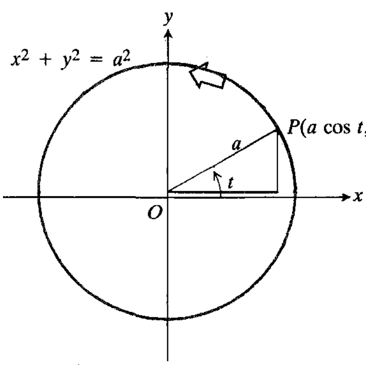
مثال ۱ معادلات پارامتری دایرهٔ $x^2+y^2=a^2$. حرکت‌ذره‌ای را توصیف‌کنیدکه موضع‌آن، $P(x,y)$، درلحظهٔ t ازمعادلات زیر به‌دست‌آید

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi. \qquad (۱)$$

حل: چون

$$x^2+y^2=a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t=a^2$$

ذره روی دایرهٔ به‌مرکز مبدأ و به‌شعاع a حرکت می‌کند. وقتی t برابر با صفراست، ذره‌حرکت‌خود را ازنقطهٔ $(a,0)$ آغازمی‌کند، و وقتی t از ۰ تا 2π افزایش‌می‌یابد، یك‌بار درخلاف‌جهت‌ساعت به‌دور دایره می‌چرخد. شکل ۴۵.۸ را ببینید.



۴۵.۸ معادلات $x=a\cos t$، $y=a\sin t$، $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ معادلات پارامتری دایرهٔ $x^2+y^2=a^2$ اند.

■

مثال ۲ معادلات پارامتری سهمی $x=y^2$. حرکت ذره‌ای را توصیف‌کنیدکه موضع آن، $P(x,y)$، درلحظهٔ t ازمعادلات زیر به‌دست آید

$$x=t^2,\quad y=t,\quad -\infty<t<\infty.$$

حل: با حذف t بین‌معادلات مربوط به x و y، یك معادلهٔ دکارتی برای مختصات ذره به‌دست می‌آوریم. چون

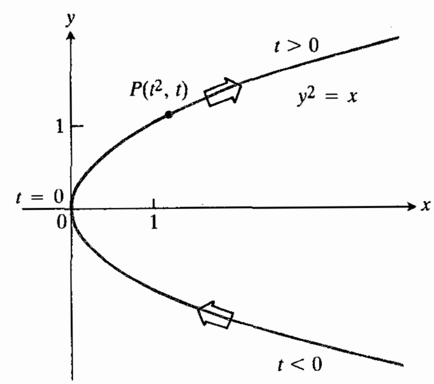
$$y^{2}=t^{2}=x$$

می بینیم که مسیرحرکت، سهمی

$$y^{2}=x$$

است (شکل ۴۶.۸). وقتی t از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند، ذره از نیمهٔ پایین سهمی بالا می‌آید، در لحظه‌ای که t صفر است به‌مبدأ می‌رسد، و با ادامهٔ افزایش مقدار t در ربع اول به‌حرکت خود ادامه می‌دهد.

همان‌گونه‌که در بخش ۸.۲ درمورد دایره دیدیم، هرخم مفروض را می‌توان در دوجهت پیمود، وهرخم معادلات پارامتری مختلفی دارد. در بین معادلات پارامتری سهمی می‌توان از معادلات پارامتری $-\pi/2<t<\pi/2$ ،$x=(\tan^{-1}t)$ ،$y=(\tan^{-1}t)^{2}$ (بـا همـان جهت، و بـا بـازهٔ متناهی) و $x=t^{2}$ ، $y=-t$ ، $-\infty<t<\infty$ (جهت عکس) یادکرد.



۴۶.۸ معادلات $x=t^{2}$ ، $y=t$ ، $-\infty<t<\infty$، معادلات پارامتری سهمی $x=y^{2}$ اند. ■

مثال ۳ معادلات پارامتری بیضی $x^{2}/a^{2}+y^{2}/b^{2}=1$. حرکت ذره‌ای را مشخص کنیدکه موضع آن، $P(x, y)$، در لحظهٔ t از معادلات زیر به‌دست آید

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

حل: با حذف t بین معادلات مربوط به x و y، یك‌معادلهٔ دکارتی برای مختصات ذره می‌یابیم. چون

$$\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=\frac{a^{2}\cos^{2}t}{a^{2}}+\frac{b^{2}\sin^{2}t}{b^{2}}=\cos^{2}t+\sin^{2}t=1$$

حرکت روی بیضی $x^{2}/a^{2}+y^{2}/b^{2}=1$ انجام می‌شود. وقتی t برابر بـا صفر است، ذره از $(a, 0)$ شروع به‌حـرکت می‌کند،

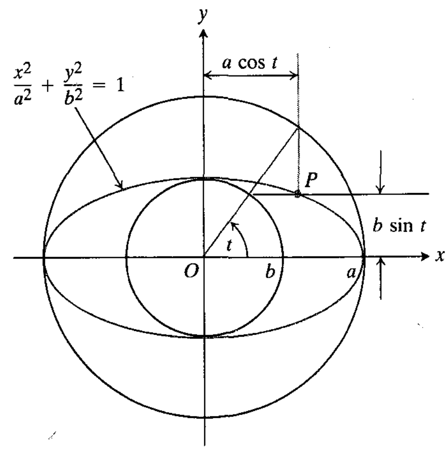
■ ■ ■

«به‌خاطر جوانان انگلیسی»

هـرچند نخستین‌کتاب درسی حساب دیفرانسیل را هـوپیتال در ۱۶۹۶ نـوشت، ولی نخستین‌کتاب درسیی کـه علاوه بـرحساب دیفرانسیل و انتگرال، هندسهٔ تحلیلی، سریهای‌نامتناهی، و معادلات دیفرانسیل را هم دربـرداشت کتابی است مـوسوم بـه آموزش آنالیز که در ۱۷۴۸ ریاضیدان، زبانشناس، و فیلسوف ایتالیایی مـاریا آنیزی (۱۷۱۸-۱۷۹۹) آن را نوشت. آنیزی دربچگی ازکودکان استثنایی‌بود و درجوانی‌چندین‌زبان‌را خوب‌می‌دانست. تنها نه‌سال داشت‌کـه مقالهٔ او به‌زبان لاتینی‌کـه ازآموزش عالی برای زنان دفاع‌می‌کرد به‌چاپ رسید.وی‌در بیست‌سالگی یك رشته مقاله در زمینهٔ فلسفه و علوم طبیعی نـوشت، و وقتی‌کتاب آموزش آنـالیز او از چـاپ خارج شد، سی‌سال بیشتر نداشت. این‌کتاب شهرت فراوانی یافت و سبب شد آنیزی‌یك سال بعد از انتشار آن به‌عنوان عضو افتخاری هیأت علمی دانشگاه بلونیا پـذیرفته شود. پس ازفوت‌پدرش درسال ۱۷۵۲، بقیهٔ عمرخود را صرف مطالعات مذهبی و انجام کارهای عام‌المنفعه‌کرد.

آمـوزش آنـالیز آنیزی کشیش انگلیسی جـان کالسن را چنان تحت تأثیر قرارداد که تصمیم گرفت صرفـاً به‌منظور ترجمهٔ این‌کتاب زبان ایتالیایی‌را بیاموزد. کالسن‌که در ۱۷۳۶ اثرنیوتن در زمینهٔ فلوکسیونها را ازلاتین به انگلیسی ترجمه‌کرده بود، گفته است، اثر آنیزی را ترجمه‌کرده‌ام «تـا جوانان انگلیسی نیز مثل جوانان ایتالیایی‌بتوانند ازآن بهره‌مندشوند.»جان‌هلینس ویراستار این اثرمی‌نویسد‌که کالسن به‌تعلیم و تربیت دختران انگلیسی علاقه ویژه‌ای داشته‌است.

و وقتی t از ۰ تا ۲π تغییر می‌کند ذره دقیقاً یک بار در خلاف جهت ساعت به‌دور بیضی می‌چرخد. شکل ۴۷.۸ را ببینید.



۴۷.۸ مختصات P عبارت‌اند از $x=a\cos t$، $y=b\sin t$.

■

مثال ۴ معادلات پارامتری شاخهٔ راست هذلولی $x^۲-y^۲=۱$. حرکت ذره‌ای را توصیف کنید که موضع آن، $P(x,y)$، در لحظهٔ t از معادلات زیر به‌دست می‌آید

$$x=\sec t,\quad y=\tan t,\quad -\frac{\pi}{۲}<t<\frac{\pi}{۲}.$$

حل: با حذف t بین معادلات مربوط به x و y، یک‌معادلهٔ دکارتی برای مختصات P می‌یابیم. چون

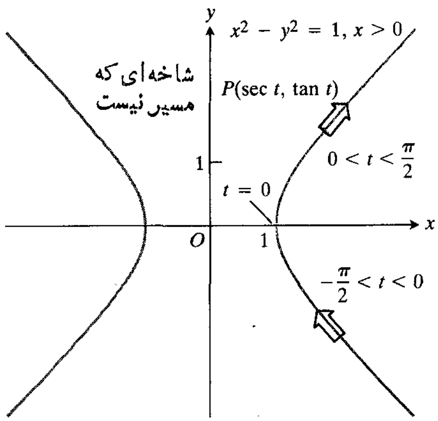
$$x^۲-y^۲=\sec^۲ t-\tan^۲ t=۱$$

می بینیم که حرکت روی بخشی از هذلولی $x^۲-y^۲=۱$ انجام می‌شود. چون $x=\sec t$ به‌ازای مقادیری از t که در $-\pi/۲<t<\pi/۲$ صدق می‌کنند همیشه مثبت است، حرکت بر شاخهٔ راست هذلولی انجام می‌شود. وقتی t از $-\pi/۲$ تا $\pi/۲$ تغییر می‌کند، ذره در امتداد نیمهٔ پایین شاخهٔ راست بالا می‌آید، و در $t=۰$ به‌مبدأ می‌رسد. سپس وقتی t به $\pi/۲$ میل می‌کند، ذره در ربع اول، این‌شاخه را به‌طورکامل می‌پیماید. شکل ۴۸.۸ را ببینید. ■

مثال ۵ طاق سهموی. خمی را رسم کنید که مختصات هر نقطهٔ $P(x,y)$ آن درمعادلات زیر صدق کنند

$$x=\cos t,\quad y=۱-\cos ۲t,\quad -\infty<t<\infty. \qquad (۲)$$

حل: با حذف t، یک معادلهٔ دکارتی برای خم به دست



۴۸.۸ معادلات $x=\sec t$، $y=\tan t$، $-\pi/۲<t<\pi/۲$، معادلات پارامتری شاخهٔ راست هذلولی $x^۲-y^۲=۱$ هستند.

می‌آوریم

$$y=۱-\cos ۲t=۱-۲\cos^۲ t+۱=۲-۲x^۲.$$

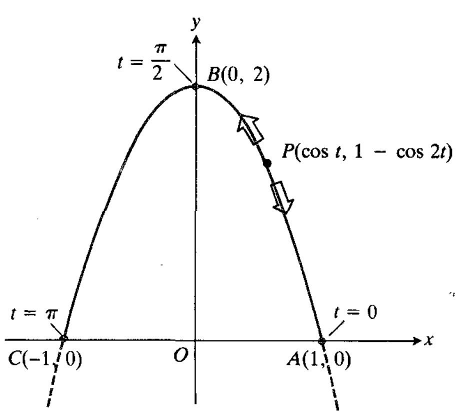
پس هر نقطهٔ نمودار (۲) برسهمی زیر قراردارد

$$y=۲-۲x^۲. \qquad (۳)$$

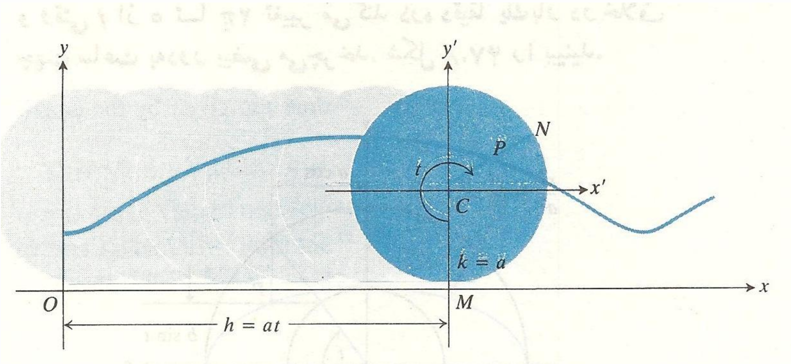
اما، معادلات پارامتری (۲) تنها بخشی از سهمی (شکل ۴۹.۸) را به‌دست می‌دهند که در آن

$$-۱\leqslant x=\cos t\leqslant ۱ \quad \text{و} \quad ۰\leqslant y=۱-\cos ۲t\leqslant ۲.$$

از(۲) درمی‌یابیم که نقطهٔ $P(x,y)$ در $t=۰$ در $A(۱,۰)$ است. سپس وقتی t زیاد می‌شود، نقطه به‌طرف بالا و چپ می‌رود و وقتی $t=\pi/۲$، به $B(۰,۲)$ می‌رسد. وقتی‌همچنان t بازهم زیاد می‌شود و به π نزدیک می‌شود، نقطه به‌طرف $C(-۱,۰)$ می‌رود.



۴۹.۸ وقتی t از $-\infty$ تا ∞ تغییر کند، نقطهٔ P بر طاق‌سهموی رفت‌وبرگشت می‌کند.



۵۰۰۸ چرخه‌زاد $x=at-b\sin t$ ، $y=a-b\cos t$ ، به‌ازای $t\geqslant$ ۰ نشان داده شده‌است.

وقتی t از π تا ۲π تغییر می‌کند، نقطه‌روی طاق CBA به A برمی‌گردد. چون x و y دوره‌ای، x با دورهٔ ۲π و y با دورهٔ π ، هستند، هر تغییر دیگر t به‌باز پیمودن بخشی از این طاق منجر می‌شود. ■

مثال ۶ چرخه‌زاد و چرخزاد. چرخی به‌شعاع a در امتداد یك خط افقی، بدون لغزش می‌غلتد. نقطه‌ای چون P بریکی از پره‌های این چرخ به‌فاصلهٔ b واحد از مرکز آن قراردارد؛ مسیری را که نقطهٔ P می‌پیماید، بیابید. این‌خم را **چرخه‌زاد** می‌نامند. اگر $b=a$ ، P برمحیط چرخ واقع است، و خم حاصل **چرخزاد** نام دارد. این خم نظیر مسیری است که ریگی واقع بریکی از عاجهای لاستیك اتومبیل درحال حرکت می‌پیماید.

حل: درشکل ۵۰۰۸ ، خطی را که چرخ روی آن می‌غلتد، محور x گرفته‌ایم، ومحور y چنان انتخاب‌شده‌است که از پایینترین نقاط چرخه‌زاد بگذرد. معمولاً زاویهٔ t را که CP می‌پیماید به‌عنوان پارامتر درنظر می‌گیریم. چون چرخ بدون لغزش می‌چرخد، فاصلهٔ OM که چرخ به‌طورافقی‌می‌پیماید دقیقاً برابراست باقوس مستدیر $MN=at$. (چرخ را به‌عقب بغلتانید. دراین‌صورت N برمبدأ O قرار خواهد گرفت.) پس مختصات x و y نقطهٔ C عبارت‌اند از

$$h=at, \quad k=a. \tag{۴}$$

حال محورهای x' و y' را معرفی می‌کنیم که با محورهای x و y موازی‌اند، و مبدأ در C واقع‌است (شکل ۵۱۰۸). ارتباط مختصات قدیم و جدید P را معادلات زیرنشان می‌دهند

$$x=h+x', \quad y=k+y'. \tag{۵}$$

ازشکل ۵۱۰۸ فوراً دیده می‌شود که

$$x'=b\cos\theta, \quad y'=b\sin\theta$$

یا، چون

$$\theta=\frac{3\pi}{2}-t$$

داریم

$$x'=-b\sin t, \quad y'=-b\cos t. \tag{۶}$$

اگر این نتایج و معادلات (۵) را در (۴) قراردهیم، داریم

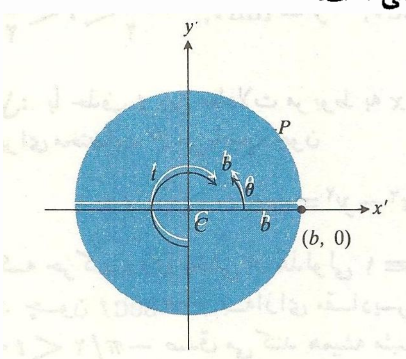
$$x=at-b\sin t, \quad y=a-b\cos t \tag{۷}$$

که معادلات پارامتری این چرخه‌زاد است.

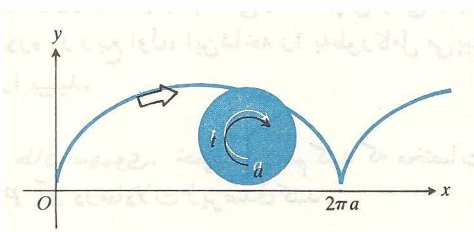
چرخ‌زاد (شکل ۵۲۰۸) با معادلات

$$x=a(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t) \tag{۸}$$

که ازقراردادن a به‌جای b درمعادلات (۷) به‌دست‌می‌آید، حالت خاص بسیار مهمی است.



۵۱۰۸ مختصات x' و y' نقطهٔ P عبارت‌انداز $x'=b\cos\theta$ ، $y'=b\sin\theta$.

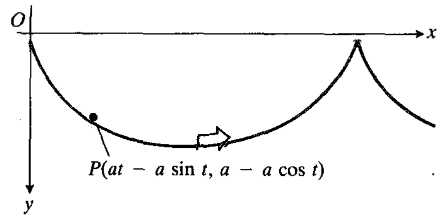


۵۲۰۸ چرخ‌زاد $x=a(t-\sin t)$ ، $y=a(1-\cos t)$ که به‌ازای $t\geqslant$ ۰ نشان داده شده‌است.

■

مسائل کوتاهترین زمان و همزمانی

اگر شکل ۵۲۰۸ را برگردانیم، معادلات (۸) بازهم برقرارند، و خم حاصل (شکل ۵۳۰۸) ویژگیهای جالب چندی دارد که در اینجا یکی از آنها را بدون اثبات مطرح می‌کنیم. اثبات این مطلب به شاخه‌ای از ریاضیات متعلق است که حساب وردشها نام دارد. بخش عظیمی از نظریهٔ اساسی این موضوع به برادران برنولی، یوهان و یاکوب، منتسب است که رقابتی دوستانه باهم داشتند و درمورد مسائل ریاضی یکدیگر را به‌مبارزه می‌طلبیدند. یکی از این مسائل، مسألهٔ «کوتاهترین زمان» است: در بین تمام خمهای هموار که دونقطهٔ مفروض را به‌هم وصل می‌کنند، خمی را بیابید که اگر مهره‌ای که تنها تحت تأثیر نیروی گرانش است روی آن بلغزد، در کوتاهترین زمان آن را بپیماید.



۵۳۰۸ برای مطالعهٔ حرکت جسمی تحت تأثیر نیروی گرانش درامتداد چرخزاد وارونه، شکل ۵۲۰۸ را برمی‌گردانیم. درنتیجه، محور y درجهت نیروی گرانش قرار می‌گیرد، و تمام مختصات y رو به پایین مثبت می‌شوند. معادلات چرخزاد هنوزهم $x=a(t-\sin t)$ و $y=a(1-\cos t)$ هستند.

دونقطهٔ $P_\circ$ و P_1 در شکل ۵۴۰۸ را می‌توان به ترتیب در مبدأ و درنقطهٔ (x_1, y_1) واقع بریك صفحهٔ قائم اختیار کرد. این مسأله را می‌توان به‌زبان ریاضی چنین فرمولبندی کرد. انرژی جنبشی مهره درآغاز صفر است، زیرا سرعت آن صفر است. کاری که نیروی گرانش درحرکت‌دادن مهره ازنقطهٔ $(\circ, \circ)$ به‌هر نقطهٔ‌دلخواه (x, y) انجام می‌دهد برابراست با mgy که باید برابر با تغییر انرژی جنبشی باشد؛ یعنی

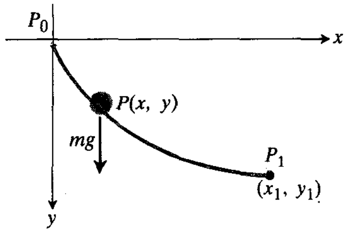
$$mgy=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}m(\circ)^2.$$

پس سرعت مهره یعنی

$$v=\frac{ds}{dt}$$

وقتی که مهره به $P(x, y)$ می‌رسد برابراست با

$$v=\sqrt{2gy}.$$



۵۴۰۸ مهره‌ای که تحت تأثیر نیروی گرانش بریك چرخزاد بدون اصطکاك می‌لغزد.

درنتیجه

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{2gy} \quad \text{یا} \quad dt=\frac{ds}{\sqrt{2gy}}=\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}{\sqrt{2gy}}. \qquad (9)$$

زمان لازم T_1 برای لغزش مهره از $P_\circ$ تا P_1 بستگی به‌خم $y=f(x)$ دارد که مهره برامتدادآن می‌لغزد. این زمان از معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$T_1=\int_\circ^{x_1} dt=\int_\circ^{x_1}\sqrt{\frac{1+(dy/dx)^2}{2gy}}\,dx. \qquad (10)$$

مسأله، یافتن خم $y=f(x)$ (درصورت وجود) است که از نقاط $P_\circ(\circ, \circ)$ و $P_1(x_1, y_1)$ بگذرد و مقدار انتگرال مذکور در (۱۰) را مینیمم کند.

درنظر اول ممکن است حدس بزنیم که خط مستقیم ماربر $P_\circ$ و P_1 ممکن است کوتاهترین زمان را نیز به‌دست‌دهد، اما با اندکی تأمل، دراین حدس تردید می‌کنیم. ممکن‌است، درصورتی که مهره در ابتدا به‌طور قائم سقوط کند، تندتر برسرعتش اضافه شود تا اینکه در امتداد یك‌خم مایل بلغزد، و درنتیجه ممکن است در وقت صرفه‌جویی شود. با این سرعت بیشتر، ممکن است مهره مسیرطولانیتری را بپیماید، ولی بازهم در زمان کوتاهتری به P_1 برسد. حل این مسأله درحد این کتاب نیست، اما خم کوتاهترین زمان، درصورت وجود، در واقع قوسی از چرخزاد ماربر $P_\circ$ و P_1 است که درمبدأ یك برگشت و در P_1 یك مماس افقی‌دارد.

اگرمعادلهٔ (۹) را به‌صورت هم‌ارز

$$T_1=\int_\circ^{x_1}\sqrt{\frac{dx^2+dy^2}{2gy}}$$

بنویسیم و سپس معادلات (۸) را دراین معادله قراردهیم، داریم

$$T_1=\int_\circ^{t_1}\sqrt{\frac{a^2(2-2\cos t)}{2ga(1-\cos t)}}\,dt=t_1\sqrt{\frac{a}{g}}$$

که زمان لازم برای لغزش مهره از P_0 تا P_1 است. زمان لازم برای رسیدن مهره به ته‌قوس به‌ازای $t_1 = \pi$ به دست می‌آید. نکته عجیب، همان گونه که نشان خواهیم داد، این است که زمان لازم برای لغزیدن مهره در امتداد این چرخزاد از $(0, 0)$ تا پایینترین نقطه، $(a\pi, 2a)$، برابراست با زمان لازم برای لغزیدن همین مهره از یك نقطهٔ میانی، مثلاً (x_0, y_0)، تا $(a\pi, 2a)$ با این شرط که حرکت مهره از سکون آغاز شود. سرعت مهره وقتی از یك نقطهٔ میانی به‌راه می‌افتد عبارت است از

$$v = \sqrt{2g(y - y_0)}$$

و زمان لازم برابراست با

$$T = \int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{a^2(2 - 2\cos t)}{2ag(\cos t_0 - \cos t)}}\, dt$$

$$= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{\cos t_0 - \cos t}}\, dt$$

$$= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{2\sin^2(t/2)}{[2\cos^2(t_0/2) - 1] - [2\cos^2(t/2) - 1]}}\, dt$$

$$= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \frac{\sin(t/2)\, dt}{\sqrt{\cos^2(t_0/2) - \cos^2(t/2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t=t_0}^{t=\pi} \frac{-2\, du}{\sqrt{a^2 - u^2}} \quad \left(\begin{array}{c} u = \cos(t/2) \\ -2\, du = \sin(t/2)\, dt \\ a = \cos(t_0/2) \end{array}\right)$$

$$= 2\sqrt{\frac{a}{g}} \left[-\sin^{-1}\frac{u}{a}\right]_{t=t_0}^{t=\pi}$$

$$= 2\sqrt{\frac{a}{g}} \left[-\sin^{-1}\frac{\cos(t/2)}{\cos(t_0/2)}\right]_{t_0}^{\pi}$$

$$= 2\sqrt{\frac{a}{g}}(-\sin^{-1} 0 + \sin^{-1} 1) = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

چون این‌جواب مستقل از مقدار t_0 است، بنابراین زمانی که طول می‌کشد تا یك ذرهٔ واقع برچرخزاد، حرکت خود را از یك نقطهٔ دلخواه و ازحالت‌سکون آغاز کند و به‌پایینترین‌نقطه برسد همواره یکسان‌است. پس درشکل ۵۵.۸، سه ذره‌ای که دریك لحظه حرکت خود را از O، A، و B آغازمی کنند، همزمان به‌نقطهٔ C می‌رسند. بدین‌لحاظ، چرخزاد را علاوه‌برخم **کوتاهترین زمان**، **خم‌همزمانی** هم می‌نامند.

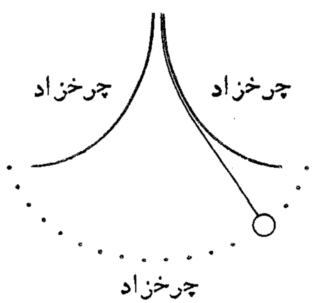
■ ■ ■

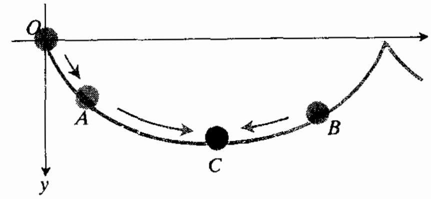
ساعتهای آونگی

یکی ازمشکلات ساعتهای آونگی این‌است که مدت یك‌نوسان آونگ با دامنهٔ نوسان تغییرمی‌کند. هرچه دامنهٔ نوسان بیشتر باشد، مدت یك‌نوسان بیشتراست. اگرنیروی‌فنر، ناشی ازکوك کردن، تغییرنکند، این‌امر مشکلی به‌وجود نمی‌آورد. اما ضمن بازشدن فنر، نیروی وارد برآونگ تقلیل می‌یابد وآونگ رفته‌رفته قوسهای کوتاهتری را می‌پیماید، وساعت تندکارمی‌کند. لذا با کم‌شدن نیروی فنر، تك‌تك آن تندتر می‌شود.

کریستیان‌هویگنس(۱۶۲۹–۱۶۹۵)، ریاضیدان، فیزیکدان، و اخترشناس آلمانی برای تعیین اندازه‌های دقیق نجومی نیاز به‌یك ساعت دقیق داشت. نخستین مطلب دربارهٔ یك ساعت آونگی ایده‌آل را وی در سال ۱۶۷۳ منتشرکرد؛ مسیر نوسان آونگ این ساعت یك‌چرخزاد بود. دورهٔ تناوب‌حرکت آونگ ساعت‌هویگنس به‌دامنهٔ آن بستگی‌نداشت، ولذا باکم‌شدن نیروی‌فنر تغییرنمی‌کرد.

چگونه می‌توان مسیرنوسان آونگ ساعتی را به‌صورت یك چرخزاد درآورد؟ وزنهٔ آونگ را به‌سیم‌ظریفی‌آویزان‌کنید و در دوطرف آن مطابق با شکل موانعی قراردهیدکه سبب شوند وقتی آونگ به دوانتها نزدیك می‌شود، سیم‌انحنا یابد. شکل‌این دومانع چیست؟ چرخزاد!





۵۵۰۸ مهره‌هایی که از O، A، و B واقع بر چرخزاد رها شوند همه باهم به C می‌رسند.

معادلات پارامتری متعارف

دایره:	$x^2+y^2=a^2$	$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}$	$0\leqslant t\leqslant 2\pi$
بیضی:	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$	$0\leqslant t\leqslant 2\pi$
چرخزاد:	$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$		

مسأله‌ها

درمسائل ۱ـ۱۶، خم حاصل ازحرکت نقطهٔ $P(x, y)$ را با این فرض که پارامتر t بردامنهٔ مفروض تغییر می‌کند، رسم کنید. معادلهٔ دکارتی هرخم را نیز بیابید.

۱. $x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$

۲. $x=\cos 2t,\quad y=\sin 2t,\quad 0\leqslant t\leqslant \pi$

۳. $x=4\cos t,\quad y=2\sin t\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$

۴. $x=4\cos t,\quad y=5\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$

۵. $x=\cos 2t,\quad y=\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$

۶. $x=\cos t,\quad y=\sin 2t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$

۷. $x=-\sec t,\quad y=\tan t,\quad -\pi/2<t<\pi/2$

۸. $x=\csc t,\quad y=\cot t,\quad 0<t<\pi$

۹. $x=t-\sin t,\quad y=1-\cos t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$

۱۰. $x=2+4\sin t,\quad y=3-2\cos t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$

۱۱. $x=t^3,\quad y=t^2,\quad -\infty<t<\infty$

۱۲. $x=2t+3,\quad y=4t^2-9,\quad -\infty<t<\infty$

۱۳. $x=\sec^2 t-1,\quad y=\tan t,\quad -\pi/2<t<\pi/2$

۱۴. $x=2+1/t,\quad y=2-t,\quad 0<t<\infty$

۱۵. $x=t+1,\quad y=t^2+4,\quad 0\leqslant t<\infty$

۱۶. $x=t^2+t,\quad y=t^2-t,\quad -\infty<t<\infty$

۱۷. معادلات پارامتری نیمدایرهٔ

$$x^2+y^2=a^2,\quad y>0$$

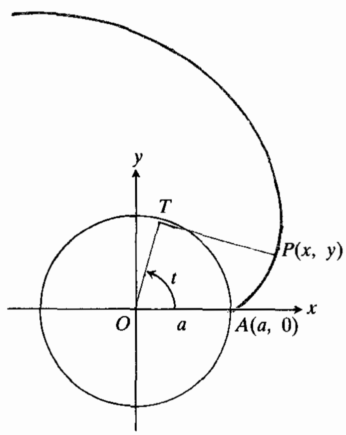
را بیابید؛ پارامتر را شیب $(t=dy/dx)$ مماس برخم در (x, y) بگیرید.

۱۸. معادلات پارامتری دایرهٔ

$$x^2+y^2=a^2$$

را بیابید؛ پارامتررا طول قوس s ازنقطهٔ $(a, 0)$ تا نقطهٔ (x, y) (در خلاف جهت ساعت) بگیرید.

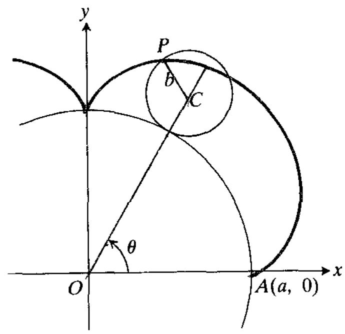
۱۹. گسترندهٔ یك دایره. اگر طنابی که بهدور یك دایرهٔ ثابت پیچیده است بازشود، ولی ازصفحهٔ دایره خارج نشود، انتهای آن خمی را بهوجود می‌آوردکه آن را گسترندهٔ دایره می‌نامند (شکل ۵۶۰۸). فرض کنید مرکز این دایرهٔ ثابت در مبدأ و شعاع آن a باشد. و نیز فرض کنید موضع آغازی نقطهٔ متحرك P، $A(a, 0)$، و بخش بازنشدهٔ طناب، یعنی PT، در T بردایره مماس باشد. با استفاده از زاویهٔ AOT به‌عنوان پارامتر t، معادلات پارامتری گسترنده را بیابید.



۵۶۰۸ گسترندهٔ یك دایره (مسألهٔ ۱۹).

۲۰. برون چرخزاد. وقتی‌دایره‌ای بیرون دایرهٔ ثابت دیگری‌باشد و روی محیط آن بغلتد، هر نقطهٔ P واقع برمحیط دایرهٔ غلتان، یك برون‌چرخزاد (شکل ۵۷۰۸) ایجاد می‌کند. فرض کنید مرکز دایرهٔ ثابت درمبدأ O، و شعاع آن a باشد. همچنین فرض کنید شعاع دایرهٔ غلتان b، و موضع آغازی نقطهٔ متحرك P، $A(a, 0)$

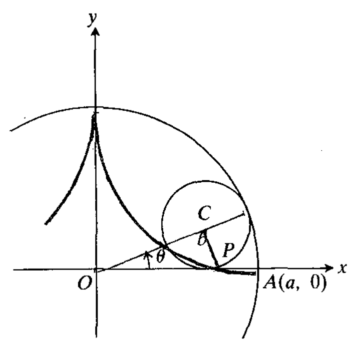
باشد. زاویهٔ θی بین قسمت مثبت محور x وخط گذرنده ازدومرکز را به‌عنوان پارامتر بگیرید و معادلات پارامتری برون‌چرخزاد را بیابید.



۵۷۰۸ یك برون‌چرخزاد با ضابطهٔ $b=a/4$ (مسألهٔ ۲۰).

۲۱۰ درون‌چرخزاد. وقتی دایره‌ای درون دایرهٔ ثابت دیگری باشد و بر محیط آن بغلتد، هر نقطهٔ P واقع برمحیط دایرهٔ غلتان، یك درون‌چرخزاد ایجاد می‌کند. فرض کنید دایرهٔ ثابت، دایرهٔ $x^2+y^2=a^2$، شعاع دایرهٔ غلتان b، وموضع آغازی نقطهٔ‌متحرك P نقطهٔ $A(a, 0)$ باشد. زاویهٔ قسمت مثبت‌محور x با خط گذرنده از دومرکز، θ، را به عنوان پارامتر، بگیرید و معادلات پارامتری درون‌چرخزاد را بیابید. درحالت خاصی که طبق شکل ۵۸۰۸، $b=a/4$، نشان‌دهید که این درون‌چرخزاد، اختروارهٔ زیر است

$$x=a\cos^3\theta, \quad y=a\sin^3\theta.$$

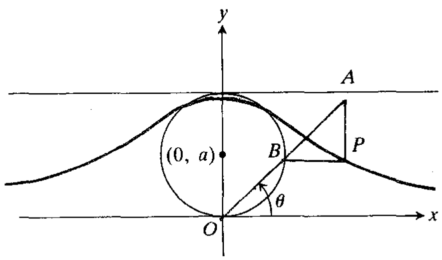


۵۸۰۸ یك درون‌چرخزاد باضابطهٔ $b=a/4$ (مسألهٔ ۲۱).

۲۲۰ خم آنیزی. خم آنیزی خم زنگی‌شکلی است که به‌صورت زیر رسم می‌شود. فرض کنید C دایره‌ای است به شعاع a که مرکزش در $(0, a)$ برمحور y قرارداردد (شکل ۵۹۰۸). خط متغیر OA که از مبدأ O می‌گذرد، خط $y=2a$ را در نقطهٔ A، و دایره را در نقطهٔ B قطع می‌کند. حال نقطه‌ای چون P از خم آنیزی، محل تقاطع دوخطی‌است که از A و B، و به‌ترتیب به‌موازات محورهای y و x رسم می‌شوند.

الف) زاویهٔ محور x با خط OA، یعنی θ، را به عنوان پارامتر بگیرید و معادلات پارامتری خم آنیزی را بیابید.

ب) معادلهٔ دکارتی خم را نیز پیدا کنید.



۵۹۰۸ خم آنیزی (مسألهٔ ۲۲).

یادداشت تاریخی. ماریا آنیزی (۱۷۱۸–۱۷۹۹)، دختریك استاد ریاضی دانشگاه بلونیا نخستین کتاب درسی جامع حساب دیفرانسیل و انتگرال را درچهارجلد شامل جبر و هندسه، حساب دیفرانسیل، حساب انتگرال، و معادلات دیفرانسیل نوشت. (کتاب هوپیتال که پیش از آن نوشته‌شده تنها دربارهٔ هندسه تحلیلی و حساب دیفرانسیل است.) این کتاب به زبانهای فرانسه و انگلیسی ترجمه شد. اشتباه مترجم سبب شده‌است که امروزه خم زنگی‌شکل آنیزی را در زبان انگلیسی «ساحره[1]» بنامند. این نام تنها در متنهای انگلیسی دیده می‌شود. کلمه‌ای که خود آنیزی به‌کاربرده کلمهٔ *versiera* ازریشهٔ فعل لاتینی *vertere* به معنی «گشتن» است. مترجم، که یکی‌از استادان‌کمبریج بود و ایتالیایی را صرفاً به منظور ترجمهٔ کتاب آنیزی آموخته بود، احتمالاً کلمهٔ لاتین *versiera* را با *avversiera*«همسرشیطان»اشتباه کرده وآن‌را«ساحره»ترجمه‌کرده است.

۲۳۰ معادلات پارامتری خطها در صفحه.

الف) نشان‌دهید که معادله‌های

$$x=x_0+(x_1-x_0)t,$$
$$y=y_0+(y_1-y_0)t, \quad -\infty<t<\infty$$

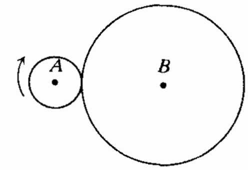
معادلات پارامتری خطی هستند که از نقاط (x_0, y_0) و (x_1, y_1) می‌گذرد.

ب) معادلات پارامتری خط مار بر نقطهٔ (x_0, y_0) و مبدأ را بنویسید.

1. witch

پ) معادلات پارامتری خط ماربر $(-۱,۰)$ و $(۱,۰)$ را بنویسید.

۲۴. مسأله‌ای که درشکل ۸.۶۰ می‌بینید مربوط است به‌آزمون ورودی یك كالج كه چند سال پیش برگزار شد. همهٔ پاسخها غلط بودند. پاسخ صحیح چیست؟ اگردایرهٔ کوچکتر به‌جای‌اینکه بیرون دایرهٔ بزرگتر باشد، درون آن می‌بود پاسخ صحیح چه‌می‌توانست باشد؟



در شکل فوق، شعاع دایرهٔ A، ۱/۳ شعاع دایرهٔ B است. در آغاز وضع دو دایره شبیه شکل است، و دایرهٔ A به‌روی دایرهٔ B می‌غلتد. دایرهٔ A چندبار باید بچرخد تا مرکزش برای نخستین بار به‌جای اول خود بازگردد؟

(الف) $\frac{۳}{۲}$ (ب) ۳ (پ) ۶

(ت) $\frac{۹}{۲}$ (ث) ۹

شکل ۸.۶۰

۲۵. برسهمی $x=t$ ، $y=t^۲$ نقطه‌ای بیابید که نزدیکترین نقطهٔ ممکن به‌نقطهٔ $(۲, ۱/۲)$ باشد.

۲۶. بربیضی $x=۲\cos t$ ، $y=\sin t$ ، $۰\leqslant t\leqslant ۲\pi$ نقطه‌ای بیابید که نزدیکترین نقطهٔ ممکن به‌نقطهٔ $(۳/۴, ۰)$ باشد.

۲۷. طول یك طاق چرخزاد زیررا بیابید

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(۱-\cos t).$$

۲۸. مطلوب است مساحت رویهٔ حاصل ازدوران یك‌طاق‌چرخزاد $x=t-\sin t$ ، $y=۱-\cos t$ حول محور x.

۲۹. مطلوب‌است حجم‌حاصل از دوران ناحیهٔ محصور بین‌محور x، و یك طاق ازچرخزاد $x=t-\sin t$ ، $y=۱-\cos t$، حول‌محور x. (راهنمایی: $dV=\pi y^۲dx=\pi y^۲(dx/dt)dt$.)

۳۰. مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ محدود به $x=۲\cos t$ ، $y=\sin t$، $۰\leqslant t\leqslant ۲\pi$ حول محور y.

۳۱. **ماشین‌حساب** ریگی داخل عاج لاستیك اتومبیلی شده که شعاع آن ۱ فوت است. پس از اینکه اتومبیل ۱ مایل راه بپیماید، طول مسیرطاقداری را که ریگ ایجاد می‌کند با تقریب یك‌فوت براورد کنید. ابتدا نسبت طول یك طاق چرخزاد برطول قاعدهٔ آن را بیابید

۳۲. **رسام‌کامپیوتری** اگر به‌رسام معادلات پارامتری دسترسی دارید،نمودارمعادلات زیر رارسم کنید.شکلهای باشکوهی به دست می‌آید.

الف) دلتاوار:

$$x=۲\cos t+\cos ۲t$$
$$y=۲\sin t-\sin ۲t$$
$$۰\leqslant t\leqslant ۲\pi$$

ب) برون‌چرخزاد:

$$x=۹\cos t-\cos ۹t$$
$$y=۹\sin t-\sin ۹t$$
$$۰\leqslant t\leqslant ۲\pi$$

پ) درون‌چرخزاد:

$$x=۸\cos t+۲\cos ۴t$$
$$y=۸\sin t-۲\sin ۴t$$
$$۰\leqslant t\leqslant ۲\pi$$

ت) درون‌چرخه‌زاد:

$$x=\cos t+۵\cos ۳t$$
$$y=۶\cos t-۵\sin ۳t$$
$$۰\leqslant t\leqslant ۲\pi$$

TOOLKIT PROGRAMS	
Parametric Equations	Super * Grapher

پرسشها و تمرینهای مروری

۱. مقاطع‌مخروطی‌را نام‌ببرید. چرا به‌آنها «مخروطی» می‌گویند؟

۲. تعریف سهمی برحسب فاصله چیست؟ معادلات متعارف‌سهمی کدام‌اند؟ نمودار یکی از معادلات را رسم کنید، و درآن رأس،

کانون، محور، و هادی را نشان دهید. خروج از مرکز یك سهمی چیست؟

۳. ویژگی بازتابندگی سهمی چیست؟

۴. تعریف بیضی برحسب فاصله چیست؟ معادلات متعارف بیضی کدام‌اند؟ نمودار یکی از معادلات را رسم کنید، ودر آن رأسها،و کانونها را مشخص کنید. تعریف خروج ازمرکز بیضی چیست؟ یك بیضی بکشیدکه خروج از مرکزش به ۱ نزدیك باشد و بیضی دیگری بکشیدکه خروج ازمرکزش به ۰ نزدیك باشد.

۵. تعریف هذلولی برحسب فاصله چیست؟ معادلات متعارف هذلولی کدام‌اند؟ نمودار یکی از معادلات را رسم کنید و در آن رأسها، کانونها، محورها،و مجانبها را مشخص کنید. خروج ازمرکزهذلولی چه مقادیری می‌تواند داشته باشد؟

۶. معادلهٔ $PF = e \cdot PD$ را شرح دهید.

۷. اگر درمعادلهٔ زیر A، B، و C همه‌صفر نباشند، دربارهٔ نمودار معادله چه‌می‌توانید بگویید؟

$$Ax^۲+Bxy+Cy^۲+Dx+Ey+F=۰$$

از روی عدد $B^۲-۴AC$ چه می‌فهمید؟

۸. معادلات انتقال و دوران محورها را بنویسید. هردسته از این معادلات را با نمودار توضیح دهید. در این فصل از انتقال و دوران چگونه استفاده می‌شود؟

۹. معادلات پارامتری دایره، سهمی و بیضی را بنویسید. درهرمورد، دامنهٔ پارامتر را چنان تعیین کنید که این مقاطع مخروطی دقیقاً یك‌بار پیموده شوند.

۱۰. معادلات پارامتری یکی از شاخه‌های هذلولی را بنویسید. اگر بخواهیم با این معادلات خم فقط یك‌بار پیموده شود، دامنهٔ مناسب برای پارامتر چیست؟

۱۱. چرخزاد چیست؟ معادلات پارامتری‌متداول برای یك‌چرخزاد چیست؟

مسأله‌های گوناگون

۱. فرض‌کنید $P(x, y)$ نقطه‌ای ازخم

$$x^۲+xy+y^۲=۳$$

و $P'(kx, ky)$ نقطه‌ای ازخط OP، گذرنده ازمبدأ و P، باشد. اگر k ثابت فرض شود، وقتی P برخم C حرکت‌کند، برای خم حاصل از حرکت P' معادله‌ای بیابید.

۲. تقارن نسبت به‌دایره. دونقطهٔ P و Q را نسبت به یك دایره متقارن نامند هرگاه هردو بریکی از پرتوهایی‌واقع باشندکه ازمرکز صادرمی‌شود، وحاصلضرب فواصلشان ازمرکز برابر با مربع شعاع دایره باشد. اگر Q برخط $x+۲y-۵=۰$ سیرکند، مسیر نقطهٔ P که نسبت به‌دایره $x^۲+y^۲=۴$ با Q متقارن‌است، چیست؟

۳. نقطهٔ $P(x, y)$ چنان حرکت می‌کند که نسبت فواصلش از دونقطهٔ ثابت، عدد ثابتی‌چون k است. نشان‌دهیدکه مسیردایره‌است هرگاه $k \neq ۱$، و خط مستقیم است هرگاه $k=۱$.

۴. مرکز و شعاع دایره‌ای را بیابیدکه ازنقاط $A(۲, ۰)$ و $B(۶, ۰)$ می‌گذرد و برخم $y=x^۲$ مماس است.

۵. مرکز دایره‌ای را بیابیدکه از نقطهٔ $(۱, ۰)$ می‌گذرد، و در $(۲, ۴)$ برخم $y=x^۲$ مماس است.

۶. **ماشین‌حساب** اگر مقدار n، (الف) ۱، (ب) ۲، (پ) ۱۰۰ باشد نمودار $x^{۲n}+y^{۲n}=a^{۲n}$ را رسم کنید. درهرمورد این‌خم کجا خط $y=x$ را قطع می‌کند؟

۷. معادله‌ای برای سهمیی با کانون $(۴, ۰)$ و هادی $x=۳$ بنویسید. سهمی را بکشید، و رأس، کانون، و هادی آن را مشخص کنید.

۸. مطلوب است رأس، کانون، و هادی سهمی

$$x^۲-۶x-۱۲y+۹=۰.$$

۹. نشان دهیدکه اگر درنقطه‌ای چون P که درمبدأ نیست خطی برسهمی $y^۲=kx$ مماس کنیم، آنگاه محور y بخشی از مماس را که بین محور x و P واقع‌است نصف می‌کند.

۱۰. اگر از یك‌نقطهٔ P واقع برسهمی $y^۲=kx$ خطوطی موازی محورهای مختصات رسم کنیم، ناحیهٔ محصور بین این خطوط و محورها توسط سهمی به‌دوناحیهٔ کوچکتر تقسیم می‌شود.

الف) اگر این دوناحیهٔ کوچکترحول محور y دوران‌کنند، نشان دهیدکه نسبت حجمهای دوجسم حاصل ۱ : ۴ است.

ب) اگر این دوناحیه حول محور x دوران کنند، نسبت حجمهای دوجسم حاصل چیست؟

۱۱. نشان‌دهیدکه اوساط وترهایی ازسهمی $x^۲=۴py$ که شیب آنها m باشد، بریك خط مستقیم قرارمی‌گیرند؛ معادلهٔ خط را نیز بیابید.

۱۲. خط گذرنده از کانون F و نقطهٔ $P(x_۱, y_۱)$ واقع برسهمی $y^۲=۴px$، سهمی را درنقطهٔ دیگری چون $Q(x_۲, y_۲)$ قطع

می‌کند. مختصات Q را برحسب y_1 و p بیابید. اگر خط گذرنده از P و مبدأ، هادی‌را در R قطع کند، ثابت کنید که QR با محور سهمی موازی است.

۱۳. سهمی نیم‌مکعبی. مطلوب است تعیین نقطه (یا نقاط) واقع برخم $y^3 = x^2$ که نزدیکترین نقطه (یا نقاط) به‌نقطهٔ $P(0, 4)$ باشد (باشند). خم و کوتاهترین پاره‌خط از P تا خم را بکشید.

۱۴. مسیر حرکت ستارهٔ دنباله‌داری یك‌مدار سهموی است که خورشید درکانون آن است. وقتی ستارهٔ دنباله‌دار به 4×10^7 مایلی خورشید می‌رسد، خط گذرنده از خورشید و ستاره با قسمتی ازمحور مدارکه درجهت بازشدن سهمی رسم شده یك زاویهٔ $60°$ می‌سازد. ستاره چقدر به‌خورشید نزدیك می‌شود؟

۱۵. فرض‌کنید خط مماس برسهمی $y^2 = 4px$ درنقطه‌ای چون Q، محور سهمی را در A قطع‌می‌کند، و خط گذرنده از Q و موازی با محور سهمی، هادی را در D قطع می‌کند. نشان دهید که Q، A، D، و کانون F سهمی چهار رأس یك‌لوزی‌اند.

۱۶. اگرفاصلهٔ نقطه‌ای چون $P(x, y)$ از رأس سهمی $x^2 = 8y$ دوبرابرفاصلهٔ آن تا کانون این سهمی باشد، معادلهٔ خم حاصل از حرکت P را بیابید. خم را مشخص‌کنید.

۱۷. ثابت‌کنید‌که مماس بریك سهمی درنقطه‌ای چون P، محور سهمی را درنقطه‌ای قطع می‌کند که فاصله‌اش تا رأس برابر است با فاصلهٔ P تا مماس برسهمی دررأس آن.

۱۸. معادله‌ای برای یك‌بیضی با کانونهای $(1, 0)$ و $(5, 0)$ که یکی از رأسهای آن مبدأ است بنویسید.

۱۹. فرض‌کنید $F_1 = (3, 0)$، $F_2 = (0, 5)$، $P = (-1, 3)$.

الف) فواصل F_1P و F_2P را بیابید.

ب) آیا مبدأ درون بیضی ماربر P با کانونهای F_1 و F_2 قرارمی‌گیرد یا بیرون آن؟ چرا؟

۲۰. خروج ازمرکز و مرکز بیضی زیر را بیابید.

$$x^2 + 12y^2 - 6x - 48y + 9 = 0.$$

۲۱. خروج ازمرکز، مرکز، کانونها، و رأسهای بیضی زیر را بیابید.

$$x^2 + 9y^2 - 6x - 36y - 99 = 0.$$

۲۲. نشان دهید خط $y = mx + c$ برخم $Ax^2 + y^2 - 1 = 0$ مماس است اگر وتنها اگر ثابتهای A، m، و c در معادلهٔ $A(c^2 - 1) = m^2$ صدق کنند.

۲۳. معادلهٔ بیضیی‌را بنویسیدکه خروج از مرکزش $2/3$، یکی‌از رأسهایش $(3, 1)$، و کانون نزدیك به‌آن $(1, 1)$ باشد.

۲۴. پاره‌خطی به‌طول $a + b$ در ربع‌اول واقع‌است، وازمحور x تا محور y امتداد دارد. نقطهٔ P واقع براین پاره‌خط از یك‌انتها a واحد، و از انتهای دیگر b واحد فاصله دارد. نشان دهید که وقتی‌دوانتهای این پاره‌خط برمحورها می‌لغزند، P یك‌مسیر بیضوی را می‌پیماید.

۲۵. یك‌بیضی را که در وضع متعارف قراردارد به‌محل جدیدی درصفحه منتقل می‌کنیم و معادلهٔ آن به‌صورت زیر درمی‌آید

$$x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 4 = 0.$$

چه‌انتقالی صورت گرفته است؟ مختصات مرکز بیضی دروضع‌جدید چیست؟

۲۶. مخزنی را به‌این‌ترتیب می‌سازیم‌که یك نوار حلبی به‌عنوان دیوار به‌دور یك‌بیضی‌می‌کشیم، و یك‌طرف آن را بر روی یك‌ورق هموار لحیم می‌کنیم. چند سانتیمتر آب درمخزن می‌ریزیم، و یکی از انگشتان خود را درست در یکی از کانونهای بیضی واردآب می‌کنیم. موج ایجاد شده به‌دیوار مخزن برخورد می‌کند و ازآنجا منعکس می‌شود، و پس از مدت‌کوتاهی ازکانون‌دیگر یك‌قطره‌آب به‌بالا می‌پرد. چرا؟

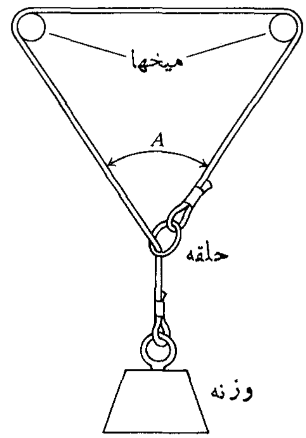
۲۷. انتگرالهایی را به‌دست‌آوریدکه (الف) مساحت یك ربع از دایرهٔ $x^2 + y^2 = a^2$، (ب) مساحت یك‌ربع از بیضی $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ را به‌دست دهند. نشان دهیدکه انتگرال (ب)، b/a برابر انتگرال (الف) است. حال مساحت بیضی را از روی مساحت دایره‌که معلوم است به‌دست‌آورید.

۲۸. طناب متصل به‌وزنه. طنابی‌که یك انتهای آن حلقه دارد مطابق با شکل به‌دور دومیخ که درامتداد یك خط افقی‌اند، کشیده شده‌است. انتهای آزاد پس از گذشتن ازحلقه، به وزنه‌ای وصل شده و طناب را سفت نگه داشته است. اگر طناب بتواند آزادانه برمیخها و برحلقه بلغزد، وزنه تا حد ممکن پایین می‌آید. فرض کنیدکه طول طناب دست‌کم چهار برابر فاصلهٔ بین میخها، و شکل طناب نسبت به‌خط قسمت قائم طناب متقارن باشد.

الف) زاویهٔ A درشکل را بیابید (شکل ۶۱۰۸).

ب) نشان دهید که به ازای هرموضع ثابت حلقه برطناب، مکانهای حلقه درفضا بریك‌بیضی قرارمی‌گیرند‌که‌کانونهایش میخها هستند.

پ) با تلفیق‌کردن نتیجهٔ مذکور در (ب) و این فرض که طناب و وزنه به‌وضعی‌قرارمی‌گیرند‌که‌انرژی‌پتانسیل‌مینیمال شود، فرض تقارن اولیه را توجیه‌کنید.



۶۱۰۸ مسألهٔ ۲۸ می‌پرسد، وقتی وزنه، طناب را محکم می‌کشد، اندازهٔ زاویهٔ A چقدر خواهد بود؟

۰۲۹ فاصلهٔ بین دوایستگاه رادارکه بریك‌خط شرقی-غربی قرار دارند $20\ \mathrm{km}$ است. هواپیمایی با سرعت $v_0\ \mathrm{km/sec}$ در ارتفاع پایین از غرب به شرق درحال پرواز است. در $t=0$ سیگنالی از ایستگاه $(-10, 0)$ فرستاده می‌شود، به هواپیما برخورد می‌کند و برمی‌گردد، و پس از $30/c$ ثانیه به ایستگاه $(10, 0)$ می‌رسد (c سرعت‌سیگنال‌است). در $t=10/v_0$ سیگنال دیگری از ایستگاه $(-10, 0)$ ارسال‌می‌شود، به‌هواپیما برخورد می‌کند و برمی‌گردد، و مجدداً پس‌از $30/c$ ثانیه درایستگاه دیگر دریافت می‌شود. با این فرض‌که v_0 از c خیلی‌کوچکتر باشد، هواپیما هنگام برخورد سیگنال دوم با آن درکجاست؟

۰۳۰ مرکز، رأسها، کانونها، و مجانبهای هذلولی زیررا بیابید

$$3x^2 - y^2 + 12x - 6y = 0 .$$

۰۳۱ مرکز، رأسها، کانونها، و مجانبهای هذلولی زیررا بیابید

$$9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y + 29 = 0 .$$

۰۳۲ معادلهٔ هذلولیی با خروج ازمرکز $\sqrt{2}$ و رأسهای $(2, 0)$ و $(-2, 0)$ را بیابید.

۰۳۳ اگر c ثابت مثبتی باشد، آنگاه

$$\frac{x^2}{t^2}+\frac{y^2}{t^2-c^2}=1, \quad c^2<t^2$$

خانواده‌ای از بیضیها را تعریف می‌کندکه هریك با مقدار خاصی از t مشخص می‌شود، نشان دهیدکه هرعضو از خانوادهٔ

$$\frac{x^2}{t^2}-\frac{y^2}{c^2-t^2}=1, \quad t^2<c^2$$

هرعضو از خانوادهٔ اول را تحت زاویهٔ قائمه قطع می‌کند.

۰۳۴ نشان‌دهیدکه اگرمماس بریك‌خم درنقطه‌ای‌چون $P(x, y)$ از مبدأ بگذرد، آنگاه در P، $dy/dx = y/x$. سپس، نشان‌دهیدکه ازمبدأ نمی‌توان مماسی برهذلولی $x^2 - y^2 = 1$ رسم کرد.

۰۳۵ در یك مثلث، دو رأس A و B ثابت هستند. رأس سوم، $C(x, y)$، طوری حرکت می‌کندکه $\angle A = 2(\angle B)$. مسیر حرکت C را بیابید.

۰۳۶ فرض‌کنید p و q دوعدد مثبت‌اندکه $q<p$. اگر r عدد دیگری باشد، ثابت‌کنیدکه

$$\frac{x^2}{p-r}+\frac{y^2}{q-r}=1$$

معادلهٔ (الف) یك بیضی‌است. هرگاه $r<q$، (ب) یك‌هذلولی است هرگاه $q<r<p$، و (پ) معادلهٔ چیزی نیست هرگاه $p<r$. ثابت‌کنیدکه کانونهای این بیضیها و این هذلولیها برهم منطبق‌اند، و این‌کانونها را بیابید.

۰۳۷ دریك سطح تراز صدای تفنگ و صدای‌گلوله که به‌هدف می‌خورد همزمان به‌گوش می‌رسد. شنونده درکجا قراردارد؟

۰۳۸ نشان دهیدکه هرمماس برهذلولی $xy=a^2$ همراه با مجانبهای هذلولی مثلثی به‌مساحت $2a^2$ تشکیل می‌دهند.

۰۳۹ خروج ازمرکز هذلولی $xy=1$ را بیابید.

۰۴۰ روی خم $x^2 - 2xy - 3y^2 + 3 = 0$ تمام نقاطی را بیابید که خط مماس برخم درآن نقاط برخط $x+y=1$ عمود باشد. خم را مشخص کنید.

۰۴۱ خطی‌چون PT برخم $xy = x + y$ درنقطهٔ $P(-2, 2/3)$ مماس است. معادلات دوخط قائم بر این خم و عمود بر PT را بیابید.

۰۴۲ معادلهٔ مماس برخم

$$x^2 - 2xy + y^2 + 2x + y - 6 = 0$$

را درنقطهٔ $(2, 2)$ بیابید. خم را مشخص‌کنید.

۰۴۳ معادلهٔ

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

معادلهٔ یك‌مقطع مخروطی است. پارامترهای این معادله را چنان بیابیدکه دارای ویژگیهای زیرباشد

الف) نسبت به‌مبدأ متقارن باشد؛

ب) از نقطهٔ $(0, 1)$ بگذرد؛

پ) خط $y=1$ در نقطهٔ $(-2, 1)$ بر آن مماس باشد.

۴۴. نشان‌دهید که معادلهٔ $xy-x-y-1=0$ یک هذلولی را نمایش می‌دهد. مرکز، رأسها، کانونها، محورهـا، و مجانبهای این هـذلـولی را بیابید. همهٔ آنهـا را بـا رسم شکل مشخص کنید.

۴۵. نشان دهید که معادلهٔ $\sqrt{2}\,y-2xy=2$ یـک هذلولی را نشان می‌دهد. مرکز، رأسها، کانونها، محورها، و مجانبهای آن‌را بیابید.

۴۶. الف) نشان‌دهید که خط

$$b^2xx_1+a^2yy_1-a^2b^2=0$$

بـر بیضی $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$ در نقطهٔ (x_1, y_1) مماس است.

ب) نشان دهید که خط

$$b^2xx_1-a^2yy_1-a^2b^2=0$$

برهذلولی $b^2x^2-a^2y^2-a^2b^2=0$ درنقطهٔ (x_1, y_1) مماس است.

پ) نشان دهید که مماس برمقطع مخروطی

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

درنقطهٔ (x_1, y_1) واقع برآن، معادله‌ای به‌صورت زیردارد

$$Axx_1+B\left(\frac{x_1y+xy_1}{2}\right)+Cyy_1$$

$$+D\left(\frac{x+x_1}{2}\right)+E\left(\frac{y+y_1}{2}\right)+F=0.$$

۴۷. معادلهٔ $x^{1/2}+y^{1/2}=a^{1/2}$ پس‌از دوران محورها درخلاف جهت ساعت به‌اندازهٔ زاویهٔ $\pi/4$ رادیان به‌چه‌صورت درمی‌آید؟ درمعادلهٔ جدید، رادیکالها را ازبین ببرید، و شکل خم را مشخص کنید.

۴۸. اگر

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha$$

$$y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$$

آنگاه

$$dx=dx'\cos\alpha-dy'\sin\alpha$$

$$dy=dx'\sin\alpha+dy'\cos\alpha.$$

نشان‌دهید که $dx^2+dy^2=dx'^2+dy'^2$ و

$$x\,dy-y\,dx=x'\,dy'-y'\,dx'$$

لذا کمیتهای dx^2+dy^2 و $x\,dy-y\,dx$ در اثردوران‌محورها تغییر نمی‌کنند.

در مسائـل ۴۹–۵۸، چه نقاطی در معادلات و نسامعادلات صدق می‌کنند؟ درمورد هرمسأله شکلی بکشید.

۴۹. $(2x+y-2)(x^2+y^2-4)(x^2-y)=0$

۵۰. $(x^2+4y)(x^2-y^2-1)(x^2+y^2-25)(x^2+4y^2-4)=0$

۵۱. $(x+y)(x^2+y^2-1)=0$

۵۲. $(y-x+2)(2y+x-4)=0$

۵۳. $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)\leqslant 1$

۵۴. $(x^2/a^2)-(y^2/b^2)\leqslant 1$

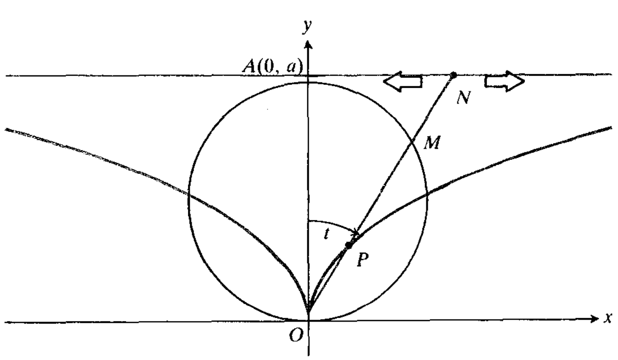
۵۵. $(9x^2+4y^2-36)(4x^2+9y^2-36)\leqslant 0$

۵۶. $(9x^2+4y^2-36)(4x^2+9y^2-36)>0$

۵۷. $x^4-(y^2-9)^2=0$

۵۸. $x^2+xy+y^2<3$

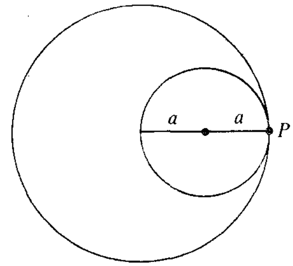
۵۹. وقتی نقطهٔ N در امتداد خط $y=a$ درشکل ۶۲.۸ حرکت می‌کند، حـرکت نقطهٔ P چنان است کـه $OP=MN$. معادلات پـارامتری مختصات P را به‌صورت توابعی از زاویهٔ t کـه خط ON با قسمت مثبت محور y می‌سازد، بنویسید.



۶۲.۸ شکل مسألهٔ ۵۹.

۶۰. شکل ۶۳.۸ دایره‌ای به‌شعاع a را نشان می‌دهد کـه درون

دایره‌ای به‌شعاع $2a$ است. نقطهٔ P که درشکل به‌صورت یك نقطهٔ تماس مشخص شده است، به‌دایرهٔ کوچکتر وصل است. مطلوب است تعیین مسیر حرکت نقطهٔ P وقتی دایرهٔ کوچکتر در درون دایرهٔ بزرگتر می‌چرخد.



۶۳۰۸ دایره‌های مربوط به‌مسألهٔ ۶۰.

۶۱. چرخی به‌شعاع ۴ in باسرعت‌زاویه‌ای ۲ radians/sec در امتداد محور x می‌غلتد. مطلوب است تعیین معادلات پارامتری خم حاصل از حرکت یك نقطهٔ واقع بر یکی از پره‌های چرخ و به‌فاصلهٔ ۲ اینچی مرکز چرخ، با این شرط که در زمان $t=0$، نقطه در $(0,2)$ باشد.

۶۲. نشان دهید که شیب چرخزاد

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$$

برابر است با $dy/dx=\cot(t/2)$. درحالت خاصی که t برابر با ۰ یا 2π است، مماس بر چرخزاد به‌صورت قائم است.

۶۳. نشان‌دهید که اگر $a>b$، شیب چرخه‌زاد

$$x=at-b\sin t,\quad y=a-b\cos t$$

همواره متناهی است.

۶۴. مطلوب است تعیین معادلات پارامتری و معادلهٔ دکارتی شکل حاصل از حرکت نقطهٔ $P(x,y)$ اگر

$$\frac{dx}{dt}=-2y,\quad \frac{dy}{dt}=\cos t$$

و وقتی $t=0$، $x=3$ و $y=0$. شکل را مشخص کنید.

۶۵. ماشین‌حساب انتگرال بیضوی.

الف) نشان دهید که محیط بیضی

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

را انتگرال

$$4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,dt$$

به‌دست می‌دهد که در آن e خروج از مرکز بیضی است.

ب) انتگرال مذکور در (الف) را یك انتگرال بیضوی می‌نامند. این انتگرال هیچ پادمشتق مقدماتی ندارد. اگر $a=1$ و $e=1/2$، طول محیط بیضی را به‌کمك قاعدهٔ ذوزنقه‌ای با ضابطهٔ $n=10$، براورد کنید.

پ) قدرمطلق مشتق دوم $f(t)=\sqrt{1-e^2\cos^2 t}$ از ۱ کمتر است. براین اساس، معادلهٔ (۸) بخش ۹.۰۴ درمورد خطای تقریب مذکور در (ب) چه‌براوردی به‌دست می‌دهد؟

۶۶. مطلوب است مرکزجرم یك‌ورق نازك به‌چگالی‌ثابت $\delta=1$ و محدود به‌محور x و یك‌طاق ازچرخزاد

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t).$$

(راهنمایی: $dA=y\,dx=y(dx/dt)\,dt$.)

خمهای متعامد

دوخم را متعامد نامند هرگاه در هریك از نقاط تقاطع آنها، زاویهٔ بین خطهای مماس بردوخم قائمه باشد. مسائل ۶۷-۷۰ مربوط به‌مقاطع مخروطی متعامدند.

۶۷. خمهای $xy=2$ و $x^2-y^2=3$ را در یك دستگاه مختصات رسم کنید و نشان دهید که یکدیگر را تحت زاویهٔ قائمه قطع می‌کنند.

۶۸. خمهای $y^2=4x+4$ و $y^2=64-16x$ را در یك دستگاه مختصات رسم کنید و نشان دهید که یکدیگر را تحت‌زاویهٔ قائمه قطع می‌کنند.

۶۹. نشان دهید که به‌ازای همهٔ مقادیرثابت a و k ($a\neq 0$، $k\neq 0$) خمهای $2x^2+3y^2=a^2$ و $ky^2=x^3$ متعامدند. چهارخم متناظر با $a=2$، $a=4$، $k=1/2$، و $k=-2$ را در یك دستگاه مختصات رسم کنید.

۷۰. نشان دهید سهمیهای

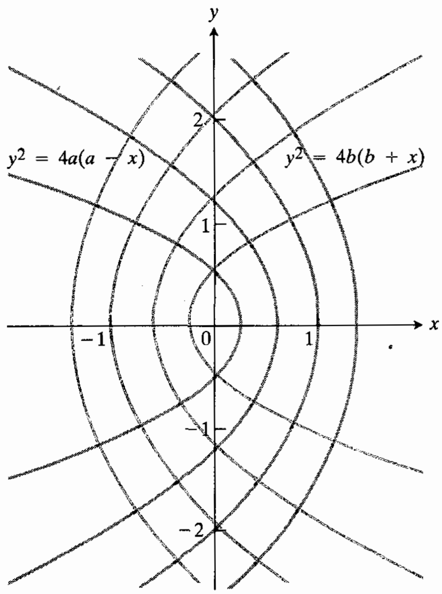
$$y^2=4a(a-x)$$

و

$$y^2=4b(b+x)$$

که در آنها $a>0$ و $b>0$، به‌ازای همهٔ مقادیر a و b، کانون مشترکی دارند. نشان دهید که سهمیها در نقطه‌های

$(a-b, \pm 2\sqrt{ab})$ یکدیگر را قطع می‌کنند، و هر سهمی از خانوادهٔ اول بر هر سهمی از خانوادهٔ دوم عمود است. (با تغییر دادن a و b دو خانواده از سهمیهای هم‌کانون به‌دست می‌آیند. هر خانواده را مجموعه‌ای از مسیرهای متعامد خانوادهٔ دیگر می‌نامند. شکل ۶۴۰۸ را ببینید.)



۶۴۰۸ برخی از سهمیهای مذکور در مسألهٔ ۷۵.

۹

تابعهای هیپربولیک

چشم‌انداز

درمهندسی و فیزیك، برخی از ترکیبات e^x و e^{-x} در فرمولبندی جوابهای معادلات دیفرانسیل بسیار زیاد به‌کارمی‌روند و از این‌رو، روی این‌گونه توابع نامهای خاصی می‌گذاریم و آنها را به‌طور مستقل مطالعه‌می‌کنیم. به‌دلایلی که دربخش ۱.۹ توضیح داده‌خواهد شد، این ترکیبهارا **تابعهای هیپربولیك** می‌نامند. تابعهای‌هیپربولیك برای توصیف حرکت موج در اجسام‌کشسان، شکل خطوط انتقال نیروی برق، توزیع دما درپره‌های فلزی‌که لوله‌های داغ را سرد می‌کنند، خمهای‌تعقیب (که بعداً دربارهٔ آنها بیشترصحبت‌خواهیم کرد)، و هندسهٔ نظریهٔ نسبیت عام به‌کار می‌روند. طراحان طاق «دروازهٔ غرب» در سنت‌لوئیس آمریکا، با استفاده از تابعهای هیپربولیك نیروهای داخلی طاق را پیش‌بینی کردند، و خود طاق به‌شکل یك‌خم کسینوس هیپربولیك است.

پس از معرفی توابع هیپربولیك دربخش ۱.۹ و بررسی مشتقات و انتگرالهای مربوط در بخش ۲.۹، شکل‌کابلهای آویزان را در بخش ۳.۹ مطالعه خواهیم کرد. محاسبات مربوط به‌کابلهای آویزان به‌طور طبیعی به‌توابع معکوس هیپربولیك می‌انجامند. چنانکه دربخش ۴.۹ خواهیم دید، توابع اخیرهم، به‌نوبهٔ خود، تعدادی فرمول انتگرال جدید و مفید را به‌دست می‌دهند. این فرمولها و نظایر آنها درجدولهای انتگرال زیاد به‌چشم می‌خورند.

۱.۹ تعریفها و اتحادها

در این بخش، تابعهای سینوس هیپربولیك، کسینوس هیپربولیك، تانژانت هیپربولیك، کتانژانت هیپربولیك، سکانت هیپربولیك، و کسکانت هیپربولیك‌را تعریف‌می‌کنیم و آنها را با شش‌تابع‌مثلثاتی یا «مستدیر» همنامشان مقایسه می‌کنیم.

سینوس هیپربولیك وکسینوس هیپربولیك را با رابطه‌های زیر تعریف می‌کنند

$$\text{(۱)}\quad \begin{aligned} &\text{سینوس هیپربولیك } u: & \sinh u&=\frac{1}{2}(e^u-e^{-u})\\ &\text{کسینوس هیپربولیك } u: & \cosh u&=\frac{1}{2}(e^u+e^{-u}) \end{aligned}$$

سینوس هیپربولیك وکسینوس هیپربولیك با قواعدی به‌هم مربوط می‌شوندکه بسیار شبیه قواعدی هستند که $\cos u$ و $\sin u$ را به‌هم‌ربط می‌دهند. و همان‌طورکه می‌توان $\cos u$ و $\sin u$ را با نقطهٔ (x, y) واقع بردایرهٔ واحد $x^2+y^2=1$ مشخص کرد، توابع $\cosh u$ و $\sinh u$ را نیز می‌توان با مختصات نقطه‌ای چون (x, y) واقع بر **هذلولی‌واحد** $x^2-y^2=1$ مشخص‌ساخت.

برای اینکه تحقیق‌کنیم نقطهٔ به مختصات $x=\cosh u$ و $y=\sinh u$ برهذلولی‌واحد واقع‌است، روابط مذکور در تعریف (۱) را درمعادلهٔ هذلولی واحد قرارمی‌دهیم

$$x^2-y^2=1$$

$$\cosh^2 u-\sinh^2 u\overset{?}{=}1$$

$$\frac{۱}{۴}(e^{۲u}+۲+e^{-۲u})-\frac{۱}{۴}(e^{۲u}-۲+e^{-۲u})\stackrel{?}{=}۱$$

$$\frac{۱}{۴}(e^{۲u}+۲+e^{-۲u}-e^{۲u}+۲-e^{-۲u})\stackrel{?}{=}۱$$

$$\frac{۱}{۴}(۴)\stackrel{?}{=}۱. \qquad \text{(بله!)}$$

درواقع، اگر قراردهیم

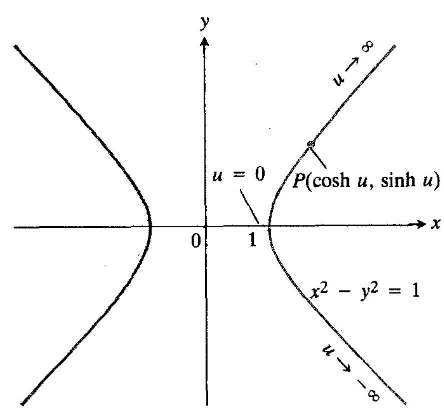
$$x=\cosh u=\frac{۱}{۲}(e^{u}+e^{-u})$$
$$y=\sinh u=\frac{۱}{۲}(e^{u}-e^{-u}) \qquad (۲)$$

آنگاه وقتی u از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند، نقطهٔ $P(x, y)$ شاخهٔ سمت راست هذلولی $x^{۲}-y^{۲}=۱$ را مشخص می‌سازد. در شکل ۱.۹ جهت ترسیم خم را به‌وسیلهٔ پیکانهایی نشان‌داده‌ایم. چون e^{u} همیشه مثبت و $e^{-u}=۱/e^{u}$ نیز همیشه مثبت است، به ازای همهٔ مقادیر حقیقی u، $-\infty<u<\infty$، عبارت $x=\cosh u=(۱/۲)(e^{u}+e^{-u})$ هم‌مثبت است. پس نقطهٔ (x, y) در سمت راست محور y است.

پس، اولین مطلبی که تاکنون درمثلثات هیپربولیك ثابت کرده‌ایم، اتحاد اساسی زیراست

$$\cosh^{۲}u-\sinh^{۲}u=۱. \qquad (۳)$$

این اتحاد شبیه‌است به‌اتحاد مثلثاتی‌معمولی $\cos^{۲}u+\sin^{۲}u=۱$ ولی با آن یکی نیست.



۱.۹ معادله‌های $x=\cosh u$، $y=\sinh u$، $-\infty<u<\infty$، معادله‌های پارامتری شاخهٔ راست هذلولی‌واحد $x^{۲}-y^{۲}=۱$ هستند. (برای شاخهٔ چپ، قرار می‌دهیم $x=-\cosh u$، $y=\sinh u$.)

■ ■ ■

مثلثات، و اجسام سماوی در زیر افق

راجر کاتس (۱۶۸۲–۱۷۱۶)، آبراهام‌دموآور (۱۶۶۷–۱۷۵۴) و لئونهارت اویلر (۱۷۰۷–۱۷۸۳) هر یك جنبه‌های خاصی از توابع هیپربولیك را کشف‌کردند ولی اولین‌کسی‌که توابع هیپربولیك را به‌شیوه‌ای اسلوبمند بررسی‌کرد، یوهان هاینریش لامبرت، ریاضیدان سویسی-آلمانی و دوست اویلر، بود. لامبرت توابعی‌ازیك زاویه را که با مراجعه به‌دایرهٔ واحد مشخص‌می‌شوند (توابع‌مستدیر) با توابعی‌مشابه به ازیك‌زاویه‌که مرجع آنها هذلولی متساوی‌الساقین‌است (توابع هیپربولیك یا هذلولوی) کنارهم نهاد و در ارتباط باهم مطالعه‌کرد. انگیزهٔ او در این‌کار، مطالعاتش در نجوم بودکه اطلاعاتی [ریاضی] از اجسام سماوی در زیر افق را ایجاب می‌کرد. درمطالعات او، دانستن‌سینوس‌قوسی‌که اندازه‌اش یك عدد موهومی است، و به‌طور کلی توابع مثلثاتی چنین قوسهایی لازم بود. لامبرت از مثلثات هیپربولیك برای این‌گونه محاسبات استفاده‌کرد.

توابع هیپربولیك دیگر برحسب $\sinh u$ و $\cosh u$ و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(۴)\quad \begin{cases} \text{تانژانت هیپربولیك:} & \tanh u=\dfrac{\sinh u}{\cosh u}=\dfrac{e^{u}-e^{-u}}{e^{u}+e^{-u}} \\ \text{کتانژانت هیپربولیك:} & \coth u=\dfrac{\cosh u}{\sinh u}=\dfrac{e^{u}+e^{-u}}{e^{u}-e^{-u}} \\ \text{سکانت هیپربولیك:} & \operatorname{sech} u=\dfrac{۱}{\cosh u}=\dfrac{۲}{e^{u}+e^{-u}} \\ \text{کسکانت هیپربولیك:} & \operatorname{csch} u=\dfrac{۱}{\sinh u}=\dfrac{۲}{e^{u}-e^{-u}} \end{cases}$$

اگرطرفین اتحاد $\cosh^{۲}u-\sinh^{۲}u=۱$ را بر $\cosh^{۲}u$ تقسیم کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$۱-\tanh^{۲}u=\operatorname{sech}^{۲}u\,. \qquad (۵)$$

اگرطرفین $\cosh^{۲}u-\sinh^{۲}u=۱$ را بر $\sinh^{۲}u$ تقسیم کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$\coth^{۲}u-۱=\operatorname{csch}^{۲}u\,. \qquad (۶)$$

همچنین از تعریفهای $\cosh u$ و $\sinh u$ در (۱) روابط زیر را نتیجه می‌گیریم

$$\cosh u+\sinh u=e^{u} \qquad (۷)$$

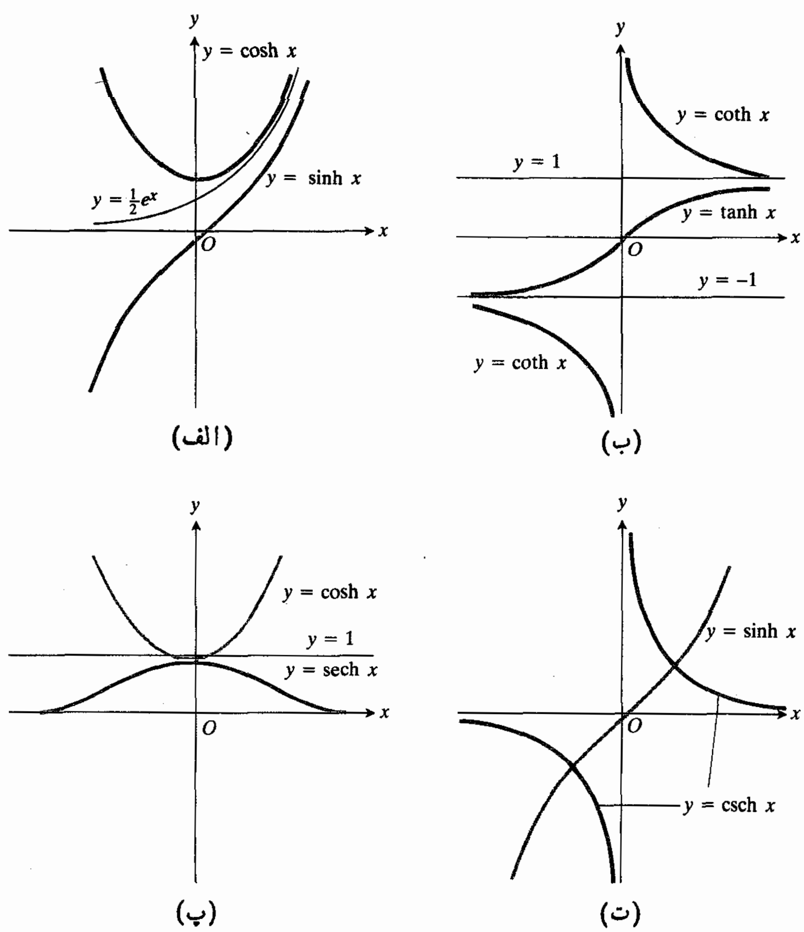
و

$$\cosh u-\sinh u=e^{-u}\,. \qquad (۸)$$

بنابراین، به‌جای هر ترکیب e^{u} و e^{-u} می‌توان ترکیبی‌از $\sinh u$ و $\cosh u$ قرارداد و به‌عکس.

چون e^{-u} مثبت است، معادلهٔ $\cosh u-\sinh u=e^{-u}$ نشان می‌دهد که $\cosh u$ همیشه بزرگتر از $\sinh u$ است. ولی، به‌ازای مقادیر مثبت بزرگ u، e^{-u} کوچك است و $\cosh u$ تقریباً برابر با $\sinh u$ است.

نمودارهای توابع هیپربولیك را درشکل ۲.۹ می‌بینید.



۲.۹ نمودارهای شش‌تابع هیپربولیك.

مقایسهٔ تابعهای هیپربولیک با تابعهای مثلثاتی

چون $\cosh 0 = 1$ و $\sinh 0 = 0$، توابع هیپربولیک (هر شش‌تای آنها) در صفر همان مقادیری را دارند که توابع مثلثاتی متناظر دارند.

کسینوس‌هیپربولیک، تابعی‌زوج است زیرا به‌ازای همهٔ xها،

$$\cosh(-x)=\frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}=\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}=\cosh x$$

سینوس هیپربولیک تابعی فرد است زیرا به‌ازای همهٔ xها،

$$\sinh(-x)=\frac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{2}=\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}=-\sinh x\,.$$

بنابراین، نمودار $y=\cosh x$ نسبت به‌محور y، و نمودار $y=\sinh x$ نسبت به‌مبدأ متقارن است. دراین مورد هم توابع هیپربولیک مانند نظایر مثلثاتی‌شان رفتار می‌کنند.

با این‌همه، توابع هیپربولیک و توابع مثلثاتی تفاوتهای مهمی هم دارند. توابع مثلثاتی، تناوبی‌اند درحالی‌که توابع هیپربولیک چنین نیستند. برد این دونوع توابع نیز بسیار متفاوت است:

$\sin x$ بین -1 و $+1$ نوسان می‌کند؛
$\sinh x$ بین $-\infty$ و $+\infty$ دائماً صعود می‌کند.

$\cos x$ بین -1 و $+1$ نوسان می‌کند؛
$\cosh x$ از $+\infty$ تا $+1$ و ازآن تا $+\infty$ تغییرمی‌کند.

$|\sec x|$ هیچگاه کوچکتر از ۱ نیست؛
$\operatorname{sech} x$ هیچگاه بزرگتراز ۱ نیست و همواره مثبت است.

$\tan x$ از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییرمی‌کند؛
$\tanh x$ از -1 تا $+1$ تغییرمی‌کند.

تفاوت دیگر، دررفتار این‌توابع وقتی $x \to \pm\infty$ نهفته است. دربارهٔ رفتار توابع مستدیر $\sin x$، $\cos x$، $\tan x$، و نظایر آنها به‌ازای مقادیر بزرگ x حکم چندان مشخصی نمی‌توان داد. ولی‌رفتار توابع هیپربولیک بسیارشبیه رفتار $e^{x}/2$، $e^{-x}/2$، یا توابع ثابت صفر و یک است:

	به‌ازای xهای منفی و $\lvert x\rvert$ بزرگ	به‌ازای xهای بزرگ و مثبت
(۹)	$\cosh x \approx -\sinh x \approx \frac{1}{2}e^{-x}$	$\cosh x \approx \sinh x \approx \frac{1}{2}e^{x}$
	$\tanh x \approx \coth x \approx -1$	$\tanh x \approx \coth x \approx 1$
	$\operatorname{sech} x \approx -\operatorname{csch} x \approx 2e^{x} \approx 0$	$\operatorname{sech} x \approx \operatorname{csch} x \approx 2e^{-x} \approx 0$

اتحادها

برای رسیدن از تعریفهای (۱) به‌اتحادهای زیر، فقط کمی عملیات جبری معمولی لازم است.

$$\sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y \qquad (10)$$
$$\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y$$

اگرقراردهیم $x=y$، این اتحادها نیز به‌نوبهٔ خود روابط زیررا به‌دست می‌دهند.

(۱۱ الف) $$\sinh 2x = 2\sinh x\cosh x$$

(۱۱ ب) $$\cosh 2x=\cosh^2 x+\sinh^2 x$$

اگر اتحاد (۱۱ ب) با اتحاد

(۳) $$1=\cosh^2 x-\sinh^2 x$$

ترکیب شود، فرمولهای مفید «دوبرابرزاویه» حاصل می‌گردد. اگر (۱۱ ب) و (۳) را باهم جمع کنیم، داریم

(۱۲ الف) $$\cosh 2x+1=2\cosh^2 x\,.$$

و اگر (۳) را از (۱۱ ب) کم‌کنیم، به‌دست می‌آوریم

(۱۲ ب) $$\cosh 2x-1=2\sinh^2 x\,.$$

با تقسیم (۱۲ الف) و (۱۲ ب) بر ۲ خواهیم داشت

(۱۲ پ) $$\cosh^2 u=\frac{\cosh 2u+1}{2}$$

(۱۲ ت) $$\sinh^2 u=\frac{\cosh 2u-1}{2}\,.$$

مسأله‌ها

در هریك ازمسأله‌های ۱ـ۶ مقدار یکی از شش‌تابع هیپربولیک u

داده می‌شود. با استفاده از تعریفها و اتحادهایی که درمتن آوردیم، مقادیر پنج تابع هیپربولیك دیگر را معین کنید.

۱. $\sinh u=-\frac{۳}{۴}$

۲. $\cosh u=\frac{۱۷}{۱۵},\quad u>۰$

۳. $\tanh u=-\frac{۷}{۲۵}$

۴. $\coth u=\frac{۱۳}{۱۲}$

۵. $\operatorname{sech} u=\frac{۳}{۵}$

۶. $\operatorname{csch} u=\frac{۵}{۱۲}$

درهریك از مسأله‌های ۷-۱۴، عبارت داده شده را برحسب توابع نمایی بنویسید. نتیجهٔ نهایی را تا حد امکان ساده کنید.

۷. $۲\cosh(\ln x)$

۸. $\sinh(۲\ln x)$

۹. $\tanh(\ln x)$

۱۰. $\frac{۱}{\cosh x-\sinh x}$

۱۱. $\cosh ۵x+\sinh ۵x$

۱۲. $(\sinh x+\cosh x)^۴$

۱۳. $\cosh ۳x-\sinh ۳x$

۱۴. $\ln(\cosh x+\sinh x)+\ln(\cosh x-\sinh x)$

در هریك ازمسأله‌های ۱۵-۲۴، معین کنیدکه تابع داده شده زوج است یا فرد و یا هیچکدام.

۱۵. $\tanh x$

۱۶. $\coth x$

۱۷. $\operatorname{sech} x$

۱۸. $\operatorname{csch} x$

۱۹. $\cosh ۳x$

۲۰. $\sinh ۲x$

۲۱. $\sinh x\cosh x$

۲۲. $(\sinh x)^۲$

۲۳. $\operatorname{sech} x+\cosh x$

۲۴. $\sinh x+\cosh x$

درمسأله‌های ۲۵ و ۲۶، معادلهٔ داده شده را نسبت به x حل کنید.

۲۵. $\cosh x=\sinh x+\frac{۱}{۲}$

۲۶. $\tanh x=\frac{۳}{۵}$

درمسأله‌های ۲۷ و ۲۸، درستی اتحادهای داده‌شده را تحقیق کنید.

۲۷. $\sinh(u+v)=\sinh u\cosh v+\cosh u\sinh v$

۲۸. $\cosh(u+v)=\cosh u\cosh v+\sinh u\sinh v$

با استفاده از اتحادهای مذکور درمسأله‌های ۲۷ و ۲۸، اتحادهای زیر را استنتاج کنید.

۲۹. $\sinh(u-v)=\sinh u\cosh v-\cosh u\sinh v$

۳۰. $\cosh(u-v)=\cosh u\cosh v-\sinh u\sinh v$

با استفاده از اتحادهای مذکور درمسأله‌های ۲۷-۳۰، درستی اتحادهای مسأله‌های ۳۱-۳۶ را تحقیق کنید.

۳۱. $\sinh u\cosh v=\frac{۱}{۲}\sinh(u+v)+\frac{۱}{۲}\sinh(u-v)$

۳۲. $\cosh u\sinh v=\frac{۱}{۲}\sinh(u+v)-\frac{۱}{۲}\sinh(u-v)$

۳۳. $\cosh u\cosh v=\frac{۱}{۲}\cosh(u+v)+\frac{۱}{۲}\cosh(u-v)$

۳۴. $\sinh u\sinh v=\frac{۱}{۲}\cosh(u+v)-\frac{۱}{۲}\cosh(u-v)$

۳۵. $$\sinh ۳u=\sinh^۳u+۳\cosh^۲u\sinh u$$
$$=۳\sinh u+۴\sinh^۳u$$

۳۶. $$\cosh ۳u=\cosh u+۳\sinh^۲u\cosh u$$
$$=۴\cosh^۳u-۳\cosh u$$

۳۷. نشان دهید که

$$\sinh^۲u-\sinh^۲v=\cosh^۲u-\cosh^۲v.$$

۳۸. نشان دهید که

$$(\cosh x+\sinh x)^n=\cosh nx+\sinh nx\,.$$

۳۹. نشان دهید که معادله‌های

$$x=-\cosh u,\quad y=\sinh u,\quad -\infty<u<\infty$$

معادله‌های پارامتری شاخهٔ چپ هذلولی $x^2-y^2=1$ هستند.

۴۰. نشان‌دهید که خط مماس برهذلولی $x^2-y^2=1$ درنقطهٔ $P(\cosh u, \sinh u)$ محور x را در نقطهٔ $(\operatorname{sech} u, 0)$ و، اگر قائم نباشد، محور y را درنقطهٔ $(0, -\operatorname{csch} u)$ قطع می‌کند.

۴۱. نشان‌دهید که r، فاصله‌ازمبدأ O تا نقطهٔ $P(\cosh u, \sinh u)$ واقع برهذلولی $x^2-y^2=1$، برابراست با $r=\sqrt{\cosh 2u}$.

۴۲. نشان‌دهید که درشکل ۱.۹ خط مماس برهذلولی دررأس آن، خط OP را درنقطهٔ $(1, \tanh u)$ قطع‌می‌کند. از اینجا، تعبیری هندسی از $\tanh u$ به‌دست می‌آید.

۴۳. اگر θ دربازهٔ $-\pi/2<\theta<\pi/2$ باشد و $\sinh x=\tan\theta$، نشان دهید که $\cosh x=\sec\theta$، $\tanh x=\sin\theta$، $\coth x=\csc\theta$، $\operatorname{csch} x=\cot\theta$، و $\operatorname{sech} x=\cos\theta$.

TOOLKIT PROGRAMS

Function Evaluator   Super * Grapher

۲.۹ مشتقها و انتگرالها

شش‌تابع‌هیپر بولیك مورد بحث، ترکیبات گویایی از تابع مشتقپذیر e^u هستند و بنا بر این، درهر نقطه‌ای که تعریف می‌شوند، مشتق دارند. دراین‌بخش، پی‌می‌بریم که این‌مشتقها چه هستند و به‌انتگرالهایی که شامل توابع هیپر بولیك هستند، نظری می‌افکنیم.

فرض می‌کنیم u یك تابع‌مشتقپذیر از x است و از

$$\sinh u=\frac{1}{2}(e^u-e^{-u}),\quad \cosh u=\frac{1}{2}(e^u+e^{-u}) \qquad (1)$$

نسبت به x مشتق می‌گیریم. با به‌کارگیری فرمولهای

$$\frac{de^u}{dx}=e^u\frac{du}{dx},\quad \frac{de^{-u}}{dx}=e^{-u}\frac{d(-u)}{dx}=-e^{-u}\frac{du}{dx}$$

روابط زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\frac{d(\sinh u)}{dx}=\cosh u\frac{du}{dx},\quad \frac{d(\cosh u)}{dx}=\sinh u\frac{du}{dx}\,. \qquad (2)$$

حال، اگر از

$$y=\tanh u=\frac{\sinh u}{\cosh u}$$

به‌صورت یك کسر مشتق بگیریم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\frac{d(\tanh u)}{dx}&=\frac{\cosh u(d(\sinh u)/dx)-\sinh u(d(\cosh u)/dx)}{\cosh^2 u}\\&=\frac{\cosh^2 u(du/dx)-\sinh^2 u(du/dx)}{\cosh^2 u}\\&=\frac{(\cosh^2 u-\sinh^2 u)(du/dx)}{\cosh^2 u}=\frac{1}{\cosh^2 u}\frac{du}{dx}\\&=\operatorname{sech}^2 u\frac{du}{dx}\,.\end{aligned}$$

سایر فرمولها را هم می‌توان به روش مشابه استنتاج کرد و آنها را درزیر می‌بینید.

$$\begin{aligned}\frac{d(\tanh u)}{dx}&=\operatorname{sech}^2 u\frac{du}{dx}\\\frac{d(\coth u)}{dx}&=-\operatorname{csch}^2 u\frac{du}{dx}\\\frac{d(\operatorname{sech} u)}{dx}&=-\operatorname{sech} u\tanh u\frac{du}{dx}\\\frac{d(\operatorname{csch} u)}{dx}&=-\operatorname{csch} u\coth u\frac{du}{dx}\end{aligned} \qquad (3)$$

این فرمولهای مشتق، فرمولهای انتگرال زیر را تولید می‌کنند

$$\begin{aligned}\int\sinh u\,du&=\cosh u+C\\\int\cosh u\,du&=\sinh u+C\\\int\operatorname{sech}^2 u\,du&=\tanh u+C\\\int\operatorname{csch}^2 u\,du&=-\coth u+C\\\int\operatorname{sech} u\tanh u\,du&=-\operatorname{sech} u+C\\\int\operatorname{csch} u\coth u\,du&=-\operatorname{csch} u+C\end{aligned} \qquad (4)$$

مثال ۱ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int \coth 5x\, dx.$$

حل:

$$\int \coth 5x dx = \int \frac{\cosh 5x}{\sinh 5x} dx$$
$$= \frac{1}{5}\int \frac{du}{u} \qquad (u=\sinh 5x)$$
$$= \frac{1}{5}\ln|u| + C = \frac{1}{5}\ln|\sinh 5x| + C. \qquad \blacksquare$$

مثال ۲ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int_0^1 \sinh^2 x\, dx.$$

حل: بنا به‌اتحاد (۱۲ ت) در بخش ۱.۹ داریم

$$\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}.$$

بنا براین،

$$\int_0^1 \sinh^2 x\, dx = \int_0^1 \frac{\cosh 2x - 1}{2} dx$$
$$= \frac{\sinh 2x}{4} - \frac{x}{2}\Big]_0^1 = \frac{\sinh 2}{4} - \frac{1}{2}$$
$$\approx 0{,}40672. \qquad \blacksquare$$

مثال ۳ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int x \sinh x\, dx.$$

حل: انتگرالگیری جزء به‌جزء. فرض می‌کنیم

$$u = x, \quad dv = \sinh x\, dx, \quad v = \cosh x$$

بنا براین

$$\int x\sinh x\, dx = x\cosh x - \int \cosh x\, dx$$
$$= x\cosh x - \sinh x + C. \qquad \blacksquare$$

مثال ۴ مطلوب است محاسبهٔ

$$\int_0^{\ln 4} e^x \sinh x\, dx.$$

حل: بنا به‌تعریف $\sinh x$ داریم

$$\int_0^{\ln 4} e^x \sinh x\, dx = \int_0^{\ln 4} e^x \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx$$
$$= \int_0^{\ln 4} \frac{e^{2x} - 1}{2} dx = \frac{e^{2x}}{4} - \frac{x}{2}\Big]_0^{\ln 4}$$
$$= \frac{e^{2\ln 4}}{4} - \frac{\ln 4}{2} - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{e^{\ln 16}}{4} - \frac{2\ln 2}{2} - \frac{1}{4}$$
$$= 4 - \ln 2 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} - \ln 2. \qquad \blacksquare$$

مثال ۵ مساحت ناحیه‌ای نامتناهی را که در ربع اول و بین‌خم $y = \tanh x$ و خط $y = 1$ واقع است، پیدا کنید.

حل: ناحیه‌را مشخص‌می‌کنیم (شکل ۳.۹) و توجه می‌کنیم که مساحت از انتگرال غیرعادی زیر به‌دست می‌آید

$$\int_0^{\infty} (1 - \tanh x)\, dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b (1 - \tanh x)\, dx.$$

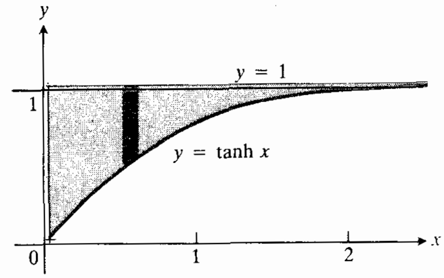
مقدار انتگرال سمت راست برحسب b برابراست با

$$\int_0^b (1 - \tanh x)\, dx = \int_0^b \left(1 - \frac{\sinh x}{\cosh x}\right) dx$$
$$= x - \ln\cosh x\Big]_0^b$$
$$= b - \ln\cosh b$$
$$= \ln e^b - \ln\cosh b$$
$$= \ln\frac{e^b}{\cosh b} = \ln\frac{2e^b}{e^b + e^{-b}}$$
$$= \ln\frac{2}{1 + e^{-2b}}.$$

بنا براین، مقدار انتگرال غیرعادی برابراست با

$$\int_0^{\infty} (1 - \tanh x)\, dx = \lim_{b\to\infty} \ln\frac{2}{1 + e^{-2b}}$$
$$= \ln\frac{2}{1 + 0} = \ln 2.$$

مساحت برابربا $\ln 2$ است.



۳.۹ مساحت ناحیهٔ بین $y=\tanh x$ و $y=1$ در ربع اول را می‌توان با یك انتگرال غیرعادی محاسبه کرد. همان‌طور که درمثال ۵ نشان داده شده مساحت برابر با $\ln 2$ است.

مسأله‌ها

درمسأله‌های ۱–۱۶، dy/dx را بیابید.

۱. $y=\sinh 3x$

۲. $y=\cosh^2 5x$

۳. $y=\cosh^2 5x-\sinh^2 5x$

۴. $y=\tanh 2x$

۵. $y=\coth(\tan x)$

۶. $y=\operatorname{sech}^3 x$

۷. $y=4\operatorname{csch}(x/4)$

۸. $\sinh y=\tan x$

۹. $y=\operatorname{sech}^2 x+\tanh^2 x$

۱۰. $y=\operatorname{csch}^2 x$

۱۱. $y=\sin^{-1}(\tanh x)$

۱۲. $y=x-(1/4)\coth 4x$

۱۳. $y=\ln|\tanh(x/2)|$

۱۴. $y=x^4\sinh x$

۱۵. $y=x\sinh 2x-(1/2)\cosh 2x$

۱۶. $y=x\sinh x-\cosh x$

۱۷. نشان دهید که

$$\int \operatorname{sech} x\,dx=\sin^{-1}(\tanh x)+C.$$

۱۸. نشان دهید که

$$\int \operatorname{csch} x\,dx=\ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right|+C.$$

درمسأله‌های ۱۹–۲۸، انتگرال را محاسبه کنید.

۱۹. $\int_{-1}^{1}\cosh 5x\,dx$

۲۰. $\int_{-1}^{0}\cosh(2x+1)\,dx$

۲۱. $\int_{-3}^{3}\sinh x\,dx$

۲۲. $\int_{-\pi}^{\pi}\tanh 2x\,dx$

۲۳. $\int_{0}^{1}x\cosh x\,dx$

۲۴. $\int_{\ln 2}^{\ln 4}\coth x\,dx$

۲۵. $\int_{0}^{1/2}\frac{\sinh x}{e^x}\,dx$

۲۶. $\int_{0}^{\ln 2}4e^x\cosh x\,dx$

۲۷. $\int_{0}^{1}\sinh\sqrt{x}\,dx$

۲۸. $\int_{1}^{2}\frac{\cosh(\ln x)\,dx}{x}$

درمسأله‌های ۲۹–۴۶، انتگرال را محاسبه کنید.

۲۹. $\int\cosh(2x+1)\,dx$

۳۰. $\int\tanh x\,dx$

۳۱. $\int\frac{\sinh x}{\cosh^4 x}\,dx$

۳۲. $\int\frac{4\,dx}{(e^x+e^{-x})^2}$

۳۳. $\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx$

۳۴. $\int \tanh^2 x \, dx$

۳۵. $\int \frac{\sinh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

۳۶. $\int \cosh^2 3x \, dx$

۳۷. $\int \sqrt{\cosh x - 1} \, dx$

۳۸. $\int \cosh^2 5x \, dx$

۳۹. $\int 2 \cosh x \sinh x \, dx$

۴۰. $\int \cosh^3 x \, dx$

۴۱. $\int \frac{\sinh x}{1+\cosh x} dx$

۴۲. $\int x^2 \sinh x \, dx$

۴۳. $\int x^2 \cosh x \, dx$

۴۴. $\int_0^{\ln 2} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} dx$

(راهنمایی: در تمرین ۴۴ صورت و مخرج انتگرالده را در e^x ضرب کنید.)

۴۵. $\int \operatorname{sech}^2 5x \tanh 5x \, dx$

۴۶. $\int \operatorname{csch}^2 x \coth x \, dx$

در مسألههای ۴۷–۵۰، انتگرال را با استفاده از جدول به دست آورید.

۴۷. $\int \sinh^4 3x \, dx$

۴۸. $\int \operatorname{sech} 7x \, dx$

۴۹. $\int e^{3x} \cosh 2x \, dx$

۵۰. $\int \tanh^3 x \, dx$

۵۱. الف) مطلوب است محاسبهٔ $\int \operatorname{csch} x \, dx$. برای انجام دادن این محاسبه، انتگرالده را در

$$\frac{\operatorname{csch} x + \coth x}{\operatorname{csch} x + \coth x}$$

ضرب کنید و از نتیجهٔ حاصل، انتگرال بگیرید.

ب) نشان دهید پاسخی که در (الف) بهدست آوردید، معادل است با پاسخ مسألهٔ ۱۸.

۵۲. مساحت ناحیهای نامتناهی را که در ربع اول و بین خمهای $y = \cosh x$ و $y = \sinh x$ واقع است، حساب کنید.

۵۳. ناحیهٔ بین خمهای $y = \cosh x$ و $y = \sinh x$ و خطهای $x = 0$ و $x = 3$ حول محور x دوران می‌کند و جسمی تولید می‌کند. حجم این جسم را بیابید.

۵۴. مطلوب است طول خم $y = \cosh x$، $0 \leqslant x \leqslant 1$.

۵۵. مطلوب است مساحت رویه‌ای که از دوران قوس $y = \cosh x$، $0 \leqslant x \leqslant \ln 2$، حول محور x پدید می‌آید.

۵۶. مطلوب است محاسبهٔ حجم جسمی که از دوران کل خم $y = \operatorname{sech} x$، $-\infty < x < \infty$، حول محور x پدید می‌آید.

۵۷. ناحیه‌ای در ربع اول واقع است و از پایین به محور x، از چپ به خط $x = \ln 2$، و از بالا به خم $y = \operatorname{csch} x$ محدود است. حجم جسم حاصل از دوران این ناحیه حول محور x را بیابید.

۵۸. فرض کنید R نشان‌دهندهٔ ناحیه‌ای در ربع اول باشد که بین خمهای $y = \sinh x$ و $y = \cosh x$ واقع است.

الف) یك حجم متناهی: حجمی را بیابید که با دوران R حول محور y پدید می‌آید.

ب) یك حجم نامتناهی: نشان دهید حجمی که با دوران R حول محور x پدید می‌آید، نامتناهی است.

۵۹. با استفاده از فرمول انتگرال در مسألهٔ ۱۷، مرکز جرم ورقهٔ همگن نازکی را بیابید که ناحیهٔ نامتناهی محدود به محور x و خم $y = \operatorname{sech} x$ را می‌پوشاند.

۶۰. مطلوب است مرکز جرم سیم یکنواخت نازکی که در امتداد خم $y = \cosh x$، $0 \leqslant x \leqslant \ln 2$ قرار دارد.

۶۱. ناحیهٔ واقع در ربع اول بین خم $y = \tanh x$ و خط $y = 1$

حول محور x دوران می‌کند و جسمی نسامتناهی پدید می‌آورد. حجم این جسم را بیابید.

۶۲. یکی از تشابهات بین توابع هذلولوی و مستدیر این است که متغیر u درمعادلات پارامتری

$$x=\cosh u,\quad y=\sinh u,\quad -\infty<u<\infty$$

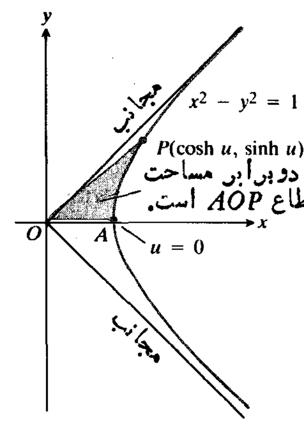
برای شاخهٔ راست هذلولی $x^{۲}-y^{۲}=۱$، عبارت‌است ازدوبرابر مساحت قطاع AOP که در شکل ۴.۹ نشان داده شده است. برای اینکه ببینید چرا چنین است، اعمال زیر را انجام دهید.

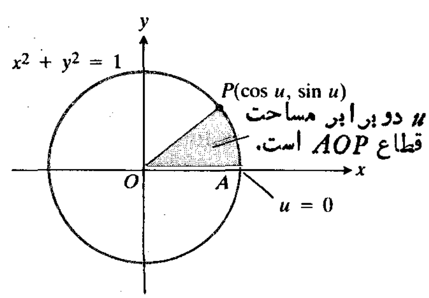
الف) نشان‌دهیدکه مساحت $A(u)$ی قطاع AOP ازفرمول زیر به‌دست‌می‌آید

$$A(u)=\frac{۱}{۲}\cosh u\sinh u-\int_{۱}^{\cosh u}\sqrt{x^{۲}-۱}\,dx\,.$$

ب) از دوطـرف معادلـهٔ قسمت (الـف) مشتق بگیرید و نشان دهیدکه

$$A'(u)=\frac{۱}{۲}\,.$$





۴.۹ یکی از تشابهات بین توابع هذلولوی و مستدیر بـا این دونمودار آشکار می‌شود. مسألهٔ ۶۲ را ببینید.

پ) از معادلهٔ اخیر $A(u)$ را به دست آورید. مقدار $A(۰)$ چیست؟

۶۳. الف) نشان‌دهیدکه تابع

$$y=A\cosh x+B\sinh x+C\cos x+D\sin x$$

جوابی ازمعادلهٔ دیفرانسیل زیر است

$$y^{(۴)}-y=۰\,.$$

(درفرمول y، A، B، C، و D ثابت‌اند.)

ب) y به‌ازای چه مقادیری از A، B، C، و D در شرایط اولیهٔ زیرصدق می‌کند؟

$$y(۰)=y'(۰)=۰,\quad y''(۰)=y'''(۰)=۲\,.$$

۶۴. ریشه‌یاب عددی یا ماشین‌حساب برنامه‌پذیر بـرای یـافتن بسامدها (فرکانسها)ی طبیعی ارتعاش تیری که در دوانتهایش محکم شده است، باید معادلاتی به‌شکل زیررا حل کنیم

$$\cosh x\cos x=۱\,.$$

الف) خمهای $y=۱/\cosh x$ و $y=\cos x$ را در یك نمودار مشترك رسم کنید. معادلهٔ $\cosh x\cos x=۱$ چند جواب دارد؟

ب) با استفاده از روش نیوتن یا روش ریشه‌یابی دیگری، مقدار کوچکترین جواب مثبت معادلهٔ زیر را براوردکنید

$$\cosh x\cos x=۱\,.$$

۶۵. نشان دهیدکه توابع

$$x=-\frac{۲}{\sqrt{۳}}\sinh\frac{t}{\sqrt{۳}}$$

$$y=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\sinh\frac{t}{\sqrt{۳}}+\cosh\frac{t}{\sqrt{۳}}$$

همراه باهم درمعادلات دیفرانسیل

$$\frac{dx}{dt}+۲\frac{dy}{dt}+x=۰$$

$$\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}+y=۰$$

و شرایط اولیهٔ $x(۰)=۰,\ y(۰)=۱$ صدق می‌کنند. این گونه دستگاههای معادلات دیفرانسیل غالباً جوابهایی به صورت توابع هذلولوی دارند.

TOOLKIT PROGRAMS

Root Finder   Super * Grapher

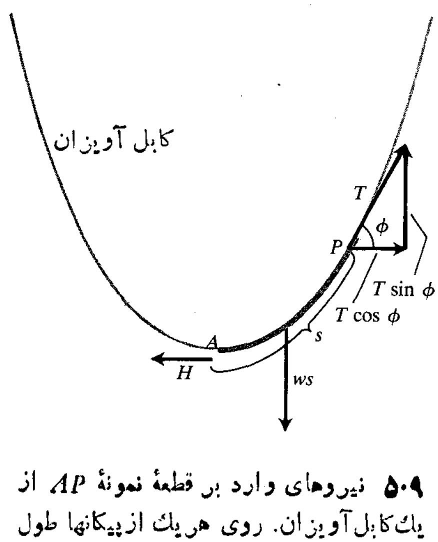
۳.۹ کابل آویزان

دراین بخش نشان می‌دهیم که بندهای رخت، زنجیرها، خطوط تلفن، و خطوط انتقال برق بین دوتکیه‌گاه همیشه به شکل یك خم کسینوس هیپربولیك آویزان هستند. درمقابل اینها، کابلهای پلهای معلق‌که به‌طور آزاد آویزان نیستند بلکه بار یکنواختی را درامتداد افقی تحمل می کنند، به‌شکل سهمی قرار می گیرند (بخش ۳.۸، مسألهٔ ۳۲).

نقطهٔ آغاز توصیف ریاضی‌شکل یك‌کابل آویزان، این نکته است‌که نیروهای وارد برهرقطعه ازکابلی‌که درحال سکون آویزان است باید یکدیگر را خنثی کنند. این نکته ازآنجا واضح است‌که کابل دراین حالت حرکت نمی‌کند. اگر قطعه‌ای ازکابل را که از پایینترین نقطهٔ آن، A، تا نقطه‌ای مانند P واقع برکابل امتداد دارد درنظر بگیریم و نیروهای وارد براین قطعه را بررسی کنیم، درمی‌یابیم که این نیروها عبارت‌اند از

۱. کشش افقی در A
۲. کشش مماسی در P، و
۳. نیرویی روبه‌پایین که گرانش براین‌قطعه ازکابل اعمال می کند.

شکل ۵.۹ یك قطعهٔ نمونه‌وار از کابل و نیروهایی را که بر آن اثرمی‌کنند نشان‌می‌دهد. کشش افقی در A با پیکانی به‌طول H که به‌سمت چپ اشاره دارد،نشان داده‌می‌شود. کشش مماسی در P با ترسیم پیکانی به طول T و به‌سمت بالا و راست در امتداد مماس برکابل در P به نمایش درمی‌آید. نیروی گرانش با پیکانی که مستقیماً به‌سمت پایین متوجه است، نشان داده‌می‌شود. طول این پیکان، ws، وزن قطعهٔ کابل است که به‌صورت حاصلضرب وزن کابل در طول واحد، w، و طول قطعه، s، بیان می گردد. کشش در P دارای یك مؤلفهٔ افقی با اندازهٔ $T\cos\phi$، ویك مؤلفهٔ قائم با اندازهٔ $T\sin\phi$ است.



۵.۹ نیروهای وارد بر قطعهٔ نمونهٔ AP از یك‌کابل آویزان. روی هریك ازپیکانها طول مربوطه نوشته شده‌است.

برای استفادهٔ کامل‌از این اطلاع‌که نیروهای‌وارد برقطعهٔ AP درحال تعادل‌اند، یك دستگاه مختصات در صفحه‌ای که کابل در آن آویزان است (شکل ۶.۹) درنظر می‌گیریم و فرض می کنیم که کابل در امتداد یك‌خم‌مشتقپذیر در آن صفحه قراردارد. به‌این ترتیب می‌توانیم معادلاتی برای ارتباط بین H، T، و ws بنویسیم، و از این معادلات، فرمولی‌برای خم استنتاج‌کنیم. محور x را عمود برنیروی‌گرانش‌ومحور y را محورقائم درنظرمی‌گیریم به‌طوری که قسمت مثبت محور y از A بگذرد. فعلاً مختص y نقطهٔ A را y_0 می گیریم. بعداً مقداری برای y_0 خواهیم یافت‌که معادلهٔ کابل را دراین دستگاه مختصات بسیار ساده می کند.

زاویهٔ ϕ که مماس برکابل در P با امتداد افقی‌می‌سازد، زاویهٔ میل‌خط مماس نیز هست. بنابراین، شیب dy/dx خمی‌که کابل روی‌آن واقع است در P دارای مقدار $\tan\phi$ است. در A، یعنی پایینترین نقطهٔ خم، $dy/dx=0$.

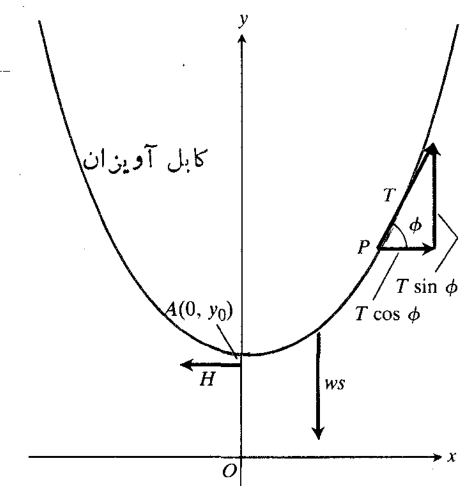
چون قطعهٔ APی کابل به‌سمت چپ و راست حرکت نمی‌کند، اندازهٔ مؤلفهٔ افقی‌کشش در P دقیقاً برابر است با کشش افقی در A

$$T\cos\phi=H. \tag{۱}$$

همچنین، این واقعیت‌که قطعهٔ AP به‌سمت پایین و بالا حرکت نمی‌کند حاکی ازآن است‌که اندازهٔ مؤلفهٔ قائم‌کشش در P برابر است با وزن قطعهٔ کابل

$$T\sin\phi=ws. \tag{۲}$$

این دوواقعیت، تنها مطالبی است‌که دربارهٔ کابل‌آویزان



۶.۹ برای مشخص‌کردن شکل یك‌کابل آویزان، فرض می‌کنیم‌کابل‌را برخمی دریك صفحهٔ مختصات منطبق‌کرده‌ایم.

می‌دانیم و اگر بخواهیم شکل کابل را از طریق یافتن y به‌صورت تابعی از x معین کنیم، این واقعیات نقطهٔ شروع کارند. تنها اطلاع دیگری که در دست داریم،و محصول این‌دستگاه مختصات و فرض مشتقپذیر بودن خمی است که کابل بر آن واقع است، این است که

$$\frac{dy}{dx} = \tan\phi \,. \qquad (۳)$$

اهمیت معادلهٔ (۳) در این است که x و y را وارد کار می‌کند، زیرا می‌توان نوشت

$$\frac{dy}{dx} = \tan\phi = \frac{T\sin\phi}{T\cos\phi} = \frac{ws}{H}$$

و یا به‌اختصار

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ws}{H} \,. \qquad (۴)$$

معادله‌هایی که تاکنون به‌دست‌آورده‌ایم راهی در اختیار ما نمی‌گذارند که بتوانیم s را مستقیماً برحسب x و y بیان کنیم؛ ولی با اطلاعاتی که دربارهٔ طول قوس داریم می‌دانیم که

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \,. \qquad (۵)$$

بنابراین، اگر از طرفین معادلهٔ (۴) نسبت به x مشتق بگیریم و به‌جای ds/dx حاصل، $\sqrt{1+(dy/dx)^2}$ را قرار دهیم، می‌توانیم s را از معادلهٔ (۴) حذف کنیم

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{H}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \,. \qquad (۶)$$

حال معادله‌ای دردست داریم که نشان می‌دهد مختصات نقاط روی کابل آویزان چگونه بهم مربوط‌اند.

برای یافتن y به‌صورت تابعی از x، معادلهٔ (۶) را تحت شرایط اولیهٔ زیر حل می‌کنیم

$$\frac{dy}{dx}(0) = 0 \qquad \text{(کابل در } x=0 \text{ افقی است.)}$$

$$y(0) = y_0 \qquad \text{(کابل در } y=y_0 \text{ محور } y \text{ را قطع می‌کند.)}$$

برای اینکه کار آسانتر شود می‌توانیم موقتاً به‌جای w/H یک تک‌حرف، مثلاً a، را بگذاریم. دراین صورت، معادلهٔ (۶) چنین می‌شود

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \,. \qquad (۷)$$

با توجه به‌اینکه در زمینهٔ معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم تجربهٔ چندانی کسب نکرده‌ایم و با ملاحظهٔ اینکه معادلهٔ (۷) یک معادلهٔ مرتبهٔ اول برحسب متغیر dy/dx است، می‌توانیم تجربه‌ای را که درمورد معادلات مرتبهٔ‌اول‌داریم به‌کار بگیریم. اگر dy/dx را با تک‌حرف p نشان دهیم و بنویسیم

$$\frac{dy}{dx} = p$$

آنگاه مشتق دوم چنین می‌شود

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$$

و معادلهٔ (۷) به‌این‌صورت درمی‌آید

$$\frac{dp}{dx} = a\sqrt{1+p^2} \,.$$

از اینجا به‌دست می‌آوریم

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = a\,dx$$

و

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int a\,dx = ax + C \,. \qquad (۸)$$

انتگرال سمت چپ با جانشانیهای زیرمحاسبه می‌شود

$$p = \sinh u, \quad dp = \cosh u\,du$$

$$1+p^2 = 1+\sinh^2 u = \cosh^2 u \,.$$

داریم

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int \frac{\cosh u\,du}{\sqrt{\cosh^2 u}}$$

$$= \int \frac{\cosh u\,du}{\cosh u} \quad (\cosh u > 0) \quad (۹)$$

$$= \int du = u + C' \,.$$

تابع $p=\sinh u$، که تابعی صعودی از u است، دارای معکوس $u=\sinh^{-1}p$ است. بنابراین می‌توان نوشت

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \sinh^{-1}p + C' \,. \qquad (۱۰)$$

معادلهٔ اخیر را با معادلهٔ (۸) ترکیب می‌کنیم تا معادلهٔ زیر

به‌دست آید

$$\sinh^{-1} p = ax + C_1 \qquad (۱۱)$$

که در آن، $C_1 = C - C'$.
شرط اولیهٔ

$$p(0) = \frac{dy}{dx}(0) = 0$$

مقدار C_1 را معین می‌سازد

$$C_1 = \sinh^{-1}(0) - a \cdot 0 = 0.$$

بنابراین

$$\sinh^{-1} p = ax$$

و

$$p = \sinh ax. \qquad (۱۲)$$

اگر معادلهٔ (۱۲) را برحسب x و y بازنویسی کنیم، به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{dy}{dx} = \sinh ax$$

این‌معادله را به‌آسانی نسبت به y حل می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم

$$y = \frac{1}{a} \cosh ax + C_2.$$

شرط اولیهٔ دیگر، $y(0) = y_0$، C_2 را معین می‌کند

$$y(0) = \frac{1}{a} \cosh 0 + C_2$$

$$y_0 = \frac{1}{a} + C_2$$

$$C_2 = \frac{1}{a} - y_0.$$

اکنون به‌عقب برمی‌گردیم و دستگاه‌مختصات را نسبت به کابل چنان تنظیم می‌کنیم که مقدار y_0 در

$$y_0 = \frac{1}{a} = \frac{H}{w}$$

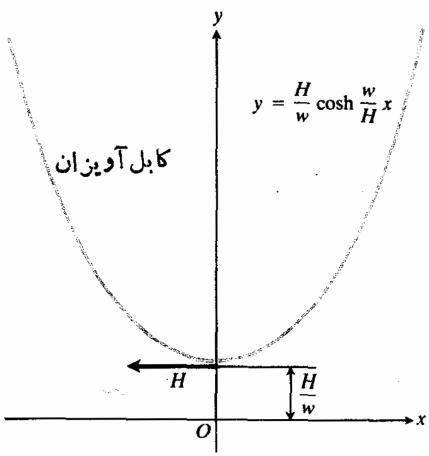
قرار گیرد. به‌این‌ترتیب، C_2 برابر با صفر می‌شود و معادلهٔ نهایی خم کابل آویزان به‌صورت زیر درمی‌آید

$$y = \frac{1}{a} \cosh ax = \frac{H}{w} \cosh \frac{w}{H} x. \qquad (۱۳)$$

آنچه دربارهٔ شکل یك کابل آویزان آموختیم، به‌طور خلاصه این است: اگر دستگاه مختصاتی برای صفحهٔ کابل برگزینیم که در آن محور x افقی باشد، نیروی گرانش مستقیماً به‌سمت پایین و قسمت مثبت محور y مستقیماً به‌سمت بالا متوجه باشد، و پایینترین نقطهٔ کابل در نقطهٔ $y = H/w$ برمحور y واقع باشد، آنگاه کابل در امتداد نمودار کسینوس هیپربولیك

$$y = \frac{H}{w} \cosh \frac{w}{H} x \qquad (۱۴)$$

قرار دارد. شکل ۷.۹ را ببینید.



۷.۹ در دستگاه مختصاتی که انتخاب آن به‌گونه‌ای بوده که H و w به‌شکلی که دیده می‌شود باهم مرتبط باشند، یك کابل آویزان روی خم کسینوس هیپربولیك $y = (H/w) \cosh (wx/H)$ قرار دارد.

نکتهٔ ۱ اگر می‌خواهید بدانید که‌چرا درمحاسبهٔ انتگرال درمعادلهٔ (۸) از جانشانی $p = \sinh u$ استفاده‌کردیم و نه از $p = \tan u$، پاسخ این است که جانشانی تانژانت به‌عبارتی لگاریتمی برای p می‌انجامد که انتگرالگیری از آن دشوار است.

نکتهٔ ۲ نتیجه‌ای که درمورد کابلهای آویزان به‌دست آوردیم، شکل طاق دروازهٔ غرب در سنت لوئیس را هم توجیه می‌کند. وقتی کابلی به‌طور آزاد آویزان است، همهٔ نیروهای داخلی‌اش درتعادل‌اند و

هیچ نیروی جانبی درکار نیست که کابل را از شکل خودش خارج کند. اگر قوسی چنان ساخته شود که به‌شکل یك خم کسینوس هیپر بولیك آویزان باشد، هیچ نیروی جانبی در قوس وجود ندارد. حال اگر قوس را کاملاً برگردانیم و آن را به‌شکل طاقی درآوریم بازهم همهٔ نیروها، که معکوس می‌شوند، در تعادل خواهند بود و هیچ نیروی جانبی درجهتی که باعث ریزش طاق شود، درکار نخواهد بود. پایداری ذاتی شکل کسینوس هیپر بولیك عاملی بود که مهندسان را به‌انتخاب این شکل برای طاق دروازهٔ غرب برانگیخت.

مثال ۱ نشان دهید که در دستگاه مختصات شکل ۷.۹، اندازهٔ نیروی کششی، T، درهر نقطهٔ $P(x, y)$ روی یك کابل آویزان، از معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$T = wy.$$

حل: دستگاه مختصاتی درنظر می‌گیریم که در آن، کابل روی خم

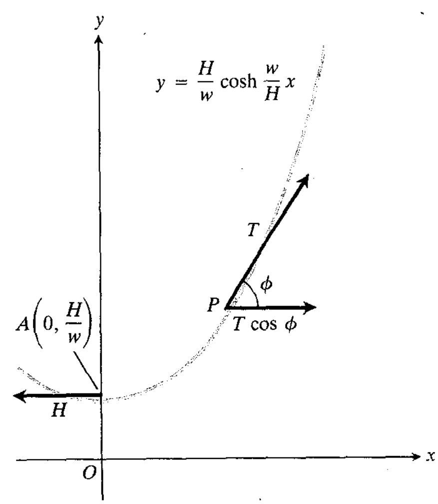
$$y = \frac{H}{w}\cosh\frac{w}{H}x$$

واقع باشد. نمودار قطعه‌ای ازکابل را از نقطهٔ $A(0, H/w)$ تا یك نقطهٔ اختیاری بالاتر مانند $P(x, y)$ رسم می‌کنیم و کششها در A و P را نشان می‌دهیم (شکل ۸.۹) شیب کابل در P این است

$$\tan\phi = \frac{dy}{dx} = \sinh\frac{w}{H}x.$$

کشش در P درمعادلهٔ

$$T\cos\phi = H$$

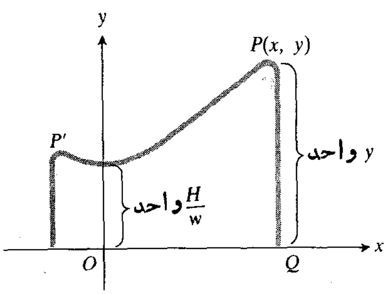


۸.۹ همچنانکه درمثال ۱ توضیح داده شد، دراین دستگاه مختصات داریم $T = wy$.

صدق می‌کند که از روی آن T را می‌یابیم

$$T = H\sec\phi = H\sqrt{1+\tan^2\phi}$$
$$= H\sqrt{1+\sinh^2\frac{w}{H}x} = H\sqrt{\cosh^2\frac{w}{H}x}$$
$$= H\cosh\frac{w}{H}x = w\frac{H}{w}\cosh\frac{w}{H}x = wy.$$

این مطلب که درهر نقطه ازکابل آویزان در دستگاه مختصات انتخاب‌شده T برابر با wy است، چه‌معنایی دارد؟ معنایش این است که اندازهٔ کشش در $P(x, y)$ دقیقاً برابر است با وزن y واحد ازکابل. بنابراین، اگر قسمتی ازکابل راکه درسمت راست P است دراین نقطه از روی میلهٔ بدون اصطکاکی بگذرانیم تا مستقیماً به‌سمت پایین آویزان شود و کابل را درنقطهٔ Q، که درآنجا محور x را قطع می‌کند، ببریم (شکل ۹.۹)، وزن قطعهٔ PQ ازکابل دقیقاً به‌اندازه‌ای است که مانع ازلغزیدن کابل در P می‌شود. از این‌رو، می‌توان کابل را از روی دومیلهٔ بدون اصطکاك گذراند و آویزان کرد بدون آنکه بلغزد، مشروط به‌آنکه دوانتهای کابل به محور x برسد.



۹.۹ اگر محورها طوری قرارگیرند که پایینترین نقطهٔ کابل یکنواخت به‌فاصلهٔ H/w واحد در بالای محور x باشد، آنگاه کشش درهر نقطهٔ $P(x, y)$ روی کابل دقیقاً برابر است با وزن قطعه‌ای ازکابل که y واحد طول دارد.

■

خم $y = a\cosh(x/a)$ را گاهی یك **خم زنجیری** یا **کاتناری** می‌نامند. کاتناری از واژهٔ لاتینی کاتنا گرفته‌شده که به‌معنی «زنجیر» است. محور x را **هادی** خم زنجیری می‌گویند.

فاصلهٔ هر دوتیر برق از یکدیگر معمولاً ۳۵۰ فوت است. خط معمولی انتقال برق که سیمی مسی است، درمحل رسیدن به هر تیر برق دارای کششی برابر ۶۹۰ پوند است (که ناشی از پیچیده‌شدن سیم به‌دور قرقره است). درچنین شرایطی، سیم یك زاویهٔ تقریباً ۲° با امتداد افقی می‌سازد. همان‌طور که از روی معادله

می‌توان ملاحظه کرد،

$$H = T\cos\phi = T\cos ۲^\circ$$
$$= (۶۹۰)(۰٫۹۹۹۴) = ۶۸۹٫۶ \quad (\text{گرد شده})$$

وقتی کابل به‌این‌صورت تقریباً بدون شکم است، H و T تفاوت اندکی باهم دارند. تفاوت این دو درسیمهایی قابل ملاحظه است که شکم بزرگتری‌دارند. اگر سیم با زاویه‌ای °۶۰ نسبت به‌امتداد افقی به‌تیر وصل‌شده‌باشد، کشش آن در پایینترین نقطه‌اش فقط نصف کشش سیم در تیر برق است کـه این‌امر را می‌توان از روی معادلهٔ زیر ملاحظه کرد

$$H = T\cos ۶۰^\circ = \frac{T}{۲}\cdot$$

مسأله‌ها

۱. مطلوب است محاسبهٔ طول قطعه‌ای از خم زنجیری $y = a\cosh(x/a)$ که از $A(۰, a)$ تا $P(x_۱, y_۱)$، $x_۱ > ۰$، امتداد دارد.

۲. اگـر قطعه‌ای به‌طول s از خم‌زنجیری $y = a\cosh(x/a)$ از پـایینتریـن نقطـهٔ خـم انـدازه‌گیری شود، نشان دهید کـه $dy/dx = s/a$.

۳. نشان دهید که مساحت ناحیهٔ محدود به‌محور x، خم زنجیری $y = a\cosh(x/a)$، محور y، وخط قائم گذرنده‌از $P_۱(x_۱, y_۱)$، $x_۱ > ۰$، برابراست با مساحت مستطیلی به ارتفاع a وقاعدهٔ s، که s طول قوس از $A(۰, a)$ تا $P_۱$ است.

۴. خـم زنجیری $y = a\cosh(x/a)$ حـول محور x دوران می‌کند. مطلوب است مساحت رویه‌ای که به‌وسیلهٔ قسمتی ازخم بین نقاط $A(۰, a)$ و $P_۱(x_۱, y_۱)$، $x_۱ > ۰$، پدیدمی‌آید. (ازقضا، از میان‌همهٔ خمهای پیوسته‌ـمشتقپذیر $y = f(x)$، $f(x) > ۰$،از $A(۰, a)$ تا $P_۱(x_۱, y_۱)$، خم زنجیری، رویهٔ دورانی باکمترین مساحت را تولید می‌کند.)

۵. مرکزجرم قوس‌خم‌زنجیری $y = a\cosh(x/a)$ بین‌دونقطهٔ متقارن $P_۰(-x_۱, y_۱)$ و $P_۱(x_۱, y_۱)$ را بیابید.

۶. مطلوب است محاسبهٔ حجمی که از دوران ناحیهٔ مسألهٔ ۳ حول محور x پدید می‌آید.

۷. طول‌قوس AP (شکل ۸.۹) برابراست با $s = a\sinh(x/a)$.

الف) نشان‌دهیدکه مختصات $P(x, y)$ را می‌توان به‌صورت توابعی از طول قوس s، به‌شکل زیر، بیان کرد:

$$x = a\sinh^{-۱}\frac{s}{a}$$

$$y = \sqrt{s^۲ + a^۲}\,.$$

ب) بـا استفاده از قسمت (الف)، dx/ds و dy/ds را حساب کنید و تحقیق کنید که $(dx/ds)^۲ + (dy/ds)^۲ = ۱$.

۸. **ماشین‌حساب یا جدول** دوانتهای‌کابلی به‌طـول ۳۲ فـوت و به‌وزن ۲ پوند درفوت به‌دونقطهٔ هم‌ارتفاع که ۳۰ فوت ازهم فاصله دارند، بسته شده‌است.

الف) نشان دهیدکه ثابت a درمعادلهٔ (۱۳) بـاید درمعادلهٔ زیرصدق کند

$$\sinh u = \frac{۱۶}{۱۵}u, \quad u = \frac{۱۵}{a}\cdot$$

(مسألهٔ ۷ الف را ببینید.)

ب) نمودارهای‌خمهای $y_۱ = \sinh u$ و $y_۲ = (۱۶/۱۵)u$ را رسم کنید و (به‌کمك ماشین‌حساب یا جدول) نشان‌دهیدکه آنهـا (تقریباً) در $u = ۰$ و $u = \pm ۰٫۶$ یکدیگر را قطع می‌کنند.

پ) بـا استفاده ازنتایج قسمت (ب)، شکم‌کابل درمرکزآن را پیدا کنید.

ت) با استفاده از نتایج‌قسمت (ب)،کشش‌کابل‌را درپایینترین نقطهٔ آن پیدا کنید.

۹. **ماشین‌حساب** الـف) خـط $y = (x/۲) + ۱$ خـم‌زنجیری $y = \cosh x$ را درنقطهٔ $(۰, ۱)$ قطع می‌کند. سعی‌کنید بـا استفاده از یك‌ماشین‌حساب شواهدی برای این‌واقعیت به‌دست آوریـدکـه این خـط، خـم زنجیری را تقـریبـاً درنقطـهٔ $(۱٫۴۶۵۴, ۰٫۹۳۰۸)$ نیز قطع می‌کند.

ب) دوتیر متوالی برق ۱۰۰ فـوت از یکدیگر فاصله دارند. مقره‌ها هم‌ارتفاع هستند. اگرشکم (افت) کابل‌درمرکزش ۲۵ فوت باشد، مطلوب است براورد (i) طول‌کابل بین دوتیر، و (ii) کشش‌کابل درپایینترین نقطه‌اش اگر وزن‌آن برابر باشد با ۰٫۳ پوند برفوت. (راهنمایی: نخست a را با استفاده از معادلهٔ $\cosh(۵۰/a) = ۱ + (۲۵/a)$ تقریب بـزنید؛ این معادله عبارت‌است از معادلهٔ

$$\frac{x}{۲} + ۱ = \cosh x$$

با ضابطهٔ $x = ۵۰/a$.

TOOLKIT PROGRAMS
Root Finder Super * Grapher

۴.۹ تابعهای هیپربولیك معکوس

همان‌طور که در بخش ۳.۹ دیدیم، جانشانیهای

$$p = \sinh u, \quad u = \sinh^{-1} p$$

به ما امکان می‌دهند که انتگرال

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}$$

را محاسبه‌کنیم و نتیجهٔ نهایی را بار دیگر برحسب p بنویسیم. این‌جانشانیها به‌این‌دلیل به‌کار می‌آیند که تابع

$$y = \sinh x$$

تابعی‌صعودی‌از x است و بنابراین، معکوس‌دارد. این‌تابع‌معکوس، مشتقپذیر نیزهست زیرا سینوس هیپربولیك، مشتقپذیر است و مشتق آن هیچگاه صفر نیست؛ البته در بخش ۳.۹ از این واقعیت استفاده نکردیم.

دراین بخش خواهیم‌دیدکه تابع سینوس هیپربولیك از این لحاظ تنها نیست. همهٔ توابع هیپربولیك دارای معکوسهایی هستند که در انتگرالگیری مفیدند و نیز به‌عنوان توابعی مشتقپذیر به‌خودی خود هم جالب هستند.

معکوس تابعهای هیپربولیك

چون

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x \qquad (1)$$

به‌ازای هرمقدار x مثبت است، تابع سینوس هیپربولیك تابعی صعودی از x است و بنابراین، معکوسی داردکه آن را به‌صورت

$$y = \sinh^{-1} x \qquad (2)$$

نشان می‌دهیم. این معادله به‌صورت «y برابراست با آرك سینوس هیپربولیك x» خوانده می‌شود. به ازای هرمقدار x دربازهٔ $-\infty < x < \infty$، مقدار $y = \sinh^{-1} x$ عددی است که سینوس هیپربولیك آن x است. نمودارهای $y = \sinh x$ و $y = \sinh^{-1} x$ را درشکل ۱۰.۹ (الف) می‌بینید.

تابع $y = \cosh x$، همان طورکه در شکل ۲.۹ (الف) به‌خوبی مشهود بود، یك به‌یك نیست. ولی تابع محدود شدهٔ

$$y = \cosh x, \quad x \geqslant 0 \qquad (3)$$

یك به‌یك است و بنابراین، معکوسی دارد. این‌معکوس‌را به‌صورت

$$y = \cosh^{-1} x \qquad (4)$$

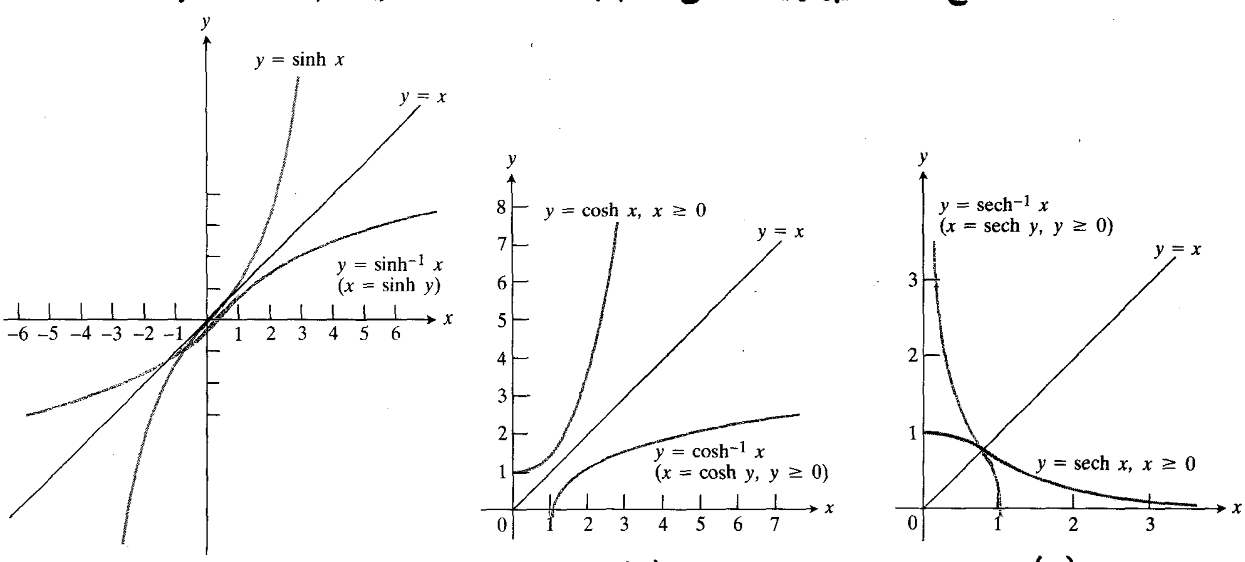
نشان می‌دهیم. به‌ازای هرمقدار $x \geqslant 1$، $y = \cosh^{-1} x$ عددی دربازهٔ $0 \leqslant y < \infty$ است که کسینوس هیپربولیك‌آن، x است. نمودارهای $y = \cosh x$، $x \geqslant 0$، و $y = \cosh^{-1} x$ را در شکل ۱۰.۹ (ب) می‌بینید.

تابع زیرنیز همانند $y = \cosh x$ یك به‌یك نیست

$$y = \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

ولی اگر به‌صورت زیر

$$y = \operatorname{sech} x, \quad x \geqslant 0 \qquad (5)$$



(الف) (ب) (پ)

۱۰.۹ نمودارهای $y = \sinh^{-1} x$، $y = \cosh^{-1} x$، و $y = \operatorname{sech}^{-1} x$. به‌تقارنها نسبت به‌خط $x = y$ توجه کنید.

به‌مقادیر نامنفی x محدود شود، قطعاً معکوس دارد. این معکوس را چنین نمایش می‌دهیم

$$y=\operatorname{sech}^{-1}x. \tag{۶}$$

به‌ازای هرمقدار x در بازهٔ $(0, 1]$، $y=\operatorname{sech}^{-1}x$ عددی نامنفی است که سکانت‌هیپربولیك آن، x است. نمودارهای $y=\operatorname{sech} x$، $x\geqslant 0$، و $y=\operatorname{sech}^{-1}x$ را درشکل ۱۰.۹ (پ) می بینید.

تابعهای تانژانت هیپربولیك، کتانژانت هیپربولیك، و کسکانت هیپربولیك روی دامنه‌های خود یك به یك‌اند و بنابراین معکوس دارند. این معکوسها را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم

$$y=\tanh^{-1}x,\quad y=\coth^{-1}x,\quad x=\operatorname{csch}^{-1}x. \tag{۷}$$

نمودار اینها را درشکل ۱۱.۹ می‌بینید.

اتحادهای مفید

تابعهای سکانت، کسکانت، وکتانژانت هیپربولیك معکوس در اتحادهای زیرصدق می‌کنند

$$\operatorname{sech}^{-1}x=\cosh^{-1}\frac{1}{x} \tag{۸}$$

$$\operatorname{csch}^{-1}x=\sinh^{-1}\frac{1}{x} \tag{۹}$$

$$\coth^{-1}x=\tanh^{-1}\frac{1}{x}. \tag{۱۰}$$

وقتی بخواهیم مقادیر $\operatorname{sech}^{-1}x$، $\operatorname{csch}^{-1}x$، و $\coth^{-1}x$ را با ماشین‌حسابی به‌دست آوریم که فقط $\cosh^{-1}x$، $\sinh^{-1}x$، و $\tanh^{-1}x$ را به‌دست می‌دهد، این اتحادها مفید واقع‌می‌شوند.

مقادیرعددی توابع هیپربولیك معکوس درجداولی تهیه شده و دردسترس قراردارند. همچنین بسیاری از انواع ماشین‌حسابهای علمی این‌مقادیر را تا هشت یا ده رقم اعشاری به‌دست می‌دهند.

اگر ماشین‌حساب دکمه‌های مربوط به تابع هیپربولیك را نداشته‌باشد، بازهم می‌توان تابعهای هیپربولیك معکوس‌را محاسبه کرد و برای این کار کافی است که آنها را ابتدا برحسب لگاریتم بیان کنیم. فرمولهای تبدیل درجدول زیرآمده است.

فرمولهای لگاریتمی برای محاسبهٔ تابعهای هیپربولیك معکوس

$$\sinh^{-1}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),\quad -\infty<x<\infty$$

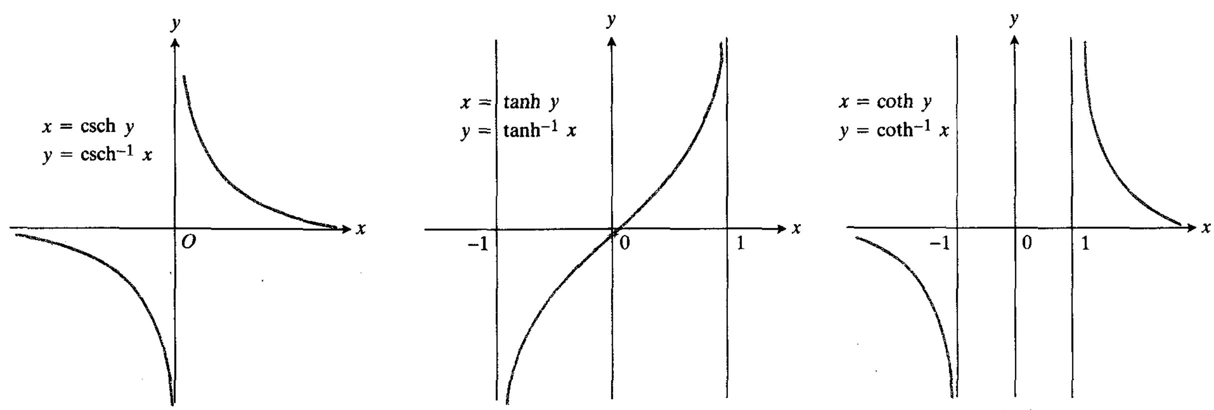
$$\cosh^{-1}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),\quad x\geqslant 1$$

$$\tanh^{-1}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\quad |x|<1$$

$$\operatorname{sech}^{-1}x=\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)=\cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right),\quad 0<x\leqslant 1 \tag{۱۱}$$

$$\operatorname{csch}^{-1}x=\ln\left(\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right)=\sinh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right),\quad x\neq 0$$

$$\coth^{-1}x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}=\tanh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right),\quad |x|>1.$$



۱۱.۹ نمودارهای $y=\operatorname{csch}^{-1}x$، $y=\tanh^{-1}x$، و $y=\coth^{-1}x$.

برای اینکه نشان دهیم فرمولهای لگاریتمی (۱۱) از کجا می‌آیند، فرمول مربوط به $\tanh^{-1}x$ را استنتاج می‌کنیم. فرمولهای دیگر را می‌توان به‌طور مشابه به‌دست‌آورد.

مثال ۱ فرمول زیر را به‌دست‌آورید

$$\tanh^{-1}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \quad |x|<1.$$

حل: فرض می‌کنیم $y=\tanh^{-1}x$. حال

$$x=\tanh y=\frac{\sinh y}{\cosh y}=\frac{(e^{y}-e^{-y})/2}{(e^{y}+e^{-y})/2}$$

$$=\frac{e^{y}-(1/e^{y})}{e^{y}+(1/e^{y})}=\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}.$$

اکنون این معادله را نسبت به e^{2y} حل می‌کنیم

$$xe^{2y}+x=e^{2y}-1$$

$$1+x=e^{2y}(1-x)$$

$$e^{2y}=\frac{1+x}{1-x}.$$

با لگاریتم‌گیری از دوطرف رابطهٔ اخیر داریم

$$2y=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$y=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

از این‌رو

$$y=\tanh^{-1}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \quad |x|<1. \quad (12)$$

محدودیت $|x|<1$ از این واقعیت ناشی می‌شود که $\tanh y$ به‌ازای هرمقدار y بین -1 و 1 قراردارد. ■

مثال ۲

$$\tanh^{-1}0.25=\frac{1}{2}\ln\frac{1.25}{0.75}=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}$$

$$=\frac{1}{2}(\ln 5-\ln 3)\approx 0.25541. \quad ■$$

مشتقها و انتگرالها

مزیت عمدهٔ توابع هیپربولیك معكوس، سودمندی آنها در انتگرالگیری است. وقتی فرمولهای زیر را برای مشتقهای این توابع استنتاج کردیم، این موضوع روشن خواهد شد.

$$\frac{d(\sinh^{-1}u)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx} \quad (13)$$

$$\frac{d(\cosh^{-1}u)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, \quad u>1 \quad (14)$$

$$\frac{d(\tanh^{-1}u)}{dx}=\frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}, \quad |u|<1 \quad (15)$$

$$\frac{d(\coth^{-1}u)}{dx}=\frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}, \quad |u|>1 \quad (16)$$

$$\frac{d(\operatorname{sech}^{-1}u)}{dx}=\frac{-du/dx}{u\sqrt{1-u^2}}, \quad 0<u<1 \quad (17)$$

$$\frac{d(\operatorname{csch}^{-1}u)}{dx}=\frac{-du/dx}{|u|\sqrt{1+u^2}}, \quad u\neq 0. \quad (18)$$

برای اینکه راه به‌دست آوردن این فرمولها را نشان دهیم، فرمول مربوط به‌مشتق $\cosh^{-1}u$ به‌ازای $u>1$ را استنتاج می‌کنیم. (گرچه $\cosh^{-1}u$ در $u=1$ تعریف می‌شود، انتظار نداریم که در آنجا مشتق‌پذیر باشد زیرا مماس بر نمودار، قائم است.)

مثال ۳ نشان‌دهید که اگر u تابع‌مشتق‌پذیری‌از x باشد که‌مقادیرش بزرگتر از ۱ هستند، آنگاه

$$\frac{d}{dx}\cosh^{-1}u=\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}.$$

حل: نخست مشتق $y=\cosh^{-1}x$ را برای x بزرگتراز ۱ می‌یابیم. به‌این منظور، ازطرفین معادلهٔ $\cosh y=x$ نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$\cosh y=x, \quad \frac{d}{dx}\cosh y=1, \quad \sinh y\frac{dy}{dx}=1.$$

طرفین آخرین رابطه را بر $\sinh y$ تقسیم می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sinh y}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y-1}}\quad \left(\begin{array}{r}\text{مثبت‌است زیرا } \sinh y\\ \text{مثبت است } y=\cosh^{-1}x\end{array}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,.$$

و بالاخره، قاعدهٔ زنجیری را به‌شکل

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}$$

درمورد $y=\cosh^{-1}u$ به‌کارمی‌بریم و به‌دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dx}\cosh^{-1}u=\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\,\frac{du}{dx}\,. \qquad \blacksquare$$

محدودیتهای $|u|<1$ و $|u|>1$ در فرمولهای مشتق (۱۵) و (۱۶) از محدودیتهایی طبیعی ناشی می‌شودکه درمورد مقادیر تانژانت وکتانژانت هیپربولیك وجود دارد. (شکل ۱۱.۹ الف و ب را ببینید.) وقتی فرمولهای مشتق را معکوس می‌کنیم تا فرمولهای انتگرال را به‌دست آوریم، تمایز بین $|u|<1$ و $|u|>1$ اهمیت پیدا می‌کند زیرا درغیر این‌صورت *نمی‌توانیم* بگوییم‌که انتگرال $1/(1-u^2)$ عبارت است از $\tanh^{-1}u+C$ یا $\coth^{-1}u+C$.

فرمولهای انتگرالگیری زیرمستقیماً ازمعادله‌های (۱۳)–(۱۸) نتیجه می‌شوند. انتگرالهای مذکور در فرمولهای ۱، ۲، ۴، و ۵ را با جانشانیهای مثلثاتی نیزمی‌توان به‌دست‌آورد و انتگرال موجود درفرمول ۳ به‌روش تجزیه به‌کسرهای ساده قابل محاسبه است. (مسأله‌های ۴۷–۵۰ را ببینید.)

---

۱. $$\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\sinh^{-1}u+C$$

۲. $$\int\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=\cosh^{-1}u+C,\quad u>1$$

۳. $$\int\frac{du}{1-u^2}=\begin{cases}\tanh^{-1}u+C & |u|<1\\ \coth^{-1}u+C & |u|>1\end{cases}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C$$

۴. $$\int\frac{du}{u\sqrt{1-u^2}}=-\operatorname{sech}^{-1}|u|+C$$

$$=-\cosh^{-1}\left(\frac{1}{|u|}\right)+C$$

۵. $$\int\frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}=-\operatorname{csch}^{-1}|u|+C$$

$$=-\sinh^{-1}\left(\frac{1}{|u|}\right)+C\,.$$

مثال ۴ انتگرال زیر را حساب‌کنید

$$\int_0^{1/2}2x\tanh^{-1}x\,dx\,.$$

حل: کار را با انتگرالگیری جزء به‌جزء آغاز می‌کنیم. با جانشانیهای

$$u=\tanh^{-1}x$$

$$dv=2x\,dx$$

$$du=\frac{1}{1-x^2}\,dx$$

$$v=x^2$$

انتگرال نامعین به‌این‌صورت درمی‌آید

$$\int 2x\tanh^{-1}x\,dx=x^2\tanh^{-1}x-\int x^2\frac{1}{1-x^2}\,dx$$

$$=x^2\tanh^{-1}x+\int\frac{x^2}{x^2-1}\,dx\,. \tag{19}$$

انتگرالدهٔ سمت راست را می‌توان به‌کسرهای ساده تجزیه‌کرد

$$\frac{x^2}{x^2-1}=1+\frac{1}{x^2-1}\ \text{(با عمل تقسیم)}$$

$$=1+\frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1}\,. \tag{20}$$

رابطه‌های (۱۹) و (۲۰) همراه باهم رابطهٔ زیررا به‌دست‌می‌دهند

$$\int 2x\tanh^{-1}x\,dx=x^2\tanh^{-1}x+x+\frac{1}{2}\ln|x-1|$$

$$-\frac{1}{2}\ln|x+1|+C \tag{21}$$

$$=x^2\tanh^{-1}x+x$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C\,.$$

برای محاسبهٔ $\tanh^{-1}x$ درحدود مفروض انتگرالگیری، آن را به‌صورت یك لگاریتم بیان می‌کنیم. دراین‌صورت

$$\int_0^{1/2} 2x\tanh^{-1}x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg]_0^{1/2}$$

$$=\frac{1}{8}\ln\frac{3/2}{1/2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1/2}{3/2}$$

$$=\frac{1}{8}\ln 3+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{8}\ln 3+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 3$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\ln 3. \qquad \blacksquare$$

مسأله‌ها

درمسأله‌های ۱ـ۱۶، با استفاده از فرمولهای لگاریتمی که در متن آمده مقادیر مورد نظر را بیابید.

۱. $\sinh^{-1}(0)$

۲. $\sinh^{-1}(3/4)$

۳. $\sinh^{-1}(-4/3)$

۴. $\sinh^{-1}(-5/12)$

۵. $\cosh^{-1}(5/4)$

۶. $\cosh^{-1}(5/3)$

۷. $\cosh^{-1}(2/\sqrt{3})$

۸. $\cosh^{-1}(13/12)$

۹. $\tanh^{-1}(1/2)$

۱۰. $\coth^{-1}(5/4)$

۱۱. $\coth^{-1}(-2)$

۱۲. $\tanh^{-1}(-3/5)$

۱۳. $\operatorname{sech}^{-1}(3/5)$

۱۴. $\operatorname{sech}^{-1}(4/5)$

۱۵. $\operatorname{csch}^{-1}(5/12)$

۱۶. $\operatorname{csch}^{-1}(-1/\sqrt{3})$

درمسأله‌های ۱۷ـ۳۲، dy/dx را بیابید.

۱۷. $y=\sinh^{-1}(2x)$

۱۸. $y=\tanh^{-1}(\cos x)$

۱۹. $y=\cosh^{-1}(\sec x)$

۲۰. $y=\coth^{-1}(\sec x)$

۲۱. $y=\operatorname{sech}^{-1}(\sin 2x)$

۲۲. $y=\cosh^{-1}x^2$

۲۳. $y=\sinh^{-1}\sqrt{x-1}$

۲۴. $y=\operatorname{csch}^{-1}(\tan x)$

۲۵. $y=\sinh^{-1}(1/x)$

۲۶. $y=\cosh^{-1}\sqrt{x+1}$

۲۷. $y=\sinh^{-1}(\tan x)$

۲۸. $y=\coth^{-1}(\csc x)$

۲۹. $y=\sqrt{1+x^2}-\sinh^{-1}\frac{1}{x}$

۳۰. $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\cosh^{-1}x$

۳۱. $y=2\cosh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4}$

۳۲. $y=x^2\operatorname{sech}^{-1}x-\sqrt{1-x^2}$

در مسأله‌های ۳۳ـ۴۶، انتگرالها را حساب کنید. با استفاده از فرمولهای لگاریتمی درمعادلات (۱۱) محاسبهٔ انتگرالهای معین را به‌انجام برسانید.

۳۳. $\int_0^{4/3}\frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}$

۳۴. $\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

۳۵. $\int_0^{0.5}\frac{dx}{1-x^2}$

۳۶. $\int_{5/4}^{2}\frac{dx}{1-x^2}$

۳۷. $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$

۳۸. $\int_{0}^{\pi}\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx$

۳۹. $\int_{-1}^{1}\sinh^{-1}x\,dx$

۴۰. $\int_{0}^{1/2}\tanh^{-1}x\,dx$

۴۱. $\int\sqrt{x^2+1}\,dx$

۴۲. $\int(x^2+1)^{3/2}\,dx$

۴۳. $\int_{2}^{5}4x\coth^{-1}x\,dx$

۴۴. $\int_{3/5}^{4/5}2x\,\mathrm{sech}^{-1}x\,dx$

۴۵. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$

۴۶. $\int\frac{x-1}{\sqrt{x^2-4x+3}}dx$

درمسأله‌های ۴۷ـ۴۹، با استفاده از جانشانیهای مثلثاتی انتگرالها را حساب کنید.

۴۷. $\int\frac{du}{\sqrt{u^2-1}},\quad u\geqslant 1$

۴۸. $\int\frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}$

۴۹. $\int\frac{du}{u\sqrt{u^2+1}}$

۵۰. انتگرال زیر را به‌کمک کسرهای ساده محاسبه کنید.

$$\int\frac{du}{1-u^2}.$$

درمسأله‌های ۵۱ـ۵۶، انتگرالها را به‌کمک جداول حساب کنید.

۵۱. $\int\frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx$

۵۲. $\int\frac{\sqrt{x^2-25}}{x^2}dx$

۵۳. $\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-25}}dx$

۵۴. $\int x^2\sqrt{x^2+3}\,dx$

۵۵. $\int\sqrt{x^2-4}\,dx$

۵۶. $\int x^2\sqrt{x^2-4}\,dx$

۵۷. طول خم $y=x^2$، $0\leqslant x\leqslant 1$ را بیابید. (برای محاسبهٔ انتگرال از جدول استفاده کنید.)

۵۸. مساحت رویه‌ای‌را که از دوران خم $y=x^2$، $0\leqslant x\leqslant 1$ حول محور x پدید می‌آید، پیدا کنید. (برای محاسبهٔ انتگرال از جدول استفاده کنید.)

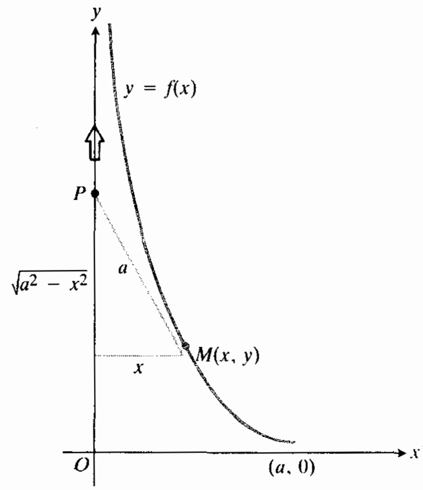
۵۹. طول خم $y=\ln x$، $1\leqslant x\leqslant 3/4$ را بیابید. (برای محاسبهٔ انتگرال از جدول کمك بگیرید.)

۶۰. تراکتریس. نقطهٔ P در مبدأ صفحهٔ xy به‌وسیلهٔ ریسمانی به‌طول a به‌جرمی‌چون M که در نقطهٔ $(a, 0)$ است، وصل‌می‌شود. سپس‌نقطهٔ P در امتداد محور y بالا می‌رود و جرم M را به‌وسیلهٔ ریسمان به‌دنبال می‌کشد. همچنانکه P حرکت می‌کند، جرم یك‌خم مشتقپذیر $y=f(x)$ را رسم می‌کند که‌درشکل ۱۲۰۹ نشان داده شده است. این خم، تراکتریس نامیده‌می‌شود؛ این نام از واژهٔ لاتینی تراکتوم می‌آید که به‌معنی «کشیدن» است. تراکتریس نقش مهمی در مطالعهٔ هندسهٔ نااقلیدسی ایفا می‌کند زیرا رویه‌ای که بر اثر دوران‌آن حول‌محور y پدید می‌آید، مدلی برای‌صفحهٔ لباچفسکی است.

الف) نشان دهید تابع $y=f(x)$ که نمودارش به‌وسیلهٔ M رسم می‌شود، درمعادلهٔ دیفرانسیل زیرصدق می‌کند

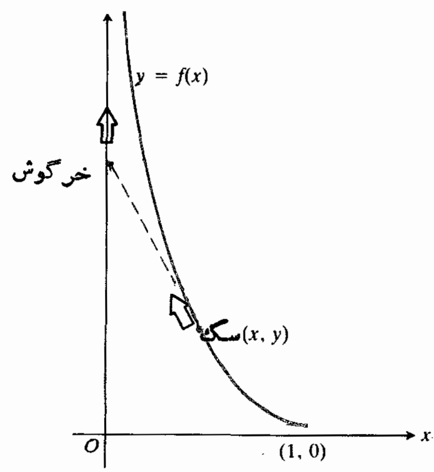
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$

ب) معادلهٔ دیفرانسیل قسمت (الف) را تحت این‌شرط حل کنید‌که وقتی $x=a$ داشته باشیم $y=0$.



۱۲.۹ بەموازت آنکه P در امتداد محور y بالا می‌رود، M را بەوسیلهٔ ریسمانی بەطول a واحد بەدنبال می‌کشد. خم $y=f(x)$ که بەوسیلهٔ M رسم می‌شود تراکتریس نام دارد. هدف مسألهٔ ۶۰، یافتن فرمولی برای این خم است.

۶۱. خم تعقیب. خرگوشی از مبدأ شروع بەحرکت می‌کند و با سرعت ثابتی در امتداد محور y بەسمت بالا می‌دود. درهمین‌زمان، سگی از نقطهٔ $(۱, ۰)$ شروع به دویدن می‌کند و با همان سرعت خرگوش را تعقیب می‌کند. می‌توان نشان داد که مسیر سگ (شکل ۱۳.۹) نمودار تابعی چون $y=f(x)$ است که درمعادلهٔ دیفرانسیل



۱۳.۹ یك‌خم‌تعقیب. سگ‌مستقیماً بەطرف خرگوش می‌دود، ولی خرگوش نیز در حال دویدن است، بنا براین مسیر سگ به شکل یك‌خم‌است. مسألهٔ ۶۱ یك‌معادلهٔ دیفرانسیل برای مسیرسگ بەدست می‌دهد.

زیر صدق می‌کند

$$x\frac{d^{2}y}{dx^{2}}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^{2}}\,.$$

این معادله را تحت این شرط حل کنید که وقتی $x=1$، y و dy/dx برابر صفر باشند.

۶۲. سقوط آزاد کندشده. اگر جسمی بەجرم m که ازحال سکون تحت تأثیر گرانش سقوط می‌کند با مقاومت هوا روبەرو شود بەطوری که این‌مقاومت متناسب با مربع‌سرعت باشد، آنگاه‌سرعت v در زمان t درمعادلهٔ دیفرانسیل

$$m\left(\frac{dv}{dt}\right)=mg-kv^{2}$$

صدق‌می‌کندکه در آن، k ثابت تاسب‌است و وقتی $t=0$، داریم $v=0$. نشان دهیدکه

$$v=\sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}\,t\right)$$

و از اینجا نتیجه بگیرید که جسم بەیك سرعت‌حدی میل می‌کندکه وقتی $t\to\infty$، برابر است با $\sqrt{mg/k}$.

۶۳. معادلهٔ $x=\sinh y=(e^{y}-e^{-y})/2$ را نسبت به e^{y} برحسب x حل کنید، و بەاین ترتیب نشان دهید که $y=\ln(x+\sqrt{x^{2}+1})$. (این معادله، $\sinh^{-1}x$ را بەصورت یك لگاریتم بیان می‌کند.)

۶۴. $\cosh^{-1}x$ را با استفاده از روش مسألهٔ ۶۳ بەصورت یك لگاریتم بیان کنید.

۶۵. فرمول (۱۳) را ثابت کنید.

۶۶. فرمول (۱۵) را ثابت کنید.

۶۷. فرمول (۱۷) را ثابت کنید.

TOOLKIT PROGRAMS

First Order Initial Value Problem
Second Order Initial Value Problem
Super * Grapher

پرسشها و تمرینهای مروری

۱. شش تابع‌هیپر بولیك‌را تعریف کنید. نمودارهای آنهارا بکشید. دامنه و برد هریك را معین کنید.

۲. توابع هیپربولیک چه ارتباطی با هذلولیها دارند؟

۳. چهار اتحاد مثلثاتی را ذکر کنید، از قبیل فرمولهای $\sin(A+B)$، $\cos(A-B)$، $\cos^2A+\sin^2A$، و $2\sin^2A$. اتحادهای هیپربولیک متناظر چه هستند؟ درستی آنها را تحقیق کنید.

۴. برخی از تفاوتهای بین توابع مثلثاتی و توابع هیپربولیک متناظر آنها را بیان کنید.

۵. فرمول مشتقات شش تابع هیپربولیک را بهدست آورید.

۶. اگر $y=C_1\sin at+C_2\cos at$، آنگاه $y''=-a^2y$. دراین صورت، $y=C_1\sinh at+C_2\cosh at$ درچه معادلهٔ دیفرانسیل متناظری صدق می کند؟

۷. کابلهای آویزان چه شکلهایی به خود می گیرند؟ روابط بین اندازهٔ نیروهای وارد برقطعهای از یک کابل آویزان چگونه بهمعادلهٔ دیفرانسیلی برای شکل کابل می انجامند؟ این معادلهٔ دیفرانسیل چیست؟ چگونه حل می شود؟

۸. شش تابع هیپربولیک معکوس را تعریف کنید. نمودارهای آنها را بکشید. دامنه و برد هریک را معین کنید. مقادیر آنها را چگونه می توان محاسبه کرد؟

۹. فرمول مشتقات توابع هیپربولیک معکوس را ارائه دهید. یکی از این فرمولها را استنتاج کنید.

۱۰. چه انتگرالهایی بهطور طبیعی به توابع هیپربولیک معکوس می انجامند؟

مسالههای گوناگون

۱. اتحاد هیپربولیک $\cosh 2x=\cosh^2x+\sinh^2x$ را ثابت کنید.

۲. تحقیق کنید که $\tanh x=\sinh 2x/(1+\cosh 2x)$.

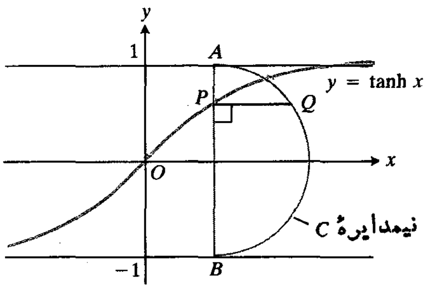
۳. مطلوب است محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to\infty}(\cosh x-\sinh x)$.

۴. اگر $\cosh x=5/4$، مطلوب است محاسبهٔ $\sinh x$ و $\tanh x$.

۵. اگر $\operatorname{csch} x=-9/40$، مطلوب است محاسبهٔ $\cosh x$ و $\tanh x$.

۶. اگر $\tanh x>5/13$، نشان دهید که $\sinh x>0.4$ و $\operatorname{sech} x<0.95$.

۷. فرض کنید P نقطهای واقع برخم $y=\tanh x$ (شکل ۱۴.۹) و AB قطعهای از خط عمود برمحور x وگذرنده از P باشد بهطوری که A و B روی مجانبهای خم واقع باشند. C را نیمدایرهای بگیرید که AB قطر آن باشد. فرض کنید خط گذرنده از P و عمود بر AB، نیمدایره را در نقطهٔ Q قطع کند. نشان دهید که $PQ=\operatorname{sech} x$.



۱۴.۹ شکل مربوط بهمسألهٔ ۷.

۸. معادلات پارامتری نیمدایرهٔ

$$x^2+y^2=a^2,\quad y>0$$

را بیابید؛ بهاین منظور، متغیر t را که با معادلهٔ $x=a\tanh t$ تعریف می شود بهعنوان پارامتر درنظر بگیرید.

۹. مطلوب است معادلات مجانبهای هذلولیی که با معادلهٔ $y=\tanh((1/2)\ln x)$ نشان داده می شود.

۱۰. شتابهایی که بزرگی آنها متناسب با تغییرمکان است. ذرهای در امتداد محور x طبق یکی از قوانین زیرحرکت می کند

الف) $x=a\cos kt+b\sin kt$

ب) $x=a\cosh kt+b\sinh kt$

نشان دهید که درهردوحالت، شتاب متناسب با x است ولیجهتش درحالت اول همواره به طرف مبدأ است و درحالت دوم بهطرف خلاف آن.

۱۱. نشان دهید که $y=\cosh 2x, \sinh 2x, \cos 2x, \sin 2x$ همگی در رابطهٔ $d^4y/dx^4=16y$ صادق اند.

۱۲. نمودار تابع زیررا رسم کنید

$$y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}.$$

درمسألههای ۱۳–۲۲، dy/dx را بیابید.

۱۳. $y=\sinh^2 3x$

۱۴. $\tan x=\tanh^2 y$

۱۵. $\sin^{-1}x=\operatorname{sech} y$

۱۶. $\sinh y=\sec x$

۱۷. $\tan^{-1}y=\tanh^{-1}x$

۱۸. $y=\tanh(\ln x)$

۱۹. $x=\cosh(\ln y)$

۲۰. $y=\sinh(\tan^{-1}e^{3x})$

۲۱. $y=\sinh^{-1}(\tan x)$

۲۲. $y^2+x\cosh y+\sinh^2 x=50$

درمسأله‌های ۲۳–۳۲، انتگرال را محاسبه کنید.

۲۳. $\displaystyle\int_{-\ln 2}^{0}\frac{d\theta}{\sinh\theta+\cosh\theta}$

۲۴. $\displaystyle\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{\cosh\theta\, d\theta}{\sinh\theta+\cosh\theta}$

۲۵. $\displaystyle\int_{0}^{(\ln 3)/2}\sinh^3 x\, dx$

۲۶. $\displaystyle\int_{-\ln 2}^{0} e^x\sinh 2x\, dx$

۲۷. $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{2}}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx$

(راهنمایی: صورت و مخرج را در e^{-x} ضرب کنید.)

۲۸. $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{dx}{4-x^2}$

۲۹. $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}-x\sqrt{x}}$ (راهنمایی: فرض کنید $u=\sqrt{x}$.)

۳۰. $\displaystyle\int_{0}^{\ln(3/4)}\frac{e^t\, dt}{\sqrt{2+e^{2t}}}$

۳۱. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\sin x\, dx}{1-\cos^2 x}$

۳۲. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{\tan^2\theta-1}}$

۳۳. حد $\cosh^{-1}x-\ln x$ را وقتی $x\to\infty$، بیابید.

۳۴. مطلوب است محاسبهٔ

$$\lim_{x\to\infty}\int_{1}^{x}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{1}{t}\right)dt\,.$$

۱۰

مختصات قطبی

چشم‌انداز

یکی از ایده‌های اصیل در روش فلوکسیونها و سریهای نامتناهی نیوتن، استفاده از دستگاههای جدید مختصات برای صفحه ازجمله دستگاه مختصات قطبی بود که محل نقطه را براساس فاصلهٔ آن از مبدأ و یك‌زاویهٔ جهتدار معین می‌کند. چون کتاب نیوتن که درحدود ۱۶۷۱ به زبان لاتینی نوشته شد تا سال ۱۷۳۶ به زبان انگلیسی انتشار نیافت، ابداع مختصات قطبی معمولاً به یاکوب برنولی نسبت داده می‌شود که این مختصات را مستقلاً در مقاله‌ای به‌تاریخ ۱۶۹۱ ابداع و توصیف کرد.

مختصات قطبی درفیزیك ونجوم اهمیت دارد زیرا معادلات بیضیها، سهمیها، وهذلولیها همگی در این دستگاه صورت واحدی دارند. برخلاف دستگاه مختصات دکارتی، دراین دستگاه نیازی به‌صورتهای مختلف برای مقاطع مخروطی گوناگون نیست. این بدان معنی است که می‌توانیم مدار سیارات، اقمار، ستاره‌های دنباله‌دار، و ماهواره‌ها را با یك‌معادلهٔ واحد توصیف کنیم. هرگاه خروج ازمرکز یك مدار و فاصلهٔ یك‌کانون تا هادی مربوط به‌آن را بدانیم، معادلهٔ مدار در یك دستگاه مختصات قطبی که مرکزش برآن کانون واقع باشد، خود به‌خود برما معلوم است. دربخش ۳.۱۰ خواهیم‌دیدکه این معادله چیست.

معادلات مختصات قطبی‌خمهای جالب دیگری تولید می‌کنند که آنها را دربخش ۲.۱۰ که درآنجا ترسیم نمودارها را بررسی می‌کنیم و نیزدربخش ۳.۱۰ که نگاهی برخمهای‌خاص می‌افکنیم، ملاحظه خواهیم‌کرد. دربخش ۴.۱۰ خواهیم‌دیدکه چگونه طولها و مساحتهای مربوط به‌این خمها را محاسبه‌کنیم. معادلاتی‌که به‌کار می‌بریم همگی در مختصات دکارتی هم قابل بیان‌اند، ولی استفاده از مختصات قطبی محاسبات را آسانترمی‌سازد.

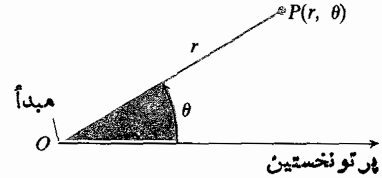
بحث را با معرفی مختصات قطبی آغاز می‌کنیم.

۱.۱۰ دستگاه مختصات قطبی

در این بخش، مختصات قطبی را تعریف کرده رابطهٔ آنها را با مختصات دکارتی مطالعه می‌کنیم. یکی از تفاوتهای بین مختصات قطبی و دکارتی این است که یك نقطه درصفحه، فقط یك جفت مختصات دکارتی دارد حال‌آنکه دارای بینهایت جفت مختصات قطبی است. این موضوع، چنانکه دربخش‌آینده خواهیم‌دید، پیامدهای جالبی برای نمودارهای معادلات قطبی دارد.

مختصات قطبی چگونه تعریف می‌شوند

برای‌تعریف مختصات قطبی، نخست‌یك **مبدأ** O ویك **پرتو(نیمخط) نخستین**، به صورتی که در شکل ۱.۱۰ می‌بینید، درنظر می‌گیریم. سپس هرنقطهٔ P را می‌توان با انتساب **یك جفت مختصات قطبی** (r, θ) به‌آن مشخص کردکه عدد اول این‌جفت، r، فاصلهٔ جهتدار از O تا P و عدد دوم، θ، زاویهٔ جهتدار از پرتونخستین تا پاره‌خط OP است:



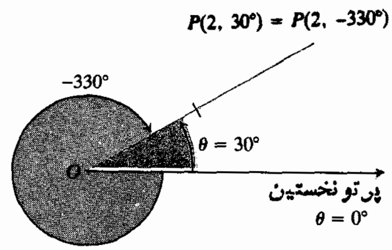
۱۰۱۰ تعریف مختصات قطبی برای صفحه، با درنظرگرفتن یك مبدأ و یك پرتو نخستین شروع می‌شود.

مختصات قطبی

$$P(r,\theta) \tag{1}$$

زاویهٔ جهتدار از پرتو نخستین تا OP — فاصلهٔ جهتدار از O تا P

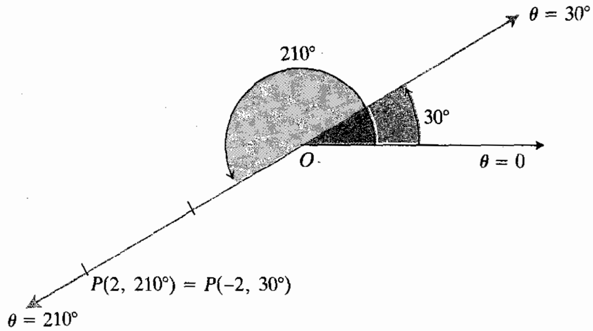
همان‌طور که درمثلثات دیده‌ایم، زاویهٔ θ مثبت است اگر درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت اندازه‌گیری شود ومنفی است اگر در جهت حرکت عقربه‌های ساعت اندازه‌گیری گردد (شکل ۱۰۱۰). ولی زاویهٔ متناظر با یك نقطهٔ مفروض، یکتا نیست (شکل ۲۰۱۰). مثلاً، نقطهٔ به فاصلهٔ ۲ واحد از مبدأ روی پرتو $\theta=30°$ دارای مختصات قطبی $r=2$، $\theta=30°$ است. این نقطه همچنین دارای مختصات $r=2$، $\theta=-330°$، و $r=2$، $\theta=390°$ نیز هست.



۲۰۱۰ پرتو $\theta=30°$ با پرتو $\theta=-330°$ یکی است.

مقادیرمنفی r؛ تغییرواحد اندازهٔ زاویه به‌رادیان

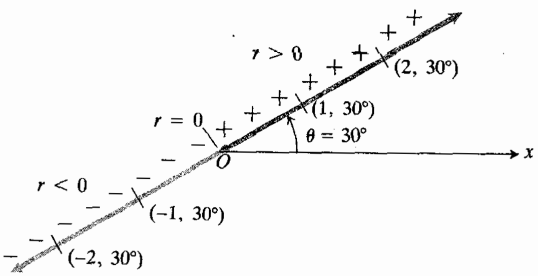
درمواردی مایلیم که r بتواند منفی باشد. به‌همین‌دلیل است که اصطلاح «فاصلهٔ جهتدار» را در (۱) به‌کار بردیم. پرتو $\theta=30°$ و پرتو $\theta=210°$ همراه باهم یك‌خط کامل می‌سازند که از O می‌گذرد (شکل ۳۰۱۰). نقطهٔ $P(2,\ 210°)$ به فاصلهٔ ۲ واحد از O روی پرتو $\theta=210°$ دارای‌مختصات قطبی $r=2$، $\theta=210°$ است. برای رسیدن به‌این نقطه، می‌توان زاویه‌ای $210°$ را از پرتونخستین در خلاف جهت ساعت پیمود و به اندازهٔ دو واحد [از مبدأ] جلو رفت. همچنین می‌توان زاویه‌ای $30°$ را از پرتو



۳۰۱۰ پرتوهای $\theta=30°$ و $\theta=210°$ یك‌خط می‌سازند.

نخستین درخلاف جهت‌ساعت پیمود و به‌اندازهٔ دوواحد [ازمبدأ] عقب رفت. بنابراین، می‌گوییم که این نقطه دارای مختصات قطبی $r=-2$، $\theta=30°$ نیز هست.

هرگاه زاویهٔ بین پرتوها $180°$ باشد، آنها یك خط راست می‌سازند. دراین صورت، می‌گوییم که هرپرتو مقابل پرتو دیگر است. نقاط روی پرتو $\theta=\alpha$ دارای مختصات قطبی (r,α) با ضابطهٔ $0 \leqslant r$ هستند. نقاط روی پرتو مقابل، $\theta=\alpha+180°$، دارای مختصات (r,α) با ضابطهٔ $0 \leqslant r$ هستند. شکل ۴۰۱۰ را ببینید.



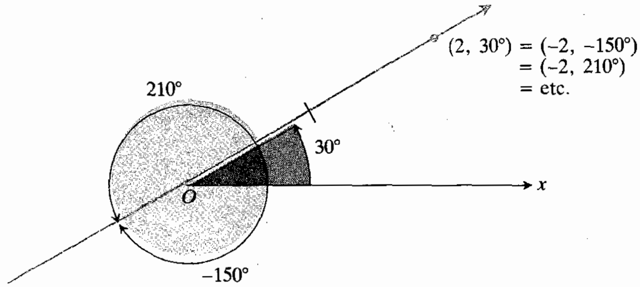
۴۰۱۰ پرتو $\theta=30°$ و پرتومقابل‌آن.

مثال ۱ همهٔ مختصات قطبی نقطهٔ $(2,30°)$ را بیابید. اندازهٔ زاویه‌ها را هم برحسب درجه و هم برحسب رادیان بیان کنید.

حل: پرتو نخستین دستگاه مختصات را می‌کشیم. خطی‌رسم می‌کنیم که از مبدأ بگذرد و یك زاویهٔ $30°$ با پرتو نخستین بسازد، و نقطهٔ $(2,30°)$ را مشخص‌می‌کنیم (شکل ۵۰۱۰). سپس‌فرمولهایی برای‌جفتهایی ازمختصات می‌یابیم که درآنها $r=2$ و $r=-2$، و درآن فرمولها درجه را به‌رادیان تبدیل می‌کنیم.

برای $r=2$: زوایای

$$\begin{array}{ll}
30°-1\times360°=-330° & 30°+1\times360°=390° \\
30°-2\times360°=-690° & 30°+2\times360°=750° \\
30°-3\times360°=-1050° & 30°+3\times360°=1110° \\
\vdots & \vdots
\end{array} \tag{2}$$



۵.۱۰ نقطهٔ $P(۲, ۳۰^\circ)$ دارای تعداد زیادی مختصات قطبی متفاوت است.

همگی به‌همان پرتوی ختم می‌شوند که زاویهٔ ۳۰° می‌شود. بنابراین، مختصات قطبی

$$(۲, ۳۰^\circ + n \cdot ۳۶۰^\circ), \quad n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots \qquad (۳)$$

همگی نقطهٔ $(۲, ۳۰^\circ)$ را مشخص می‌کنند.

برای $r = -۲$: مختصات مذکور در (۳)، گرچه بسیارند ولی تنها مختصات قطبی نقطهٔ $(۲, ۳۰^\circ)$ نیستند. زوایای

$$\begin{array}{ll} -۱۵۰^\circ & -۱۵۰^\circ \\ -۱۵۰^\circ + ۳۶۰^\circ = ۲۱۰^\circ & -۱۵۰^\circ - ۳۶۰^\circ = -۵۱۰^\circ \\ -۱۵۰^\circ + ۷۲۰^\circ = ۵۷۰^\circ & -۱۵۰^\circ - ۷۲۰^\circ = -۸۷۰^\circ \\ \vdots & \vdots \end{array} \qquad (۴)$$

همگی پرتومقابل پرتو $\theta = ۳۰^\circ$ را تعریف می‌کنند. از این‌رو، مختصات قطبی

$$(-۲, -۱۵۰^\circ + n \cdot ۳۶۰^\circ), \quad n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots \qquad (۵)$$

نیز نقطهٔ $(۲, ۳۰^\circ)$ را نشان می‌دهند.

اندازهٔ زاویه برحسب رادیان: اگر اندازهٔ زاویه‌ها را برحسب رادیان بیان کنیم، فرمولهای متناظر با (۳) و (۵) عبارت‌اند از

$$\left(۲, \frac{\pi}{۶} + ۲n\pi\right), \quad n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots \qquad (۶)$$

و

$$\left(-۲, -\frac{۵\pi}{۶} + ۲n\pi\right), \quad n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots \qquad (۷)$$

وقتی $n = ۰$، جفتهای مختصات زیر را از این فرمولها به‌دست می‌آوریم

$$\left(-۲, -\frac{۵\pi}{۶}\right) \quad \text{و} \quad \left(۲, \frac{\pi}{۶}\right)$$

و وقتی $n = ۱$، داریم

$$\left(-۲, \frac{۷\pi}{۶}\right) \quad \text{و} \quad \left(۲, \frac{۱۳\pi}{۶}\right)$$

و به‌همین ترتیب الی آخر. ■

گرچه در تعریف مختصات قطبی هیچ چیزی وجود ندارد که استفاده از اندازهٔ رادیانی را لازم سازد، اما وقتی از توابع مثلثاتی θ مشتق وانتگرال می‌گیریم لازم است که اندازهٔ زاویه‌ها برحسب رادیان باشد. بنابراین، از این پس منحصراً اندازهٔ رادیانی را به‌کار می‌بریم.

معادله‌ها و نامعادله‌های مختصاتی مقدماتی

اگر r ثابت نگاه‌داشته شود و دارای مقدار ناصفر $r = a$ باشد، آنگاه نقطهٔ $P(r, \theta)$ به فاصلهٔ $|a|$ واحد از مبدأ واقع است. به موازات آنکه θ روی بازه‌ای به طول ۲π رادیان تغییر می‌کند، P دایره‌ای به‌شعاع $|a|$ رسم می‌کند که مرکزش در مبدأ است. پس معادلهٔ

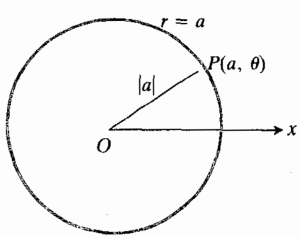
$$r = a$$

معادله‌ای برای این‌دایره‌است (شکل ۶.۱۰). معادلهٔ $r = ۱$ معادلهٔ دایره‌ای به‌شعاع ۱ و به‌مرکز مبدأ است. معادلهٔ $r = -۱$ نیزمعادلهٔ همین دایره است.

اگر θ تغییر نکند و دارای مقدار ثابت $\theta = \theta_۰$ باشد و r بتواند همهٔ مقادیر حقیقی را اختیار کند، نقطهٔ $P(r, \theta)$ خطی رسم می‌کند که از مبدأ می‌گذرد و زاویه‌ای به اندازهٔ $\theta_۰$ رادیان با پرتو نخستین دستگاه مختصات می‌سازد. پس معادلهٔ

$$\theta = \theta_۰$$

معادله‌ای برای این خط است. معادلهٔ $\theta = \pi/۶$ معادله‌ای برای



۶.۱۰ معادلهٔ قطبی این‌دایره، $r = a$ است.

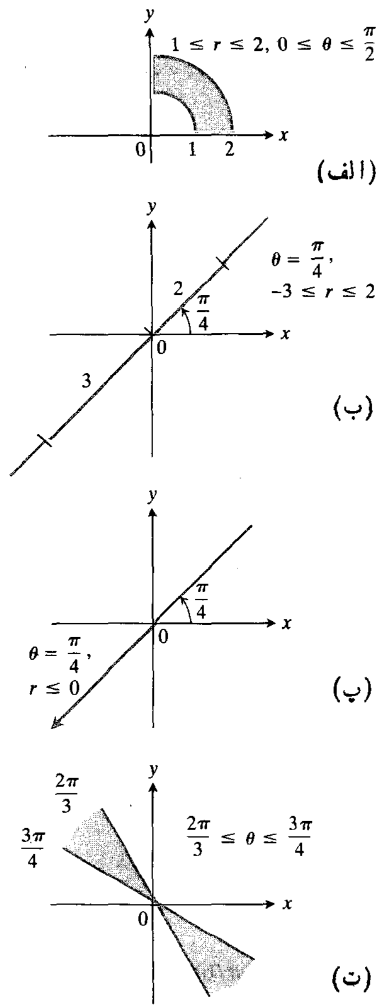
خـط شکل ۵.۱۰ است. معادلات $\theta=7\pi/6$ و $\theta=-5\pi/6$ نیز معادلات این خط‌اند.

معادلاتی به‌شکل $r=a$ و $\theta=\theta_0$ را می‌توان به‌صورتهای گوناگونی ترکیب کرد تا، همان‌طورکه درمثال بعد دیده می‌شود، ناحیه‌ها، قطعه خطها، و پرتوهـایی را در صفحهٔ مختصات تعریف کنند.

مثال ۲ نمودار مجموعه‌هایی از نقاط راکـه مختصات قطبی آنها درشرطهای زیرصدق می‌کنند، رسم کنید.

الف) $1\leqslant r\leqslant 2$ و $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$

ب) $-3\leqslant r\leqslant 2$ و $\theta=\frac{\pi}{4}$



۷.۱۰ نمودار نامعادله‌های نمونه‌وار برحسب r و θ.

پ) $r\leqslant 0$ و $\theta=\frac{\pi}{4}$

ت) $\frac{2\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4}$ (r محدودیتی ندارد)

حل: نمودارها را درشکل ۷.۱۰ رسم کرده‌ایم. ■

تبدیل معادله‌های دکارتی و قطبی به‌یکدیگر

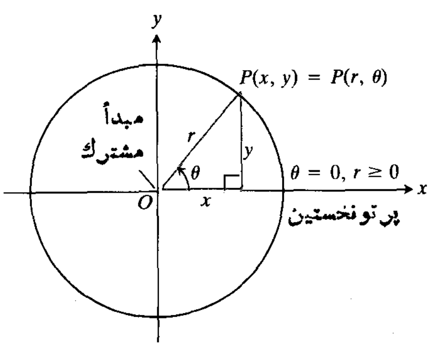
وقتی دریك‌صفحه از هـردونوع مختصات قطبی و دکارتی استفاده می‌کنیم، معمولاً مبدأ دستگاه قطبی را درمبدأ دستگاه دکارتی قرار می‌دهیم و قسمت مثبت محور x را به‌عنوان پـرتونخستین دستگاه مختصات قطبی درنظرمی‌گیریم. پرتـو $\theta=\pi/2$، $r\geqslant 0$ قسمت نامنفی محور y است.همان‌طورکه شکل ۸.۱۰ نشان می‌دهد، این دومجموعهٔ مختصات با معادله‌های زیر به‌هم مربوط می‌شوند

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

یا (۸)

$$x^2+y^2=r^2,\quad \frac{y}{x}=\tan\theta\,.$$

این‌رابطه‌ها $\sin\theta$ و $\cos\theta$ را درحالتی‌که r مثبت است، تعریف می‌کنند؛ ولی درحـالتی هم‌کـه r منفی است، بـرقرارنـد زیرا $\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$ و $\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$، بنابراین rهای مثبت روی پرتو $\theta+\pi$ متناظر با rهای منفی روی پـرتو θ هستند. اگـر $r=0$، آنگاه $x=y=0$، و P مبدأ است.



۸.۱۰ راه معمولی برای ربط‌دادن مختصات قطبی و دکارتی به‌یکدیگر.

همان‌طورکه در مثال زیر دیده می‌شود، بـا استفاده از این معادله‌ها می‌تـوان معادله‌هـای قطبی را به‌صورت دکارتی نوشت و به‌عکس.

مثال ۳

معادلهٔ قطبی	معادلهٔ دکارتی هم‌ارز
$r\cos\theta=۲$	$x=۲$
$r^۲\cos\theta\sin\theta=۴$	$xy=۴$
$r^۲\cos^۲\theta-r^۲\sin^۲\theta=۱$	$x^۲-y^۲=۱$
$r=۱+۲r\cos\theta$	$y^۲-۳x^۲-۴x-۱=۰$
$r=۱-\cos\theta$	$x^۴+y^۴+۲x^۲y^۲+۲x^۳+۲xy^۲-y^۲=۰$

درمورد برخی ازخمها، استفاده ازمختصات قطبی راحت‌تر است و درمورد بعضی دیگر، چنین نیست. ■

مثال ۴ یک‌معادلهٔ دکارتی برای خم زیر بیابید

$$r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{۳}\right)=۳\,.$$

حل: اتحاد زیر را به‌کارمی‌بریم

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

و قرارمی‌دهیم $A=\theta$ و $B=\pi/۳$:

$$r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{۳}\right)=۳$$

$$r\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{۳}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{۳}\right)=۳$$

$$r\cos\theta\cdot\frac{۱}{۲}+r\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۳$$

$$\frac{۱}{۲}x+\frac{\sqrt{۳}}{۲}y=۳$$

$$x+\sqrt{۳}y=۶\,.$$

■

مثال ۵ معادله‌های قطبی زیررا به‌معادله‌های دکارتی هم‌ارز تبدیل کنید و نمودارهای آنها را مشخص نمایید.

الف) $r\cos\theta=-۴$

ب) $r^۲=۴r\cos\theta$

پ) $r=\dfrac{۴}{۲\cos\theta-\sin\theta}$

حل: از جانشانیهای $r\cos\theta=x$، $r\sin\theta=y$، و $r^۲=x^۲+y^۲$ استفاده می‌کنیم.

الف) $r\cos\theta=-۴$

معادلهٔ دکارتی: $r\cos\theta=-۴$

$$x=-۴$$

نمودار: خط قائم گذرنده‌از $x=-۴$ واقع برمحور x

ب) $r^۲=۴r\cos\theta$

معادلهٔ دکارتی:

$$r^۲=۴r\cos\theta$$

$$x^۲+y^۲=۴x$$

$$x^۲-۴x+y^۲=۰$$

$$x^۲-۴x+۴+y^۲=۴ \quad \left(\text{عبارت را به صورت مربع کامل درمی‌آوریم}\right)$$

$$(x-۲)^۲+y^۲=۴$$

نمودار: دایره، شعاع ۲ ، مرکز $(h,k)=(۲,۰)$

پ) $r=\dfrac{۴}{۲\cos\theta-\sin\theta}$

معادلهٔ دکارتی: $r(۲\cos\theta-\sin\theta)=۴$

$$۲r\cos\theta-r\sin\theta=۴$$

$$۲x-y=۴$$

$$y=۲x-۴$$

نمودار: خط، شیب $m=۲$، عرض از مبدأ $b=-۴$.

■

مسأله‌ها

تمام زاویه‌ها برحسب رادیان هستند.

۱. دسته‌هایی از جفتهای مختصات زیر را که هر دسته نشان‌دهندهٔ

نقطهٔ واحدی باشد، مشخص کنید.

الف) $(۳, ۰)$

ب) $(-۳, ۰)$

پ) $(-۳, \pi)$

ت) $(-۳, ۲\pi)$

ث) $(۲, ۲\pi/۳)$

ج) $(۲, -\pi/۳)$

چ) $(۲, ۷\pi/۳)$

ح) $(-۲, \pi/۳)$

خ) $(۲, -\pi/۳)$

د) $(۲, -۴\pi/۳)$

ذ) $(-۲, -\pi/۳)$

ر) $(-۲, ۲\pi/۳)$

ز) (r, θ)

ژ) $(r, \theta+\pi)$

س) $(-r, \theta+\pi)$

ش) $(-r, \theta)$

۲. مختصات دکارتی نقاطی را که مختصات قطبی‌شان درقسمتهای (الف)ـ(ر) مسالهٔ ۱ داده شد، پیدا کنید.

۳. نقاط زیررا (که برحسب مختصات قطبی‌داده شده‌اند) مشخص کنید. سپس همهٔ مختصات قطبی هریك ازنقاط را بیابید.

الف) $(۲, \pi/۲)$

ب) $(۲, ۰)$

پ) $(-۲, \pi/۲)$

ت) $(-۲, ۰)$

۴. نقاط زیررا (که برحسب مختصات قطبی‌داده شده‌اند) مشخص کنید. سپس همهٔ مختصات قطبی هریك ازنقاط را بیابید.

الف) $(۳, \pi/۴)$

ب) $(-۳, \pi/۴)$

پ) $(۳, -\pi/۴)$

ت) $(-۳, -\pi/۴)$

۵. مختصات دکارتی نقاط زیر را (کـه برحسب مختصات قطبی داده‌شده‌اند) پیدا کنید.

الف) $(\sqrt{۲}, \pi/۴)$

ب) $(۱, ۰)$

پ) $(۰, \pi/۲)$

ت) $(-\sqrt{۲}, \pi/۴)$

ث) $(-۳, ۵\pi/۶)$

ج) $(۵, \tan^{-۱}(۴/۳))$

چ) $(-۱, ۷\pi)$

ح) $(۲\sqrt{۳}, ۲\pi/۳)$

۶. همهٔ مختصات قطبی مبدأ را بیابید.

نمودار مجموعه‌های نقاطی را که مختصات قطبی‌آنها در معادله‌ها و نامعادله‌های مسائل ۷ـ۲۲ صدق می‌کنند، بکشید.

۷. $r=۲$

۸. $۰\leqslant r\leqslant ۲$

۹. $r\geqslant ۱$

۱۰. $۱\leqslant r\leqslant ۲$

۱۱. $۰\leqslant\theta\leqslant\pi/۶,\quad r\geqslant ۰$

۱۲. $\theta=۲\pi/۳,\quad r\leqslant -۲$

۱۳. $\theta=\pi/۳,\quad -۱\leqslant r\leqslant ۳$

۱۴. $\theta=۱۱\pi/۴,\quad r\geqslant -۱$

۱۵. $\theta=\pi/۲,\quad r\geqslant ۰$

۱۶. $\theta=\pi/۲,\quad r\leqslant ۰$

۱۷. $۰\leqslant\theta\leqslant\pi,\quad r=۱$

۱۸. $۰\leqslant\theta\leqslant\pi,\quad r=-۱$

۱۹. $\pi/۴\leqslant\theta\leqslant ۳\pi/۴,\quad ۰\leqslant r\leqslant ۱$

۲۰. $-\pi/۴\leqslant\theta\leqslant\pi/۴,\quad -۱\leqslant r\leqslant ۱$

۲۱. $-\pi/۲\leqslant\theta\leqslant\pi/۲,\quad ۱\leqslant r\leqslant ۲$

۲۲. $۰\leqslant\theta\leqslant\pi/۲,\quad ۱\leqslant |r|\leqslant ۲$

معادله‌های قطبی مذکور درمسأله‌های ۲۳ــ۴۰ را به‌معادله‌های دکارتی هم‌ارز تبدیل کنید. سپس نمودار این معادله‌ها را بکشید.

۲۳. $r\cos\theta=۲$

۲۴. $r\sin\theta=-1$

۲۵. $r\sin\theta=2$

۲۶. $r\cos\theta=0$

۲۷. $r\sin\theta=0$

۲۸. $r\cos\theta=-3$

۲۹. $r\cos\theta+r\sin\theta=1$

۳۰. $r\sin\theta=r\cos\theta$

۳۱. $r^2=1$

۳۲. $r^2=4r\sin\theta$

۳۳. $r\sin\theta=e^{r\cos\theta}$

۳۴. $r^2+2r^2\cos\theta\sin\theta=1$

۳۵. $r=\dfrac{5}{\sin\theta-2\cos\theta}$

۳۶. $r=4\cos\theta$

۳۷. $r=4\sin\theta$

۳۸. $r=2\cos\theta+2\sin\theta$

۳۹. $r=4\tan\theta\sec\theta$

۴۰. $r+\sin\theta=2\cos\theta$

معادله‌های دکارتی مذکور در مسأله‌های ۴۱–۵۰ را به معادلات قطبی هم‌ارز تبدیل کنید.

۴۱. $x=7$

۴۲. $y=1$

۴۳. $x=y$

۴۴. $x-y=3$

۴۵. $x^2+y^2=4$

۴۶. $x^2-y^2=1$

۴۷. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

۴۸. $xy=2$

۴۹. $y^2=4x$

۵۰. $x^2-y^2=25\sqrt{x^2+y^2}$

درمسأله‌های ۵۱–۵۴، به‌کمک اتحادهایی مثلثاتی که $\sin(A\pm B)$ و $\cos(A\pm B)$ را در برداشته باشند، معادلـه‌های قطبی را به‌معادله‌های دکارتی هم‌ارز تبدیل کنید. سپس نمودار این معادله‌ها را بکشید.

۵۱. $r\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=3$

۵۲. $r\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=4$

۵۳. $r\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)=\sqrt{2}$

۵۴. $r\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\theta\right)=0$

۲.۱۰ ترسیم نمودار در دستگاه مختصات قطبی

نمودار معادلهٔ

$$F(r,\theta)=0$$

مرکب ازنقاطی است کـه صورتی از مختصات قطبی آنهـا دراین معادلـه صدق می‌کند. می‌گـوییم «صورتی از»، زیـرا واقعیت تأسف‌انگیز این است که برخی ازجفتهای مختصات نقطه‌ای که روی نمودار است ممکن است دراین معادلـه صدق نکنند و برخی دیگر صدق کنند. برای اینکه کار سریعتر انجام شود، به‌جستجوی تقارنها، مقادیری از θ که درآنها خم ازمبدأ می‌گذرد، و نقاطی‌که درآنها r مقادیر اکسترمم را اختیار می‌کند، می‌پردازیم. وقتی خم از مبدأ می‌گذرد سعی می‌کنیم درآنجا شیبش را هم محاسبه کنیم.

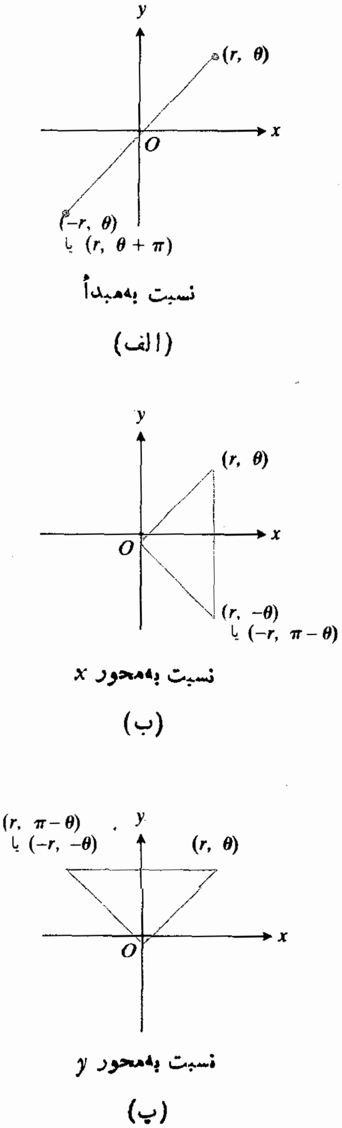
تقارن و شیب درمبدأ

سه نـوع تقارن را بـه‌آسانی می‌تـوان در نمودار یـك معادلـهٔ $F(r,\theta)=0$ تشخیص داد. همان‌طورکـه در شکل ۹.۱۰ دیـده می‌شود، نمودار

الف) نسبت به‌مبدأ متقارن است اگر با تبدیل r به $-r$ یا تبدیل θ به $\theta+\pi$، معادله تغییرنکند.

ب) نسبت به‌محور x متقارن‌است اگر با تبدیل θ به $-\theta$ یـا تبدیـل جفت (r,θ) بـه جفت $(-r,\pi-\theta)$، معادله تغییر نکند.

پ) نسبت به محور y متقارن است اگـر بـا تبدیل θ به $\pi-\theta$ یـا تبدیل جفت (r,θ) به جفت $(-r,-\theta)$، معادلـه تغییرنکند.



۹.۱۰ سه آزمون مختصات قطبی برای تقارن.

مثال ۱ دلـواد. نمودار خـم $r=a(۱-\cos\theta)$، $a>۰$ را رسم کنید.

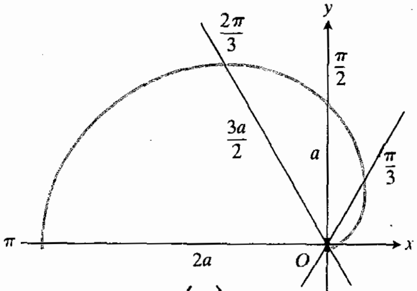
حل: چون $\cos(-\theta)=\cos\theta$، وقتی $-\theta$ به‌جـای θ قـرار گیرد معادله تغییر نمی‌کند؛ از این‌رو، خم نسبت به‌محور x متقارن است (شکل ۹.۱۰ ب). همین‌طور، چون

$$-۱\leqslant\cos\theta\leqslant۱$$

مقادیر r بین ۰ و $۲a$ تغییر می‌کنند. مقدار مینیمم، $r=۰$، به‌ازای $\theta=۰$ حاصل می‌شود و مقدار ماکسیمم، $r=۲a$، به‌ازای $\theta=\pi$ به‌دست می‌آید. به‌علاوه، وقتی θ از ۰ تا π تغییر می‌کند، $\cos\theta$ از ۱ تا ۱‍- نزول می‌کند. از این‌رو، $۱-\cos\theta$ از ۰ تـا ۲ صعود می‌کند. یعنی، وقتی بردار شعاعی OP از $\theta=۰$ تا $\theta=\pi$ نوسان می‌کند، r از ۰ تـا $۲a$ صعود می‌نماید. جدولی از مقادیر تشکیل می‌دهیم (شکل ۱۰.۱۰ الف) و نقاط متناظـر را مشخص می‌کنیم.

θ	r
۰	۰
$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{a}{۲}$
$\frac{\pi}{۲}$	a
$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳a}{۲}$
π	$۲a$

(الف)



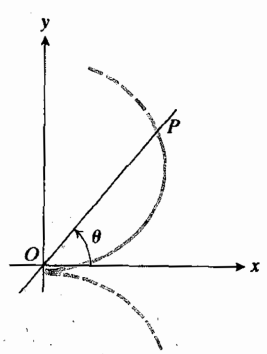
(ب)

۱۰.۱۰ (الف) مقادیر $r=a(۱-\cos\theta)$ به‌ازای مقادیـر انتخاب شده‌ای از θ. (ب) خم هموار ی که از نقاط قسمت (الف) می‌گذرد.

پیش از تـرسیم خـم، شیب در مبدأ را بـررسی می‌کنیم. نقطه‌ای مانند P را در نظر می‌گیریم که در امتداد خم در ربع اول به‌مبدأ میل می‌کند (شکل ۱۱.۱۰). شیب خـم در مبدأ، حد شیب قاطع OP است وقتی $P\to O$، که عبارت است از

$$\lim_{\theta\to۰}(OP\ \text{شیب})=\lim_{\theta\to۰}\tan\theta=۰.$$

اکنون خمی رسم می‌کنیم که از نقاط مشخص‌شده بگذرد، و مطمئن می‌شویم کـه مماس در مبدأ افقی است (شکل ۱۰.۱۰ ب). انتظار داریم که r، به موازات صعود θ از ۰ تا π، دائماً صعود



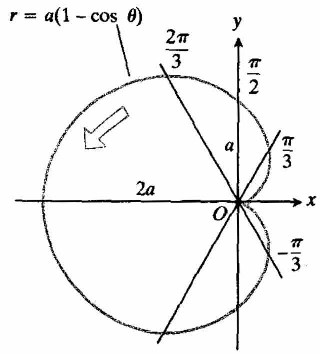
۱۱.۱۰ وقتی P در امتداد دلوار به O میل می‌کند، $\theta\to۰$. درمبدأ دلوار دارای یك مماس افقی است.

کند زیرا

$$\frac{dr}{d\theta}=a\sin\theta$$

به‌ازای $0<\theta<\pi$ مثبت است.

و بالاخره، از ویژگی تقارن خم استفاده می‌کنیم و قرینهٔ قسمتی از خم را که تاکنون کشیده‌ایم نسبت به‌محور x رسم می‌کنیم تا نمودار کامل‌شود (شکل ۱۲.۱۰). این نمودار کامل‌شده را **دلوار** می‌نامیم زیرا به‌شکل قلب است.



۱۲.۱۰ نمودار کامل شدهٔ دلوار $r=a(1-\cos\theta)$. پیکان، جهت صعود θ را نشان می‌دهد.

■

شیوه‌ای که با آن درمثال ۱ مماس بردلوار را در مبدأ پیدا کردیم، برای هرخم همواری که ازمبدأ بگذرد، قابل استفاده‌است. اگر وقتی $\theta=\theta_0$ خم از مبدأ بگذرد، بحث مثال ۱ فقط تا این‌حد جرح و تعدیل می‌شود که بگوییم وقتی $\theta \to \theta_0$، نقطهٔ P درامتداد خم به O میل می‌کند و از این‌رو

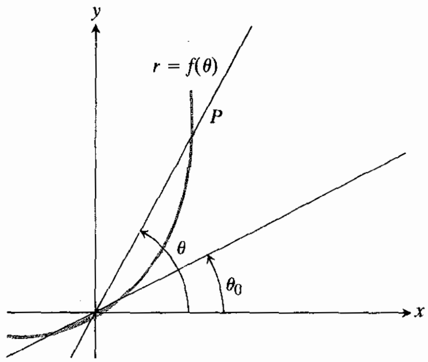
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\theta=\theta_0}=\lim_{\theta\to\theta_0}(\tan\theta)=\tan\theta_0 .$$

ولی $(dy/dx)_{\theta=\theta_0}$ تانژانت زاویهٔ بین محور x و خم دراین نقطه نیز هست. بنابراین، خط $\theta=\theta_0$ مماس برخم در مبدأ است. به‌عبارت دیگر، هرگاه خمی به‌ازای مقداری از θ چون θ_0 از مبدأ بگذرد، مماس مار برمبدأ، خط $\theta=\theta_0$ است مشروط به‌آنکه مشتق $dr/d\theta$ درآن نقطه موجود باشد. شکل ۱۳.۱۰ را ببینید.

مثال ۲ نمودار خم $r^2=4a^2\cos\theta$ را رسم کنید.

حل: این‌خم نسبت به‌مبدأ متقارن است. دومقدار r،

$$r=\pm 2a\sqrt{\cos\theta}$$

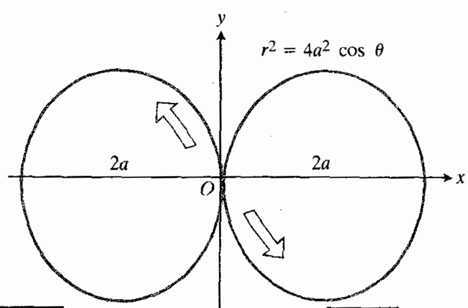


۱۳.۱۰ اگر خم $r=f(\theta)$ در $\theta=\theta_0$ از مبدأ بگذرد و اگر f در $\theta=\theta_0$ دارای مشتق باشد، آنگاه خط $\theta=\theta_0$ درمبدأ برخم مماس است.

متناظرند با هرمقدار θ که برای آن، $\cos\theta>0$ یعنی

$$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2} .$$

به‌علاوه، خم نسبت به محور x متقارن است زیرا به‌ازای هر θ، $\cos(-\theta)=\cos\theta$. این خم در $\theta=\pi/2$ از مبدأ می‌گذرد و دراین نقطه برمحور y مماس است. چون $\cos\theta\leqslant 1$، مقدار ماکسیمم r برابر است با $2a$ که در $\theta=0$ حاصل می‌شود. وقتی θ از ۰ تا $\pi/2$ صعود می‌کند، $|r|$ از $2a$ تا ۰ نزول می‌کند. شکل ۱۴.۱۰ را ببینید.



طوق مربوط به $r=2a\sqrt{\cos\theta}$ $\quad -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

طوق مربوط به $r=-2a\sqrt{\cos\theta}$ $\quad -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

۱۴.۱۰ نمودار $r^2=4a^2\cos\theta$. پیکانها جهت صعود θ را نشان می‌دهند.

■

روشی برای ترسیم نمودار

راهی برای ترسیم نمودار یك معادلهٔ قطبی $r=f(\theta)$ این است که جدولی ازمقادیر (r,θ) تشکیل دهیم، نقاط متناظر را مشخص کنیم، و آنها را به‌ترتیب صعودی θ به‌هم وصل کنیم. اگر تعداد کافی نقطه

رسم شود که طوقها و فرورفتگیهای نمودار مشخص گردد، این روش می تواند کارساز باشد. دراین بخش، روش دیگری را برای ترسیم نمودار شرح می دهیم که معمولاً سریعتر به نتیجه می رسد و قابل اعتمادتر است. این روش از گامهای زیر تشکیل یافته است.

۱. نخست نمودار $r = f(\theta)$ را در صفحهٔ $r\theta$ دکارتی رسم می کنیم (یعنی، مقادیر θ را روی یک محور افقی و مقادیر متناظر r را روی یک محور قائم مشخص می کنیم).

۲. سپس نمودار دکارتی را به عنوان یک «جدول» به کار می گیریم و با استفاده از آن، نمودار مختصات قطبی را رسم می کنیم.

این روش از روشی که اول ذکر کردیم بهتر است زیرا از روی نمودار دکارتی، حتی اگر با شتاب رسم شده باشد، می توان با یک نگاه تشخیص داد که r در کجا مثبت، منفی، و ناموجود است، و نیز r در کجا صعودی و در کجا نزولی است. به عنوان مثال، نمودار $r = ۱ + \cos(\theta/۲)$ و $r^۲ = \sin ۲\theta$ را رسم می کنیم.

مثال ۳ مطلوب است ترسیم نمودار

$$r = ۱ + \cos\frac{\theta}{۲}.$$

حل: نخست نمودار r را به صورت تابعی از θ در صفحهٔ $r\theta$ ی دکارتی رسم می کنیم. چون کسینوس دارای دورهٔ تناوب ۲π است، θ باید از ۰ تا ۴π تغییر کند تا کل نمودار تولید شود (شکل ۱۵.۱۰ درصفحهٔ بعد). پیکانهایی که ازمحور θ تا خم رسم شده اند، بردارهای شعاعی را برای ترسیم $r = ۱ + \cos(\theta/۲)$ در صفحهٔ قطبی به دست می دهند. این را در شکل ۱۶.۱۰ می بینید. ■

مثال ۴ یک پروانه. نمودارخم $r^۲ = \sin ۲\theta$ را رسم کنید.

حل: دراینجا کار را با ترسیم $r^۲$ (نه r) به صورت تابعی از θ در صفحهٔ $r^۲\theta$ ی دکارتی آغاز می کنیم. شکل ۱۷.۱۰ را ببینید. سپس، از اینجا به نمودار $r = \pm\sqrt{\sin ۲\theta}$ درصفحهٔ $r\theta$ می رسیم (شکل ۱۸.۱۰)، و آنگاه نمودار قطبی را رسم می کنیم (شکل ۱۹.۱۰). نمودار موجود درشکل ۱۸.۱۰، نمودار قطبی نهایی در شکل ۱۹.۱۰ را دوبار «می پوشاند». می توانستیم فقط دونیمهٔ بالایی یا فقط دونیمهٔ پایینی نمودارشکل ۱۸.۱۰ را درنظر بگیریم. ولی این «دوبار پوشاندن» هم اشکالی پیش نمی آورد و در واقع به این طریق، از رفتار تابع اطلاع بیشتری به دست می آوریم. ■

یافتن نقاط تقاطع خمها

با توجه به این واقعیت که یک نقطه را می توان به صورتهای مختلفی درمختصات قطبی نشان داد، بایستی دراین مورد که یک نقطه چه وقت برنمودار یک معادلهٔ قطبی واقع است با دقت زیادی تصمیم بگیریم و در تعیین نقاط تقاطع نمودارهای معادلات قطبی با احتیاط عمل کنیم. مسأله این است که مختصات قطبی یک نقطهٔ تقاطع درمعادلهٔ یکی ازخمها ممکن است با مختصات قطبی آن نقطه درمعادلهٔ خم دیگر فرق داشته باشد. بنابراین، ممکن است با حل همزمان معادله های دوخم نتوانیم همهٔ نقاط تقاطع را مشخص کنیم. تنها راه مطمئن برای مشخص کردن همهٔ نقاط تقاطع، ترسیم نمودار معادله هاست.

مثال ۵ نشان دهید که نقطهٔ $(۲, \pi/۲)$ روی خم $r = ۲\cos ۲\theta$ واقع است.

حل: در وهلهٔ اول به نظر می رسد نقطهٔ $(۲, \pi/۲)$ روی این خم قرار ندارد زیرا با قراردادن مختصات مفروض در این معادله خواهیم داشت

$$۲ = ۲\cos ۲\left(\frac{\pi}{۲}\right) = ۲\cos\pi = -۲$$

که این تساوی درست نیست؛ یعنی مقدار از نظر قدرمطلق درست است ولی علامت درست نیست. پس باید به جستجوی یک جفت مختصات برای نقطهٔ مفروض بپردازیم که در آن، r منفی باشد؛ مثلاً

$$\left(-۲, -\frac{\pi}{۲}\right).$$

اگر این مختصات را در معادلهٔ $r = ۲\cos ۲\theta$ امتحان کنیم، می بینیم که

$$-۲ = ۲\cos ۲\left(-\frac{\pi}{۲}\right) = ۲(-۱) = -۲$$

و معادله صادق است. نقطهٔ $(۲, \pi/۲)$ قطعاً روی خم قرار دارد. ■

مثال ۶ نقاط تقاطع خمهای زیر را بیابید

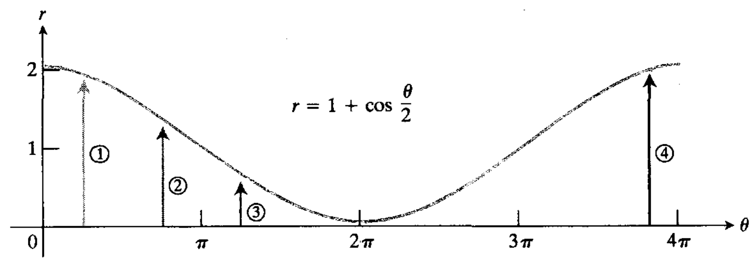
$$r^۲ = ۴a^۲\cos\theta \quad \text{و} \quad r = a(۱-\cos\theta)، \; a > ۰.$$

حل: تجربه ای که درمورد معادله ها درمختصات دکارتی داریم، ممکن است این فکر را القا کند که برای یافتن نقاط تقاطع باید معادله های $r^۲ = ۴a^۲\cos\theta$ و $r = a(۱-\cos\theta)$ را باهم حل کنیم. ولی همچنانکه خواهیم دید، حل دستگاه تنها دو نقطه از چهار نقطهٔ تقاطع خمها را به دست می دهد. نقطه های دیگر را باید با ترسیم نمودار پیدا کرد.

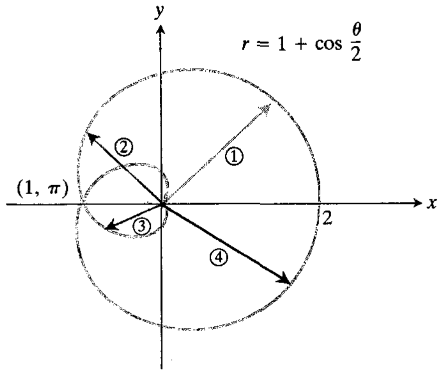
اگر در معادلهٔ $r = a(۱-\cos\theta)$ قرار دهیم $\cos\theta = r^۲/۴a^۲$، خواهیم داشت

$$r = a(۱-\cos\theta)$$

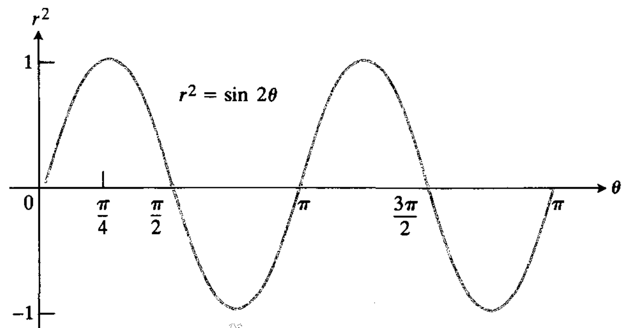
$$r = a\left(۱ - \frac{r^۲}{۴a^۲}\right)$$



۱۵۰۱۰ نمودار $r = 1 + \cos(\theta/2)$ در صفحهٔ $r\theta$ی دکارتی هر تعداد بردارشعاعی از محور θ تا خم را به‌دست می‌دهد.

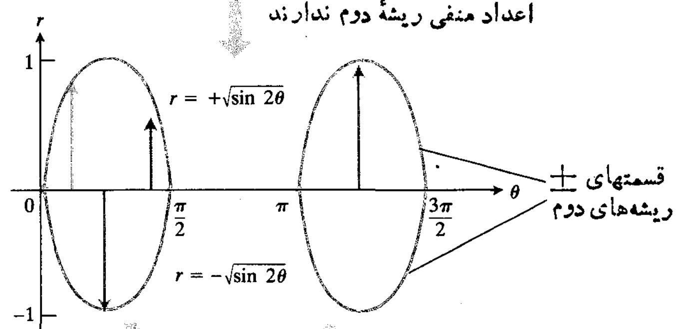


۱۶۰۱۰ بردارهـای شعاعی در نمودار قبلی به‌ما کمک‌می‌کنند که نمودار را درصفحهٔ $r\theta$ی قطبی رسم کنیم.

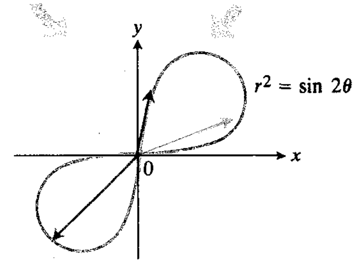


۱۷۰۱۰ نمودار $r^2 = \sin 2\theta$ درصفحـهٔ $r^2\theta$ی دکارتی شامـل مقادیرمنفی متغیروابستهٔ r^2 و نیزمقادیرمثبت‌آن است.

اعداد منفی ریشهٔ دوم ندارند



۱۸۰۱۰ وقتی نمودار r را بـر حسب θ در صفحهٔ $r\theta$ی دکارتی رسم می کنیم، نقاطی را که درآنجا r^2 منفی‌است نادیده‌می‌گیریم ولی قسمتهای $+$ و $-$ را از روی نقاطی‌کـه r^2 درآنجا مثبت است، رسم می‌کنیم.



۱۹۰۱۰ درصفحهٔ $r\theta$ی قطبی، بردارهـای شعاعی نمودار قبلی نمودار نهایی را دوبار «می‌پوشانند».

$$r^2+4ra-4a^2=0$$
$$r=-2a\pm 2a\sqrt{2}.$$

قدر مطلق مقدار $-2a-2a\sqrt{2}$ بزرگتر از آن است که معرف نقطه‌ای از یکی از خمها باشد، ولی مقدار $r=-2a+2a\sqrt{2}=2a(\sqrt{2}-1)$ قابل قبول است.

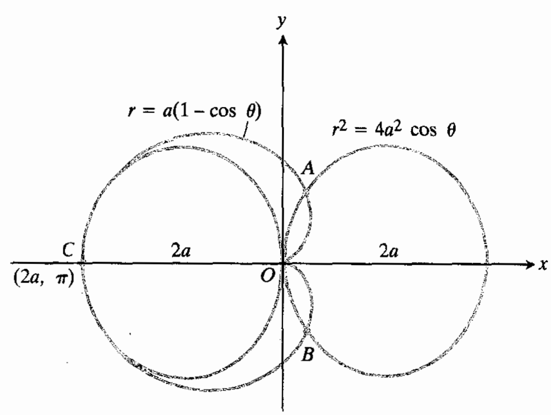
نمودار معادلات اصلی‌را به‌آسانی و با ترکیب کردن نمودارهای شکلهای ۱۲.۱۰ و ۱۴.۱۰ می‌توان رسم کرد (شکل ۲۰.۱۰). در این شکل می‌بینیم که خمها درمبدأ، جایی که $r=0$، و درنقطهٔ $(2a,\pi)$، جایی که $r=2a$، نیز یکدیگر را قطع می‌کنند. چرا این مقادیر r با حل همزمان معادلات پیدا نمی‌شوند؟ جواب ساده است: نقاط $(0,0)$ و $(2a,\pi)$ روی‌خمها «به‌طورهمزمان» واقع نیستند، یعنی به ازای مقدار واحدی از θ روی هر دوخم قرار نمی‌گیرند. نقطهٔ $(2a,\pi)$ به ازای $\theta=\pi$ روی خم $r=a(1-\cos\theta)$ قراردارد حال‌آنکه به‌ازای $\theta=0$ روی‌خم $r^2=4a^2\cos\theta$ واقع است و در $\theta=0$ به‌وسیلهٔ مختصات $(2a,\pi)$ که در این معادله صدق نمی‌کنند، مشخص نمی‌شود بلکه به‌وسیلهٔ مختصات $(-2a,0)$ مشخص می‌شود که درمعادله صدق می‌کنند. همین‌طور، مبدأ روی‌دلوار به‌ازای $\theta=0$ به‌دست‌می‌آید ولی روی خم $r^2=4a^2\cos\theta$ به‌ازای $\theta=\pi/2$ قرار دارد.

نتیجه می‌گیریم که این خمها درچهار نقطهٔ زیرهم را قطع می‌کنند

$$(0,0),\quad (2a,\pi),\quad (r_1,\theta_1),\quad (r_1,-\theta_1) \qquad (1)$$

که درآن

$$r_1=(-2+2\sqrt{2})a,\ \cos\theta_1=1-\frac{r_1}{a}=3-2\sqrt{2}. \qquad (2)$$



۲۰.۱۰ چهارنقطهٔ تقاطع خمهای $r=a(1-\cos\theta)$ و $r^2=4a^2\cos\theta$. تنها دوتا از این چهارنقطه (A و B) با حل دستگاه معادله‌ها به‌دست آمد. دونقطهٔ دیگر (O و C) را با ترسیم نمودار به‌دست آوردیم.

مسألهٔ ۲۶ را ببینید. ■

مسأله‌ها

درمسأله‌های ۱–۸، دربارهٔ خمها بحث‌کنید و آنها را بکشید.

۱. $r=a(1+\cos\theta)$

۲. $r=a(1-\sin\theta)$

۳. $r=a\sin 2\theta$

۴. $r^2=2a^2\cos 2\theta$

۵. $r=a(2+\sin\theta)$

۶. $r=a(1+2\sin\theta)$

۷. $r=\theta$

۸. $r=a\sin(\theta/2)$

درمسأله‌های ۹–۱۲، خمهایی‌را که معادله‌های آنها داده‌شده، رسم کنید. این خمها حلزونی نام دارند و هنگام ترسیم آنها مناسبت این نام را درخواهید یافت. معادله‌های حلزونی به‌صورت $r=a\pm b\cos\theta$ یا $r=a\pm b\sin\theta$ هستند. حلزونیها چهارشکل اصلی دارند.

۹. حلزونی با طوق داخلی

الف) $r=\frac{1}{2}+\cos\theta$

ب) $r=\frac{1}{2}+\sin\theta$

۱۰. دلوار

الف) $r=1-\cos\theta$

ب) $r=-1+\sin\theta$

۱۱. حلزونی فرورفته

الف) $r=\frac{3}{2}+\cos\theta$

ب) $r=\frac{3}{2}-\sin\theta$

۱۲. حلزونی محدب

الف) $r=2+\cos\theta$

ب) $r=-2+\sin\theta$

۱۳. ناحیه‌ای را که با نامعادلهٔ $0\leqslant r\leqslant 2-2\cos\theta$ تعریف می‌شود، رسم کنید.

۱۴. ناحیه‌ای را که با نامعادلهٔ $\circ \leqslant r^{۲} \leqslant \cos\theta$ تعریف می‌شود، رسم کنید.

۱۵. نشان‌دهید که نقطهٔ $(۲, ۳\pi/۴)$ برخم $r = ۲\sin ۲\theta$ واقع است.

۱۶. نشان‌دهید که نقطهٔ $(۱/۲, ۳\pi/۲)$ برخم $r = -\sin(\theta/۳)$ واقع است.

نقاط تقاطع هرجفت ازخمهای مذکور درمسأله‌های ۱۷-۲۴ را به‌دست آورید.

۱۷. $r = a(۱+\cos\theta),\quad r = a(۱-\sin\theta),\quad a > \circ$

۱۸. $r^{۲} = \sin ۲\theta,\quad r^{۲} = \cos ۲\theta,\quad a > \circ$

۱۹. $r = ۱-\cos\theta,\quad r^{۲} = \cos\theta$

۲۰. $r^{۲} = \sin\theta,\quad r^{۲} = \cos\theta$

۲۱. $r = ۱,\quad r = ۲\sin ۲\theta$

۲۲. $r = a\cos ۲\theta,\quad r = a\sin ۲\theta,\quad a > \circ$

۲۳. $r = ۱+\cos\dfrac{\theta}{۲},\quad r = ۱-\sin\dfrac{\theta}{۲}$

۲۴. $r^{۲} = ۲a^{۲}\sin ۲\theta,\quad r = a,\quad a > \circ$

۲۵. نشان دهید که معادله‌های

$$r = -۱+\cos\theta \quad \text{و} \quad r = ۱+\cos\theta$$

خم واحدی را نشان می‌دهند.

۲۶. درمتن این بخش، با حل دستگاه معادلات

$$r^{۲} = ۴a^{۲}\cos\theta \qquad (۳)$$

$$r = a(۱-\cos\theta) \qquad (۴)$$

نمی‌توانستیم نقاط $(\circ, \circ)$ و $(۲a, \pi)$ را که جزو نقاط تقاطع نمودارهای این معادلات‌اند، به‌دست آوریم.

الف) ولی می‌توانیم نقطهٔ $(۲a, \pi)$ را از این‌طریق بیابیم که درمعادلهٔ (۳) به‌جای (r, θ) معادل آن $(-r, \theta+\pi)$ را قراردهیم و به‌دست آوریم

$$r^{۲} = ۴a^{۲}\cos\theta$$

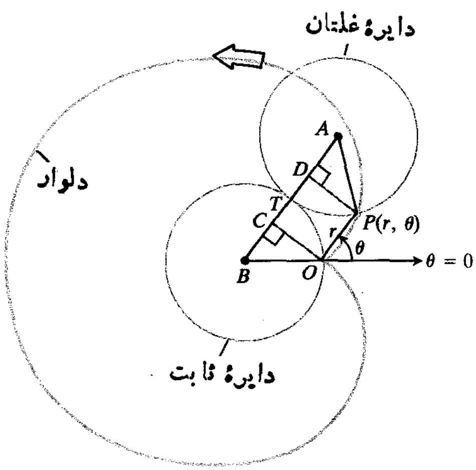
$$(-r)^{۲} = ۴a^{۲}\cos(\theta+\pi) \qquad (۵)$$

$$r^{۲} = -۴a^{۲}\cos\theta\,.$$

معادله‌های (۴) و (۵) را باهم حل‌کنید و نشان دهید که $(۲a, \pi)$ یك‌جواب‌مشترك است. (با این‌حال، از اینجا معلوم نمی‌شود که نمودارها در $(\circ, \circ)$ یکدیگر را قطع می‌کنند.)

ب) مبدأ بازهم (طبق معمول) مورد خاصی است. یك‌روش برای تعیین تکلیف آن این است: در معادله‌های (۳) و (۴) قرار دهید $r = \circ$ و هریك از معادله‌ها را نسبت به‌مقدار متناظری از θ حل‌کنید. چون $(\circ, \theta)$ به ازای هر θ نشان دهندهٔ مبدأ است، از اینجا معلوم می‌شود که هردوخم، حتی به‌ازای مقادیرمتفاوتی از θ، ازمبدأ می‌گذرند.

۲۷. ترسیم دلوار با استفاده از دوایر. نشان دهید که اگر دایره‌ای به‌شعاع a را روی‌محیط دایرهٔ دیگری به‌شعاع a بغلتانید، چنانکه درشکل ۲۱۰۱۰ دیده می‌شود، نقطهٔ تماس اولیه، P، دلواری در صفحه رسم خواهدکرد. (راهنمایی: نشان دهید که اندازهٔ هردو زاویهٔ OBC و PAD برابر θ است.)



۲۱۰۱۰ دایره‌های مورد بحث درمسألهٔ ۲۷. وقتی دایرهٔ به‌مرکز A روی محیط دایرهٔ به مرکز B می‌غلتد، نقطهٔ P یك دلوار رسم می‌کند.

۲۸. **رسام کامپیوتری** اگر به‌رسام کامپیوتری دسترسی دارید، می‌توانید ازترسیم خمهای زیر لذت ببرید.

الف) $r = ۱+۲\sin\dfrac{\theta}{۲}$

ب) گلها: $r = \cos m\theta$ به‌ازای $m = \dfrac{۱}{۳}, ۲, ۳, ۷$.

TOOLKIT PROGRAMS

Parametric Equations Super * Grapher

۳.۱۰ معادله‌های قطبی مقطعهای مخروطی وخمهای دیگر

در این بخش، با این واقعیت جالب روبه‌رو می‌شویم که بیضیها، سهمیها، و هذلولیها همگی با معادلهٔ قطبی‌واحدی قابل‌توصیف‌اند. همچنین، معادلاتی قطبی برای خطها و دایره‌ها خواهیم یافت. در مسائل پایان بخش خمهای دیگری را نیز معرفی می‌کنیم.

مثال ۱ خط. فرض کنیدکه خط‌عمود ازمبدأ برخط L، خط L را درنقطهٔ $N(p, \beta)$ قطع می‌کند. معادله‌ای قطبی برای L بیابید.

حل: فرض می‌کنیم $p(r, \theta)$ یك نقطهٔ نمونه‌وار L باشد (شکل ۲۲.۱۰)؛ با توجه به‌مثلث قائم‌الزاویهٔ ONP داریم

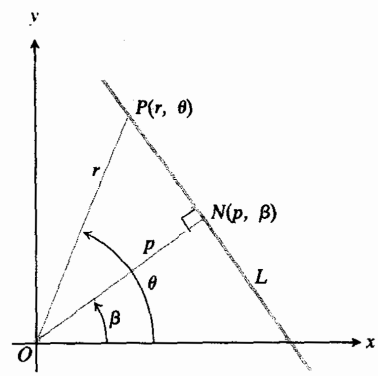
$$\cos(\theta-\beta)=\frac{p}{r} \qquad (۱)$$

یا

$$r\cos(\theta-\beta)=p \qquad (۲)$$

اگر L برمحور x عمود باشد، β برابر ۰ است و معادلهٔ (۲) تبدیل می‌شود به

$$r\cos\theta=p \quad \text{یا} \quad x=p. \qquad (۳)$$

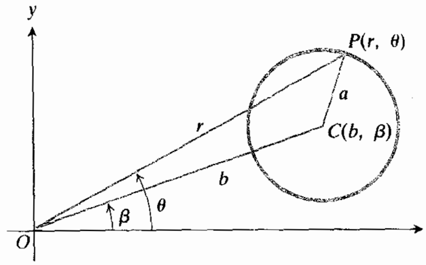


۲۲.۱۰ دراین‌شکل،رابطهٔ $p/r=\cos(\theta-\beta)$ یا $r\cos(\theta-\beta)=p$ را ازروی مثلث ONP می‌توان ملاحظه کرد. ■

مثال ۲ دایره. معادله‌ای قطبی بـرای دایرهٔ به شعاع a و به‌مرکز (b, β) بیابید.

حل: فرض می‌کنیم $P(r, \theta)$ یك نقطهٔ دلخواه روی دایره باشد و قانون کسینوسها را درمورد مثلث OCP (شکل ۲۳.۱۰) به‌کارمی‌بریم تا به‌دست‌آوریم

$$a^2=b^2+r^2-2br\cos(\theta-\beta). \qquad (۴)$$



۲۳.۱۰ برای یـافتن معادله‌ای از این دایره، قـانون کسینوسها را درمورد مثلث OCP به‌کار می‌بریم.

اگردایره ازمبدأ بگذرد، داریم $b=a$ و معادله شکل ساده‌تر زیر را پیدا می‌کند

$$r(r-2a\cos(\theta-\beta))=0 \qquad (۵)$$

یا

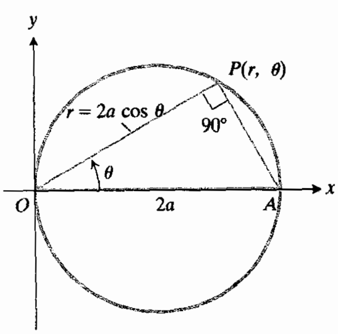
$$r=2a\cos(\theta-\beta). \qquad (۶)$$

اگر $\beta=0$، معادلهٔ (۶) به‌صورت زیرساده می‌شود

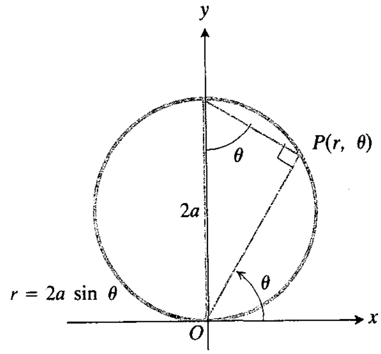
$$r=2a\cos\theta \qquad (۷)$$

(شکل ۲۴.۱۰). اگـر $\beta=90°$، مـرکز دایـره بـرمحور y واقـع است (شکل ۲۵.۱۰)، و معادلـهٔ (۶) به‌معادلهٔ زیرتحویل می‌یابد

$$r=2a\sin\theta. \qquad (۸)$$



۲۴.۱۰ دایرهٔ $r=2a\cos\theta$.



۲۵.۱۰ معادلهٔ دایره‌ای که ازمبدأ بگذرد و مرکزش روی قسمت مثبت محور y واقع باشد، $r = ۲a \sin\theta$ است. ■

مثال ۳ **بیضی، سهمی، هذلولی.** اگر کانون مقطعی مخروطی با خروج از مرکز e درمبدأ واقع باشد و هادی متناظر این کانون خط $x = -k$ باشد، معادله‌ای قطبی برای مقطع بیابید.

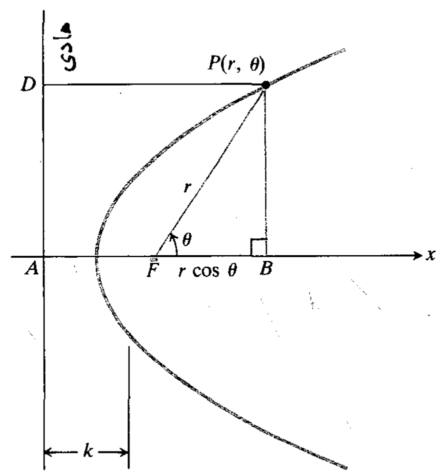
حل: شیوهٔ نمادگذاری شکل ۲۶.۱۰ را اتخاذ می‌کنیم و ویژگی کانون‌-هادی

$$PF = e \cdot PD \qquad (۹)$$

از بخش ۴.۸ را به‌کارمی گیریم. به‌این‌ترتیب، می‌توانیم بیضی، سهمی، و هذلولی را به‌طور همزمان مورد مطالعه قرار دهیم.

اگرمبدأ را درکانون F بگیریم، داریم

$$PF = r$$



۲۶.۱۰ اگر $PF = e \cdot PD$، آنگاه $r = e(k + r\cos\theta)$. این‌معادله‌را نسبت به r حل می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم $r = ke/(۱ - e\cos\theta)$.

درحالی که

$$PD = AB = AF + FB = k + r\cos\theta .$$

حال، معادلهٔ (۹) چیزی جزمعادلهٔ زیر نیست

$$r = e(k + r\cos\theta) . \qquad (۱۰)$$

این معادله را نسبت به r حل می‌کنیم تا به‌صورت متعارف درآید.

معادلهٔ قطبی مقطعهای مخروطی

$$r = \frac{ke}{۱ - e\cos\theta} . \qquad (۱۱)$$

یک‌کانون درمبدأ است
هادی، قائم و درسمت چپ مبدأ است
k برابراست با فاصلهٔ مبدأ تا هادی
e برابراست با خروج ازمرکز ■

معادلهٔ (۱۱) معادلهٔ متعارف مقطعهای مخروطی درمختصات قطبی است. اگر e را برابر۱/۲، ۱، و ۲ بگیریم، حالات‌نمونه‌وار به‌دست می‌آیند

$$r = \frac{k}{۲ - \cos\theta} \quad \text{بیضی} \quad : e = \frac{۱}{۲} \qquad (۱۲)$$

$$r = \frac{k}{۱ - \cos\theta} \quad \text{سهمی} \quad : e = ۱ \qquad (۱۳)$$

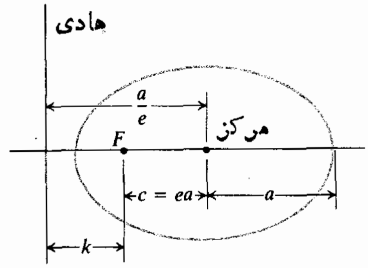
$$r = \frac{۲k}{۱ - ۲\cos\theta} \quad \text{هذلولی} \quad : e = ۲ \qquad (۱۴)$$

درمعادلهٔ (۱۲) که مربوط به‌بیضی است، مخرج کسرهیچگاه کوچکتراز ۱ نیست، بنابراین r هیچگاه بزرگتراز k نیست. ولی درمعادلهٔ (۱۳) وقتی θ به ۰ میل می‌کند، و درمعادلهٔ (۱۴) وقتی θ به $\pi/۳$ میل می‌کند، r بینهایت می‌شود.

از روی نمودار بیضی که درشکل ۲۷.۱۰ آمده است می‌بینیم که k ازطریق‌معادلهٔ زیر به‌خروج ازمرکز، e، ونصف‌قطر بزرگ، a، مربوط است

$$k = \frac{a}{e} - ea . \qquad (۱۵)$$

ازاینجا، رابطهٔ $ke = a(۱ - e^۲)$ را به‌دست‌می‌آوریم. بنابراین، معادلهٔ بیضیی که نصف‌قطربزرگ آن a وخروج ازمرکزش e باشد،



۲۷۰۱۰ در بیضیی که نصف‌قطر بزرگ آن a باشد، فاصلهٔ کانون تا هادی برابراست بـا $k=(a/e)-ea$، پس $ke=a(۱-e^۲)$.

چنین است

$$r=\frac{a(۱-e^۲)}{۱-e\cos\theta}\cdot \qquad (۱۶)$$

مثال ۴ مطلوب است معادلهٔ قطبی بیضیی که نصف قطر بزرگ آن برابر ۴۴ر۳۹ واحد نجومی (AU) و خروج ازمرکزش ۲۵ر۰ است؛ اینها مشخصات تقریبی اندازه و شکل مـدار پلوتون به‌دور خورشید است. یك واحد نجومی، طول نصف قطر بزرگ مـدار زمین است.

حل: معادلهٔ (۱۶) را باضوابط $a=۳۹٫۴۴$ و $e=۰٫۲۵$ به‌کارمی گیریم و به‌دست می آوریم

$$r=\frac{۳۹٫۴۴(۱-(۰٫۲۵)^۲)}{۱-۰٫۲۵\cos\theta}$$

$$=\frac{۱۴۷٫۹}{۴-\cos\theta}\cdot$$

نزدیکترین نقطهٔ مدار پلوتون به‌خورشید (حضیض)، به‌اندازهٔ

$$r=\frac{۱۴۷٫۹}{۴+۱}=۲۹٫۵۸\,\text{AU}$$

ازخورشید فاصله دارد. دورترین نقطهٔ این‌مدار (اوج) ، به‌فاصلهٔ

$$r=\frac{۱۴۷٫۹}{۴-۱}=۴۹٫۳\,\text{AU}$$

ازخورشیدقراردارد. ■

مثال ۵ مطلوب است فـاصلهٔ یك کانون بیضی مثال ۴ تـا هادی متناظرش.

حـل: معـادلـهٔ (۱۵) را بـا ضوابـط $a=۳۹٫۴۴$ و $e=۰٫۲۵$ به‌کارمی بریم و به‌دست می آوریم

$$k=۳۹٫۴۴\left(\frac{۱}{۰٫۲۵}-۰٫۲۵\right)=۱۴۷٫۹\,\text{AU}\cdot \quad ■$$

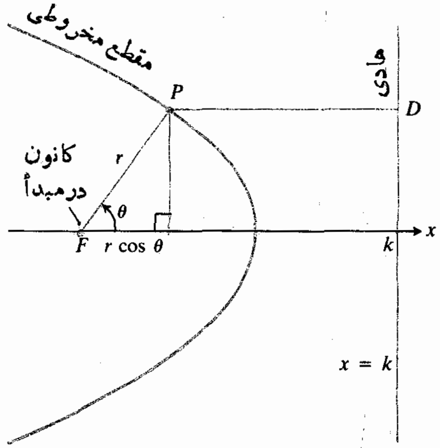
اگر به‌جای خط $x=-k$ خط $x=k$ را هادی یك مقطع مخروطی بگیریم (شکل ۲۸۰۱۰)، معادلهٔ $PF=e\cdot PD$ به‌شکل زیر درمی آید

$$r=e(k-r\cos\theta) \qquad (۱۷)$$

که اگر آن را نسبت به r حل کنیم، خواهیم داشت

$$r=\frac{ke}{۱+e\cos\theta}\cdot \qquad (۱۸)$$

این‌معادله، بجز ازلحاظ علامت‌درمخرج، بامعادلهٔ (۱۱) یکی‌است.



۲۸۰۱۰ نموداری برای یافتن معادلهٔ قطبی متعارف یك‌مقطع‌مخروطی با خروج ازمرکز e که‌کانونش درمبدأ، وهادیش‌خط قائمی‌است که به‌فاصلهٔ k واحد درسمت‌راست مبدأ قرار دارد. فاصلهٔ PD برابر است با $(k-r\cos\theta)$.

مثال ۶ مطلوب است معادلهٔ هذلولیی با خروج از مرکز ۳/۲ و هادی $x=۲$.

حل: معادلهٔ (۱۸) را با ضوابط $x=۲$ و $e=۳/۲$ به‌کار می‌بریم و به‌دست می آوریم

$$r=\frac{۲(۳/۲)}{۱+(۳/۲)\cos\theta} \quad \text{یا} \quad r=\frac{۶}{۲+۳\cos\theta}\cdot \quad ■$$

مثال ۷ هادی سهمی زیر را بیابید

$$r=\frac{25}{10+10\cos\theta}\cdot$$

حل: صورت و مخرج این کسر را بر ۱۰ تقسیم می‌کنیم تا معادله به‌صورت متعارف درآید

$$r=\frac{2.5}{1+\cos\theta}\cdot$$

که همان معادلهٔ

$$r=\frac{ke}{1+e\cos\theta}$$

با ضوابط $k=2.5$ و $e=1$ است. معادلهٔ هادی، $x=2.5$ است. ■

مسأله‌ها

درمسأله‌های ۱-۱۸، خمها را رسم کنید. برای هر خم، یك‌معادلهٔ دکارتی بیابید.

۱. $r=4\cos\theta$

۲. $r=6\sin\theta$

۳. $r=-2\cos\theta$

۴. $r=-2\sin\theta$

۵. $r=\sin 2\theta$

۶. $r=\sin 3\theta$

۷. $r^2=8\cos 2\theta$

۸. $r^2=4\sin 2\theta$

۹. $r=8(1-2\cos\theta)$

۱۰. $r=1/(2-\cos\theta)$

۱۱. $r=4(1-\cos\theta)$

۱۲. $r(2-2\cos\theta)=4$

۱۳. $r(3-6\cos\theta)=12$

۱۴. $r(10-5\cos\theta)=25$

۱۵. $r(2+\cos\theta)=4$

۱۶. $r(2+3\cos\theta)=1$

۱۷. $r(3+3\cos\theta)=2$

۱۸. $r(16+8\cos\theta)=216$

درمسأله‌های ۱۹-۲۳، نمودار معادله‌ها را رسم کنید.

۱۹. $r=2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

۲۰. $r=4\csc\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$

۲۱. $r=5\sec\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$

۲۲. $r=3\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$

۲۳. $r=a+a\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$

۲۴. شکل ناحیه‌ای را که با نامعادلهٔ $0\leqslant r\leqslant 2\cos\theta$ تعریف می‌شود بکشید.

هریك از نمودارهای مسأله‌های ۲۵-۳۲، نمودار دقیقاً یکی از معادله‌های (الف)-(ر) است که درفهرست زیرمی بینید. معادلهٔ هرنمودار را پیدا کنید.

الف) $r=\cos 2\theta$

ب) $r\cos\theta=1$

پ) $r=\frac{6}{1-2\cos\theta}$

ت) $r=\sin 2\theta$

ث) $r=\theta$

ج) $r^2=\cos 2\theta$

چ) $r=1+\cos\theta$

ح) $r=1-\sin\theta$

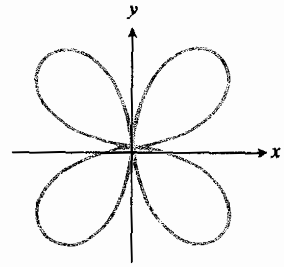
خ) $r=\frac{2}{1-\cos\theta}$

د) $r^2=\sin 2\theta$

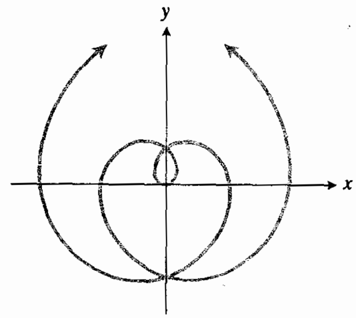
ذ) $r=-\sin\theta$

ر) $r=2\cos\theta+1$

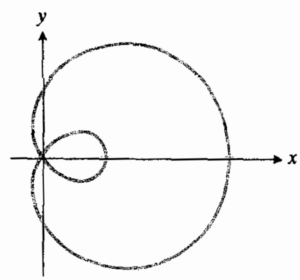
۲۵. گل چهارپر



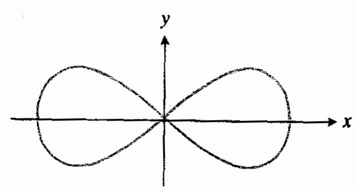
۲۶. مارپیچ



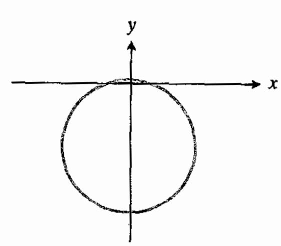
۲۷. حلزونی



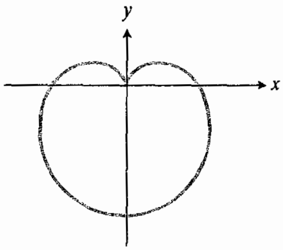
۲۸. پروانه



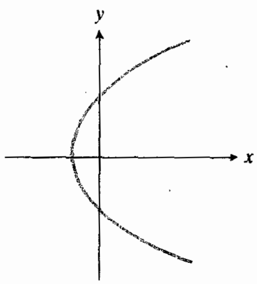
۲۹. دایره



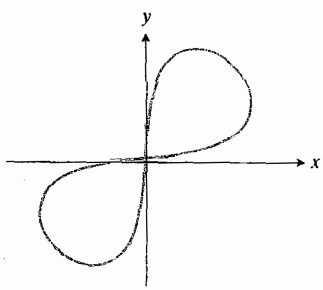
۳۰. دلوار



۳۱. سهمی



۳۲. پروانه



۳۳. مارپیچ ارشمیدس. نمودار معادلـه‌ای به‌شکل $r = a\theta$، که a ثابتی نامنفی است، یك مارپیچ ارشمیدسی نامیده می‌شود. نشان دهید که چنین مارپیچی، هرپرتوی را که ازمبدأ بگذرد به‌بخشهای مساوی تقسیم می‌کند. به‌عبارت دیگر نشان دهید که فاصلهٔ بین هردو دورمتوالی مارپیچ ثابت است.

۳۴. گلی درمیان گل. نمودار معادلـهٔ $r = ۱ - ۲\sin ۳\theta$ را رسم کنید.

۳۵. مدارهای سیارات. درمثال ۴، معادلـه‌ای قطبی برای مدار پلوتون یافتیم. بـا استفاده از داده‌هـای جدول ۱، معادلاتی قطبی برای مدار سایر سیارات بیابید.

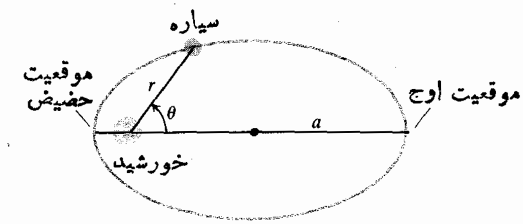
جدول ۱ نصف قطر بزرگ وخروج از مرکز مدار سیارات منظومهٔ شمسی

سیاره	نصف قطر بزرگ (واحد نجومی)	خروج ازمرکز
عطارد	۰٫۳۸۷۱	۰٫۲۰۵۶
زهره	۰٫۷۲۳۳	۰٫۰۰۶۸
زمین	۱٫۰۰۰	۰٫۰۱۶۷
مریخ	۱٫۵۲۴	۰٫۰۹۳۴
مشتری	۵٫۲۰۳	۰٫۰۴۸۴
زحل	۹٫۵۳۹	۰٫۰۵۴۳
اورانوس	۱۹٫۱۸	۰٫۰۴۶۰
نپتون	۳۰٫۰۶	۰٫۰۰۸۲
پلوتون	۳۹٫۴۴	۰٫۲۴۸۱

۳۶. حضیض و اوج (شکل ۲۹.۱۰ را ببینید.) سیاره‌ای روی مداری به‌شکل بیضی که طول نصف قطر بزرگش a است، دور خورشیدش می گردد.

الف) نشان دهیدکه وقتی سیاره درنزدیکترین نقطهٔ مسیرش به‌خورشید قراردارد، $r=a(1-e)$ و وقتی در دورترین نقطه نسبت به‌خورشید قراردارد، $r=a(1+e)$.

ب) با استفاده از داده‌های جدول ۱، نزدیکترین و دورترین فاصلهٔ هریك از سیارات منظومهٔ شمسی ما را از خورشید حساب کنید.



۲۹.۱۰ مواضع یك‌سیاره درنزدیکترین و دورترین نقاط مسیرش ازخورشید، موسوم به‌حضیض و اوج.

۳۷. الف) معادلاتی دکارتی برای خمهای $r=2\sin\theta$ و $r=\csc\theta$ بیابید.

ب) خمهای قسمت (الف) را در یك نمودار رسم کنید و نقاط تقاطع را هم درمختصات دکارتی و هم در مختصات قطبی مشخص کنید.

۳۸. مسألهٔ ۳۷ را برای خمهای $r=2\cos\theta$ و $r=\sec\theta$ تکرار کنید.

۳۹. کانون یك‌سهمی در مبدأ، و هادیش خط $r\cos\theta=-2$ است. برای این سهمی معادله‌ای قطبی بیابید.

۴۰. بیضی $r=2/(2-\cos\theta)$ را رسم کنید و مرکزش را مشخص کنید.

۴۱. یك‌کانون هذلولیی با خروج ازمرکز ۵/۴ درمبدأ، و هادی متناظرش خط $r\cos\theta=9$ است. مختصات قطبی‌کانون دوم را بیابید و نیز معادله‌ای قطبی برای این هذلولی پیدا کنید.

۴۲. معادله‌ای قطبی برای سهمیی‌که‌کانونش درمبدأ و هادیش‌خط $r\cos(\theta-\pi/2)=2$ است، پیدا کنید.

TOOLKIT PROGRAMS

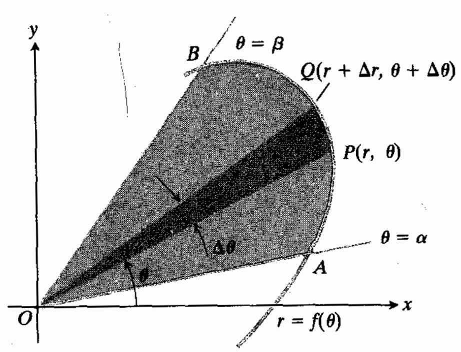
Parametric Equations   Super * Grapher

۴.۱۰ انتگرال درمختصات قطبی

دراین بخش، مساحتها و طول خمها را درمختصات قطبی حساب می‌کنیم. اگرچه شیوهٔ‌کلی استنتاج انتگرالها به‌همان صورتی است که درمختصات دکارتی بود، ولی فرمولهای حاصل متفاوت‌اند.

مساحت درصفحه

ناحیهٔ AOP درشکل ۳۰.۱۰ محدود به‌پرتوهای $\theta=\alpha$، $\theta=\beta$، و خم $r=f(\theta)$ است. زاویهٔ AOB را به n قسمت تقسیم



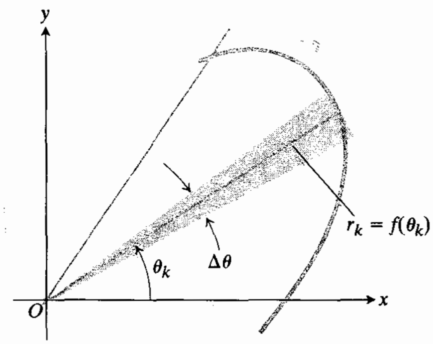
۳۰.۱۰ وقتی P روی خم از A به B حرکت می‌کند، شعاع OP ناحیه‌ای پدید می‌آورد که برای یافتن فرمول مساحت آن، ناحیه را به چند قطاع تقسیم می‌کنیم.

می‌کنیم و یک قطاع نمونه‌وار POQ را با یک قطاع مستدیر به‌شعاع r و به زاویهٔ مرکزی $\Delta\theta$ تقریب می‌زنیم (شکل ۳۱.۱۰). حال

$$\text{مساحت } POQ \approx \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta$$

و

$$A = \text{مساحت } AOB \approx \sum_{\theta=\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta .$$



۳۱.۱۰ به‌ازای θ_kای بین θ و $\theta+\Delta\theta$، مساحت قطاع مستدیر سایه‌خورده دقیقاً برابر است با مساحت قطاع POQ محدود به خمی که درشکل ۳۰.۱۰ نشان داده شد.

اگر تابع $r=f(\theta)$، که خم قطبی را معرفی می‌کند، تابع پیوسته‌ای از θ به‌ازای $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ باشد، آنگاه θ_kای بین θ و $\theta+\Delta\theta$ وجود دارد که به‌ازای آن، قطاع مستدیر به‌شعاع

$$r_k = f(\theta_k)$$

و به‌زاویهٔ مرکزی $\Delta\theta$، مساحت دقیق POQ را به دست می‌دهد (شکل ۳۱.۱۰ را ببینید). پس کل مساحت دقیقاً از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$A = \sum \frac{1}{2} r_k^2 \Delta\theta = \sum \frac{1}{2} (f(\theta_k))^2 \Delta\theta .$$

اگر فرض کنیم $\Delta\theta \to 0$، می‌بینیم که

$$A = \lim_{\Delta\theta\to 0} \sum \frac{1}{2} (f(\theta_k))^2 \Delta\theta = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} f^2(\theta)\, d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2\, d\theta .$$

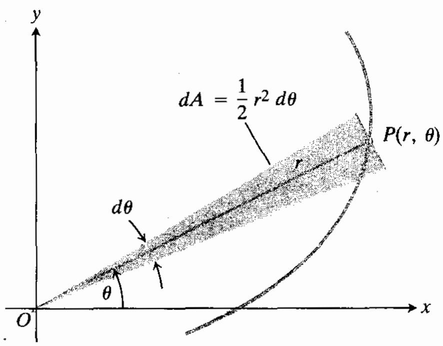
مساحت ناحیهٔ بین مبدأ و $r=f(\theta)$، $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$

$$A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2\, d\theta . \qquad (1)$$

این، انتگرال **دیفرانسیل مساحتی** زیر است

$$dA = \frac{1}{2} r^2\, d\theta . \qquad (2)$$

شکل ۳۲.۱۰ را ببینید.



۳۲.۱۰ دیفرانسیل مساحتی dA.

مثال ۱ مساحت ناحیهٔ محدود به‌دلوار $r=2(1+\cos\theta)$ را پیدا کنید.

حل: نمودار دلوار را رسم می‌کنیم (شکل ۳۳.۱۰) و می‌بینیم که اگر θ از ۰ تا 2π تغییر کند، شعاع OP این ناحیه را (دقیقاً یکبار) می‌روبد. بنابراین، مساحت برابر است با

$$\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{1}{2} r^2\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot 4(1+\cos\theta)^2\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 2(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\, d\theta$$

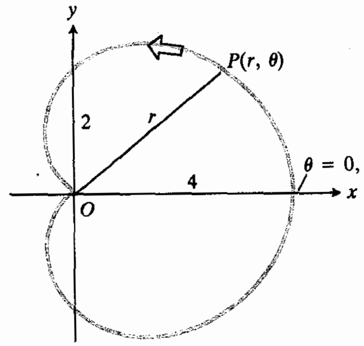
$$= \int_0^{2\pi} \left(2+4\cos\theta + 2\,\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (3+4\cos\theta+\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= \left[3\theta + 4\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= 6\pi - 0$$

$$= 6\pi .$$



۳۳۰۱۰ دلوار $r=2(1+\cos\theta)$. ■

مثال ۲ مطلوب است مساحت ناحیهٔ داخل طوق کوچک حلزونی زیر

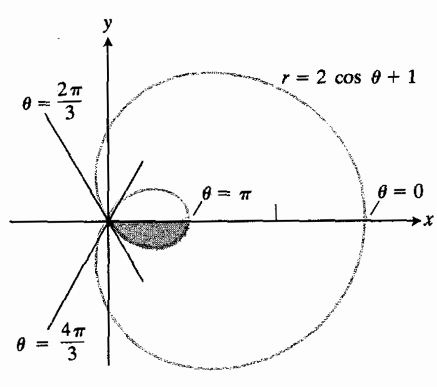
$$r=2\cos\theta+1.$$

حل: پس از ترسیم این خم (شکل ۳۴۰۱۰) می‌بینیم که طوق کوچك حلزونی با حرکت نقطهٔ $(r\ \ \theta)$ همراه با افزایش θ از $2\pi/3$ تا $\theta=4\pi/3$ رسم می‌شود. چون این خم نسبت به محور x متقارن است (معادله با تبدیل θ به $-\theta$ تغییر نمی‌کند) می‌توانیم مساحت نیمهٔ سایه‌خوردهٔ طوق داخلی‌را با انتگرالگیری از $\theta=2\pi/3$ تا $\theta=\pi$ حساب کنیم. مساحت A که درجستجوی آن هستیم، دو برابر مقدار انتگرال حاصل است

$$A=2\int_{2\pi/3}^{\pi}\frac{1}{2}r^2\,d\theta=\int_{2\pi/3}^{\pi}r^2\,d\theta.$$

چون

$$\begin{aligned}r^2&=(2\cos\theta+1)^2\\&=4\cos^2\theta+4\cos\theta+1\\&=4\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}+4\cos\theta+1\\&=2+2\cos 2\theta+4\cos\theta+1\\&=3+2\cos 2\theta+4\cos\theta\end{aligned}$$



۳۴۰۱۰ حلزونی مورد بحث درمثال ۲.

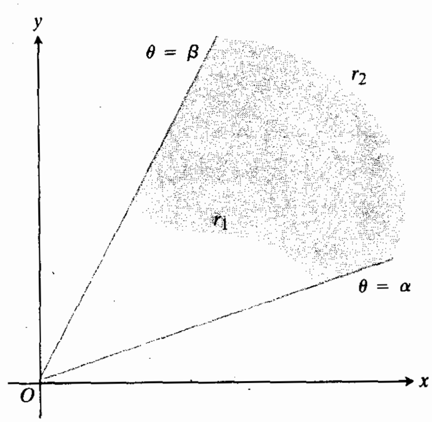
داریم

$$\begin{aligned}A&=\int_{2\pi/3}^{\pi}(3+2\cos 2\theta+4\cos\theta)\,d\theta\\&=\Big[3\theta+\sin 2\theta+4\sin\theta\Big]_{2\pi/3}^{\pi}\\&=(3\pi)-\Big(2\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}+4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\\&=\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$ ■

برای یافتن مساحت ناحیه‌ای مانند ناحیهٔ شکل ۳۵۰۱۰، که بین دوخم قطبی از $\theta=\alpha$ تا $\theta=\beta$ قرار دارد، انتگرال $(1/2)r_1^2\,d\theta$ را از انتگرال $(1/2)r_2^2\,d\theta$ کم می‌کنیم. این عمل به‌فرمول زیر می‌انجامد.

مساحت ناحیهٔ $r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta)$، $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$

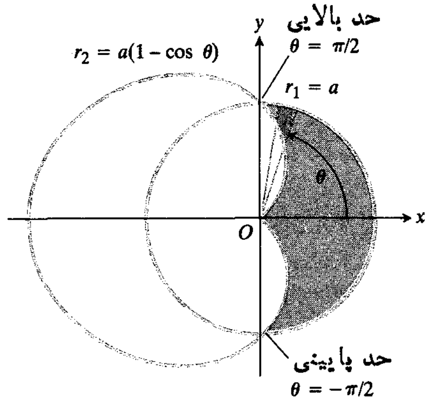
$$A=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}r_2^2\,d\theta-\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}r_1^2\,d\theta=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}(r_2^2-r_1^2)\,d\theta \qquad (3)$$



۳۵۰۱۰ مساحت ناحیهٔ سایه‌خورده با تفریق مساحت ناحیهٔ بین r_1 ومبدأ ازمساحت ناحیهٔ بین r_2 و مبدأ به‌دست می‌آید.

مثال ۳ مساحت ناحیه‌ای‌را که درون دایرهٔ $r=1$ و بیرون دلوار $r=1-\cos\theta$ قراردارد، پیدا کنید.

حل: نمودار این ناحیه را می‌کشیم و مرزهای آن‌را مشخص می‌کنیم و حدود انتگرالگیری را می‌یابیم (شکل ۳۶۰۱۰). خم بیرونی، $r_2=1$ و خم درونی، $r_1=1-\cos\theta$ است و θ از



۳۶.۱۰ مبدأ و حدود انتگرالگیری درمثال ۳.

$-\pi/2$ تا $\pi/2$ تغییر می‌کند. با توجه بـه رابطهٔ (۳)، مساحت برابر است با

$$A=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{2}(r_2^2-r_1^2)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}((1)^2-(1-\cos\theta)^2)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-(1-2\cos\theta+\cos^2\theta))\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(2\cos\theta-\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(2\cos\theta-\frac{\cos 2\theta+1}{2}\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[2\sin\theta-\frac{\sin 2\theta}{4}-\frac{\theta}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(2-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}\left(-2+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=1-\frac{\pi}{8}+1-\frac{\pi}{8}$$

$$=2-\frac{\pi}{4}.$$ ■

طول قوس

با مجذورکردن و جمع کردن دیفرانسیلهای زیر، فرمولی بـرای دیفرانسیل طول قوس ds به‌دست می‌آوریم

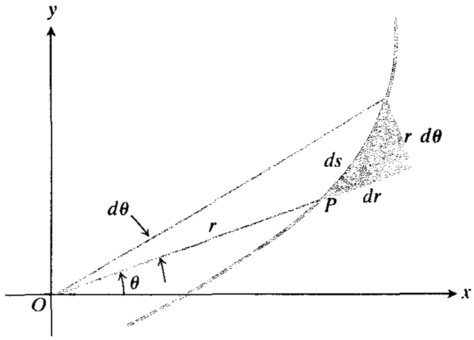
$$dx=d(r\cos\theta)=-r\sin\theta\,d\theta+\cos\theta\,dr$$

$$dy=d(r\sin\theta)=r\cos\theta\,d\theta+\sin\theta\,dr.$$

پس از انجام‌دادن عملیات، رابطهٔ زیر حاصل می‌شود

$$ds^2=dx^2+dy^2=r^2\,d\theta^2+dr^2. \qquad (4)$$

$r\,d\theta$، dr، و ds را اضلاع و وتر «مثلث قائم‌الزاویه» در شکل ۳۷.۱۰ تلقی می‌کنیم.



۳۷.۱۰ برای‌طول‌قوس، رابطهٔ $ds^2=r^2\,d\theta^2+dr^2$ برقرار است.

برای یافتن طول یک‌خم درمختصات قطبی

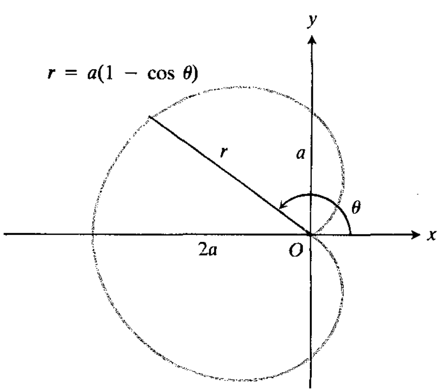
۱. ds را ازمعادلهٔ زیر پیدا کنید

$$ds^2=r^2\,d\theta^2+dr^2. \qquad (5)$$

۲. سپس از ds بین حدود مناسبی از θ انتگرال بگیرید.

مثال ۴ طول دلوار $r=a(1-\cos\theta)$ را پیداکنید.

حل: نمودار دلوار را می‌کشیم (شکل ۳۸.۱۰) تا حدود انتگرالگیری معلوم شود. به‌موازات آنکه θ از ۰ تا 2π تغییر می‌کند، ترسیم نمودار را ازمبدأ شروع می‌کنیم، یک‌بار دلوار را درخلاف جهت ساعت رسم می‌کنیم، و به‌مبدأ بازمی‌گردیم.



۳۸.۱۰ درمثال۴، طول این‌دلوارمحاسبه‌می‌شود.

برای محاسبهٔ طول خم، درمعادلهٔ (۵) قرارمی‌دهیم

$$r=a(1-\cos\theta),\quad dr=a\sin\theta\,d\theta$$

و خواهیم داشت

$$\begin{aligned}ds^2&=r^2\,d\theta^2+dr^2\\&=a^2(1-\cos\theta)^2\,d\theta^2+a^2\sin^2\theta\,d\theta^2\\&=2a^2\,d\theta^2(1-\cos\theta)\end{aligned}$$

و

$$ds=a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta.$$

برای انتگرالگیری از عبارت سمت راست، جانشانی زیر را انجام می‌دهیم

$$1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

بنابراین

$$ds=2a\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|d\theta.$$

چون به‌ازای $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ داریم $\sin\theta/2\geqslant 0$، پس

$$\text{طول دلوار}=\int_0^{2\pi}2a\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=-4a\cos\frac{\theta}{2}\Big]_0^{2\pi}=8a.$$

اگر بخواهیم از تقارن دلوار استفاده کنیم، می‌توانیم طول قسمت بالایی را از $\theta=0$ تا $\theta=\pi$ حساب کرده نتیجهٔ حاصل را دوبرابر کنیم

طول نیمهٔ بالایی: $\displaystyle\int_0^{\pi}2a\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta=-4a\cos\frac{\theta}{2}\Big]_0^{\pi}$

$$=4a.$$

طول دلوار: $2(4a)=8a$ ■

مساحت رویه

فرمول مساحت رویهٔ دورانی عبارت است از

$$S=\int 2\pi\rho\,ds \tag{6}$$

که درمختصات قائم‌هم چنین‌بود. اما اکنون این انتگرال‌را به‌جای x و y برحسب r و θ بیان می‌کنیم. مثال بعد نشان می‌دهد که این‌کار چگونه انجام می‌شود.

مثال ۵ مساحت رویه‌ای را که از دوران طوق سمت راست پروانهٔ $r^2=2a^2\cos 2\theta$ حول محور y پدید می‌آید، به‌دست آورید.

حل: خم را رسم می‌کنیم تا حدود انتگرالگیری و شعاع ρی یک قوس نمونه‌وار به‌طول ds معلوم شود (شکل ۳۹.۱۰). در این خم، θ از $\theta=-\pi/4$ تا $\theta=\pi/4$ تغییرمی‌کند، و $\rho=x=r\cos\theta$. از این‌رو،

$$\begin{aligned}2\pi\rho\,ds&=2\pi r\cos\theta\sqrt{dr^2+r^2\,d\theta^2}\\&=2\pi\cos\theta\sqrt{r^2\,dr^2+r^4\,d\theta^2}.\end{aligned}$$

از روی معادلهٔ خم به‌دست می‌آوریم

$$r\,dr=-2a^2\sin 2\theta\,d\theta$$

بنابراین

$$r^2\,dr^2+r^4\,d\theta^2=(2a^2\,d\theta)^2(\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta)$$

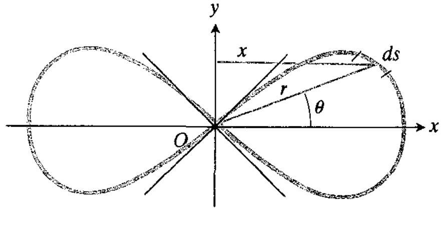
و

$$2\pi\rho\,ds=4\pi a^2\cos\theta\,d\theta.$$

مساحت رویه برابر است با

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}4\pi a^2\cos\theta\,d\theta=4\pi a^2\sin\theta\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

$$=4\pi a^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4\pi a^2\sqrt{2}.$$



۳۹.۱۰ نیمهٔ سمت راست یك پروانه حول محور y دوران می‌کند تا یك رویه تولید شود، که مساحتش در مثال ۵ محاسبه شده است. ■

مسأله‌ها

مطلوب است مساحت نواحیی که در مسأله‌های ۱ـ۲۰ توصیف می‌شوند. حرف a، هر جا دیده می‌شود، نشان دهندهٔ یك ثابت مثبت است.

۱. درون دایرهٔ $r=\cos\theta$ بین پرتوهای $\theta=0$ و $\theta=\pi/4$ در ربع اول

۲. ناحیهٔ مشترك بین دایرهٔ $r=a$ و دلوار $r=a(1-\cos\theta)$

۳. درون حلزونی $r=4+2\cos\theta$

۴. درون دلوار $r=a(1+\cos\theta)$

۵. درون دایرهٔ $r=2a\sin\theta$

۶. درون پروانهٔ $r^2=2a^2\cos 2\theta$

۷. قسمتی‌ازدرون پروانهٔ $r^2=2a^2\cos 2\theta$ که دردایرهٔ $r=a$ قرارندارد

۸. درون خم $r=a(2+\cos\theta)$

۹. ناحیهٔ مشترك بین‌دایره‌های $r=2a\cos\theta$ و $r=2a\sin\theta$

۱۰. درون دایرهٔ $r=3a\cos\theta$ ولی بیرون دلوار $r=a(1+\cos\theta)$

۱۱. درون دایرهٔ $r=-2\cos\theta$ و بیرون دایرهٔ $r=1$

۱۲. ناحیهٔ مشترك بین دایره‌های $r=a$ و $r=2a\sin\theta$

۱۳. ناحیهٔ مشترك بین دلوار $r=a(1+\cos\theta)$ و $r=a(1-\cos\theta)$

۱۴. درون یك پر از گل $r=\cos 2\theta$

۱۵. درون یك طوق از پروانهٔ $r^2=4\sin 2\theta$

۱۶. درون خم $r=-4+2\cos\theta$

۱۷. درون گل شش‌پر $r^2=2a^2\sin 3\theta$

۱۸. الف) درون طوق بزرگ حلزونی مثال ۲
ب) درون طوق بزرگ این حلزونی ولی بیرون طوق کوچك آن

۱۹. ناحیهٔ محدود به پرتوهای $\theta=0$ و $\theta=\pi$ و خم $r=\sqrt{\theta}e^{\theta}$، $0\leqslant\theta\leqslant\pi$

۲۰. درون دایرهٔ $r=6$ و بالای خط $r\sin\theta=3$

۲۱. طبق معمول، وقتی با فرمول جدیدی روبرو می‌شویم خوب است آن را درمورد اشیاء آشنا بیازماییم تا مطمئن شویم نتایج دلخواه ما را به دست می‌دهد. فرمول $ds^2=r^2\,d\theta^2+dr^2$ از معادلهٔ (۵) را برای محاسبهٔ محیط دایره‌های زیر به‌کار برید

الف) $r=a$

ب) $r=a\cos\theta$

پ) $r=a\sin\theta$.

۲۲. طول دلوار $r=a(1+\cos\theta)$ را بیابید. (راهنمایی:
$$\left(\cdot\int\sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta=\int\sqrt{2}\,|\cos(\theta/2)|\,d\theta\right.$$

۲۳. طول خم $r=a\sin^2(\theta/2)$ از $\theta=0$ تا $\theta=\pi$ را بیابید.

۲۴. طول مارپیچ سهموی $r=a\theta^2$ بین $\theta=0$ و $\theta=\pi$ را پیدا کنید.

۲۵. طول خم $r=a\sin^3(\theta/3)$ بین $\theta=0$ و $\theta=3\pi$ را بیابید.

۲۶. معادله‌های $r=e^{2t}$، $\theta=3t$، $0\leqslant t\leqslant\pi/6$ خمی را درصفحهٔ مختصات قطبی تعریف می کنند.

الف) مساحت ناحیهٔ محدود به این خم در ربع اول را حساب کنید.

ب) طول خم را حساب کنید.

۲۷. مساحت رویه‌ای راکه از دوران پروانهٔ $r^2=2a^2\cos 2\theta$ حول محور x تولید می‌شود، پیدا کنید.

۲۸. مساحت رویه‌ای را که از دوران دایرهٔ $r=2a\cos\theta$ حول محور y تولید می‌شود، بیابید.

۲۹. مطلوب است مساحت رویه‌ای که از دوران قسمتی از دلوار $r=1+\cos\theta$ که در ربع‌اول‌است حول‌محور x تولید می‌شود. (راهنمایی: برای ساده‌کردن انتگرال، از اتحادهای $1+\cos\theta=2\cos^2(\theta/2)$ و $\sin\theta=2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$ استفاده کنید.)

۳۰. مقدار متوسط. مقدار متوسط r روی خم $r=f(\theta)$، $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$، نسبت به θ عبارت‌است ازمقدار انتگرال زیر

$$r_{\text{av}}=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}f(\theta)\,d\theta\,.$$

مطلوب است مقدار متوسط r نسبت به θ روی

الف) دلوار $r=a(1-\cos\theta)$

ب) دایرهٔ $r=a$

پ) دایرهٔ $r=a\cos\theta$.

TOOLKIT PROGRAMS

Parametric Equations   Super * Grapher

پرسشها و تمرینهای مروری

۱. نموداری رسم کنید که روابط متعارف بین مختصات دکارتی (x, y) و مختصات قطبی (r, θ) را نشان دهد. هر زوج از مختصات را برحسب زوج دیگر بیان کنید.

۲. اگر نقطه‌ای دارای مختصات قطبی (r_1, θ_1) باشد، چه مختصات قطبی دیگری دارد؟

۳. چطور می‌توان نمودار معادلهٔ $F(r, \theta) = 0$ را از لحاظ تقارن نسبت به مبدأ آزمود؟ نسبت به محور x چطور؟ نسبت به محور y چطور؟ مثالهایی بیاورید.

۴. روشی برای ترسیم نمودار معادلهٔ $r = f(\theta)$ ذکر کنید که شامل استفاده از صفحهٔ $r\theta$ی دکارتی باشد. مثالی بیاورید.

۵. معادلات قطبی متعارف خطها و دایره‌ها چیستند؟

۶. دربارهٔ معادلهٔ $r = ke/(1 - e\cos\theta)$ بحث کنید.

۷. مدار یك ماهواره. ماهواره‌ای درمداری حرکت می کند که از فراز قطبهای شمال و جنوب کرهٔ زمین می گذرد. وقتی ماهواره برفراز قطب شمال است، در مرتفعترین نقطهٔ مدارش یعنی در ۱۰۰۰ مایلی بالای سطح زمین قراردارد. ماهواره برفراز قطب جنوب در پایینترین نقطه مدارش یعنی در ۳۰۰ مایلی بالای سطح زمین است.

الف) با فرض اینکه مدار ماهواره (نسبت به زمین) بیضیی است که یك کانون آن درمرکز زمین است، خروج ازمرکزش را پیدا کنید. (قطرزمین را ۸۰۰۰ مایل بگیرید.)

ب) با درنظر گرفتن محور شمال-جنوب زمین به‌عنوان محور x و مرکز زمین به‌عنوان مبدأ، معادلـه‌ای قطبی بـرای این مدار بیابید.

۸. چگونه مساحت وطول قوس درمختصات قطبی محاسبه می‌شوند؟ مثالهایی بیاورید.

مسأله‌های گوناگون

درمسأله‌های ۱-۱۴، خمهارا رسم کنید (دراین مسأله‌ها a یك ثابت مثبت است). [نوع] خمها را، درمواردی که می توانید، مشخص کنید.

۱. $r = a\theta$

۲. $r = a(1 + \cos 2\theta)$

۳. الف) $r = a\sec\theta$

ب) $r = a\csc\theta$

پ) $r = a\sec\theta + a\csc\theta$

۴. $r = a\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$

۵. $r^2 + 2r(\cos\theta + \sin\theta) = 7$

۶. $r = a\cos\theta - a\sin\theta$

۷. $r\cos(\theta/2) = a$

۸. $r^2 = a^2\sin\theta$

۹. $r^2 = 2a^2\sin 2\theta$

۱۰. $r = a(1 - 2\sin 3\theta)$

۱۱. الف) $r = \cos 2\theta$

ب) $r^2 = \cos 2\theta$

۱۲. الف) $r = 1 + \cos\theta$

ب) $r = \dfrac{1}{1 + \cos\theta}$

۱۳. الف) $r = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}$

ب) $r = \dfrac{2}{1 + \sin\theta}$

۱۴. الف) $r = \dfrac{1}{2 + \cos\theta}$

ب) $r = \dfrac{1}{2 + \sin\theta}$

در مسأله‌های ۱۵-۲۲، نقاط تقاطع خمها را بیابید. درهمهٔ موارد، a یك ثابت مثبت است.

۱۵. $r = a\cos\theta, \quad r = a\sin\theta$

۱۶. $r = a, \quad r = 2a\sin\theta$

۱۷. $r = a, \quad r = a(1 - \sin\theta)$

۱۸. $r = a\sec\theta, \quad r = 2a\sin\theta$

۱۹. $r = a\cos\theta, \quad r = a(1 + \cos\theta)$

۲۰. $r = a(1 + \sin\theta), \quad r = 2a\sin\theta$

۲۱. $r = a(1 + \cos 2\theta), \quad r = a\cos 2\theta$

۲۲. $r^2 = 4\cos 2\theta, \quad r^2 = \sec 2\theta$

در مسأله‌های ۲۳-۲۶، معادله‌های دکارتی مقطعهای مخروطی را

پیدا کنید.

۲۳. الف) $r=\dfrac{۱}{۱-\cos\theta}$

ب) $r=\dfrac{۱}{۱+\cos\theta}$

۲۴. الف) $r=\dfrac{۱}{۱-\sin\theta}$

ب) $r=\dfrac{۱}{۱+\sin\theta}$

۲۵. الف) $r=\dfrac{۱}{۱-۲\cos\theta}$

ب) $r=\dfrac{۱}{۱+۲\cos\theta}$

۲۶. الف) $r=\dfrac{۲}{۲-\cos\theta}$

ب) $r=\dfrac{۲}{۲+\cos\theta}$

۲۷. مطلوب است معادله‌ای قطبی برای سهمیی که کانونش درمبدأ و رأس آن درنقطهٔ $(r,\theta)=(۱,۰)$ است.

۲۸. مطلوب است معادله‌ای قطبی بـرای خطی کـه فواصل نقاط تقاطع آن با پرتوهای $\theta=۰$ و $\theta=\pi/۲$ از مبدأ، a و b است.

۲۹. مطلوب است معادله‌ای قطبی برای دایره‌ای که شعاعش a و مرکزش بر پرتو $\theta=\pi$ واقع است و از مبدأ می گذرد.

۳۰. مطلوب است معادله‌ای قطبی برای سهمیی که کانونش درمبدأ و رأس آن در $(a,\pi/۴)$ است.

۳۱. مطلوب است معادله‌ای قطبی برای بیضیی که کانونهایش در مبدأ و نقطهٔ $(۲,۰)$ اند، و یک رأس آن در $(۴,۰)$ است.

۳۲. مطلوب است معادله‌ای قطبی برای هذلولیی که یک کانونش درمبدأ، مرکزش در $(۲,\pi/۲)$ و رأس آن در $(۱,\pi/۲)$ است.

درمسأله‌های ۳۳–۳۸، کل مساحت محدود به خم را حساب کنید. درهمهٔ موارد، a یک ثابت مثبت است.

۳۳. $r^۲=a^۲\cos ۲\theta$

۳۴. $r=a(۲-\cos\theta)$

۳۵. $r=a(۱+\cos ۲\theta)$

۳۶. $r=۲a\sin ۳\theta$

۳۷. $r^۲=۲a^۲\sin ۳\theta$

۳۸. $r^۲=۲a^۲\cos^۲(\theta/۲)$

۳۹. مساحت ناحیه‌ای را کـه درون دلوار $r=a(۱+\sin\theta)$ و بیرون دایرهٔ $r=a\sin\theta$ واقع است، پیدا کنید.

۴۰. مساحت ناحیه‌ای‌را که درون خم $r=۲a\cos ۲\theta$ و بیرون خم $r=a\sqrt{۲}$ واقع است، به‌دست آورید.

۴۱. ناحیه‌های محدود به‌خمهای

$$r=۲a\cos^۲\left(\frac{\theta}{۲}\right)$$

و

$$r=۲a\sin^۲\left(\frac{\theta}{۲}\right)$$

را بـا رسم شکل نشان دهید و مساحـت قسمت مشترک آنهـا را حساب کنید.

۴۲. مساحت ناحیه‌ای را کـه درون پروانهٔ $r^۲=۲a^۲\cos ۲\theta$ و بیرون دایرهٔ $r=a$ قراردارد، پیدا کنید.

۴۳. اگر $r=a\cos^۳(\theta/۳)$، نشان دهید که

$$ds=a\cos^۲(\theta/۳)\,d\theta$$

و محیط [طول] خم را به‌دست آورید.

۴۴. مساحت رویه‌ای‌را که از دوران دلوار $r=a(۱-\cos\theta)$ حـول محور x پدید می آید، بیابید. (راهنمایی: از اتحادهـای $\sin\theta=۲\sin(\theta/۲)\cos(\theta/۲)$ و $۱-\cos\theta=۲\sin^۲(\theta/۲)$ برای ساده کردن انتگرال استفاده کنید.

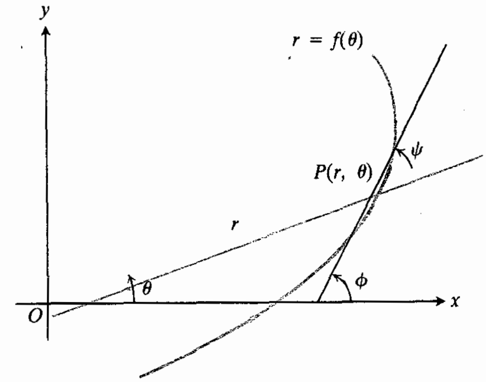
زاویهٔ بین بردار شعاعی و خط مماس

در دستگاه دکارتی، وقتی‌می‌خواهیم در بارهٔ جهت یک‌خم در یک‌نقطه بحث کنیم، زاویهٔ ϕ را که درخلاف جهت ساعت از قسمت مثبت محور x تا خط مماس اندازه گیری‌می‌شود، به‌کارمی گیریم. در دستگاه قطبی، مناسبتر است زاویهٔ ψ را که از بردار شعاعی تا خط مماس اندازه‌گیری می‌شود محاسبه‌کنیم (شکل ۴۰.۱۰). دراین صورت، زاویهٔ ϕ با توجه به‌رابطهٔ زوایای داخلی وخارجی‌مثلث به‌صورت زیر به‌دست می آید

$$\phi=\theta+\psi \qquad (۱)$$

فرض‌کنید معادلهٔ خم به‌شکل $r=f(\theta)$ داده شده باشد که در آن، $f(\theta)$ تابع مشتقپذیری از θ است. دراین صورت

$$y=r\sin\theta \quad \text{و} \quad x=r\cos\theta \qquad (۲)$$



۴۰.۱۰ زاویهٔ ψ بین خط مماس و بردارشعاعی.

توابع مشتقپذیری از θ هستند و داریم

$$\frac{dx}{d\theta}=-r\sin\theta+\cos\theta\frac{dr}{d\theta}$$
$$\frac{dy}{d\theta}=r\cos\theta+\sin\theta\frac{dr}{d\theta}. \qquad (۳)$$

چون با توجه به (۱) داریم $\psi=\phi-\theta$، پس

$$\tan\psi=\tan(\phi-\theta)=\frac{\tan\phi-\tan\theta}{۱+\tan\phi\tan\theta}.$$

به‌علاوه

$$\tan\phi=\frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$$

زیرا $\tan\phi$ شیب خم در p است. همچنین

$$\tan\theta=\frac{y}{x}.$$

از این‌رو

$$\tan\psi=\frac{\dfrac{dy/d\theta}{dx/d\theta}-\dfrac{y}{x}}{۱+\dfrac{y}{x}\dfrac{dy/d\theta}{dx/d\theta}}$$
$$=\frac{x\dfrac{dy}{d\theta}-y\dfrac{dx}{d\theta}}{x\dfrac{dx}{d\theta}+y\dfrac{dy}{d\theta}}. \qquad (۴)$$

از روی معادله‌های (۲) و (۳) می‌بینیم که صورت آخرین کسر در معادلهٔ (۴) به‌صورت زیر است

$$x\frac{dy}{d\theta}-y\frac{dx}{d\theta}=r^{۲}.$$

همین‌طور، مخرج آن چنین است

$$x\frac{dx}{d\theta}+y\frac{dy}{d\theta}=r\frac{dr}{d\theta}.$$

اگر اینها را درمعادلهٔ (۴) قراردهیم، به‌دست می‌آوریم

$$\tan\psi=\frac{r}{dr/d\theta}. \qquad (۵)$$

این معادله‌ای است که برای یافتن ψ به‌کارمی‌بریم.

۴۵. با استفاده ازشکل نشان‌دهیدکه می‌توان‌زاویهٔ β بین‌مماسهای رسم شده بر دوخم در یك نقطهٔ تقاطع آنها را ازفرمول زیر به‌دست آورد

$$\tan\beta=\frac{\tan\psi_۲-\tan\psi_۱}{۱+\tan\psi_۲\tan\psi_۱}. \qquad (۶)$$

چه‌وقتی دوخم یکدیگر را درزاویه‌های قائمه قطع می‌کنند؟

۴۶. مقدار $\tan\psi$ برای خم $r=\sin^۴(\theta/۴)$ چقدراست؟

۴۷. زاویهٔ بین خم $r=۲a\sin۳\theta$ و مماس بر آن به‌ازای $\theta=\pi/۳$ را پیدا کنید.

۴۸. نشان دهیدکه درمارپیچ هذلولوی $r\theta=a$ وقتی θ برابر ۱ رادیان‌است، $\psi=۳\pi/۴$ و وقتی‌مارپیچ‌حول‌مبدأ پیچ می‌خورد، $\psi\to\pi/۲$. خم را رسم‌کنید و ψ را به‌ازای $\theta=۱\text{radian}$ نشان‌دهید.

۴۹. دایره‌های $r=\sqrt{۳}\cos\theta$ و $r=\sin\theta$ در نقطهٔ $(\sqrt{۳}/۲,\ \pi/۳)$ یکدیگر را قطع می‌کنند. نشان‌دهیدکه مماسهای آنها دراین نقطه برهم عمودند.

۵۰. دلوار $r=a(۱+\cos\theta)$ و دایرهٔ $r=۳a\cos\theta$ را در یك نمودار رسم‌کنید و زاویهٔ بین‌مماسهای‌آنها را درنقطهٔ تقاطعی که در ربع اول واقع است، بیابید.

۵۱. نقاط تقاطع سهمیهای

$$r=\frac{۱}{۱-\cos\theta}$$

و

$$r=\frac{۳}{۱+\cos\theta}$$

و زاویه‌های بین مماسهای‌آنها دراین نقاط را به‌دست‌آورید.

۵۲. نقاطی از دلوار $r=a(۱+\cos\theta)$ را کـه درآنها خط مماس (الف) افقی، (ب) قائم، است پیدا کنید.

۵۳. نشـان دهـیـد کـه سهمیهـای $r=a/(۱+\cos\theta)$ و $r=b/(۱-\cos\theta)$ در هـر یـك از نقاط تقاطعشان متعامدنـد $(ab\neq ۰)$.

۵۴. زاویـه‌ای را به‌دست‌آوریدکـه تحت‌آن زاویـه، دلـوار $r=a(۱-\cos\theta)$ پرتو $\theta=\pi/۲$ را قطع می‌کند.

۵۵. مطلـوب است زاویـهٔ بیـن خـط $r=۳\sec\theta$ و دلـوار $r=۴(۱+\cos\theta)$ در یکی ازنقاط تقاطع آنها.

۵۶. مطلوب است شیب خط مماس برخم $r=a\tan(\theta/۲)$ در $\theta=\pi/۲$.

۵۷. زاویه‌ای را به‌دست‌آوریـد کـه تحت‌آن زاویه، سهمیهای $r=۱/(۱-\cos\theta)$ و $r=۱/(۱-\sin\theta)$ در ربـع اول یکدیگر را قطع می‌کنند.

۵۸. معادلـهٔ $r^۲=۲\csc ۲\theta$ خمی را در مختصات قطبی معرفی می‌کند.

الف) این خم را رسم کنید.

ب) معادله‌ای برای این‌خم درمختصات قائم پیدا کنید.

پ) زاویه‌ای را که این‌خم تحت‌آن زاویه پرتو $\theta=\pi/۴$ را قطع می‌کند به‌دست‌آورید.

۵۹. فرض‌کنید زاویهٔ ψ از بـردار شعاعی تـا خط مماس برخم $r=f(\theta)$ دارای مقدار ثابت α است.

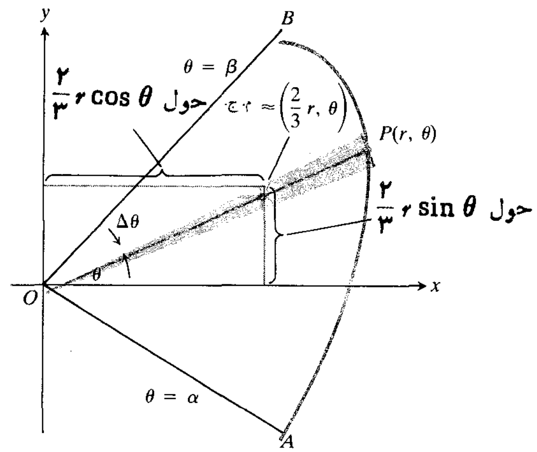
الف) نشان‌دهیدکه مساحت ناحیهٔ محصور به‌این‌خم و دوپرتو $\theta=\theta_۱$، $\theta=\theta_۲$ متنـاسب است بـا $r_۲^۲-r_۱^۲$ کـه درآن، $(r_۱,\theta_۱)$ و $(r_۲,\theta_۲)$ مختصات قطبی دوانتهای قـوسی از این‌خم‌اندکه بین این پرتوهـا قراردارد. ضریب تناسب را پیدا کنید.

ب) نشان‌دهیدکه طول قوس‌خم درقسمت (الف) متناسب با $r_۲-r_۱$ است و ثابت تناسب را پیدا کنید.

۶۰. فرض‌کنید P نقطه‌ای از هذلولی $r^۲\sin ۲\theta=۲a^۲$ است. نشان دهید مثلثی کـه از OP، مماس بر P و خط نخستین تشکیل می‌شود، متساوی‌الساقین است.

مرکز جرم

چون مرکز جرم مثلث روی هریك از میانه‌هایش قراردارد، دوسوم فاصله از رأس تا قاعدهٔ مقابل، یعنی بـازوی اهرم بـرای گشتاور نـاحیـهٔ نـازك مثلثی شکـل ۴۱.۱۰ حـول محـور x، تقریبـاً



۴۱۰۱۰ گشتاور قطاع مثلثی نـازك حول محور x تقریباً برابر است با

$$\frac{۲}{۳}r\sin\theta\, dA=\frac{۲}{۳}r\sin\theta\cdot\frac{۱}{۲}r^۲\,d\theta=\frac{۱}{۳}r^۳\sin\theta\,d\theta\,.$$

$(۲/۳)r\sin\theta$ است. همین‌طور، بـازوی اهرم برای گشتاور این ناحیه حـول محور y، تقریباً $(۲/۳)r\cos\theta$ است. این تقریبها وقتی $\Delta\theta\to ۰$ بهترمی‌شوند و به‌فرمول زیر برای مختصات مرکز جرم ناحیهٔ AOB می‌انجامند

$$\bar{x}=\frac{\int\frac{۲}{۳}r\cos\theta\cdot\frac{۱}{۲}r^۲\,d\theta}{\int\frac{۱}{۲}r^۲\,d\theta}=\frac{\frac{۲}{۳}\int r^۳\cos\theta\,d\theta}{\int r^۲\,d\theta}$$

$$\bar{y}=\frac{\int\frac{۲}{۳}r\sin\theta\cdot\frac{۱}{۲}r^۲\,d\theta}{\int\frac{۱}{۲}r^۲\,d\theta}=\frac{\frac{۲}{۳}\int r^۳\sin d\theta}{\int r^۲\,d\theta}$$

حدود همهٔ این انتگرالها از $\theta=\alpha$ تا $\theta=\beta$ است.

۶۱. مرکزجرم ناحیهٔ محدود به دلـوار $r=a(۱+\cos\theta)$ را به‌دست‌آورید.

۶۲. مرکزجرم ناحیهٔ محدود به‌نیمدایره‌ای به‌شعاع a را به‌دست آورید.

۶۳. مرکزجرم سیم یکنواخت نـازکی را کـه به‌شکل دلـوار $r=a(۱+\cos\theta)$ خم‌شده‌است، پیداکنید.(راهنمایی: می‌توانید $\int\cos\theta\cos(\theta/۲)\,d\theta$ را باجانشانی $\cos\theta=۱-۲\sin^۲(\theta/۲)$ و سپس با فرض $u=\sin(\theta/۲)$ محاسبه‌کنید.)

۱۱

دنباله‌های نامتناهی و سریهای نامتناهی

چشم انداز

دراین فصل و فصل بعد، دومبحث مربوط به‌هم را مطالعه می‌کنیم: دنباله‌های نامتناهی و سریهای نامتناهی. چون مفهوم سری با دنباله سروکار دارد، بحث را با بررسی دنباله‌ها آغاز می‌کنیم و چون ساده‌ترین دنباله‌ها، دنباله‌های مقادیر ثابت‌اند، ابتدا آنها را بررسی‌می‌کنیم. درفصل ۱۲ دنباله‌ها و سریهایی راکه هرجمله‌شان یک تابع است، مورد بحث قرارخواهیم داد.

دراینجا و درریاضیات پیشرفته‌تر، کلمهٔ سری همواره به‌معنی تعدادی نامتناهی از جمله‌هاست‌که قرار است به ترتیب معینی باهم جمع‌شوند. این‌امرکه ما نمی‌توانیم‌بینهایت‌جمله‌را عملا جمع‌کنیم، به‌مفهوم همگرایی به یک حد می‌انجامد؛ آیا مجموعهای متناهی‌که می‌توانیم‌آنها را محاسبه‌کنیم به‌حدی میل‌می‌کنند؟ اگر چنین است، آن حد چیست؟ دردست داشتن مجموعه‌ای از روشهای پرداختن به‌این مسائل مفید است و ما برای فراهم ساختن آزمونهای مناسب برای همگرایی (یا مخالف‌آن، واگرایی) هم ازمشتقگیری و هم از انتگرالگیری استفاده خواهیم‌کرد.

دنباله‌ها و سریها در بسیاری از مباحث علوم فیزیکی، علوم کامپیوتری، و ریاضیات عالی مطرح می‌شوند. چون از سریها می‌توان برای تقریب‌زدن مقادیر بسیاری از توابع با هر درجهٔ دلخواهی از دقت استفاده‌کرد، ازآنها برای تهیهٔ جدولهای‌مقادیر توابع مثلثاتی، نمایی، ولگاریتمی بهره می‌گیرند. جوابهای‌بسیاری ازمعادلات‌دیفرانسیل با استفاده ازتعدادی‌متناهی‌ازجملات یک‌سری نامتناهی‌که جوابهای‌دقیق‌را به‌دست‌می‌دهد، به‌بهترین‌وجه تقریب‌زده می‌شود. گاه برای یافتن «جواب» معادله‌ای چون معادلهٔ کپلر برای تعیین موضع یک سیاره یا ماهواره درمدارش، چاره‌ای جز استفاده از روش تقریبهای متوالی نداریم. غالباً، این تقریبهای متوالی‌اولین جملات دنباله‌ای از اعدادند که به‌وسیلهٔ یک برنامهٔ کامپیوتری مناسب تولید می‌شوند.

بسیاری ازکاربردهای‌سریها و دنباله‌ها خارج ازحیطهٔ بحث این‌کتاب است، ولی مطالب این دوفصل می‌تواند شما را برای مطالعات بعدی آماده‌کند و نیز روشهایی به‌دست دهد که می‌توانید درموقع نیاز آنها را به‌کار برید.

۱.۱۱ دنباله‌های اعداد

دنباله ازنظرصوری گردآورده‌ای است از اعداد با ترتیبی خاص. دنباله‌ها درچه مواردی مطرح می‌شوند؟ با آنها چه‌کاری می‌توانیم بکنیم؟ قبلاً کاربردهایی از دنباله‌را دیده‌ایم: مثلاً، در استفاده از روش نیوتن برای یافتن جوابهای معادلات $f(x)=0$ (بخش ۹.۲)، درتقریب‌زدن یک انتگرال معین به‌کمک قاعدهٔ ذوزنقه‌ای یا سیمپسون (بخش ۹.۴)، و در درسهای ریاضی مقدماتیتر. در هندسه، مساحت ناحیهٔ محدود به‌دایره‌ای با شعاع R به‌صورت حد مساحتهای n ضلعیهای منتظم محاطی یا محیطی، وقتی n به‌بینهایت می‌گراید، تعریف می‌شود. این مساحتها دنباله‌هایی از اعداد A_3، A_4، A_5، ... را تشکیل می‌دهند که A_n مساحت یک n ضلعی منتظم است.

همچنین در حساب دنباله‌های زیادی را دیده‌ایم، از قبیل

دنبالهٔ اعداد صحیح مثبت ...,۱,۲,۳,۴، دنبالهٔ اعداد صحیح زوج ...,۲,۴,۶,۸، دنبالهٔ اعداد اول ...,۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳، و دنبالهٔ مربعات ...,۱,۴,۹,۱۶. ولی این دنباله‌ها به حدهای متناهی میل نمی‌کنند؛ و دنباله‌هایی که به‌حدهای متناهی میل می‌کنند در این فصل مورد توجه خاص ما هستند. مثلاً، دنبالهٔ عکس اعداد صحیح مثبت ...,$1/n$, ... ,۱/۵ ,۱/۴ ,۱/۳ ,۱/۲ ,۱ دنباله‌ای است که وقتی $n \to \infty$، به‌یك حد می‌گراید؛ این حد، ۰ است. پیش از بررسی بیشتر ویژگیهای دنباله‌هایی که به حدهای متناهی میل می‌کنند، تعریف دقیقتری از دنباله عرضه می‌کنیم.

تعریف ۱
دنباله‌ای از اعداد، تابعی است که دامنه‌اش مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت است.

دنباله‌ها مانند توابع دیگر با قاعده‌هایی تعریف می‌شوند. چند قاعدهٔ نمونه‌وار اینها هستند

$$a(n)=n-1,\quad a(n)=1-\frac{1}{n},\quad a(n)=\frac{\ln n}{n^2}\cdot \qquad (1)$$

برای اشاره به‌این امر که دامنه‌ها محدود به مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت‌اند، به‌جای حروفی ازقبیل x، y، z، و t که درمباحث دیگر برای نشان‌دادن متغیر مستقل به‌کار می‌روند درمورد دنباله‌ها مرسوم است که از حروف وسط الفبا [ی لاتین] نظیر n برای متغیر مستقل استفاده‌شود. با این‌حال، فرمولهایی که دنباله‌ها را تعریف می‌کنند، نظیر فرمولهای بالا، برای دامنه‌هایی بسیار بزرگتر ازمجموعهٔ اعداد صحیح مثبت برقرارند. این‌امر، همچنانکه بعداً خواهیم دید، مفید واقع می‌شود.

عدد $a(n)$ جملهٔ nام دنباله یا جملهٔ با **اندیس** n خوانده می‌شود. مثلاً، اگر $a(n)=(n-1)/n$، آنگاه جملات عبارت‌اند از

جملهٔ اول	جملهٔ دوم	جملهٔ سوم	جملهٔ nام

$$a(1)=0,\quad a(2)=\frac{1}{2},\quad a(3)=\frac{2}{3},\ldots,a(n)=\frac{n-1}{n}\cdot \qquad (2)$$

از نماد ساده‌تر a_n به‌جای $a(n)$ استفاده می‌کنیم و دنبالهٔ (۲) به‌این‌صورت درمی‌آید

$$a_1=0,\quad a_2=\frac{1}{2},\quad a_3=\frac{2}{3},\ldots,a_n=\frac{n-1}{n}\cdot \qquad (3)$$

برای توصیف دنباله‌ها، اغلب چند جملهٔ اول و نیز فرمول جملهٔ nام را می‌نویسیم.

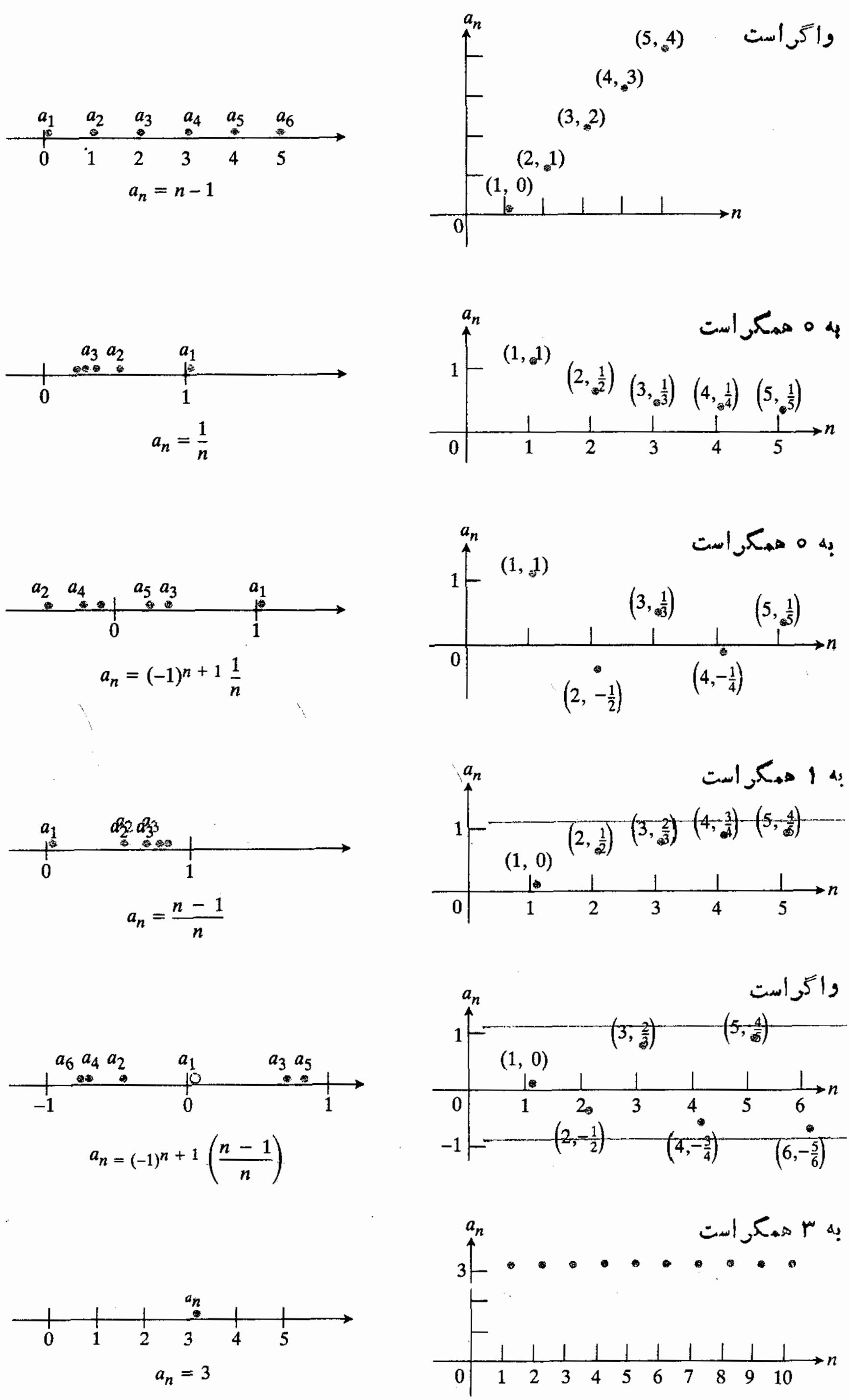
مثال ۱

برای دنباله‌ای که قاعدهٔ تعریف‌کننده‌اش عبارت‌است از	می‌نویسیم
$a_n=n-1$	$0,1,2,\ldots,n-1,\ldots$
$a_n=\frac{1}{n}$	$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots$
$a_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$	$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\ldots,(-1)^{n+1}\frac{1}{n},\ldots$
$a_n=\frac{n-1}{n}$	$0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\ldots,\frac{n-1}{n},\ldots$
$a_n=(-1)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right)$	$0,-\frac{1}{2},\frac{2}{3},-\frac{3}{4},\ldots,(-1)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right),\ldots$
$a_n=3$	$3,3,3,\ldots,3,\ldots$

■

نماد دنباله‌ای را که جملهٔ nام آن a_n است به‌صورت «دنبالهٔ $\{a_n\}$» بیان می‌کنیم. در اینجا، علامت $\{\ \}$ نشان می‌دهد که همهٔ جملات دنباله را درنظر داریم و نه فقط یک‌جمله را. بنابراین، دودنبالهٔ اول مثال ۱ عبارت‌اند از $\{n-1\}$ و $\{1/n\}$ و دنبالهٔ آخر، $\{3\}$ است.

نمودار شکل ۱۱۰۱ را ببینید. به‌زبان دقیق، نمودار دنبالهٔ $\{a_n\}$ مرکب از نقاطی‌درصفحهٔ xy است که برای آنها $x=n$ و $y=a_n$



جمله‌های $a_n=n-1$ سرانجام هرعدد صحیحی را پشت‌سرمی‌گذارند، بنابراین دنبالهٔ $\{a_n\}$ واگراست، . . .

. . . ولی، جمله‌های $a_n=1/n$ وقتی n افزایش‌می‌یابد دائماً نزول‌می‌کنندو به‌قدر دلخواه به ۰ نزدیک می‌شوند، پس‌دنبالهٔ $\{a_n\}$ به ۰ همگراست.

علامت‌جمله‌های $a_n=(-1)^{n+1}(1/n)$ یک‌درمیان تغییرمی‌کند ولی بازهم‌دنباله به ۰ همگراست.

جمله‌های $a_n=(n-1)/n$ وقتی n افزایش می‌یابد دائماً به ۱ میل می‌کنند و به‌قدر دلخواه نزدیک‌آن می‌شوند، پس دنبالهٔ $\{a_n\}$ به ۱ همگراست.

علامت جمله‌های

$$a_n=(-1)^{n+1}(n-1)/n$$

یک‌درمیان تغییرمی‌کند. وقتی n افزایش می‌یابد، جملات‌مثبت به ۱ و جملات منفی به -1 میل می‌کنند، بنابراین دنبالهٔ $\{a_n\}$ واگراست.

جملات دنبالهٔ ثابتهای $a_n=3$ صرفنظر از n مقدار یکسانی دارند؛ پس‌می‌گوییم که دنبالهٔ $\{a_n\}$ به ۳ همگراست.

۱۰۱۱ نمودار دنباله‌های مثال ۱ در اینجا به‌دوصورت رسم شده‌است: با مشخص‌کردن اعداد a_n روی یک محور افقی و با مشخص‌کردن نقاط (n, a_n) درصفحهٔ مختصات.

($n=1, 2, 3, \ldots$). روش دیگری برای تجسم دنباله، که نادقیقتر ولی اغلب مفید است، این است که اعداد a_n را روی یك خط اعداد، مثلاً محور x، نمایش دهیم. اگر این نقطه‌ها را به ترتیب، یکی پس از دیگری، روی محور مشخص کنیم، ممکن است به‌وضوح دیده شود که به‌یك حد میل می‌کنند. همچنین اگر نمودار نقاط (n, a_n) وقتی n افزایش می‌یابد به‌مجانبی چون $y=L$ میل کند، میل دنباله به‌یك حد واضح خواهد بود.

همگرایی و واگرایی

همچنانکه شکل ۱۰۱۱ نشان می‌دهد، دنباله‌های مثال ۱ رفتار متفاوتی دارند. به‌نظر می‌رسد هر یك از دنباله‌های $\{1/n\}$، $\{(1/n)(-1)^{n+1}\}$ و $\{(n-1)/n\}$ وقتی n افزایش می‌یابد به‌یك مقدار حدی میل می‌کند و دنبالهٔ $\{3\}$ هم از اول دریك مقدار حدی استقرار دارد. ولی جملات دنبالهٔ $\{(-1)^{n+1}(n-1)/n\}$ نزدیك دومقدار متفاوت ۱− و ۱ انباشته می‌شوند، درحالی که جملات $\{1-n\}$ بزرگ و بزرگتر می‌شوند و نزدیك هیچ مقداری انباشته نمی‌شوند.

برای تمایز دنباله‌هایی که وقتی n افزایش می‌یابد به‌یك مقدار حدی یکتا میل می‌کنند از دنباله‌هایی که چنین نمی‌کنند، دنباله‌های دستهٔ اول را طبق تعریف زیر همگرا می‌نامیم.

تعریف ۲

دنبالهٔ $\{a_n\}$ به‌حد L **همگرا**ست اگر به هرعدد مثبت ϵ یك اندیس N نظیرشود به‌طوری که

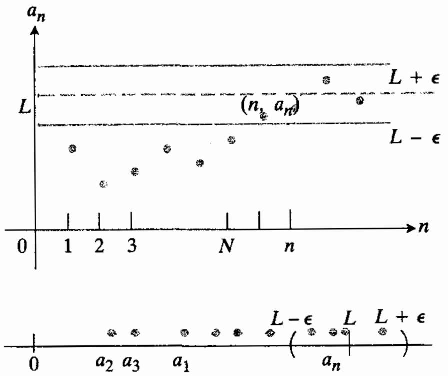
(۴) به‌ازای هر $n>N$، $|a_n-L|<\epsilon$.

اگرچنین حدی وجود نداشته باشد، گوییم که $\{a_n\}$ **واگرا**ست.

به‌عبارت‌دیگر، $\{a_n\}$ همگرا وحدآن L است اگر، به‌ازای هر ϵ مثبت، یك‌اندیس N وجود داشته‌باشد به‌قسمی که همهٔ جملات پس‌ازجملهٔ Nام بین $L-\epsilon$ و $L+\epsilon$ قرارداشته‌باشند یا به‌قسمی که همهٔ جملات‌دنباله‌بجز تعدادی‌متناهی ازآنها (یعنی N جملهٔ اول) در محدوده‌ای به‌مرکز L و به‌شعاع ϵ واقع باشند. (شکل ۲۰۱۱ را ببینید و یك بار دیگر به دنباله‌های شکل ۱۰۱۱ نظری بیفکنید). برای اینکه نشان دهیم $\{a_n\}$ به L همگراست، می‌نویسیم

وقتی $n\to\infty$، $\lim_{n\to\infty} a_n=L$ یا $a_n\to L$

و L را حد دنبالهٔ $\{a_n\}$ می‌نامیم.



۲۰۱۱ اگر L یك‌مجانب‌افقی $\{(n, a_n)\}$ باشد، $a_n\to L$. دراین شکل، همهٔ a_nها پس از a_N در محدوده‌ای به مرکز L و به شعاع ϵ قرار می‌گیرند.

مثال ۲ ازفهم متعارف چنین برمی‌آید که دنبالهٔ $\{1/n\}$ به‌صفر همگراست. درتعریف ۲، L را مساوی صفر قرار دهید و معلوم کنید N به‌چه بزرگی باید باشد تا در شرط (۴) صدق کند.

حل: فرض‌کنید $\epsilon>0$ داده شده‌است. کار را با نوشتن نامساوی (۴) با ضوابط $a_n=1/n$ و $L=0$ شروع می‌کنیم. داریم

$$|a_n-L|=\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\epsilon \qquad (۵)$$

و بنابراین، درجستجوی عدد صحیح Nی هستیم که

(۶) به‌ازای هر $n>N$، $\frac{1}{n}<\epsilon$.

مسلماً

(۷) به‌ازای هر $n>\frac{1}{\epsilon}$، $\frac{1}{n}<\epsilon$.

اما دلیلی ندارد که $1/\epsilon$ یك عدد صحیح باشد. این اشکال کوچك به‌سادگی رفع می‌شود. کافی است عدد صحیح دلخواه $N>1/\epsilon$ را انتخاب کنیم. دراین‌صورت، هراندیس n که‌بزرگتراز N باشد، خود به‌خود بزرگتر از $1/\epsilon$ خواهد بود. خلاصه، با این انتخاب N می‌توانیم درستی (۶) را تضمین کنیم. ملاکهای‌تعریف ۲ برای همگرایی به ۰ برقرار است. ■

مثال ۳ اگر k عدد دلخواهی باشد، دنبالهٔ ثابت $\{k\}$ به‌ازای هر n به‌صورت $a_n=k$ تعریف می‌شود. حد این دنباله چیست؟

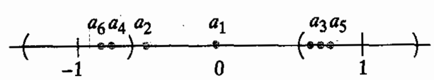
حل: این حد باید k باشد. برای نشان دادن این امر، فرض کنید $\epsilon > 0$ داده شده‌است. اگر به‌جای a_n و L، k را در سمت چپ نامساوی مذکور در (۴) قرار دهیم، خواهیم داشت

$$|a_n - L| = |k-k| = 0 \qquad (۸)$$

که به‌ازای هر $n \geq 1$ از هر ϵ مثبت کوچکتر است. از این‌رو، در اینجا $N = 1$ به‌کار ما می‌آید. ■

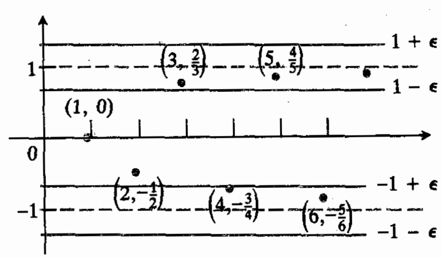
مثال ۴ نشان‌دهید که‌دنبالهٔ $\{(-1)^{n+1}((n-1)/n)\}$ واگراست.

حل: ϵ مثبتی کوچکتر از ۱ درنظرمی گیریم به‌طوری که نوارهایی که‌درشکل ۳.۱۱ حول‌خط $y=1$ وخط $y=-1$ می بینید رویهم‌افتادگی نداشته باشند. هر $\epsilon < 1$ چنین‌خاصیتی‌دارد. همگرایی به ۱ ایجاب می‌کند که هر نقطهٔ نمودار که پس از یك اندیس معین N قراردارد، درداخل نوار بالایی قرار گیرد، ولی چنین چیزی اتفاق نمی‌افتد. به‌محض‌اینکه نقطه‌ای چون (n, a_n) در داخل نوار بالایی واقع شود، نقطهٔ $(n+1, a_{n+1})$ و نقاط پس از آن یکی‌درمیان در داخل نوار پایینی قرارمی‌گیرند. پس دنباله دارای حد ۱ نیست. به‌همین‌ترتیب، دارای حد ۱− هم نیست. ازطرف دیگر، چون‌جملات دنباله به‌تناوب به ۱ و ۱− نزدیك ونزدیکتر می‌شوند، نزدیك هیچ مقدار دیگری انباشته نمی‌شوند. بنابراین، دنباله واگراست.



$$a_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

نه‌بازهٔ ϵ حول ۱ نه‌بازهٔ ϵ حول ۱−، هیچ‌یك شامل یك‌دم‌کامل دنباله نیست.



هیچ‌یك از نوارهای ϵی که در اینجا نشان داده شده، همهٔ نقاط (n, a_n) را از اندیسی به‌بعد دربر ندارد.

۳.۱۱ دنبالهٔ $\{(-1)^{n+1}[(n-1)/n]\}$ واگراست. ■

یکتایی حد

آیا یك دنباله می‌تواند همگرا به‌دوحد مختلف باشد؟ قضیهٔ یکتایی زیر به‌این سؤال پاسخ می‌دهد.

قضیهٔ ۱

قضیهٔ یکتایی

اگر دنباله‌ای چون $\{a_n\}$ همگرا باشد، حدآن یکتاست.

اثبات اگر $\{a_n\}$ همگرا باشد و دارای دوحد L و L'، $L \neq L'$، باشد می‌توانیم ϵ را مساوی $(1/2)|L-L'|$ بگیریم که عدد مثبتی است، وآنگاه تعریف حد را به‌صورت زیر درمورد هردوی L و L' به‌کار ببریم.

(۹ الف) وقتی $n > N$، $|a_n - L| < \epsilon$

و

(۹ ب) وقتی $n > N'$، $|a_n - L'| < \epsilon$.

ولی بینهایت مقدار n بزرگتر از هردوی N و N' وجود دارد و به‌ازای هریك‌از این‌مقادیر n، هم (۹ الف) وهم (۹ ب) برقرارند. با ترکیب این روابط خواهیم داشت

$$\begin{aligned} |L-L'| &= |L-a_n+a_n-L'| \\ &\leq |L-a_n|+|a_n-L'| \\ &< 2\epsilon \\ &= |L-L'|. \end{aligned}$$

ولی این نتیجه مهمل است؛ هیچ عددی کوچکتر از خودش *نیست*. از این‌رو، اگر دنباله‌ای همگرا باشد، حدآن یکتاست.

دم دنبالهٔ $\{a_n\}$ گردآوردهٔ تمام‌جملاتی است‌که اندیس آنها بزرگتر ازاندیسی‌چون N باشد؛ به‌عبارت‌دیگر، یکی ازمجموعه‌های $\{a_n | n > N\}$ است. راه دیگری برای بیان $a_n \to L$ این است که بگوییم هربازه‌ای به‌مرکز L و به‌شعاع ϵ، شامل یك دم از دنبالهٔ $\{a_n\}$ است. همگرایی (یا واگرایی) یك دنباله و نیزحد یك‌دنبالهٔ همگرا، فقط به‌رفتار دم دنباله بستگی دارد.

رفتار دنبالهٔ $\{(-1)^{n+1}(n-1)/n\}$ کیفیتاً با رفتار $\{n-1\}$ متفاوت است؛ دنبالهٔ اخیر واگراست زیرا [درنهایت] جمله‌های آن هرعدد حقیقی L را پشت‌سرمی گذارند. رفتار $\{n-1\}$ را با نوشتن عبارت زیر توصیف می کنیم

$$\lim_{n\to\infty}(n-1) = \infty.$$

وقتی از بینهایت به‌عنوان حد دنباله‌ای چون $\{a_n\}$ صحبت می کنیم

منظورمان این نیست که تفاضل بین a_n و بینهایت، با افزایش n کوچك می‌شود. بلکه منظورمان این است که با افزایش n، a_n از لحاظ عددی بزرگ می‌شود.

تعریف دنباله‌ها به‌طور بازگشتی

درمثالهای قبل فرمولهای صریحی داشتیم که a_n ازآنها مستقیماً برحسب n به‌دست می‌آمد. اما دنباله‌ها اغلب به‌صورت دیگری ــ یعنی به‌طور بازگشتی ــ تولید می‌شوند. منظور ما این است که جمله‌ها به‌وسیلهٔ فرایندی با دو ویژگی زیر تولید می‌شوند.

۱. جملهٔ اول (یا چند جملهٔ اول) داده می‌شود، و
۲. قاعده‌ای داده می‌شودکه برطبق آن می‌توان هرجملهٔ بعدی را از روی جملات قبل ازآن محاسبه‌کرد.

دراین صورت می‌گوییم که دنباله **به‌طور بازگشتی** تعریف شده و قاعدهٔ شمارهٔ ۲ را **فرمول بازگشت** می‌نامیم.

ساده‌ترین مثال این است

$$a_{n+1}=a_n+۱ \quad \text{و} \quad a_۱=۱ .$$

این فرایند بازگشت، دنبالهٔ اعداد صحیح مثبت $۱, ۲, \ldots$ را تولید می‌کند. مثال سادهٔ دیگر چنین است

$$x_{n+۱}=x_n+(۲n+۱) \quad \text{و} \quad x_۱=۱$$

که دنبالهٔ مربعها را تولید می‌کند: $۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, \ldots$. در هردومثال، دوروش برای توصیف دنباله‌ها داریم: با فرمولهای بازگشت، و، به ترتیب، با فرمولهای صریح $\{a_n\}=\{n\}$ و $\{x_n\}=\{n^۲\}$. ولی مثلاً وقتی‌که روش نیوتن را برای یافتن جوابهای یك‌معادلهٔ $f(x)=۰$ (بخش ۹.۲) به‌کارمی‌بریم، اغلب برای تعریف یك دنبالهٔ خاص هیچ چیزی جز فرایند بازگشت دردست نداریم. وقتی درمورد یك‌دنبالهٔ مفروض‌هم فرمول صریح وهم فرمول بازگشت را دراختیار داریم، بازهم محاسبهٔ جملات متوالی به‌طور بازگشتی ساده‌تر است. دنبالهٔ فاکتوریلها $۱, ۲, ۶, ۲۴, \ldots, n!, \ldots$ نمونه‌ای از این موارد است. در مورد این دنباله بهتر است از فرمول $(n+۱)!=(n+۱)n!$ استفاده‌کنیم و از یك‌جمله به‌جملهٔ بعد برویم تا اینکه مرتباً از ۱ شروع‌کنیم و همهٔ عددها تا n را درهم‌ضرب‌کنیم و $n!$ را به‌دست آوریم. (اگرفقط یك فاکتوریل خاص، مثلاً $۵!$، موردنظر بود طبیعتاً ضرب $۵\times۴\times۳\times۲\times۱$ را انجام می‌دادیم، ولی‌وقتی جملات متعددی از دنبالهٔ $\{n!\}$ را می‌خواهیم، استفاده ازفرایند بازگشت با ضوابط $x_۱=۱$ و $x_{n+۱}=(n+۱)x_n$ بهتر است).

دنباله‌ها و زبان کامپیوتر: حلقه[1]‌های کامپیوتری شما ممکن است با زبان برنامه‌نویسی‌کامپیوتری بیسیك[2] آشنا باشید، ولی اگرهم آشنا نباشید می‌توانید مثالهای زیر را به‌آسانی درك‌کنید. برای سهولت کار، گامهای یك برنامه معمولاً با شماره‌هایی ازقبیل 10، 20، 30 و مانند اینها شماره‌گذاری می‌شود و اعداد بین آنها آزادگذاشته می‌شود تا اگر دراولین اقدام‌خود برای نوشتن برنامه به‌اشکالی برخوردیم، ازآن شماره‌ها برای‌تصحیحات استفاده‌کنیم. در مثال بعد، برنامه‌ای برای فهرست‌کردن جفتهای اعداد $(n, ۲n)$ به‌ازای $n=۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۰$ می‌آید. برنامهٔ ما با $x_۱=۲$ شروع می‌شود و فرمول بازگشت $x_{n+۱}=x_n+۲$ را به‌کار می‌گیرد.

مثال ۵ با استفاده ازفرمول‌بازگشت $x_{n+۱}=x_n+۲$، یك‌برنامهٔ بیسیك برای فهرست‌کردن جفتهای اعداد $(n, ۲n)$ به‌ازای $n=۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۰$ بنویسید و دربارهٔ آن بحث‌کنید.

حل: یك برنامهٔ ممکن، این است

PROGRAM	شرح
10 LET x=2	با $x_۱=۲$ شروع می‌کنیم.
20 FOR n=1 TO 10	این مقادیر n را اختیارکرده‌ایم.
30 PRINT n; x	فهرستی‌ازمقادیر (n, x_n) می‌خواهیم.
40 LET x=x+2	x بعدی عبارت‌است از $x_{n+۱}=x_n+۲$.
50 NEXT n	این‌گام، حلقه را ایجاد می‌کند و برنامه‌را به‌سطر 30 برمی‌گرداند، $n+۱$ به‌جای n قرارمی‌گیرد و $x_{n+۱}$ به‌جای x_n.
60 END	به‌کامپیوتر دستور توقف می‌دهیم.

■

درعباراتی نظیر $x=x+2$ درسطر 40، اندیسهای x در معادلهٔ $x_{n+۱}=x_n+۲$ را کنار می‌گذاریم. به‌یاد داشته باشید‌که مقدار جدید x درسمت چپ‌معادله ومقدار قدیم‌آن درسمت راست معادله است. (به‌زبان ماشین، این مانند دستوری است‌که می‌گوید «محتویات x را درحافظه قرار بده، ۲ را به‌آن بیفزا، و محتویات حافظه را مجدداً در x بگذار»).

در مثال ۵ لازم نبود که از فرمول بازگشت برای محاسبهٔ x_n استفاده‌کنیم: به‌کمك‌ضرب معمولی‌می‌توان به‌سادگی $x_n=۲n$ را مستقیماً به‌دست آورد. ولی در مثال بعد، این امکان در دسترس ما نیست.

---

1. Loop 2. BASIC

مثال ۶ با توجه به‌اطلاعات زیر، یك برنامهٔ بیسیك برای محاسبه و فهرست‌کردن n، x_n، و s_n به‌ازای $n=۱,\dots,۱۲$ بنویسید و دربارهٔ آن بحث کنید

$$x_۱=۱,\quad x_۲=۱,\quad x_۳=\frac{۱}{۲!},\dots,\ x_n=\frac{۱}{(n-۱)!}$$

و

$$s_۱=x_۱,\ s_۲=x_۱+x_۲,\dots,\ s_n=x_۱+x_۲+\dots+x_n.$$

حل: روابط تعریف‌کنندهٔ x_n و s_n را می‌توان به شکلی نوشت که برای محاسبهٔ بازگشتی مناسبتر باشد

$$x_{n+۱}=\frac{x_n}{n}\quad \text{و}\quad x_۱=۱$$

و

$$.s_{n+۱}=s_n+x_{n+۱}\quad \text{و}\quad s_۱=x_۱$$

به‌کمك این معادلات، برنامهٔ زیر را می‌نویسیم

PROGRAM	شرح
10 LET x=1	اولین جمله دردنبالهٔ x
20 LET s=x	اولین جمله دردنبالهٔ s
30 FOR n=1 to 12	۱۲ جمله ازهردنباله‌را می‌خواهیم.
40 PRINT n;x;s	این گام، فهرست‌موردنظرمارا می‌دهد.
50 LET x=x/n	مقدارجدید x، مقدار قدیم آن تقسیم بر n است.
60 LET s=s+x	مقدار جدید s، مقدار قدیم آن به‌اضافهٔ مقدار جدید x است.
70 NEXT n	این گام، برنامه را به‌سطر 40 بازمی‌گرداند؛ n، x، و s مقادیرجدیدی دارند.
80 END	کامپیوتر پس از $n=۱۲$ توقف می‌کند.

جدول ۱۰۱۱ نتایجی را نشان می‌دهد که با استفاده از یك کامپیوتر کوچك به‌دست آورده‌ایم. مقدار $x_{۱۰}$ با نماد علمی به‌صورت 2.75573 E-06 نشان‌داده‌می‌شود که به‌معنی $۲٫۷۵۵۷۳\times ۱۰^{-۶}$ است؛ همین‌طور نمادهای مشابهی برای $x_{۱۱}$ و $x_{۱۲}$ به‌کار رفته است.

احتمالاً حدس زده‌اید که دنبالهٔ اعداد $\{s_n\}$ به حد e میل می‌کند. دراین باره بعداً بیشترصحبت خواهیم کرد.

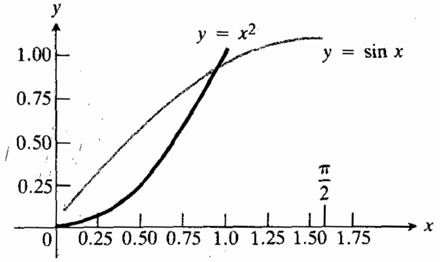
جدول ۱۰۱۱

n	x_n	s_n
۱	۱	۱
۲	۱	۲
۳	۰٫۵	۲٫۵
۴	۰٫۱۶۶۶۶ ۶۶۶۶۷	۲٫۶۶۶۶۶ ۶۶۶۷
۵	۰٫۰۴۱۶۶ ۶۶۶۶۷	۲٫۷۰۸۳۳ ۳۳۳۳
۶	۰٫۰۰۸۳۳ ۳۳۳۳۳	۲٫۷۱۶۶۶ ۶۶۶۷
۷	۰٫۰۰۱۳۸ ۸۸۸۸۹	۲٫۷۱۸۰۵ ۵۵۵۶
۸	۰٫۰۰۰۱۹ ۸۴۱۲۷	۲٫۷۱۸۲۵ ۳۹۶۸
۹	۰٫۰۰۰۰۲ ۴۸۰۱۶	۲٫۷۱۸۲۷ ۸۷۷۰
۱۰	۲٫۷۵۵۷۳ E-06	۲٫۷۱۸۲۸ ۱۵۲۶
۱۱	۲٫۷۵۵۷۳ E-07	۲٫۷۱۸۲۸ ۱۸۰۱
۱۲	۲٫۵۰۵۲۱ E-08	۲٫۷۱۸۲۸ ۱۸۲۶

■

به‌عنوان آخرین مثال، نشان می‌دهیم که چگونه با استفاده از کامپیوتر می‌توان روش براوردکردن نیوتن را برای تعیین محل تقاطع نمودارهای $y=\sin x$ و $y=x^۲$ به‌کار برد. نخستین براورد عبارت است از $x_۱=۱$. چند نماد جدید را معرفی و تشریح می‌کنیم.

مثال ۷ شکل ۴۰۱۱ را ببینید. یك برنامهٔ بیسیك برای براوردکردن ریشهٔ معادلهٔ $\sin x=x^۲$ براساس روش نیوتن بنویسید و اجرا کنید.



۴۰۱۱ نمودارهای $y=x^۲$ و $y=\sin x$ درنزدیکی $x=۱$ یکدیگر را قطع می‌کنند. یك تقریب بهتر عبارت است از $x=۰٫۸۷۶۷۲۶۲۱۵۴$.

حل: محاسباتی که باید انجام شود، به‌قرار زیر است.

۱. با $x_1 = ۱$ شروع می‌کنیم.

۲. می‌خواهیم تابع $f(x) = \sin x - x^۲$ را کوچک کنیم—در صورت امکان صفر کنیم—و می‌دانیم مشتق آن برابر است با $f'(x) = \cos x - ۲x$.

۳. به‌ازای هر x_n مفروض، مقدار بعدی x این است

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

(بخش ۹.۲ را ببینید.) کامپیوتر x^2 را تشخیص نمی‌دهد مگر اینکه همان‌طور که درسطر 20 برنامهٔ زیردیده‌می‌شود، آن را به‌صورت x∧2 بنویسیم. همین‌طور، $۱۰^{-۱۰}$ را درسطر 40 برنامه به‌شکل (10--)∧10 می‌نویسیم. علامت ستاره درسطر 50، 2*x، نشان‌دهندهٔ عمل‌ضرب است—ماشین تشخیص نمی‌دهد که $2x$ عبارت است از ۲ ضرب در x.

اکنون باردیگر نگاهی به‌سطر 40 می‌اندازیم. ما نمی‌دانیم که چند بار تکرار ممکن است برای یافتن یك براورد «به اندازهٔ کافی دقیق» از ریشهٔ $f(x) = ۰$ لازم باشد، از این‌رو به‌دلخواه تصمیم می‌گیریم که وقتی به‌مقداری از x برسیم که به‌ازای آن قدرمطلق $f(x)$ کوچکتر از $۱۰^{-۱۰}$ باشد، آنگاه محاسبه را متوقف کنیم. کل دستور سطر 40، یك‌دستور شرطی «IF...THEN» است. اگر شرط براورده‌شود، ماشین به‌سطر 80 می‌رود که دستور این سطر، محاسبه را متوقف می‌سازد. اما اگرشرط براورده نشود، ماشین به‌دستورالعملهای سطرهای 50، 60، و 70 می‌رود. سطر 70 حلقه‌را ایجاد می‌کند که باعث یك‌تکرار اضافی می‌شود. برنامه این است

PROGRAM	شرح
10 LET x=1	مقدار آغازی x برابر است با ۱.
20 LET f=SIN(x)−x∧2	تابع عبارت است از $f(x) = \sin x - x^۲$.
30 PRINT x;f	بنابراین، می‌توان ببینیم که جریان از چه قرار است.
40 IF ABS(f)<10∧(−10) THEN 80	دستور شرطی مورد بحث درمتن.
50 LET g=COS(x)−2*x	فرض می‌کنیم g مشتق f' را نشان دهد.
60 LET x=x−f/g	این، اساس روش نیوتن است: $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
70 GO TO 20	اگرشرط ABS(f)<۱۰∧(−۱۰) هنوز برقرار نیست، کار را تکرار کن.
80 END	برنامه فقط بعد از آن متوقف می‌شود که ABS(f)<۱۰∧(−۱۰).

درجدول ۲.۱۱ مقادیر اندیس n و نیز x_n و $f(x_n)$ را آورده‌ایم.

جدول ۲.۱۱

براوردهای ریشهٔ $\sin x - x^۲ = ۰$

n	x_n	$f(x_n)$
۱	۱	−۰٫۱۵۸۵۲ ۹۰۱۵۲
۲	۰٫۸۹۱۳۹ ۵۹۹۵۳	−۰٫۰۱۶۶۳ ۷۱۷۴۲
۳	۰٫۸۷۶۹۸ ۲۸۴۲۸	−۰٫۰۰۰۲۸ ۸۱۴۹۲
۴	۰٫۸۷۶۷۲ ۶۲۹۸۵	−۹٫۲۵۴۰۲ E-08
۵	۰٫۸۷۶۷۲ ۶۲۱۵۴	−۴٫۲ E-13*

* یك نتیجهٔ غیرمنتظره: دقیقتر از آنچه‌که در جستجویش بودیم.

نکته از لحاظ نظری، محاسبات جدول را می‌توان به‌طور نامحدود ادامه داد و به‌این ترتیب دنبالهٔ کاملی تولیدکرد؛ ولی در عمل، درچنین کاربردی ما می‌خواهیم وقتی درجهٔ دقت مطلوب حاصل‌شدکار را متوقف کنیم. آیا این‌نتایج مثالی ازیك دنباله‌اند؟ اگر بردنباله‌ای تأکیدکنیم که به‌طور نامحدود ادامه می‌یابد، پاسخ این سؤال منفی است. ولی می‌توانیم نتایج را به عناصر یك دنباله تبدیل کنیم به‌این طریق که جملات اولیهٔ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 را اعدادی تعریف کنیم که درجدول نشان داده‌شده‌اند و سپس بگوییم به‌ازای $n > ۵$، $x_n = x_5$ (که دیگر لازم نیست xها همان xهایی باشند که روش نیوتن به‌دست می‌دهد). ■

اگر به راحتی به‌کامپیوتر دسترسی دارید و می‌توانید برنامه‌های کوتاهی برای کندوکاو درمباحث بعدی این‌فصل و فصل بعد بنویسید بسیارخوب است ولی اگر هم دسترسی ندارید، نگران نباشید زیرا ما دیگر بحث‌کامپیوتر را دنبال نخواهیم کرد. دوره‌های آموزش‌کامپیوتر همه‌جا در دسترس شماست و فرصت‌کسب تجربهٔ عملی را در اختیار شما می‌گذارد. این بحث کوتاه دربارهٔ زبان کامپیوتر را ازآن‌رو دراینجا آوردیم‌که بعضی از تفاوتها و بعضی ازتشابهات نمادهایی‌که برای نمایش دنباله به‌کارمی‌روند، نشان

داده‌شود ــ به‌ویژه، دنباله‌هایی که به‌وسیلهٔ بازگشت تولید می‌شوند. یکی ازبرجسته‌ترین تفاوتها درنمادگذاری دنباله‌ها، استفادهٔ فراوان از اندیس دراین‌کتاب و فقدان اندیس در برنامه‌هـای کامپیوتری است. درکامپیوتر، هرجاکه متغیری، مثلاً x، درسمت راست یك معادله ظـاهر می‌شود، اشاره به‌مقدار متغیرقبل از اجرای آن سطر دارد. اگرهمین متغیر درسمت چپ معادله ظاهرشود، به‌مقداری‌که متغیر درست پس از اجرای آن سطر خواهـد داشت اشاره دارد. نماد متناظر ریـاضی عبارت است از x_n درسمت راست و x_{n+1} درسمت چپ.

مسأله‌ها

در مسأله‌های ۱ـ۶، چهارجملهٔ اول دنبالهٔ $\{a_n\}$ را به‌طور صریح بنویسید. اگر دنباله همگراست، حدآن چیست؟

۱. $a_n=\dfrac{n+1}{2n+1}$

۲. $a_n=\dfrac{2n-1}{n+1}$

۳. $a_n=\dfrac{1-2n}{1+2n}$

۴. $a_n=\dfrac{2^n-1}{2^n}$

۵. $a_n=\dfrac{2^n}{2^{n+1}}$

۶. $a_n=1+\dfrac{(-1)^n}{2^n}$

درمسأله‌های ۷ـ۱۱، هریك ازجملات x_1، x_2، x_3، x_4، x_5، و x_6 را به‌طور صریح بنویسید.

۷. $x_1=1,\quad x_{n+1}=x_n+\left(\frac{1}{2}\right)^n$

۸. $x_1=1,\quad x_{n+1}=\dfrac{x_n}{n+1}$

۹. $x_1=2,\quad x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2}$

۱۰. $x_1=-2,\quad x_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}x_n$

۱۱. $x_1=x_2=1$، $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$ (ایـن را دنبـالهٔ فیبونـاتچی می‌نـامند. نسبت $r_n=x_n/x_{n+1}$ دنبـالـهٔ وابستهٔ $r_1, r_2, \dots$ را به‌دست می‌دهد.)

۱۲. اولین جملهٔ دنباله‌ای عبارت است از $x_1=1$. هـر یك از جملات بعدی برابراست با مجموع همهٔ جملات قبل از آن

$$x_{n+1}=x_1+x_2+\dots+x_n.$$

تعدادی‌کافی ازجملات اولیهٔ این دنباله را بنویسید تا فرمولی‌کلی برای x_n به‌دست آیدکه به‌ازای هر $n\geqslant 2$ برقرار باشد.

۱۳. دنباله‌ای از اعدادگویا به‌صورت زیرنشان داده می‌شود

$$\frac{1}{1},\frac{3}{2},\frac{7}{5},\frac{17}{12},\dots,\frac{a}{b},\frac{a+2b}{a+b},\dots$$

دراینجا، صورتها یك‌دنباله تشکیل‌می‌دهند، مخرجهادنبالهٔ دیگری، و نسبتهای آنها نیز دنبالهٔ سومی‌را به‌وجود می‌آورند. فرض‌کنید x_n و y_n، به‌تـرتیب، صورت و مخرج کسر nام، $r_n=x_n/y_n$، باشند.

الـف) تـحـقـیـق‌کـنـیـد کـه $x_1^2-2y_1^2=-1$، $x_2^2-2y_2^2=+1$، و به‌طورکلیتر، اگر a^2-2b^2 برابر بـا -1 یا $+1$ باشد، آنگاه $(a+2b)^2-2(a+b)^2$ به‌ترتیب برابر با $+1$ یا -1 خواهد بود.

ب) کسرهای $r_n=x_n/y_n$ وقتی n افزایش می‌یابد به یك حد میل می‌کنند. این حد چیست؟ (راهنمایی: با استفاده از قسمت(الف) نشان‌دهیدکه $r_n^2-2=\pm(1/y_n)^2$؛ و y_n کوچکتر از n نیست.)

مسائل زیر با کامپیوتر یا ماشین‌حساب حل می‌شوند

۱۴. تقریبهایی را کـه درمثال ۷ برای جواب $\sin x=x^2$ در نزدیکی $x=1$ ارائه شد تحقیق (یا تصحیح) کنید.

۱۵. با استفاده ازروش نیوتن، تقریبهایی برای‌جواب $\cos x=x$ به‌دست آورید.

۱۶. با $x_0=1$ شروع کنید و فـرض‌کنید $x_{n+1}=\cos(x_n)$. آیا به نظرتان می‌رسد کـه این فـرایند به جوابی از $\cos x=x$ بینجامد؟ اگرجواب مثبت است، به‌ازای چه‌مقداری از x؟

۱۷. با $x_1=1$ شروع کنید و فرض‌کنید $x_{n+1}=\sqrt{\sin(x_n)}$. آیا به‌نظرتان می‌رسدکـه این فرایند به یك مقدار حدی بینجامد؟ اگرجواب مثبت است، این‌حد درچه‌معادله‌ای صدق می‌کند (یعنی، در ارتباط با فرمول تکرار)؟

۱۸. **ماشین‌حساب** معادلهٔ کپلر. درتعیین موضع یـك سیاره (یـا مـاهواره) در مـدارش در هـر لحظهٔ t، حـل معادلـهٔ کپلر یعنی $E-e\sin E=M$ اهمیت‌دارد؛ دراین‌معادله، e خروج ازمرکز

مدار و M میانگین بی‌هنجاری (که برحسب t معین می‌شود) است و E (بی‌هنجاری‌مربوط به‌خروج ازمرکز) باید پیدا شود. اگر E معلوم باشد، موضع سیاره درمدارش را می‌توان تعیین کرد. با استفاده از روش نیوتن، تقریبهای جواب معادلهٔ کپلر برای E را بافرض $M=\pi/۳$ و $e=۰/۱$ بیابید. (برای‌مقادیرکوچك e، تکرار معمولاً با $E_۱=M$ شروع می‌شود.)

۱۹. ماشین‌حساب گاهی اطلاع از اینکه نابرابریهای خاصی در بازهٔ معینی برقرارند، اهمیت دارد. مثلاً تقعر نمودار $y=\tan x$ به‌ازای $۰<x<\pi/۲$ روبه‌بالاست و خط $y=x$ در مبدأ برنمودار مماس است. از اینجا معلوم می‌شود که به‌ازای $۰<x<\pi/۲$، $\tan x>x$. اگر خطی از مبدأ با شیب $m>۱$ بگذرانیم، این خط تا نقطه‌ای که به‌ریشه‌ای از معادلهٔ $\tan x=mx$ برسیم در بالای نمودار $y=\tan x$ قراردارد.

الف) با استفاده از روش نیوتن معلوم کنید که خط $y=۲x$ درکجا $y=\tan x$ را درنزدیکی $x=\pi/۳$ قطع می‌کند.

ب) با این اطلاع، آیا درست است که به‌ازای $۰<x<\pi/۳$ داریم $x<\tan x<۲x$ یا خیر؟

پ) اگر x در بازه‌ای چون $۰<x<b$ باشد، که می‌دانیم دراین بازه $x<\tan x<۲x$، ثابت کنید که $x^۲/۲<\ln\sec x<x^۲$. (راهنمایی: از اولین دستهٔ نابرابریها از ۰ تا h انتگرال بگیرید و سپس x را به‌جای h قراردهید.)

درمسائل ۲۰–۲۳، یك برنامهٔ بیسیك بنویسید که x_n را تولید کند و n و x_n را به‌ازای $n=۱$ تا $n=۱۰$ چاپ کند.

۲۰. برای دنبالهٔ مذکور درمسألهٔ ۷.

۲۱. برای دنبالهٔ مذکور درمسألهٔ ۸.

۲۲. برای دنبالهٔ مذکور درمسألهٔ ۹.

۲۳. برای دنبالهٔ مذکور درمسألهٔ ۱۰.

۲۴. دنبالهٔ فیبوناتچی مذکور در مسألهٔ ۱۱، به‌طور بازگشتی به‌صورت زیر تعریف می‌شود: $x_۱=۱$، $x_۲=۱$، و $x_{n+۲}=x_n+x_{n+۱}$. این‌دنباله را به‌صورت دیگری نیزمی‌توان توصیف کرد که عبارت است از «درآمیختن» دودنباله. (گرچه ممکن است این‌کار لازم نباشد چون دیدیم که نوشتن یك برنامهٔ بیسیك آسانتر است.) فرض کنید $a_n=x_{۲n-۱}$ و $b_n=x_{۲n}$. دراین صورت، دنبالهٔ فیبوناتچی را می‌توان به‌صورت زیرنوشت

$$a_۱, b_۱, a_۲, b_۲, a_۳, b_۳, \ldots, a_k, b_k, a_{k+۱}, b_{k+۱}, \ldots$$

فرمول بازگشت اکنون به‌صورت $a_۱=b_۱=۱$ و $a_{n+۱}=a_n+b_n,\ b_{n+۱}=a_{n+۱}+b_n$ درمی‌آید. تحقیق کنید که برنامهٔ بیسیك زیردوازده جملهٔ اول دنبالهٔ فیبوناتچی را به‌دست می‌دهد، و بقیهٔ جدول را پرکنید. (برای انجام محاسبات نیازی به‌کامپیوتر ندارید.)

PROGRAM	n	a_n	b_n
10 LET a=1	۱	۱	۱
20 LET b=1	۲	۲	
30 FOR n=1 to 6	۳		
40 PRINT n;a;b	۴		
50 LET a=a+b	۵		
60 LET b=a+b	۶		
70 NEXT n			
80 END			

توجه: a در سمت راست دستور 60، همان a در سمت چپ دستور 50 است.

۲.۱۱ قضیه‌های مربوط به‌حد

اگر قرار باشد برای پاسخ دادن به هرسؤالی دربارهٔ همگرایی، تعریف ۲ را مستقیماً به‌کار ببریم ـ همچنانکه تاکنون به‌کار برده‌ایم ـ مطالعهٔ حد کار خسته‌کننده‌ای می‌شود. خوشبختانه سه قضیه دردست داریم که باعث می‌شوند استفادهٔ مستقیم ازتعریف‌حد تا حد زیادی ضرورت‌خود را ازدست بدهد. دوقضیهٔ اول عملاً همان قضیه‌های ۱ و ۲ در بخش ۹.۱ هستند.

قضیهٔ ۴

اگر $A=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ و $B=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ هردوموجود و متناهی باشند، آنگاه

i) $\lim\{a_n+b_n\}=A+B$

ii) به‌ازای هر k، $\lim\{ka_n\}=kA$

iii) $\lim\{a_n\cdot b_n\}=A\cdot B$

iv) به‌شرط آنکه $B\neq ۰$ و b_n هیچگاه صفر نباشد،

$$\lim\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}=\frac{A}{B}.$$

فرض براین است که درهمهٔ حدهای بالا، $n\to\infty$.

می‌توانیم با ترکیب قضیهٔ ۲ با مثالهای ۲ و ۳ی بخش ۱۰۱۱ به‌صورت زیر پیش برویم

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{۱}{n}\right)=-۱\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}=-۱\times ۰=۰$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-۱}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(۱-\frac{۱}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}۱-\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}=۱-۰=۱$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۵}{n^۲}=۵\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}=۵\times ۰\times ۰=۰$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۴-۷n^۶}{n^۶+۳}=\lim_{n\to\infty}\frac{(۴/n^۶)-۷}{۱+(۳/n^۶)}=\frac{۰-۷}{۱+۰}=-۷\cdot$$

نتیجه‌ای ازقضیهٔ ۲ که بعداً مفید خواهد بود این است که هرمضرب ناصفر ازیك دنبالهٔ واگرا، واگراست.

نتیجه

اگر دنبالهٔ $\{a_n\}$ واگرا باشد و اگر c عدد دلخواهی مخالف ۰ باشد، آنگاه دنبالهٔ $\{ca_n\}$ واگراست.

اثبات نتیجه فرض‌کنید حکم برقرارنباشد و $\{ca_n\}$ همگرا باشد. دراین‌صورت، اگر در قسمت (ii) قضیهٔ ۲، k را برابر $1/c$ بگیریم، می‌بینیم که دنبالهٔ

$$\left\{\frac{۱}{c}\cdot ca_n\right\}=\{a_n\}$$

همگراست. بنابراین، $\{ca_n\}$ نمی‌تواند همگرا باشد مگر آنکه $\{a_n\}$ همگرا باشد. اگر $\{a_n\}$ همگرا نباشد، $\{ca_n\}$ هم همگرا نیست. ■

قضیهٔ زیر، صورتی از قضیهٔ ساندویچ بخش ۹۰۱ است که برحسب دنباله بیان می‌شود.

قضیهٔ ۳

اگر به‌ازای هر n پس‌از یك اندیس N داشته‌باشیم $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$ و اگر $\lim a_n=\lim c_n=L$، آنگاه برابری $\lim b_n=L$ را نیز خواهیم داشت.

یکی از پیامدهای فوری قضیهٔ ۳ این است که اگر $|b_n|\leqslant c_n$ و $c_n\to ۰$، آنگاه $b_n\to ۰$ زیرا $-c_n\leqslant b_n\leqslant c_n$. این مطلب را درمثال زیر به‌کارمی‌بریم.

مثال ۱

$$\frac{\cos n}{n}\to ۰ \quad \text{زیرا} \quad ۰\leqslant\left|\frac{\cos n}{n}\right|=\frac{|\cos n|}{n}\leqslant\frac{۱}{n}$$

و $1/n\to ۰$. ■

مثال ۲

$$\frac{۱}{۲^n}\to ۰ \quad \text{زیرا} \quad ۰\leqslant\frac{۱}{۲^n}\leqslant\frac{۱}{n}$$

و $1/n\to ۰$. ■

مثال ۳

$$(-۱)^n\frac{۱}{n}\to ۰ \quad \text{زیرا} \quad ۰\leqslant\left|(-۱)^n\frac{۱}{n}\right|\leqslant\frac{۱}{n}$$

و $1/n\to ۰$. ■

کاربرد قضیه‌های ۲ و ۳ باتوجه به‌قضیهٔ زیردامنهٔ گسترده‌تری پیدا می‌کند. این قضیه می‌گوید که حاصل اعمال یك تابع پیوسته بریك دنبالهٔ همگرا، یك‌دنبالهٔ همگراست. این‌قضیه را بدون اثبات بیان می‌کنیم. (برای ملاحظهٔ کلیات اثبات، مسألهٔ ۶۵ را ببینید.)

قضیهٔ ۴

اگر $a_n\to L$ و اگر f تابعی باشدکه در L پیوسته و درهمهٔ a_nها تعریف شده باشد، آنگاه $f(a_n)\to f(L)$.

مثال ۴ مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{n\to\infty}\sqrt{(n+۱)/n}$.

حل: فرض‌کنید $f(x)=\sqrt{x}$ و $a_n=(n+۱)/n$. در این‌صورت

$$f(a_n)=\sqrt{a_n}\to f(۱)=\sqrt{۱}=۱ \quad \text{و} \quad a_n\to ۱$$

زیرا $f(x)$ در $x=۱$ پیوسته است. ■

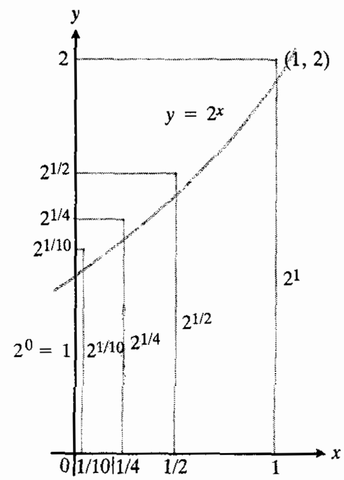
مثال ۵ شکل ۵۰۱۱ را ببینید. مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{n\to\infty}۲^{1/n}$.

حل: فرض‌کنید $f(x)=۲^x$ و $a_n=1/n$. در این صورت

$$f(a_n)=۲^{1/n}\to f(۰)=۲^۰=۱ \quad \text{و} \quad a_n\to ۰$$

زیرا ۲^x در $x=۰$ پیوسته است.

n	$۲^{۱/n}$
۱	۲
۲	۱٫۴۱۴۲۱۳۵۶۲
۴	۱٫۱۸۹۲۰۷۱۱۵
۱۰	۱٫۰۷۱۷۷۳۴۶۳
۱۰۰	۱٫۰۰۶۹۵۵۵۵
۱۰۰۰	۱٫۰۰۰۶۹۳۴۸۷
۱۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰۶۹۳۱۷



۵۰۱۱ چون وقتی $n\to\infty$، ۲^x در $x=۰$ پیوسته است، $x=۱/n\to ۰$ و
$y=۲^{۱/n}\to ۲^۰=۱$. ■

قضیهٔ ۵

فرض کنید $f(x)$ تابعی باشد که به‌ازای هر $x\geqslant n_۰$ تعریف شده و $\{a_n\}$ دنباله‌ای باشد که وقتی $n\geqslant n_۰$، $a_n=f(n)$.

اگر $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$ آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=L$.

اثبات فرض کنید $\epsilon>۰$. نیز فرض کنید L یك‌حد متناهی است به‌طوری که

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L.$$

دراین‌صورت، یك‌عدد M وجود دارد به‌قسمی که

$$x>M \Rightarrow |f(x)-L|<\epsilon.$$

تصور کنید N عدد صحیحی باشد به‌طوری‌که

$$N>M \quad \text{و} \quad N\geqslant n_۰.$$

دراین‌صورت

$$n>N \Rightarrow a_n=f(n) \quad \text{و} \quad |a_n-L|=|f(n)-L|<\epsilon.$$

درحالت $f(x)\to+\infty$ یا $f(x)\to-\infty$ این‌اثبات به‌تغییراتی جزئی نیاز دارد ولی در هردوحالت، دنبالهٔ $\{a_n\}$ واگراست. قضیهٔ ۵ به‌ما امکان می‌دهد که قاعدهٔ هوپیتال را برای تعیین حدهای برخی از دنباله‌ها به‌کار بریم. مثال‌زیر، نحوهٔ کار را نشان می‌دهد.

مثال ۶ مطلوب است $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln n)/n$.

حل: تابع $(\ln x)/x$ به‌ازای هر $x\geqslant ۱$ تعریف می‌شود و با دنبالهٔ مفروض برروی اعداد صحیح مثبت مطابق است. بنابراین، $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln n)/n$ با $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)/x$ برابر است اگر حد اخیر موجود باشد. با یك‌بار به‌کار بردن قاعدهٔ هوپیتال می‌بینیم که

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{۱/x}{۱}=\frac{۰}{۱}=۰.$$

نتیجه می‌گیریم که $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln n)/n=۰$. ■

وقتی قاعدهٔ هوپیتال را برای یافتن حد یك دنباله به‌کار می‌بریم، اغلب با n به‌صورت یك‌متغیر حقیقی پیوسته رفتار می‌کنیم و مستقیماً نسبت به n مشتق می‌گیریم. به‌این‌ترتیب، مجبور نیستیم مانند مثال ۶ فرمول مربوط به a_n را بازنویسی کنیم.

مثال ۷ مطلوب است محاسبهٔ $\lim\limits_{n\to\infty}(۲^n/۵n)$.

حل: بنابه‌قاعدهٔ هوپیتال،

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۲^n}{۵n}=\lim_{n\to\infty}\frac{۲^n\cdot\ln ۲}{۵}=\infty. \quad ■$$

وقتی جملات یك دنباله به‌صورت نسبتهای چندجمله‌ایهایی برحسب n هستند، می‌توانیم برای یافتن حد از قاعدهٔ هوپیتال استفاده‌کنیم و یا صورت و مخرج را برتوان مناسبی از n تقسیم کنیم. (مثلاً می‌توانیم صورت و مخرج را بربزرگترین توان n درصورت یا مخرج تقسیم‌کنیم.) مثال زیر نشان می‌دهد که وقتی

درجهٔ صورت برابر، کوچکتر، یا بزرگتر از درجهٔ مخرج است، چه اتفاقی می‌افتد.

مثال ۸ حدهای زیر را وقتی $n \to \infty$ پیدا کنید.

$$\lim \frac{n^۲-۲n+۱}{۲n^۲+۵} = \lim \frac{۱-(۲/n)+(۱/n^۲)}{۲+(۵/n^۲)} = \frac{۱}{۲}$$

$$\lim \frac{n^۳+۵n}{n^۴-۶} = \lim \frac{(۱/n)+(۵/n^۳)}{۱-(۶/n^۴)} = ۰$$

$$\lim \frac{n^۲-۵}{n+۱} = \lim \frac{۲n}{۱} = \infty \quad \left(\text{قاعدهٔ هوپیتال}\right)$$

■

مسأله‌ها

درمسأله‌های ۱-۱۰، برای هردنبالهٔ $\{a_n\}$ جملات a_1، a_2، a_3، و a_4 را بنویسید. معین کنید که کدام دنباله‌ها همگرایند و کدامها واگرا. حد هردنباله‌ای را که همگراست، بیابید.

۱. $a_n = \dfrac{۱-n}{n^۲}$

۲. $a_n = \dfrac{n}{۲^n}$

۳. $a_n = \left(\dfrac{۱}{۳}\right)^n$

۴. $a_n = \dfrac{۱}{n!}$

۵. $a_n = \dfrac{(-۱)^{n+۱}}{۲n-۱}$

۶. $a_n = ۲+(-۱)^n$

۷. $a_n = \cos\dfrac{n\pi}{۲}$

۸. $a_n = ۸^{۱/n}$

۹. $a_n = \dfrac{(-۱)^{n-۱}}{\sqrt{n}}$

۱۰. $a_n = \sin^۲\dfrac{۱}{n} + \cos^۲\dfrac{۱}{n}$

درمسأله‌های ۱۱-۵۲، همگرایی یا واگرایی دنباله‌ها را معلوم کنید. حد هردنباله‌ای را که همگراست بیابید.

۱۱. $a_n = \dfrac{۱}{۱۰n}$

۱۲. $a_n = \dfrac{n}{۱۰}$

۱۳. $a_n = ۱+\dfrac{(-۱)^n}{n}$

۱۴. $a_n = \dfrac{۱+(-۱)^n}{n}$

۱۵. $a_n = (-۱)^n\left(۱-\dfrac{۱}{n}\right)$

۱۶. $a_n = ۱+(-۱)^n$

۱۷. $a_n = \dfrac{۲n+۱}{۱-۳n}$

۱۸. $a_n = \dfrac{n^۲-n}{۲n^۲+n}$

۱۹. $a_n = \sqrt{\dfrac{۲n}{n+۱}}$

۲۰. $a_n = \dfrac{\sin n}{n}$

۲۱. $a_n = \sin \pi n$

۲۲. $a_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{۲}+\dfrac{۱}{n}\right)$

۲۳. $a_n = n\pi \cos n\pi$

۲۴. $a_n = \dfrac{\sin^۲ n}{۲^n}$

۲۵. $a_n = \dfrac{n^۲}{(n+۱)^۲}$

۲۶. $a_n = \dfrac{\sqrt{n-۱}}{\sqrt{n}}$

۲۷. $a_n = \dfrac{۱-۵n^۴}{n^۴+۸n^۳}$

۲۸. $a_n = \sqrt[n]{۳^{۲n+۱}}$

۲۹. $a_n = \tanh n$

۳۰. $a_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$

۳۱. $a_n = \dfrac{۲(n+۱)+۱}{۲n+۱}$

۳۲. $a_n = \dfrac{(n+۱)!}{n!}$

۳۳. $a_n = ۵$

۳۴. $a_n = ۵^n$

۳۵. $a_n = (۰٫۵)^n$

۳۶. $a_n = \dfrac{۱۰^{n+۱}}{۱۰^n}$

۳۷. $a_n = \dfrac{n^n}{(n+۱)^{n+۱}}$

۳۸. $a_n = (۰٫۰۳)^{۱/n}$

۳۹. $a_n = \sqrt{۲ - \dfrac{۱}{n}}$

۴۰. $a_n = ۲ + (۰٫۱)^n$

۴۱. $a_n = \dfrac{۳^n}{n^۳}$

۴۲. $a_n = \dfrac{\ln(n+۱)}{n+۱}$

۴۳. $a_n = \ln n - \ln(n+۱)$

۴۴. $a_n = \dfrac{۱-۲^n}{۲^n}$

۴۵. $a_n = \dfrac{n^۲ - ۲n + ۱}{n-۱}$

۴۶. $a_n = \dfrac{n+(-۱)^n}{n}$

۴۷. $a_n = \left(-\dfrac{۱}{۲}\right)^n$

۴۸. $a_n = \dfrac{\ln n}{\ln ۲n}$

۴۹. $a_n = \tan^{-۱} n$

۵۰. $a_n = \sinh(\ln n)$

۵۱. $a_n = n \sin \dfrac{۱}{n}$

۵۲. $a_n = \dfrac{۲n + \sin n}{n + \cos ۵n}$

۵۳. $a_n = \dfrac{n^۲}{۲n-۱} \sin \dfrac{۱}{n}$

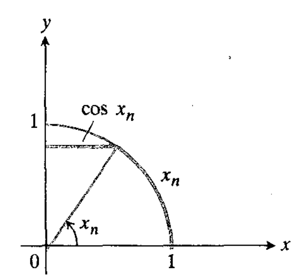
۵۴. $a_n = n\left(۱ - \cos \dfrac{۱}{n}\right)$

۵۵. نشان دهید که $\lim_{n\to\infty} (n!/n^n) = ۰$. (راهنمایی: صورت و مخرج را بسط دهید و خارج‌قسمت را با $۱/n$ مقایسه کنید.)

۵۶. **ماشین‌حساب** فرمول $x_{n+۱} = (x_n + a/x_n)/۲$ فرمولی‌است که از روش نیوتن به‌دست‌آمده تا دنباله‌ای از تقریبهای جواب مثبت $x^۲ - a = ۰$، $a > ۰$ را تولید کند. از $x_۱ = ۱$ و $a = ۳$ شروع کنید و با استفاده از این فرمول، جملات متوالی دنباله را تا جایی‌که $\sqrt{۳}$ با حداکثر دقت ممکن درماشین‌حساب شما تقریب‌زده شود، محاسبه کنید.

۵۷. **ماشین‌حساب** اگرماشین‌حساب شما دکمهٔ ریشهٔ دوم دارد، $x = ۱۰$ را به ماشین‌حساب بدهید و ریشه‌های دوم متوالی را بگیرید و به‌این وسیله جملات دنبالهٔ $۱۰^{۱/۲}, ۱۰^{۱/۴}, ۱۰^{۱/۸}, \ldots$ را تقریب بزنید و این‌کار را تا جایی‌که ماشین‌حساب شما اجازه می‌دهد ادامه دهید. این جریان را با $x = ۰٫۱$ تکرار کنید. و نیز اعداد مثبت دیگری را که بالا و پایین ۱ باشند بیازمایید. وقتی شواهد کافی فراهم کردید، پاسخ این سؤالها را حدس بزنید: آیا $\lim_{n\to\infty} x^{۱/n}$ وقتی $x > ۰$ وجود دارد؟ آیا این‌امر به‌مقدار x بستگی دارد؟

۵۸. **ماشین‌حساب** اگر با مقدار مناسبی از $x_۱$ شروع کنید، قاعدهٔ $x_{n+۱} = x_n + \cos x_n$ دنباله‌ای تولید خواهدکرد که به $\pi/۲$ همگراست. شکل ۶.۱۱ دلیل این‌امر را نشان می‌دهد. همگرایی،



۶.۱۱ طول این‌قوس مستدیر، $\pi/۲$، به‌وسیلهٔ $x_n + \cos x_n$ تقریب‌زده می‌شود.

سریع است. با درنظرگرفتن $x_1 = 1$ مقادیر x_2، x_3 و x_4 را حساب کنید. معلوم کنید که اگر با $x_1 = 5$ شروع کنید چه پیش می‌آید. فراموش نکنید که از رادیان استفاده کنید.

۵۹. فرض کنید $f(x)$ به‌ازای هر x در بازهٔ $0 \leqslant x \leqslant 1$ تعریف شود، f در $x = 0$ مشتق‌پذیر باشد، و $f(0) = 0$. دنباله‌ای چون $\{a_n\}$ را با قاعدهٔ $a_n = nf(1/n)$ تعریف کنید. نشان‌دهید که $\lim a_n = f'(0)$.

با استفاده از نتیجهٔ مسألهٔ ۵۹، حد هریك از دنباله‌ها را در مسائل ۶۰-۶۲ بیابید.

۶۰. $a_n = n \tan^{-1} \frac{1}{n}$

۶۱. $a_n = n(e^{1/n} - 1)$

۶۲. $a_n = n \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)$

۶۳. تحت فرض قضیهٔ ۵، ثابت کنید که اگر $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$، آنگاه دنبالهٔ $\{a_n\}$ واگراست.

۶۴. قضیهٔ ۳ را ثابت کنید.

۶۵. قضیهٔ ۴ را ثابت کنید. کلیات اثبات: فرض قضیه را درنظر بگیرید و تصور کنید ϵ عدد مثبت دلخواهی باشد. برای این ϵ یك $\delta > 0$ وجود دارد به‌قسمی که

وقتی $|x - L| < \delta$ داریم $|f(x) - f(L)| < \epsilon$.

برای چنین δی مثبتی، اندیسی چون N وجود دارد به‌طوری که

وقتی $n > N$ داریم $|a_n - L| < \delta$.

چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۶۶. قضیهٔ «درآمیختن» دنباله‌ها را ثابت کنید: اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هردوهمگرا و دارای حد L باشند، آنگاه دنبالهٔ

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$$

نیز همگراست و حدش L است.

TOOLKIT PROGRAMS
Sequences and Series

۳.۱۱ حدهایی که با آنها بسیار سروکار داریم

بعضی ازحدها آنقدر زیاد مطرح می‌شوند که سزاوار توجه‌خاصی هستند. دراین بخش، این حدها را بررسی می‌کنیم و نظری به‌چند مثال که آنها را دربردارند می‌افکنیم.

---

۱. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

۲. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

۳. $\lim\limits_{n\to\infty} x^{1/n} = 1 \quad (x > 0)$

۴. $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0 \quad (|x| < 1)$

۵. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ (x دلخواه)

۶. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ (x دلخواه)

توجه به‌این نکته ضروری است که در فرمولهای ۳ تا ۶، x ثابت است و فقط n تغییر می‌کند.

۱. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.

این حد درمثال ۶ ازبخش ۲.۱۱ محاسبه‌شد.

۲. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

فرض کنید $a_n = n^{1/n}$. دراین‌صورت

$$\ln a_n = \ln n^{1/n} = \frac{1}{n} \ln n \to 0 \qquad (1)$$

پس، با کاربرد قضیهٔ ۴ بخش ۲.۱۱ درمورد $f(x) = e^x$ داریم

$$n^{1/n} = a_n = e^{\ln a_n} = f(\ln a_n) \to f(0) = e^0 = 1. \qquad (2)$$

۳. $\lim\limits_{n\to\infty} x^{1/n} = 1$، اگر $x > 0$.

فرض کنید $a_n = x^{1/n}$. دراین‌صورت

$$\ln a_n = \ln x^{1/n} = \frac{1}{n} \ln x \to 0 \qquad (3)$$

زیرا درحالی که n بزرگ می‌شود، x ثابت می‌ماند. پس، بنا به قضیهٔ ۴ با ضابطهٔ $f(x) = e^x$ داریم

$$x^{1/n} = a_n = e^{\ln a_n} \to e^0 = 1. \qquad (4)$$

۴. $\lim_{n\to\infty} x^n = ۰$، اگر $|x| < ۱$.

دراینجا یک‌راه این است که نشان‌دهیم ملاکهای تعریف ۲ی بخش ۱.۱۱ به‌ازای $L = ۰$ صادق‌اند. یعنی، نشان‌دهیم که به‌هر $\epsilon > ۰$ یک‌اندیس N نظیرمی‌شود به‌طوری که

(۵) به‌ازای $n > N$، $|x^n| < \epsilon$.

چون $\epsilon^{۱/n} \to ۱$ درحالی‌که $|x| < ۱$، اندیس Nی وجود دارد که به‌ازای آن

(۶) $$|x| < \epsilon^{۱/N}.$$

به‌عبارت دیگر

(۷) $$|x^N| = |x|^N < \epsilon.$$

این همان اندیسی است که درجستجویش هستیم

(۸) به‌ازای $n > N$، $|x^n| < |x^N|$

با ترکیب (۷) و (۸) خواهیم‌داشت

(۹) به‌ازای $n > N$، $|x^n| < |x^N| < \epsilon$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم نشان دهیم.

۵. $\lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$، که x دلخواه است.

فرض کنید

$$a_n = \left(۱+\frac{x}{n}\right)^n.$$

دراین‌صورت

$$\ln a_n = \ln\left(۱+\frac{x}{n}\right)^n = n\ln\left(۱+\frac{x}{n}\right) \to x$$

این نتیجه را با کاربرد قاعدهٔ هوپیتال، که در آن نسبت به n مشتق می‌گیریم، می‌توان به‌دست آورد

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(۱+\frac{x}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(۱+x/n)}{۱/n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{۱}{۱+x/n}\right)\cdot\left(-\frac{x}{n^۲}\right)}{-۱/n^۲}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{x}{۱+x/n} = x.$$

حال، بنا به‌قضیهٔ ۴ از بخش ۲.۱۱ با ضابطهٔ $f(x) = e^x$،

$$\left(۱+\frac{x}{n}\right)^n = a_n = e^{\ln a_n} \to e^x.$$

۶. $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = ۰$، که x دلخواه است.

چون

$$-\frac{|x|^n}{n!} \leqslant \frac{x^n}{n!} \leqslant \frac{|x|^n}{n!}$$

کافی است نشان دهیم که $|x|^n/n! \to ۰$. نخستین گام این است که یک عدد صحیح $M > |x|$ انتخاب کنیم به‌طوری که

$$\frac{|x|}{M} < ۱ \quad \text{و} \quad \left(\frac{|x|}{M}\right)^n \to ۰.$$

حال تـوجه خود را به‌مقادیر $n > M$ محدود می‌کنیم. برای این مقادیر n می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^n}{۱\cdot ۲\cdots M\cdot \underbrace{(M+۱)(M+۲)\cdots n}_{\text{عامل } (n-M)}}$$

$$\leqslant \frac{|x|^n}{M!\,M^{n-M}} = \frac{|x|^n M^M}{M!\,M^n} = \frac{M^M}{M!}\left(\frac{|x|}{M}\right)^n.$$

پس

$$۰ \leqslant \frac{|x|^n}{n!} \leqslant \frac{M^M}{M!}\left(\frac{|x|}{M}\right)^n.$$

اکنون توجه‌کنید‌که ثابت $M^M/M!$ با n تغییرنمی‌کند. بنا براین، قضیهٔ ساندویچ به‌ما می‌گویدکه

$$\frac{|x|^n}{n!} \to ۰ \quad \text{زیرا} \quad \left(\frac{|x|}{M}\right)^n \to ۰.$$

تعداد زیادی از حدها را می‌توان از شش حدی کـه محاسبه‌کردیم به‌طور مستقیم به‌دست‌آورد.

مثالهای ۱-۵ حدهای زیررا وقتی $n \to \infty$ محاسبه‌کنید.

۱. اگر $|x| < ۱$، آنگاه $x^{n+۴} = x^۴\cdot x^n \to x^۴\cdot ۰ = ۰$.

۲. $\sqrt[n]{۲n} = \sqrt[n]{۲}\,\sqrt[n]{n} \to ۱\times ۱ = ۱$.

۳. $\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{۲n} = \left[\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n\right]^۲ \to e^۲$.

۴. $\dfrac{100^n}{n!} \to 0$.

۵. $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{x}{(n+1)} \cdot \dfrac{x^n}{n!} \to 0 \times 0 = 0$. ■

با استفاده از لگاریتم یا قاعدهٔ هوپیتال، به همان شیوه‌ای که درمحاسبهٔ حدهای شمارهٔ ۲ و ۳ و ۵ در آغاز این بخش عمل کردیم، می‌توان بازهم حدهای دیگری را محاسبه کرد.

مثال ۶ مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{n\to\infty} (\ln(3n+5))/n$.

حل: بنا به‌قاعدهٔ هوپیتال

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(3n+5)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3/(3n+5)}{1} = 0. \quad ■$$

مثال ۷ مطلوب‌است محاسبهٔ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n+5}$.

حل: فرض کنید

$$a_n = \sqrt[n]{3n+5} = (3n+5)^{1/n}.$$

پس، همان‌طور که درمثال ۶ دیدیم، داریم

$$\ln a_n = \ln(3n+5)^{1/n} = \frac{\ln(3n+5)}{n} \to 0$$

بنا بر این، طبق قضیهٔ ۴ بخش ۱۱ـ۲

$$a_n = e^{\ln a_n} \to e^0 = 1. \quad ■$$

می‌دانیم که وقتی $n \to \infty$، $\ln n$ کندتر از n افزایش می‌یابد چون $(\ln n)/n \to 0$. اما در واقع $\ln n$ کندتر از $\sqrt{n}$، $\sqrt[3]{n}$، یا حتی $n^{0.000001}$ رشد می‌کند. اگر c ثابت مثبتی باشد، وقتی $n \to \infty$، $(\ln n)/n^c \to 0$. این‌مطلب درمثال زیر ثابت‌می‌شود.

مثال ۸ نشان دهید که اگر c ثابت مثبتی باشد، داریم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^c} = 0.$$

حل: قاعدهٔ هوپیتال را به‌کارمی‌بریم و به‌دست می‌آوریم

$$\lim \frac{\ln n}{n^c} = \lim \frac{1/n}{cn^{c-1}} = \lim \frac{1}{cn^c} = 0. \quad ■$$

مسأله‌ها

در مسأله‌های ۱ـ۳۳، همگرایی یا واگرایی هریك از دنباله‌ها را معلوم کنید. حد هردنباله‌ای را که همگراست، بیابید.

۱. $a_n = \dfrac{1+\ln n}{n}$

۲. $a_n = \dfrac{\ln n}{3n}$

۳. $a_n = \dfrac{(-4)^n}{n!}$

۴. $a_n = \sqrt[n]{10n}$

۵. $a_n = (0.5)^n$

۶. $a_n = \dfrac{1}{(0.9)^n}$

۷. $a_n = \left(1+\dfrac{7}{n}\right)^n$

۸. $a_n = \left(\dfrac{n+5}{n}\right)^n$

۹. $a_n = \dfrac{\ln(n+1)}{n}$

۱۰. $a_n = \sqrt[n]{n+1}$

۱۱. $a_n = \dfrac{n!}{10^{6n}}$

۱۲. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{2^n}}$

۱۳. $a_n = \sqrt[2n]{n}$

۱۴. $a_n = (n+4)^{1/(n+4)}$

۱۵. $a_n = \dfrac{1}{3^{2n-1}}$

۱۶. $a_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

۱۷. $a_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

۱۸. $a_n=\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{-n}$

۱۹. $a_n=\frac{\ln(۲n+۱)}{n}$

۲۰. $a_n=\sqrt[n]{۲n+۱}$

۲۱. $a_n=\sqrt[n]{\frac{x^n}{۲n+۱}},\quad x>۰$

۲۲. $a_n=\sqrt[n]{n^۲}$

۲۳. $a_n=\sqrt[n]{n^۲+n}$

۲۴. $a_n=\frac{۳^n\times ۶^n}{۲^{-n}\times n!}$

۲۵. $a_n=\left(\frac{۳}{n}\right)^{۱/n}$

۲۶. $a_n=\sqrt[n]{۴^n n}$

۲۷. $a_n=\left(۱-\frac{۱}{n}\right)^n$

۲۸. $a_n=\left(۱-\frac{۱}{n^۲}\right)^n$

۲۹. $a_n=\frac{\ln(n^۲)}{n}$

۳۰. $a_n=\frac{(\ln n)^{۲۰۰}}{n}$

۳۱. $a_n=\frac{\ln n}{n^{۱/n}}$

۳۲. $a_n=\frac{۱}{n}\int_۱^n\frac{۱}{x}dx$

۳۳. $a_n=\int_۱^n\frac{۱}{x^p}dx,\quad p>۱$

ماشین‌حساب درمسأله‌های ۳۴-۳۶، با استفاده از ماشین‌حساب مقداری برای N بیابید به‌طوری‌که نابرابری داده شده به ازای $n\geqslant N$ صادق باشد.

۳۴. $|\sqrt[n]{۰٫۵}-۱|<۱۰^{-۳}$

۳۵. $|\sqrt[n]{n}-۱|<۱۰^{-۳}$

۳۶. $\frac{۲^n}{n!}<۱۰^{-۹}$

(راهنمایی: اگر ماشین‌حساب شما دکمهٔ فاکتوریل را ندارد، بنویسید

$$\frac{۲^n}{n!}=\left(\frac{۲}{۱}\right)\left(\frac{۲}{۲}\right)\cdots\left(\frac{۲}{n}\right).$$

یعنی جملات متوالی را با ضرب کردن در ۲ و تقسیم کردن بر مقدار بعدی n حساب کنید.)

۳۷. درمثال ۸، فرض کردیم که اگر $c>۰$ آنگاه وقتی $n\to\infty$، $۱/n^c\to۰$. اثبات رسمی این مطلب را بنویسید. (راهنمایی: اگر $\epsilon=۰٫۰۰۱$ و $c=۰٫۰۴$، N به‌چه‌بزرگی باشد تا مطمئن شویم که وقتی $n>N$، $|۱/n^c-۰|<\epsilon$؟)

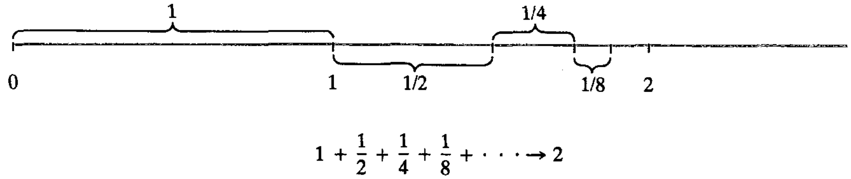
TOOLKIT PROGRAMS
Sequences and Series

۴.۱۱ سریهای نامتناهی

قبل از آنکه تعریفی از اصطلاح سری نامتناهی ارائه‌کنیم به‌سؤال زیر توجه‌کنید: آیا برای عبارتی به‌صورت زیرمی‌شود معنایی قائل شد و اگرمی‌شود چه‌معنایی؟

$$۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۳۲}+\cdots$$

آیا می‌توان بینهایت جمله را عملاً باهم جمع کرد؟ جوابی‌که ما می‌دهیم همان جوابی‌است‌که معمولاً می‌دهند: ازجملهٔ اول شروع می‌کنیم و تعدادی متناهی از جملات را، به‌ترتیب، یکی پس‌از دیگری به‌آن می‌افزاییم (شکل ۷.۱۱). این فرایند، **دنباله‌ای** از



۷.۱۱ اگر طولهای ۱، ۱/۲، ۱/۴، ۱/۸، ...، با هم جمع‌شوند، مجموع به ۲ میل می‌کند.

اعداد چون $\{s_n\}$

$$\left\{1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \cdots\right\}$$
$$=\left\{1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \frac{63}{32}, \cdots\right\}$$

را به‌دست می‌دهد که به‌نظرمی‌رسد همگراست و حدش ۲ است. در واقع، اگر بنویسیم

$$s_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

می‌توانیم نشان دهیم که

$$s_n = 2-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

اگر افزایش n نامحدود باشد، $(1/2)^{n-1}$ به‌صفر میل می‌کند و به‌این نتیجه می‌رسیم که

$$\lim s_n = 2.$$

این‌مطلب به‌این معناست که

$$«\text{مجموع سری}\ \cdots\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}»$$

برابراست با ۲. آیا مجموع هرتعداد متناهی ازجملات این‌دنباله، ۲ است؟خیر. آیا می‌توانیم بینهایت جمله را عملاً باهم جمع کنیم؟ خیر. وقتی‌که می‌گوییم «مجموع سری» ۲ است، منظورمان فقط این است‌که دنبالهٔ **مجموعهای جزئی s_n به‌حد ۲ همگراست.**

درمثال قبل، عوامل متوالی جمع یك دنباله تشکیل می‌دهند

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{4}, \ \ldots, \ a_n = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

با جمع کردن جملات متوالی این دنباله، دنبالهٔ جدیدی تشکیل می‌دهیم

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

چون چیزی که مورد مطالعهٔ‌ماست‌مجموع جملات‌دنبالهٔ اول است.

■ ■ ■

تاریخ طولانی سریهای نامتناهی

گرچه سریهای نامتناهی در اوایل پیدایش حساب دیفرانسیل و انتگرال، به‌ویژه بوسیلهٔ نیوتن، مورد استفادهٔ فراوان‌قرارگرفتند، ولی این‌مفهوم از روزگار باستان در ریاضیات‌حضور داشته‌است. درقرون وسطی ریاضیدانی به نام نیکل اورم[1] در اثرش به نام مسائلی در زمینهٔ هندسهٔ اقلیدسی[2] (۱۳۶۰ میلادی) با استفاده از دسته‌بندی جملات، شبیه‌آنچه درمثال ۹ می‌بینید، نشان‌دادکه سری همساز واگراست. با این‌حال، درسراسرقرن‌هیجدهم، ریاضیدانان باآنکه می‌توانستند مجموع سریهای خاصی را بیابند و آزمونهای محدودی برای همگرایی سریهای معینی‌عرضه‌کردند و می‌دانستند که بقیهٔ سریها واگرا هستند، با این حال شناختی از مفاهیم کلی واگرایی و همگرایی سریها نداشتند. بسیاری از ریاضیدانان، از جمله ریاضیدان بزرگی چون اویلر، برخورد سهل‌انگارانه‌ای با سریها داشتند چنانکه گویی سری چیزی نیست جز یك مسألهٔ جمع طولانی یا (درمورد سریهای توانی)، یك چندجمله‌ای طویل. کوشی درقرن نوزدهم اولین ریاضیدانی بودکه ملاکی اسلوبمند، روشن وکلی برای‌همگرایی به‌دست‌داد. ملاك‌کوشی‌اساساً برتعریف دقیق او ازحد استوار بود.

---

1. Nicole Oresme 2. *Questiones Super Geometriam Euclidis*

در ریاضیات موارد بسیاری هست که در آنها چنین مجموعی اهمیت دارد. مثلاً ثابتهای ریاضی π و e و نیز جدولهای توابعی از قبیل $\sin x$، $\cos x$، e^x، $\ln x$، $\tan^{-1}(x)$ و نظایر اینها را می‌توان با استفاده از سریها محاسبه کرد. اینها و کاربردهای دیگر در فصلهای ۱۲ و ۲۰ تشریح می‌شوند.

معنای اصطلاح سری در ریاضیات نباید با معنی این کلمه در زبان معمولی یکی گرفته شود.

تعریف

با در نظر گرفتن دنباله‌ای از اعداد چون $\{a_n\}$ عبارتی به‌صورت

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots \qquad \text{(۱ الف)}$$

یک سری نامتناهی نامیده می‌شود. عدد a_n را **جملهٔ nام** سری می‌نامند. دنبالهٔ دومی وابسته به عبارت (۱ الف) در نظر می‌گیریم که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} s_1&=a_1\\ s_2&=a_1+a_2\\ &\vdots\\ s_n&=a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k. \end{aligned} \qquad \text{(۱ ب)}$$

دنبالهٔ $\{s_n\}$ **دنبالهٔ مجموعهای جزئی** سری نامیده می‌شود. اگر این دنبالهٔ مجموعهای جزئی به حدی چون L همگرا باشد، گوییم **سری همگراست** و **مجموع** آن L است. در این‌حالت می‌نویسیم

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=L. \qquad \text{(۱ پ)}$$

اگر دنبالهٔ مجموعهای جزئی سری همگرا نباشد، گوییم **سری واگراست.**

نمادها وقتی شروع به بررسی یک‌سری نامتناهی مفروض می‌کنیم، ممکن‌است ندانیم همگراست یا واگرا. درهرحالت، بهتراست از نماد سیگما، Σ، برای نشان‌دادن سری استفاده کنیم و بنویسیم

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \quad \text{یا} \quad \sum_{k=1}^{\infty}a_k \quad \text{یا} \quad \sum a_n.$$

اولین عبارت خوانده می‌شود «مجموع جملات a_n از $n=1$ تا بینهایت»؛ دومی خوانده می‌شود «مجموع جملات a_k از $k=1$ تا بینهایت»؛ و سومی خوانده می‌شود «مجموع a_n». هرسه نماد، اختصاراتی هستند برای نوشتن

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots.$$

یک‌سری همگرا

در اینجا روش یافتن مجموع یک‌سری نامتناهی را که عددی اعشاری با رقم تکراری است نشان می‌دهیم

$$0.3333\ldots=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\cdots$$

$$s_1=\frac{3}{10}$$

$$s_2=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}$$

$$s_n=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\cdots+\frac{3}{10^n}.$$

به صورت زیر می‌توان عبارت ساده و جمع‌وجوری برای s_n به‌دست آورد: هردوطرف رابطهٔ مربوط به s_n را در ۱/۱۰ ضرب می‌کنیم

$$\frac{1}{10}s_n=\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\frac{3}{10^{n+1}}.$$

اگر این را از s_n کم کنیم، خواهیم‌داشت

$$s_n-\frac{1}{10}s_n=\frac{3}{10}-\frac{3}{10^{n+1}}=\frac{3}{10}\left(1-\frac{1}{10^n}\right).$$

پس

$$\frac{9}{10}s_n=\frac{3}{10}\left(1-\frac{1}{10^n}\right) \quad \text{و} \quad s_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right).$$

وقتی $n\to\infty$، $(1/10)^n\to 0$ و

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{3}.$$

بنابراین، می‌گوییم که مجموع سری نامتناهی

$$\frac{3}{10^1}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots$$

برابر با ۱/۳ است و می‌نویسیم

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{10^n}=\frac{1}{3}.$$

عدد اعشاری ...۰٫۳۳۳ نوع خاصی از سری هندسی است.

تعریف

سری هندسی

سریی به‌صورت

$$a+ar+ar^{۲}+ar^{۳}+\cdots+ar^{n-۱}+\cdots \qquad (۲)$$

سری هندسی نامیده می‌شود.

نسبت r می‌تواند مثبت باشد، مثلاً درسری زیر

$$۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\cdots+\frac{۱}{۲^{n-۱}}+\cdots \qquad (\text{۳ الف})$$

یا منفی باشد، مثلاً درسری زیر

$$۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۹}-\cdots+(-۱)^{n-۱}\frac{۱}{۳^{n-۱}}+\cdots. \qquad (\text{۳ ب})$$

مجموعهای جزئی سری هندسی

مجموع n جملهٔ اول (۲) این است

$$s_n=a+ar+ar^{۲}+\cdots+ar^{n-۱}. \qquad (۴)$$

اگر دوطرف (۴) را در r ضرب کنیم خواهیم داشت

$$rs_n=ar+ar^{۲}+\cdots+ar^{n-۱}+ar^{n}. \qquad (۵)$$

و اگر (۵) را از (۴) کم کنیم، تقریباً همهٔ جملات سمت راست حذف می‌شود و آنچه می‌ماند این است

$$s_n-rs_n=a-ar^{n}$$

یا

$$(۱-r)s_n=a(۱-r^{n}). \qquad (۶)$$

اگر $r\neq ۱$، می‌توانیم (۶) را بر $(۱-r)$ تقسیم کنیم و رابطهٔ زیر را به‌دست‌آوریم

$$s_n=\frac{a(۱-r^{n})}{۱-r}, \quad r\neq ۱. \qquad (\text{۷ الف})$$

ازسوی دیگر، اگر در (۴) داشته باشیم $r=۱$، نتیجه می‌شود

$$s_n=na, \quad r=۱. \qquad (\text{۷ ب})$$

می‌خواهیم ببینیم که‌وقتی n در (۷ الف) و (۷ ب) به بینهایت میل می‌کند، حد چیست. واضح است که اگر $a\neq ۰$، (۷ ب) حد متناهی ندارد. اگر $a=۰$، سری (۲) عبارت است از

$$۰+۰+۰+\cdots$$

که همگراست و مجموعش صفر است.

درحالت $r\neq ۱$، رابطهٔ (۷ الف) را به‌کارمی‌بریم. در طرف راست (۷ الف)، n فقط در عبارت r^n ظاهر شده‌است. اگر $|r|<۱$، این‌عبارت وقتی $n\to\infty$، به‌صفر میل می‌کند. بنابراین

$$\text{اگر } |r|<۱ ،\quad \lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a(۱-r^{n})}{۱-r}=\frac{a}{۱-r}. \qquad (۸)$$

اگر به‌یاد داشته باشیم که وقتی $r\neq ۰$ داریم $r^{۰}=۱$، می‌توانیم بنویسیم

$$a+ar+ar^{۲}+\cdots+ar^{n-۱}+\cdots=a\sum_{n=۱}^{\infty}r^{n-۱}=\frac{a}{۱-r} \qquad (۹)$$

یا

$$a+ar+ar^{۲}+\cdots+ar^{n-۱}+\cdots=a\sum_{n=۰}^{\infty}r^{n}=\frac{a}{۱-r} \qquad (۱۰)$$

که در اینجا $۰<|r|<۱$. اگر $r=۰$، سری همگراست به $a=a/(۱-r)$. اگر $|r|>۱$، آنگاه $|r^n|\to\infty$ و (۲) واگراست.

حالت باقیمانده حالتی‌است‌که $r=-۱$. دراین حالت، $s_۱=a$، $s_۲=a-a=۰$، $s_۳=a$، $s_۴=۰$، و الی‌آخر. اگر $a\neq ۰$، این دنبالهٔ مجموعهای جزئی وقتی $n\to\infty$ حدی ندارد، و سری (۲) واگراست.

پس قضیهٔ زیر را ثابت کرده‌ایم.

قضیه ۶

مجموع یک‌سری هندسی

اگر $|r|<۱$، سری هندسی

$$a+ar+ar^{۲}+\cdots+ar^{n-۱}+\cdots$$

به $a/(۱-r)$ همگراست. اگر $|r|\geqslant ۱$، سری واگراست مگرآنکه $a=۰$. اگر $a=۰$، سری به ۰ همگراست.

مثال ۱ سری هندسی با ضوابط $a=۱/۹$ و $r=۱/۳$ عبارت

است از

$$\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۲۷}+\frac{۱}{۸۱}+\cdots=\frac{۱}{۹}\left(۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳^{۲}}+\cdots\right)$$

$$=\frac{۱/۹}{۱-۱/۳}=\frac{۱}{۶}. \qquad ■$$

مثال ۲ سری هندسی با ضوابط $a=۴$ و $r=-۱/۲$ عبارت است از

$$۴-۲+۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}-\cdots$$

$$=۴\left(۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}-\cdots\right)$$

$$=\frac{۴}{۱+(۱/۲)}=\frac{۸}{۳}. \qquad ■$$

مثال ۳ توپی از ارتفاع a متری رها می‌شود. زمین، مسطح است و هربار که توپ از ارتفاع h سقوط می‌کند و به‌زمین می‌خورد، به اندازهٔ rh بالا می‌رود که r عدد مثبتی کوچکتر از ۱ است. کل مسافتی را که توپ بالا و پایین می‌رود پیدا کنید. شکل ۸۰۱۱ را ببینید.

حل: مسافت ازسری زیر به‌دست‌می‌آید

$$s=a+۲ar+۲ar^{۲}+۲ar^{۳}+\cdots.$$

جملات پس از اولین جمله یک‌سری هندسی با مجموع $۲ar/(۱-r)$ تشکیل می‌دهند. بنابراین، مسافت برابر است با

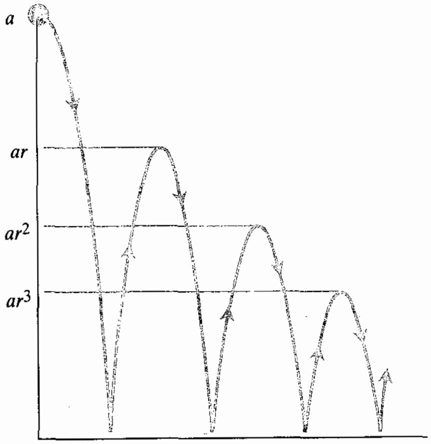
$$s=a+\frac{۲ar}{۱-r}=a\frac{۱+r}{۱-r}.$$

مثلاً اگر a برابر ۶ متر باشد و $r=۲/۳$، مسافت برابر است با

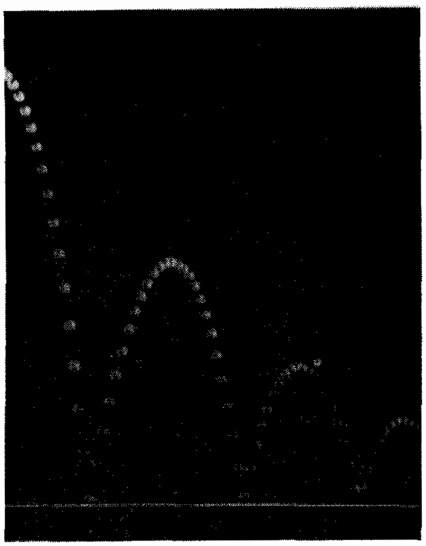
$$s=۶\,\frac{۱+(۲/۳)}{۱-(۲/۳)}=۶\,\frac{۵/۳}{۱/۳}=۳۰\,\mathrm{m}. \qquad ■$$

نکتهٔ ۱ درمورد سریهای هندسی از این بخت خوش برخوردار بودیم که برای آنها عبارات جمع وجور

$$s_n=\begin{cases} a\,\dfrac{۱-r^n}{۱-r} & r\neq ۱ \\ na & r=۱ \end{cases}$$



(الف)



(ب)

۸۰۱۱ (الف) ارتفاع هر برگشت توپ، با ضریب r کاهش می‌یابد. (ب) عکسی که با استروبوسکوپ از توپ گرفته‌شده.

را پیدا کردیم و از روی اینها توانستیم نتایج دقیقی را که در قضیهٔ ۶ آمده است به‌دست آوریم. ولی تعداد سریهایی که چنین عبارات جمع وجوری درمورد آنها پیدا شود، زیاد نیستند. (مثال بعد یکی از آن موارد نادر است.) قسمت اعظم باقیماندهٔ این فصل اختصاص به آزمونهایی دارد که می‌توانیم آنها را درمورد جملات a_n سری $\sum a_n$ به‌کار بریم و همگرایی یا واگرایی سری را معلوم کنیم بدون آنکه مجموعهای جزئی s_n را محاسبه کرده باشیم. این کار را برای تعداد بسیار زیادی از سریها می‌توانیم انجام دهیم. اگر بدانیم که یك سری همگراست، بازهم مسألهٔ تعیین مجموع آن باقی‌می‌ماند. فصل ۱۲ تا اندازه‌ای به‌این امر کمك می‌کند ولی درمورد تعداد زیادی از سریها چاره‌ای نداریم جز آنکه مقادیر

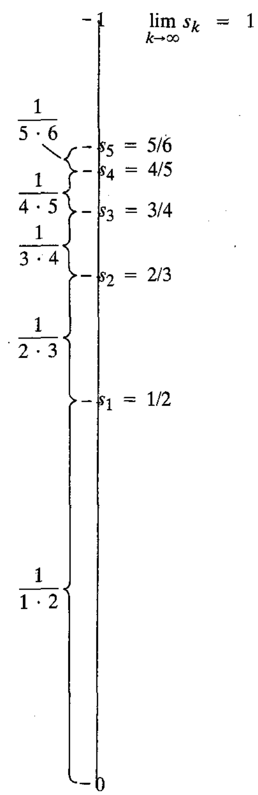
عددی‌مجموعهای جزئی‌را حساب‌کنیم و با استفاده از آنها مجموع واقعی را براورد کنیم.

همان‌طورکه در بالا گفتیم، مثال زیر، سری دیگری است که مجموع دقیقش را می‌توان از این‌طریق حساب کرد که ابتدا عبارت جمع وجور یا فرمولی برای مجموع جزئی kام آن، s_k، پیدا کنیم.

مثال ۴ معلوم کنید که $\sum_{n=1}^{\infty}[1/n(n+1)]$ همگراست یا خیر. اگر همگراست، حدش را بیابید.

حل: شکل ۹۰۱۱ را ببینید. ابتدا سعی می‌کنیم در دنبالهٔ مجموعهای جزئی الگویی بیابیم که به‌عبارت جمع وجوری برای s_k بینجامد. دراینجا کلید موفقیت همان است که در انتگرالگیری

$$\int\frac{dx}{x(x+1)}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x+1}$$



۹۰۱۱ مجموع اولین k جملهٔ سری

$$\sum\frac{1}{n(n+1)}$$

برابر است با $k/(k+1)$ و مجموع سری برابر است با

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k}{k+1}=1.$$

رهگشاست، یعنی استفاده ازکسرهای ساده

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\cdot \qquad \text{(۱۱ الف)}$$

با توجه به‌این، می‌توانیم مجموع جزئی

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{k\cdot(k+1)}$$

را به‌صورت

$$s_k=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \qquad \text{(۱۱ ب)}$$

بنویسیم. با حذف پرانتزهای سمت راست و ترکیب جملات، مجموع به‌صورت زیر درمی‌آید.

$$s_k=1-\frac{1}{k+1}=\frac{k}{k+1}\cdot \qquad \text{(۱۲)}$$

از روی این عبارتی‌که برای s_k نوشته‌ایم فوراً ملاحظه می‌شود که $s_k \to 1$. بنابراین، سری همگراست و

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1. \qquad \text{(۱۳)}$$

■

چندسری واگرا

علاوه بر سریهای هندسیی‌که درآنها $|r|\geqslant 1$، سریهای واگرای دیگری هم هستند.

مثال ۵ سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2=1+4+9+\cdots+n^2+\cdots$$

واگر است‌زیرا مجموعهای‌جزئی‌هرعدد Lی‌را پشت‌سرمی‌گذارند. عدد $s_n=1+4+9+\cdots+n^2$ در هرمرحله بزرگتر از n^2 یا مساوی با آن است. ■

مثال ۶ سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\cdots+\frac{n+1}{n}+\cdots$$

واگراست‌زیرا دنبالهٔ مجموعهای‌جزئی درنهایت ازهرعدد از پیش تعیین‌شده‌ای فراترمی‌رود. هرجمله بزرگتراز ۱ است، پس مجموع

n جمله بزرگتر از n است. ■

ممکن است یك سری واگرا باشد بدون اینکه مجموعهای جزئی‌اش بزرگ شوند. مثلا، مجموعهای جزئی ممکن است همان‌طور که درمثال زیرخواهید دید، بین دومقدار نوسان کنند.

مثال ۷ سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ واگراست زیرا مجموعهای جزئی آن بین ۰ و ۱ تغییرمی‌کنند

$$s_1=(-1)^2=1$$
$$s_2=(-1)^2+(-1)^3=1-1=0$$
$$s_3=(-1)^2+(-1)^3+(-1)^4=1-1+1=1$$

و الی‌آخر. ■

قضیهٔ زیر روش سریعی برای آشکارکردن واگرایی از آن نوعی که درمثالهای ۵، ۶، و ۷ دیده شد به‌دست می‌دهد.

قضیهٔ ۷

آزمون nامین جمله برای واگرایی

اگر $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$، یا اگر $\lim_{n\to\infty} a_n$ وجود نداشته باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

اگرقضیهٔ ۷ را درمورد سریهای مثالهای ۵، ۶، و ۷ به‌کار بریم، نتیجه می‌گیریم

$\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ واگراست زیرا $n^2 \to \infty$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ واگراست زیرا $\frac{n+1}{n} \to 1 \neq 0$

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ واگراست زیرا $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$ وجود ندارد.

اثبات قضیه قضیهٔ ۷ را با نشان دادن این مطلب که اگر Σa_n همگرا باشد آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n=0$، ثابت می‌کنیم. فرض کنید

$$s_n=a_1+a_2+\dots+a_n$$

و تصورکنید که Σa_n همگرا به S باشد؛ یعنی

$$s_n \to S.$$

وقتی n بزرگ است، $n-1$ نیز بزرگ است و هردوی s_n و s_{n-1} نزدیك S اند. پس تفاضل آنها، a_n، باید نزدیك‌صفر باشد. به‌زبان رسمیتر

$$a_n=s_n-s_{n-1} \to S-S=0.$$

درمثال بعد، هردوقضیهٔ ۶ و ۷ را به‌کارمی‌بریم.

مثال ۸ معین‌کنیدکه هریك از سریهای زیر همگراست یا واگرا. هرکدام همگراست، مجموعش را بیابید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^n$

ب) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\tan\frac{\pi}{4}\right)^n$

پ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+5}$

ت) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5(-1)^n}{4^n}$

حل:

الف) $\cos(\pi/3)=1/2$. این یك سری هندسی است که اولین جملهٔ آن $a_1=2(\cos\pi/3)$ و نسبت r آن عبارت از $r=\cos(\pi/3)=1/2$ است؛ پس سری همگراست و مجموع آن،

$$a_1/(1-r)=1/(1-1/2)=2$$

است.

ب) $\tan(\pi/4)=1$. حد جملهٔ nام صفرنیست، بنابراین سری واگراست.

پ) $a_n=\frac{n}{2n+5}$ و $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+5}=\frac{1}{2}\neq 0$. سری واگراست.

ت) این یك سری هندسی است که اولین جملهٔ آن $a_1=-5/4$ و نسبت r آن عبارت از $r=-1/4$ است. این سری همگراست و مجموعش این است

$$\frac{a_1}{1-r}=\frac{-5/4}{1+(1/4)}=-1. \quad ■$$

یك شرط لازم برای همگرایی سری

به‌خاطرشیوهٔ اثبات قضیهٔ ۷، این‌قضیه را اغلب به‌صورت کوتاهتر زیربیان می‌کنند.

قضیهٔ ۸

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، $a_n \to 0$.

هشدار: قضیهٔ ۸ نمی‌گوید که اگر $a_n \to 0$ آنگاه $\sum a_n$ همگراست. سریی چون $\sum a_n$ ممکن است واگرا باشد حتی اگر $a_n \to 0$. پس، $\lim a_n = 0$ یك شرط لازم برای همگرایی سری $\sum a_n$ است ولی شرط کافی نیست.

مثال ۹ سری

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{\text{۲ جمله}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\text{۴ جمله}} + \cdots$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{\text{2^n جمله}} + \cdots$$

واگراست گرچه جملاتش دنباله‌ای می‌سازند که به ۰ همگراست. ■

وقتی دو سری همگرا داریم، می‌توانیم آنها را باهم جمع، از هم تفریق، و درمقادیر ثابت ضرب کنیم و سریهای همگرای دیگری به دست آوریم. قضیهٔ بعد جزئیات این مطلب را بیان می‌کند.

قضیهٔ ۹

اگر $\sum a_n$ به A و $\sum b_n$ به B همگرا باشد، آنگاه

i) $\sum(a_n + b_n)$ به $A+B$ همگراست

ii) $\sum k a_n$ به kA همگراست (k عددی دلخواه).

اثبات قضیه فرض کنید

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

دراین‌صورت، مجموعهای جزئی $\sum(a_n + b_n)$ به‌این‌شکل‌اند

$$S_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n)$$
$$= (a_1 + \cdots + a_n) + (b_1 + \cdots + b_n)$$
$$= A_n + B_n.$$

چون $A_n \to A$ و $B_n \to B$، داریم $S_n \to A+B$. مجموعهای جزئی $\sum(k a_n)$ به‌این‌شکل‌اند

$$S_n = k a_1 + k a_2 + \cdots + k a_n$$
$$= k(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = k A_n$$

که به kA همگراست.

نکتهٔ ۲ اگر فکر می‌کنید قضیهٔ ۹ باید دوقسمت دیگر داشته‌باشد تا با قضیهٔ ۲ در بخش ۲.۱۱ متناظر باشد، مسائل ۴۲–۴۶ را ببینید. همچنین مسألهٔ ۳۰ در بخش ۵.۱۱ و مسألهٔ ۳۹ در بخش ۸.۱۱ را ببینید.

قسمت (ii) قضیهٔ ۹ می‌گوید که هرمضربی از یك سری همگرا، همگراست. نظیر این مطلب درنتیجهٔ زیر بیان می‌شود که می‌گوید هرمضرب ناصفر یك‌سری واگرا، واگراست.

نتیجه

اگر $\sum a_n$ واگرا باشد، و اگر c عددی مخالف صفر باشد، آنگاه سری مضارب، $\sum c a_n$، واگراست.

نکتهٔ ۳ پیامد مستقیمی از قضیهٔ ۹ این است که اگر $A = \sum a_n$ و $B = \sum b_n$، آنگاه

$$\sum(a_n - b_n) = \sum a_n + \sum(-1)b_n \qquad (14)$$
$$= \sum a_n - \sum b_n = A - B.$$

سری $\sum(a_n - b_n)$ **تفاضل** $\sum a_n$ و $\sum b_n$ نامیده‌می‌شودو $\sum(a_n + b_n)$ **مجموع** آنها خوانده می‌شود.

مثال ۱۰

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^{n-1}} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 4 \frac{1}{1-(1/2)} = 8$

ب)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

$$= \frac{1}{1-(1/2)} - \frac{1}{1-(1/3)}$$

$$= 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}. \qquad ■$$

نکتهٔ ۴ همیشه می‌توان تعدادی متناهی از جملات را به‌یك سری افزود یا از آن کاست بدون آنکه در همگرایی یا واگرایی سری تغییری حاصل شود. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا و k اندیسی بزرگتر از ۱

باشد، آنگاه $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ همگراست و

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+\sum_{n=k}^{\infty} a_n . \qquad (15)$$

به‌عکس، اگر $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ به‌ازای هر $k>1$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست و **مجموعها** همان‌طور که در (۱۵) دیده می‌شود به‌هم مربوط خواهند بود. پس، مثلاً

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n} \qquad (16)$$

و

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}-\frac{1}{5}-\frac{1}{25}-\frac{1}{125} . \qquad (17)$$

توجه کنید که گرچه افزودن یا کاستن تعدادی متناهی از جملات، تأثیری درهمگرایی یا واگرایی سری ندارد، ولی ممکن است **مجموع** یک‌سری همگرا را تغییر بدهد.

نکتهٔ ۵ می‌توان اندیس‌گذاری جملات یک سری را تغییر داد بدون آنکه همگرایی سری‌تغییر کند. مثلاً، یک‌سری‌هندسی‌را که با

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$$

شروع می‌شود می‌توان به‌صورتهای زیر نمایش داد

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad \text{یا} \quad \sum_{n=-4}^{\infty} \frac{1}{2^{n+4}} \quad \text{یا} \quad \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{2^{n-5}} . \qquad (18)$$

اندیس‌گذاری به‌هر نحوی انجام شود، مجموعهای جزئی تغییر نمی‌کنند و بنابراین، ما آزادیم که اندیس‌گذاری را از هر عدد صحیح دلخواهی شروع کنیم. معمولاً آن نوع اندیس‌گذاری ترجیح داده‌می‌شود که به‌عبارت ساده‌ای بینجامد. درمثال ۱۱ (ب) به‌جای اینکه با $n=1$ شروع کنیم با $n=0$ شروع می‌کنیم زیرا به‌این ترتیب می‌توانیم سریی را که در ذهن داریم

به‌جای $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-2^{n-1}}{6^{n-1}}$ با $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n-2^n}{6^n}$ نشان دهیم.

(۱۹)

مسأله‌ها

در مسأله‌های ۱–۸، عبارت جمع وجوری برای مجموع n جمله، s_n، از هر سری پیدا کنید. سپس اگر سری همگراست، مجموع آن را بیابید.

۱. $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\cdots+\frac{2}{3^{n-1}}+\cdots$

۲. $\frac{9}{100}+\frac{9}{100^2}+\frac{9}{100^3}+\cdots+\frac{9}{100^n}+\cdots$

۳. $1+e^{-1}+e^{-2}+\cdots+e^{-(n-1)}+\cdots$

۴. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$

۵. $1-2+4-8+\cdots+(-1)^{n-1}2^{n-1}+\cdots$

۶.

$$\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots$$

۷. $\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+\ln\frac{3}{4}+\cdots+\ln\frac{n}{n+1}+\cdots$

۸. $1+2+3+\cdots+n+\cdots$

۹. سری مذکور درمسألهٔ ۶ را می‌توان به‌صورت

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

نمایش داد. همچنین این سری را می‌توان به‌شکل‌مجموع زیر نشان داد که درآن، اندیس از $n=-1$ شروع می‌شود

$$\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$$

این‌سری را به‌شکل مجموعی که با

الف) $n=-2$

ب) $n=0$

پ) $n=5$.

شروع شود نشان دهید.

۱۰. الف) توپی از ارتفاع ۴ متری رها می‌شود. هربارکه توپ از ارتفاع h متری سقوط می‌کند و به‌زمین می‌خورد به‌اندازهٔ $0.75h$ متر بالا می‌رود. کل مسافتی را که توپ پایین و بالا می‌رود تعیین‌کنید.

ب) کل زمانی راکه توپ در حال حرکت است حساب کنید (راهنمایی: از فرمول $s=4.9t^2$ به دست می‌آوریم $t=\sqrt{s/4.9}$ که در آن s برحسب متر و t برحسب ثانیه است.)

درهریك ازمسائل ۱۱–۱۸، مجموع سری را بیابید.

۱۱. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}$

۱۲. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4^n}$

۱۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{4^n}$

۱۴. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{4^n}$

۱۵. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$

۱۶. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$

۱۷. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^n}{5^n}\right)$

۱۸. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^{n+1}}{5^n}\right)$

درهریك ازمسائل ۱۹–۲۲، مجموع سری‌را با استفاده ازکسرهای ساده بیابید.

۱۹. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$

۲۰. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$

۲۱. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$

۲۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

۲۳. الف) عدد اعشاری

$$0{,}234\,234\,234\ldots$$

را که دارای جزء تکراری است، به‌صورت یك سری نامتناهی بنویسید و مجموع را به‌شکل نسبتی ازدوعدد صحیح چون p/q بیان کنید.

ب) آیا این‌مطلب درست‌است که هرعدد اعشاری با جزء تکراری، یك‌عدد گویا به‌صورت p/q است؟ برای پاسختان دلیل بیاورید.

۲۴. عدد اعشاری

$$1{,}24\,123\,123\,123\ldots$$

را که پس از سه رقم اولیه دارای جزء تکراری است، به‌صورت یك عدد گویا چون p/q بنویسید.

درمسائل ۲۵–۳۸، درمورد هریك ازسریها همگرایی یا واگرایی را معلوم کنید و هرکدام‌که همگراست، مجموعش را بیابید.

۲۵. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

۲۶. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{1}{n}$

۲۷. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3}{2^n}$

۲۸. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2})^n$

۲۹. $\sum_{n=0}^{\infty} \cos n\pi$

۳۰. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{5^n}$

۳۱. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n}$

۳۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n}$

۳۳. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n$

۳۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{10^n}$

۳۵. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n-1}{3^n}$

۳۶. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

۳۷. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{1000^n}$

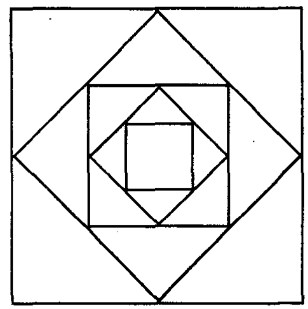
۳۸. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}, \quad |x|>1$

در مسائل ۳۹ و ۴۰، برابریها مثالهایی از قضیهٔ ۶ هستند. درهر مورد مقدار a و r را پیدا کنید.

۳۹. $$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \quad |x|<1$$

۴۰. $$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, \quad |x|<1$$

۴۱. شکل ۱۰.۱۱ اولین پنج مربع ازیك دنبالهٔ نامتناهی ازمربعها را نشان می‌دهد. مساحت مربع بزرگ بیرونی، ۴ است و هریك ازمربعهای دیگر با وصل کردن نقاط وسط اضلاع مربع قبل از آن به‌دست می‌آید. مجموع مساحات همهٔ مربعها را بیابید.



شکل ۱۰.۱۱

۴۲. عبارت جمع وجوری برای مجموع جزئی nام سری $\sum(-1)^{n+1}$ بیابید.

۴۳. باآوردن مثال نشان‌دهید که ممکن است مجموع جمله به‌جملهٔ دوسری واگرا، همگرا باشد.

۴۴. مطلوب است سریهای هندسی همگرای $A=\sum a_n$ و $B=\sum b_n$ که نشان بدهند $\sum a_n b_n$ ممکن است همگرا باشد بدون اینکه برابر $A \cdot B$ باشد.

۴۵. باآوردن مثال نشان دهید که ممکن است $\sum(a_n/b_n)$ واگرا باشد درحالی‌که $\sum a_n$ و $\sum b_n$ همگرا باشند و هیچ b_nی صفر نباشد.

۴۶. با آوردن مثال نشان دهید که ممکن است $\sum(a_n/b_n)$ به مقداری بجز A/B همگرا باشد درحالی‌که $A=\sum a_n$، $B=\sum b_n \neq 0$، و هیچ b_nی صفر نباشد.

۴۷. نشان دهید که اگر $\sum a_n$ همگرا باشد و به‌ازای هر n، $a_n \neq 0$، آنگاه $\sum(1/a_n)$ واگراست.

۴۸. الف) از راه تقسیم تحقیق کنید که

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+\cdots$$
$$+(-1)^n t^n+\frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}.$$

ب) با انتگرالگیری ازدوطرف برابری قسمت (الف) نسبت به t، از ۰ تا x، نشان دهید که

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$
$$+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+R$$

که در آن

$$R=(-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt.$$

پ) اگر $x>0$، نشان دهید که

$$|R|\leqslant\int_0^x t^{n+1}\,dt=\frac{x^{n+2}}{n+2}.$$

(راهنمایی: وقتی t از ۰ تا x تغییرمی کند، $1+t\geqslant 1$.)

ت) اگر $x=1/2$، n درقسمت (پ) به‌چه بزرگی باشد تا بتوانیم تضمین کنیم که $|R|<0{,}001$؟ یك چندجمله‌ای بنویسید که $\ln(1+x)$ را به‌ازای $0\leqslant x\leqslant 1/2$ تا این درجه از دقت تقریب بزند.

ث) اگر $x=1$، n درقسمت (پ) به‌چه بزرگی باشد تا بتوانیم تضمین کنیم که $|R|<0{,}001$؟

TOOLKIT PROGRAMS
Sequences and Series

۵.۱۱ سریهای باجملات نامنفی: آزمونهای مقایسه‌ای و انتگرال

درمورد هرسری مفروض $\sum a_n$ دوسؤال زیرمطرح می‌شود

۱. آیا سری همگراست؟
۲. اگرهمگراست، مجموع آن چیست؟

درقسمت اعظم بقیهٔ این فصل به‌سؤال اول می‌پردازیم. ولی درعمل، سؤال دوم نیز برای اهل علم یا مهندسان به‌همان اندازه اهمیت دارد و ما بعداً به‌این سؤال برخواهیم گشت.

دراین بخش و بخش بعد سریهایی را مطالعه خواهیم کرد که

جملهٔ منفی ندارند. دلیل این محدودیت این است که مجموعهای جزئی این سریها همیشه دنباله‌هایی غیرنزولی تشکیل می‌دهند و دنباله‌هایی غیرنزولی که از بالا کراندارند، همان‌طور که خواهیم دید، همیشه همگرا هستند. پس، برای اینکه نشان دهیم یك سری با جملات نامنفی همگراست، کافی‌است نشان‌دهیم عددی هست که مجموعهای جزئی از آن فراتر نمی‌روند.

اینکه با چنین روشی همگرایی ثابت می‌شود بدون اینکه مجموع سری مورد نظر عملاً پیدا شود، ممکن است در نگاه اول رضایتبخش به‌نظر نرسد. البته بهتر است مجموع سری را ازروی فرمول شسته‌رفتهٔ مجموعهای جزئی آن پیدا کنیم، ولی دربیشتر موارد چنین فرمولی در دسترس ما نیست و درنتیجه مجبوریم یك فرایند دومرحله‌ای را درپیش بگیریم، یعنی اول همگرایی را ثابت کنیم و سپس مجموع آن را تقریب بزنیم.

نکتهٔ تعجب‌آور این است که اگر درشروع بررسی خود از همگرایی، سریهایی را که یك یا چند جملهٔ منفی دارند موقتاً کنار بگذاریم، چندان محدودیتی ایجاد نکرده‌ایم. همچنانکه در بخش ۷.۱۱ خواهیم دید، یك‌سری $\sum a_n$ همگراست هرگاه سری متناظر قدرمطلقها، $\sum|a_n|$، همگرا باشد. (عکس این‌مطلب درست نیست. در بخشهای ۷.۱۱ و ۸.۱۱ به این موضوعات بیشتر خواهیم پرداخت). پس، اگر بدانیم که

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{۲}}=۱+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۲۵}+\cdots \qquad (۱)$$

همگراست، می‌دانیم که همهٔ سریهایی ازقبیل

$$۱-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۹}-\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۲۵}-\cdots \qquad (۲)$$

و

$$-۱-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۱۶}-\frac{۱}{۲۵}-\cdots \qquad (۳)$$

نیزکه از (۱) با تغییرعلامت یك یا چند جمله به دست می‌آیند، همگرایند. ممکن است ندانیم که به‌چه مقداری همگرا هستند، ولی دست‌کم می‌دانیم همگرا هستند و این اطلاع، گام اولیه و لازم برای براوردکردن مجموعهای آنهاست.

دنباله‌های غیرنزولی

فرض‌کنید $\sum a_n$ یك‌سری نامتناهی بدون جملات منفی باشد. یعنی به‌ازای هر n، $a_n \geqslant ۰$. در این‌صورت، وقتی مجموعهای جزئی $s_۱$، $s_۲$، $s_۳$ و غیره را محاسبه می‌کنیم می‌بینیم که هریك بزرگتر از مجموع جزئی ماقبل خود و یا مساوی با آن است زیرا $s_{n+۱}=s_n+a_n$. یعنی

$$s_۱\leqslant s_۲\leqslant s_۳\leqslant\cdots\leqslant s_n\leqslant s_{n+۱}\leqslant\cdots. \qquad (۴)$$

هردنبالهٔ $\{s_n\}$ نظیردنبالهٔ (۴) با این ویژگی که به‌ازای هر n، $s_n\leqslant s_{n+۱}$، یك‌دنبالهٔ غیرنزولی نامیده می‌شود.

دونوع دنبالهٔ غیرنزولی داریم ـ آنکه از هرکران متناهی فراترمی‌رود و آنکه چنین‌نیست. دنبالهٔ نوع اول واگرا به‌بینهایت است. ما توجه خود را به دنبالهٔ نوع دوم معطوف می‌کنیم یعنی دنباله‌ای که از همهٔ کرانها فراترنمی‌رود. چنین دنباله‌ای را **از بالا کراندار** می‌نامند، و هرعدد Mی که برای آن

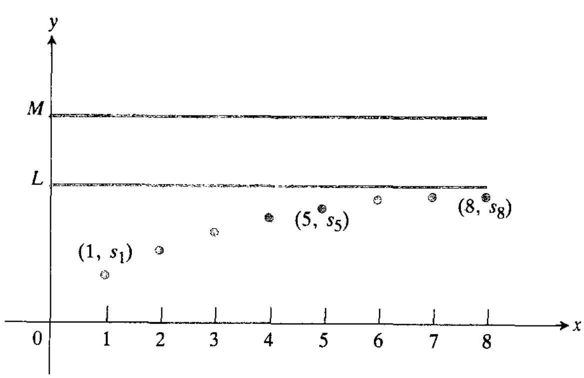
$$s_n\leqslant M \qquad \text{به‌ازای هر } n،$$

یك **کران بالای** دنباله نام دارد.

مثال ۱ اگر $s_n=n/(n+۱)$، آنگاه ۱ یك‌کران بالاست و هرعدد بزرگتری هم همین‌طور است، مثلاً $\sqrt{۲}$، ۵، یا ۱۷. هیچ عددکوچکتر از ۱، کران بالا نیست؛ بنابراین‌عدد ۱، **کوچکترین کران‌بالای** این دنباله است. ■

وقتی یك دنبالهٔ غیرنزولی از بالا کراندار است ممکن‌است این‌سؤال مطرح شودکه «آیا باید یك کوچکترین‌کران بالا هم داشته باشد؟» پاسخ مثبت است ولی ما آن را ثابت نخواهیم‌کرد. ما ثابت می‌کنیم که اگر L کوچکترین کران بالا باشد، دنباله به L همگراست. استدلال زیرنشان می‌دهدکه چرا L حد است.

وقتی نقاط $(۱, s_۱)$، $(۲, s_۲)$، …، (n, s_n) را درصفحهٔ xy مشخص می‌کنیم، اگر M یك‌کران بالای دنباله باشد، همهٔ نقاط مشخص‌شده یا روی‌خط $y=M$ یا درزیرآن قرارمی‌گیرند (شکل ۱۱.۱۱). روشن به‌نظرمی‌رسدکه باید خطی چون $y=L$ وجود داشته‌باشدکه پایینتر ازهمهٔ این‌گونه خطها باشد، یعنی‌هیچ‌یك از نقاط (n, s_n) بالای $y=L$ نباشد ولی به‌ازای هرعدد مثبت ε،



۱۱.۱۱ وقتی جملات یك دنبالهٔ غیرنزولی‌کران بالایی چون M دارند، دارای حدی مثل $L\leqslant M$ هستند.

نقاطی بالای هرخط پایینتر $y=L-\epsilon$ واقع باشند. دراین‌صورت، L حد دنباله است زیرا عدد L دارای ویژگیهای زیر است

الف) به‌ازای هرمقدار n، $s_n \leqslant L$، و

ب) به‌ازای هر $\epsilon > 0$، دست‌کم یك عددصحیح چون N وجود دارد به‌قسمی که

$$s_N > L-\epsilon.$$

به‌علاوه، این واقعیت که $\{s_n\}$ دنباله‌ای غیرنزولی است، حاکی‌از آن است که

به‌ازای هر $n \geqslant N$، $s_n \geqslant s_N > L-\epsilon$.

این بدان‌معنی است که همهٔ اعداد s_n، بعداز Nامین عدد دنباله، فاصله‌شان از L بیشتر از ϵ نیست. این دقیقاً همان شرطی است که باید L داشته‌باشد تا حد دنبالهٔ s_n باشد.

$$L=\lim_{n\to\infty} s_n.$$

مطالب مربوط به دنباله‌های غیرنزولی درقضیهٔ زیر خلاصه شده‌اند.

قضیهٔ ۱۰

قضیهٔ دنبالهٔ غیرنزولی

فرض کنید $\{s_n\}$ دنباله‌ای غیرنزولی از اعداد حقیقی باشد. دراین صورت، یکی از دوحالت زیر باید برقرار باشد

الف) جملات دنباله همگی نابیشتر از یك ثابت متناهی چون M باشند. دراین حالت، دنباله دارای حدی متناهی چون L است که آن هم نابیشتر از M است.

ب) دنباله واگرا به‌بینهایت مثبت باشد؛ یعنی اعداد دنباله نهایتاً هرعدد از پیش تعیین‌شده‌ای را پشت‌سر بگذارند.

حالت (ب)ی قضیه وقتی پیش می‌آید که صرفنظر ازاینکه M چقدر بزرگ باشد، نقاطی‌چون (n, s_n) وجود داشته‌باشند که دربالای هرخط مفروض $y=M$ باشند.

حال قضیهٔ ۱۰ را در مورد همگرایی سریهای نامتناهی با جملات نامنفی به‌کارمی‌بریم. اگر $\sum a_n$ چنین سریی باشد، دنبالهٔ مجموعهای جزئی‌آن، $\{s_n\}$، دنباله‌ای غیرنزولی‌است. پس، $\{s_n\}$ و درنتیجه $\sum a_n$، همگرا خواهند بود اگر و تنها اگر s_n دارای یك‌کران بالا باشد. مسأله این است که در هرمورد خاص چگونه معلوم کنیم که s_nها کران بالا دارند.

گاهی، ازبالا کراندار بودن s_n را به‌این‌طریق می‌توان نشان دادکه نشان دهیم هریك از s_nها نابیشتر از مجموع جزئی متناظر یك‌سری است که همگرا بودنش معلوم است. مثال زیر، نحوهٔ انجام این‌کار را نشان می‌دهد.

مثال ۲ سری

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots \tag{5}$$

همگراست زیرا همهٔ جملاتش مثبت و نابیشتر ازجملات متناظر

$$1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots \tag{6}$$

هستند. برای‌اینکه ببینیم این رابطهٔ بین دوسری چگونه به‌یك‌کران بالا برای‌مجموعهای جزئی $\sum_{n=0}^{\infty}(1/n!)$ می‌انجامد، فرض می‌کنیم

$$s_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

و ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای هر n،

$$s_n\leqslant 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}<1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$
$$=1+\frac{1}{1-(1/2)}=3.$$

پس، مجموعهای جزئی $\sum_{n=0}^{\infty}(1/n!)$ همگی کوچکتر از ۳ اند. بنابراین، $\sum_{n=0}^{\infty}(1/n!)$ همگراست.

نمی‌توانیم فقط به‌این‌دلیل که ۳ یك‌کران بالای مجموعهای جزئی $\sum_{n=0}^{\infty}(1/n!)$ است نتیجه بگیریم که سری به ۳ همگراست. این‌سری در واقع به $e=2.71828$ همگراست. ■

آزمون مقایسه‌ای برای همگرایی

درمثال ۲، همگرایی سری را از طریق مقایسهٔ آن با سریی که می‌دانستیم همگراست، ثابت کردیم. این نوع مقایسه نمونه‌ای‌است ازفرایندی که آزمون مقایسه‌ای برای همگرایی‌سریهای با جملات منفی، نامیده می‌شود.

آزمون مقایسه‌ای برای سریهای با جملات نامنفی

فرض کنید $\sum a_n$ سریی باشدکه جملهٔ منفی ندارد.

الف) آزمون **همگرایی** $\sum a_n$ سری $\sum a_n$ همگراست اگر سری همگرایی چون $\sum c_n$ با جملات نامنفی وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای عدد صحیح مثبتی چون n_0، برای هر $n>n_0$ داشته باشیم $a_n\leqslant c_n$.

ب) آزمون **واگرایی** $\sum a_n$ سری $\sum a_n$ واگراست اگر سری واگرایی چون $\sum d_n$ با جملات نامنفی وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر $n>n_0$، $a_n\geqslant d_n$.

در قسمت (الف)، مجموعهای جزئی سری $\sum a_n$ از بالا به‌کران زیرمحدودند

$$M = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} c_n .$$

بنا براین، یك دنبالهٔ غیرنزولی با حدی چون L تشکیل می‌دهند که نا بیشتر از M است.

درقسمت (ب)، مجموعهای جزئی $\sum a_n$ از بالا کراندار نیستند. اگر باشند، مجموعهای جزئی $\sum d_n$ به‌کران زیرمجدودند

$$M' = d_1 + d_2 + \cdots + d_{n_0} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n .$$

این به‌معنی همگرایی $\sum d_n$ است. بنابراین، واگرایی $\sum d_n$، واگرایی $\sum a_n$ را نتیجه می‌دهد.

در به‌کار بردن این‌آزمون درمورد یك‌سری، مجبور نیستیم که جملات اولیهٔ سری را درنظر بگیریم. می‌توانیم ازهراندیس Nی شروع کنیم، به‌شرط اینکه تمام جملات سری‌را از آن به‌بعد درنظر بگیریم.

مثال ۳ برای اثبات همگرایی سری

$$5+\frac{2}{3}+1+\frac{1}{7}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\cdots$$

می‌توان از چهارجملهٔ اول صرفنظرکرد وباقیماندهٔ سری را ازجملهٔ پنجم به‌بعد (جملهٔ پنجم، $1/2$ است) با سری هندسی همگرای‌زیر مقایسه‌کرد

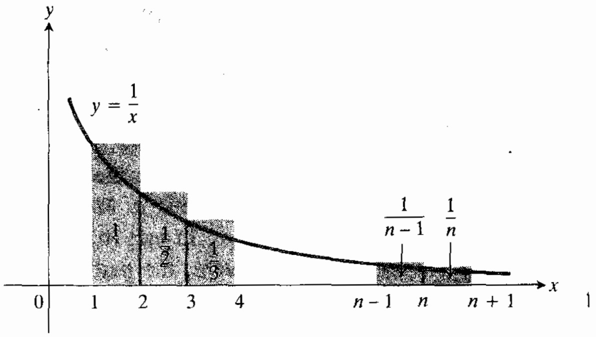
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots . \qquad ■$$

برای استفاده از آزمون‌مقایسه‌ای به فهرستی از سریهایی‌که همگرا بودنشان معلوم است و نیز فهرستی ازسریهایی‌که واگرا بودنشان معلوم است نیاز داریم. مثال بعدی ما یك‌سری واگرا را به‌این فهرست می‌افزاید. همچنین مثال ۴ مقدمه‌ای است بر آزمون انتگرال‌که به‌نوبهٔ خود سریهای‌دیگری‌را، اعم ازواگرا و همگرا، به فهرستهای ما خواهد افزود. پس از آزمون انتگرال، به‌شکل قویتری‌از آزمون مقایسه‌ای که به آزمون مقایسه‌ای حدی موسوم است، خواهیم پرداخت.

مثال ۴ سری همساز

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

واگراست زیرا دنبالهٔ مجموعهای جزئی آن‌کراندار نیست. برای ملاحظهٔ این‌امر، شکل ۱۲۰۱۱ را ببینید. این شکل تعدادی از



۱۲۰۱۱ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} > \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(n+1)$.

مستطیلهای‌سایه‌دار را نشان‌می‌دهد که‌مجموع‌مساحات آنها به‌صورت زیر است

$$s_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} .$$

این مستطیلها سطحی را می‌پوشانند که مساحتش بزرگتر ازمساحت سطح زیر نمودار $y=1/x$، دربازهٔ از $x=1$ تا $x=n+1$، است

$$s_n > \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1) .$$

بنابراین، $s_n \to +\infty$ زیرا $\ln(n+1) \to +\infty$. سری

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

واگرا به‌بینهایت مثبت است. ■

سری‌همساز $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$ سری دیگری است‌که واگرایی‌اش را نمی‌توان با استفاده ازآزمون‌جملهٔ nام آشکارساخت. این‌سری، علی‌رغم اینکه $1/n \to 0$، واگراست.

می‌دانیم که هرمضرب ناصفری ازیك‌سری واگرا،واگراست (نتیجهٔ قضیهٔ ۹ در بخش قبل). بنابراین، واگرایی سری همساز، واگرایی سریهایی نظیر

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n} = \frac{1}{100}+\frac{1}{200}+\frac{1}{300}+\frac{1}{400}+\cdots$$

را نتیجه می‌دهد.

آزمون انتگرال

درمثال ۴، واگرایی‌سری‌همسازرا ازطریق‌مقایسهٔ دنبالهٔ مجموعهای جزئی‌اش با یك‌دنبالهٔ واگرا از انتگرالها نتیجه گرفتیم. این‌مقایسه، حالت‌خاصی‌است ازیك‌فرایندکلیترمقایسه‌موسوم به‌آزمون انتگرال. این آزمون ملاکهایی برای همگرایی و واگرایی سریهایی که جملاتشان مثبت‌اند، به‌دست می‌دهد.

آزمون انتگرال

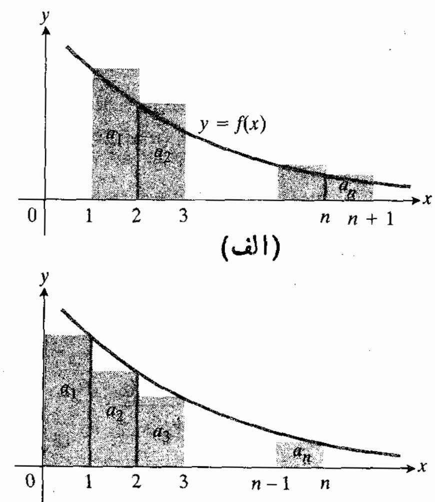
فرض‌کنید $a_n=f(n)$ که درآن، $f(x)$ به ازای هر $x\geqslant 1$ یك تابع‌نزولی مثبت و پیوسته از x است. دراین‌صورت، سری $\sum a_n$ و انتگرال

$$\int_1^\infty f(x)\,dx$$

یا هردوهمگرا هستند و یا هردو واگرایند.

اثبات با این فرض شروع می‌کنیم که f تابعی نزولی‌است با ضابطهٔ $f(n)=a_n$ به‌ازای هر n. با توجه به‌این‌مطلب، ملاحظه می‌کنیم که مستطیلهای شکل ۱۳.۱۱ (الف) که دارای مساحات a_1، a_2، ...، a_n هستند، جمعاً سطحی را می‌پوشانند که بزرگتر از سطح زیرخم $y=f(x)$ از $x=1$ تا $x=n+1$ است. یعنی

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_n.$$



۱۳.۱۱

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant a_1+\int_1^n f(x)\,dx\,.$$

درشکل ۱۳.۱۱ (ب) مستطیلها به جای اینکه روبه‌راست تشکیل شوند، روبه‌چپ تشکیل شده‌اند. اگر موقتاً مستطیل اول، به‌مساحت a_1، را کنار بگذاریم، می‌بینیم که

$$a_2+a_3+\cdots+a_n\leqslant\int_1^n f(x)\,dx\,.$$

اگر a_1 را واردکار کنیم، داریم

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant a_1+\int_1^n f(x)\,dx\,.$$

از ترکیب این نتایج به‌دست می‌آوریم

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_n \tag{۷}$$
$$\leqslant a_1+\int_1^n f(x)\,dx\,.$$

اگر انتگرال $\int_1^\infty f(x)\,dx$ متناهی باشد، نابرابری سمت راست نشان می‌دهدکه $\sum a_n$ نیز متناهی‌است. ولی اگر $\int_1^\infty f(x)\,dx$ نامتناهی باشد، نابرابری سمت چپ نشان می‌دهد که سری نیز نامتناهی است.

پس، سری و انتگرال یا هردومتناهی‌اند ویا هردو نامتناهی.

مثال ۵ p-سری. اگر p یك ثابت حقیقی باشد، سری

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots \tag{۸}$$

همگراست اگر $p>1$ و واگراست اگر $p\leqslant 1$. برای اثبات این مطلب، فرض می‌کنیم

$$f(x)=\frac{1}{x^p}\,.$$

حال اگر $p>1$، داریم $-p+1<0$ و

$$\int_1^\infty x^{-p}\,dx=\lim_{b\to\infty}\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^b$$

$$=\frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}(b^{-p+1}-1)=\frac{1}{p-1}$$

که متناهی است. پس، p-سری‌همگراست اگر p بزرگتر از ۱ باشد.

اگر $p=1$، داریم

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

که می‌دانیم واگراست. یا، بنا به آزمون انتگرال،

$$\int_1^\infty x^{-1}\,dx=\lim_{b\to\infty}\ln x\Big|_1^b=+\infty$$

و چون انتگرال واگراست، سری نیز واگراست.

بالاخره، اگر $p<1$ آنگاه جملات p-سری بزرگتر از جملات متناظر سری همساز واگرا هستند. از این‌رو، p-سری بنا به آزمون مقایسه‌ای واگراست.

پس اگر $p>1$، سری همگراست و به‌ازای هرمقدار دیگر p واگراست. ■

ملاحظه کردید که می‌توانیم آزمونهای مقایسه‌ای را با اطلاعاتی که دربارهٔ سریهای هندسی و p-سریهای مختلف داریم، ترکیب کنیم.

آزمون مقایسه‌ای حدی

اکنون شکل قویتری از آزمون مقایسه‌ای را عرضه می‌کنیم که به‌آزمون مقایسه‌ای حدی موسوم است. این آزمون مخصوصاً وقتی مفید است که درسری مورد نظر، a_n تابع گویایی از n باشد. مثال زیر نشان می‌دهد که منظورمان چیست.

مثال ۶ آیا فکر می‌کنید در موارد زیر $\sum a_n$ همگراست یا واگرا؟ چرا؟

(الف) $a_n=\dfrac{2n}{n^2-n+1}$

(ب) $a_n=\dfrac{2n^3+100n^2+1000}{(1/8)n^6-n+2}$

بحث در تعیین همگرایی یا واگرایی فقط دمها به‌حساب می‌آیند. و وقتی n خیلی بزرگ است، بزرگترین توانهای n درصورت و مخرج بیش از هرچیزی اهمیت دارند. پس، درمورد (الف) چنین استدلال می‌کنیم

$$a_n=\frac{2n}{n^2-n+1}$$

تقریباً مثل $2n/n^2=2/n$ رفتار می‌کند و ازمقایسهٔ آن با $\sum 1/n$ حدس می‌زنیم $\sum a_n$ واگرا باشد. در مورد (ب) استدلال می‌کنیم که a_n رفتارش تقریباً مثل $2n^3/(1/8)n^6=16/n^3$ است و از مقایسه با $\sum 1/n^3$، که p-سریی‌است با ضابطهٔ $p=3$، حدس می‌زنیم که این‌سری همگرا باشد.

به‌زبان دقیقتر، درقسمت (الف) می‌توانیم بنویسیم

$$d_n=\frac{1}{n} \quad \text{و} \quad a_n=\frac{2n}{n^2-n+1}$$

و نسبت زیر را ملاحظه کنیم

$$\frac{a_n}{d_n}=\frac{2n^2}{n^2-n+1}=\frac{2}{1-\left(\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n^2}\right)}\cdot$$

واضح است که وقتی $n\to\infty$، حد برابراست با ۲:

$$\lim\frac{a_n}{d_n}=2\,.$$

این بدان‌معنی‌است که می‌دانیم اگر در تعریف حد قراردهیم $\epsilon=1$، اندیسی‌چون N وجود دارد به‌قسمی که به‌ازای‌هر $n\geqslant N$ اختلاف a_n/d_n با این‌حد، بیشتر از ۱ نیست

$$\text{به‌ازای } n\geqslant N\text{،}\quad 2-1\leqslant\frac{a_n}{d_n}\leqslant 2+1\,.$$

از این‌رو، به‌ازای $n\geqslant N$، $a_n\geqslant d_n$. پس، بنا به‌آزمون مقایسه‌ای، $\sum a_n$ واگراست زیرا $\sum d_n$ واگراست.

درقسمت (ب)، اگر قرار دهیم $c_n=1/n^3$، به‌راحتی می‌توان نشان‌داد که

$$\lim\frac{a_n}{c_n}=16\,.$$

اگر در تعریف حد قرار دهیم $\epsilon=1$، می‌توان نتیجه‌گرفت که اندیسی‌چون N' وجود دارد به‌قسمی که‌وقتی $n\geqslant N'$، a_n/c_n بین ۱۵ و ۱۷ است. چون $\sum c_n$ همگراست، $\sum 17c_n$ و درنتیجه $\sum a_n$ نیز همگراست. ■

کار حدس‌زنی ما راه را برای انتخاب موفقیت‌آمیز سریهای مورد مقایسه هموار ساخت. در آزمون مقایسه‌ای حدی که در زیر می‌آید، مطالبی را که در این زمینه گفتیم به‌زبان دقیقتری بیان می‌کنیم.

آزمون مقایسه‌ای حدی

الف) آزمون همگرایی. اگر به‌ازای $n\geqslant n_0$ داشته‌باشیم $a_n\geqslant 0$ و سری همگرایی چون $\sum c_n$ وجود داشته‌باشد به‌قسمی که

$c_n > ۰$ و

$$\lim \frac{a_n}{c_n} < \infty \qquad (۹)$$

آنگاه $\sum a_n$ همگراست.

ب) آزمون واگرایی. اگر به‌ازای $n \geqslant n_۰$ داشته باشیم $a_n \geqslant ۰$ و سری واگرایی چون $\sum d_n$ وجود داشته‌باشد به‌قسمی که $d_n > ۰$ و

$$\lim \frac{a_n}{d_n} > ۰ \qquad (۱۰)$$

آنگاه $\sum a_n$ واگراست.

این نتایج را به‌طور رسمی ثابت نمی‌کنیم. قسمت (الف) از این مطلب نتیجه می‌شود که اگر (۹) برقرار باشد، اندیسی چون $N \geqslant n_۰$ و عدد ثابتی چون M وجود دارد به‌قسمی که وقتی $n > N$، $a_n < Mc_n$، و $\sum Mc_n$ همگراست. همین‌طور، اگر (۱۰) برقرار باشد، اندیسی چون $N' \geqslant n_۰$ و عدد ثابتی مثل $k > ۰$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای $n \geqslant N'$، $a_n > kd_n$، و $\sum kd_n$ واگراست.

قسمتهای (الف) و (ب) درشکل ساده‌تری از آزمون مقایسه‌ای حدی به‌صورت زیر درهم ادغام می‌شوند.

صورت ساده شدهٔ آزمون مقایسه‌ای حدی

اگر همهٔ جمله‌های دوسری $\sum a_n$ و $\sum b_n$ به‌ازای $n \geqslant n_۰$ مثبت باشند، و حد a_n/b_n متناهی و مثبت باشد، آنگاه یا هردوسری همگرایند و یا هردو واگرا هستند.

درعمل، اغلب این صورت ساده شدهٔ آزمون مقایسه‌ای حدی را به‌کار می‌بریم

مثال ۷ آیا سریهای زیرهمگرایند یا واگرا؟

$$\text{(الف)}\quad \frac{۳}{۴}+\frac{۵}{۹}+\frac{۷}{۱۶}+\frac{۹}{۲۵}+\dots=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲n+۱}{(n+۱)^۲}$$

$$\text{(ب)}\quad \frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۳}+\frac{۳}{۴}+\frac{۴}{۵}+\frac{۵}{۶}+\dots=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n}{n+۱}$$

$$\text{(پ)}\quad \frac{۱۰۱}{۳}+\frac{۱۰۲}{۱۰}+\frac{۱۰۳}{۲۹}+\dots=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱۰۰+n}{n^۳+۲}$$

$$\text{(ت)}\quad \frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۷}+\dots=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۲^n-۱}$$

حل:

الف) فرض کنید $a_n=(۲n+۱)/(n^۲+۲n+۱)$ و $d_n=۱/n$. دراین‌صورت

$\sum d_n$ واگراست و $\lim \dfrac{a_n}{d_n}=\lim\dfrac{۲n^۲+n}{n^۲+۲n+۱}=۲$.

پس $\sum a_n$ واگراست.

ب) فرض کنید $b_n=n/(n+۱)$. در این صورت $\lim b_n=۱\neq ۰$، پس $\sum b_n$ بنابه آزمون جملهٔ nام واگراست.

پ) فرض کنید $a_n=(۱۰۰+n)/(n^۳+۲)$. وقتی n بزرگ است، این را باید با $n/n^۳=۱/n^۲$ مقایسه کرد، پس فرض می‌کنیم $c_n=۱/n^۲$. حال آزمون مقایسه‌ای حدی را به‌کار می‌بریم

$\sum c_n$ همگراست و $\lim\dfrac{a_n}{c_n}=\lim\dfrac{n^۳+۱۰۰n^۲}{n^۳+۲}=۱$.

پس $\sum a_n$ همگراست.

ت) فرض‌کنید $a_n=۱/(۲^n-۱)$ و $c_n=۱/۲^n$. (استدلال می‌کنیم که وقتی n بزرگ‌است، $۲^n-۱$ نظیر ۲^n رفتار می‌کند). پس

وقتی $n\to\infty$، $\dfrac{a_n}{c_n}=\dfrac{۲^n}{۲^n-۱}=\dfrac{۱}{۱-(۱/۲)^n}\to ۱$.

چون $\sum c_n$ همگراست، نتیجه می‌گیریم $\sum a_n$ نیز همگراست. ■

همچنانکه درمثال زیرمی‌بینید، در استفاده از p-سری برای مقایسه، نکتهٔ اساسی این است‌که p ثابت باشد.

مثال ۸ آیا سری زیرهمگراست یا واگرا؟

$$۱^{-۲}+۲^{-۳/۲}+۳^{-۴/۳}+۴^{-۵/۴}+\dots+n^{-(n+۱)/n}+\dots$$

حل: فرض‌کنید

$$a_n=n^{-(n+۱)/n}=\frac{۱}{n^{۱+(۱/n)}}.$$

این کمی شبیه $۱/n^p$ با ضابطهٔ $p=۱+(۱/n)$ است که بزرگتر از ۱ است. اما $۱+(۱/n)$ ثابت نیست، پس باید درنتیجه گیری محتاط باشیم

وقتی $n\to\infty$، $n^{۱+(۱/n)}=n(n)^{۱/n}$ و $(n)^{۱/n}\to ۱$.

آزمون مقایسه‌ای حدی را با ضابطهٔ $d_n = 1/n$ به‌کار می‌بریم. داریم

$$\frac{a_n}{d_n}=\frac{n}{n(n)^{1/n}}$$

$$=\frac{1}{(n)^{1/n}} \to 1 \quad (\text{وقتی } n\to\infty)$$

می‌دانیم که $\sum d_n$ واگراست، و اگر آزمون مقایسه‌ای حدی را به‌کار ببریم نتیجه می‌گیریم که $\sum a_n$ نیز واگراست. ■

مثال ۹ آیا سری $\sum_{n=1}^{\infty}(\ln n)/n^{3/2}$ همگراست؟

حل: فرض کنید $a_n=(\ln n)/n^{3/2}$ و $b_n=n^c/n^{3/2}$ که در آن، c ثابت مثبتی کوچکتر از ۱/۲ است. مثلاً می‌توانیم c را برابر با ۱/۴ اختیار کنیم. حال، $b_n=1/n^{3/2-c}=1/n^p$ که در آن $p=3/2-c>1$. (وقتی $c=1/4$، $p=5/4$.) از این‌رو $\sum b_n$ همگراست. چون به‌ازای هر ثابت مثبت c، $\ln n$ آهسته‌تر از n^c به‌سمت بینهایت می‌رود (بخش ۱۱.۳، مثال ۸)، این گمان در ذهن ما پدید می‌آید که $\sum a_n$ نیز همگراست. برای بررسی این حدس، آزمون مقایسه‌ای حدی را به‌کار می‌بریم

$$\lim\frac{a_n}{b_n}=\lim\frac{\ln n}{n^c}=\lim\frac{1/n}{cn^{c-1}} \quad (\text{بنا به قاعدهٔ هوپیتال})$$

$$=\lim\frac{1}{cn^c}=0.$$

سری مفروض همگراست. ■

دقت کنید که در مثال ۹ صورت سادهٔ شدهٔ آزمون مقایسه‌ای حدی را به‌کار نبردیم چون حد a_n/b_n صفر است، و مثبت نیست.

درسه بخش آتی، آزمونهای دیگری را برای همگرایی معرفی می‌کنیم ولی ارائهٔ خلاصه‌ای از آنچه تا اینجا آموخته‌ایم مفید است. فهرست کاملتری از آزمونها، به‌شکل نمودار عمل، درانتهای بخش ۱۱.۸ خواهد آمد. موضوع براورد کردن مجموع یك سری همگرا در بخش ۱۱.۹ مورد بحث قرار خواهد گرفت.

خلاصهٔ آزمونهای همگرایی

۱. تعریف: سری $\sum a_n$ همگراست اگر و تنها اگر دنبالهٔ مجموعهای جزئی $\{s_n\}$، که s_n به‌صورت زیر است، همگرا باشد

$$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

۲. آزمون جملهٔ nام برای واگرایی: اگر وقتی $n\to\infty$، $a_n\not\to 0$، سری واگراست.

۳. آزمون سری هندسی: اگر $\sum a_n=a+ar+ar^2+\cdots$ یك سری هندسی باشد، این سری به $a/(1-r)$ همگراست اگر $|r|<1$، و واگراست اگر $|r|\geqslant 1$ مگر اینکه $a=0$.

۴. آزمون کراندار بودن در مورد سریهای با جملات نامنفی: اگر به‌ازای هر $n\geqslant 1$، $a_n\geqslant 0$، آنگاه سری $\sum a_n$ همگراست اگر و تنها اگر دنبالهٔ مجموعهای جزئی $\{s_n\}$ از بالا کراندار باشد.

۵. الف) آزمون مقایسه‌ای برای همگرایی: اگر $\sum a_n$ سریی با جملات نامنفی باشد و سری همگرایی چون $\sum b_n$ وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر n، $a_n\leqslant b_n$، آنگاه $\sum a_n$ همگراست.

ب) آزمون مقایسه‌ای حدی برای همگرایی: اگر $\sum a_n$ سریی با جملات نامنفی باشد و سری همگرایی چون $\sum b_n$ با جملات مثبت وجود داشته باشد به‌طوری که $\lim(a_n/b_n)$ متناهی باشد، آنگاه $\sum a_n$ همگراست.

۶. الف) آزمون مقایسه‌ای برای واگرایی: اگر $\sum a_n$ سریی با جملات نامنفی باشد وسری واگرایی چون $\sum d_n$ با جملات نامنفی وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر n، $a_n\geqslant d_n$، آنگاه $\sum a_n$ واگراست.

ب) آزمون مقایسه‌ای حدی برای واگرایی: اگر $\sum a_n$ سریی با جملات نامنفی باشد و سری واگرایی چون $\sum d_n$ با جملات مثبت وجود داشته باشد به‌طوری که $\lim(a_n/d_n)$ مثبت باشد، آنگاه $\sum a_n$ واگراست.

۷. صورت ساده شدهٔ آزمون مقایسه‌ای حدی: اگر $\sum a_n$ و $\sum b_n$ سریهایی از اعداد مثبت باشند به‌طوری که $\lim(a_n/b_n)$ مثبت و متناهی باشد، آنگاه $\sum a_n$ و $\sum b_n$ یا هردوهمگرا و یا هردو واگرایند.

۸. آزمون انتگرال: فرض کنید $a_n=f(n)$ که درآن، $f(x)$ به‌ازای هر $x\geqslant 1$ یك تابع نزولی، مثبت، و پیوسته‌از x است. دراین‌صورت، سری $\sum a_n$ و انتگرال

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

یا هردو همگرا و یا هردو واگرایند.

مسأله‌ها

درهریك از مسائل ۱-۲۴، معلوم کنید که سری‌داده‌شده همگراست یا واگرا. درهرمورد، برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۱. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}$

۲. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+2}$

۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{2^n}$

۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n}$

۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{n^2}$

۶. $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{8^n}$

۷. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

۸. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

۹. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$

۱۰. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{n+1}$

۱۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\ln n}$

۱۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt{n+1}}$

۱۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}$

۱۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$

۱۵. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$

۱۶. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \frac{(\ln n)^{10}}{n^{2/3}}$

۱۷. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

۱۸. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$

۱۹. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

۲۰. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

۲۱. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n \cdot 2^n}$

۲۲. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^n}$

۲۳. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}+1}$

۲۴. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n+1}{n(n+1)(n+2)}$

۲۵. نشان دهید که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots$$

واگراست. (راهنمایی: آزمون انتگرال را به‌کار برید.)

۲۶. **p-سری لگاریتمی.** فرض کنید p یك ثابت مثبت باشد، نشان دهید که

$$\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$$

همگراست اگر و تنها اگر $p > 1$. (انتگرالگیری از ۱ شروع نمی‌شود و از ۲ شروع می‌شود زیرا $\ln 1 = 0$.) درمورد همگرایی یا واگرایی سریهای زیر چه نتیجه‌ای می‌توانید بگیرید؟

الف) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$

ب) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1.01}}$

پ) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{n^{1/2}}{(\ln n)^3}$

ت) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n^3)}$

ث) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{(n+1)/n}}$

۲۷. ماشین‌حساب دربراورد کردن مجموعهای جزئی سری همساز واگرا، نابرابری (۷) باضابطهٔ $f(x) = 1/x$، می‌گوید که

$$\ln n < 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} < 1+\ln n.$$

فرض کنید که مجموع، با جملهٔ $s_1 = 1$ درسیزده میلیارد سال قبل (سن تخمینی عالم) شروع شده باشد و از آن زمان هر ثانیه یك جمله به مجموع اضافه شده باشد. انتظار دارید بزرگی s_n امروز چقدر باشد؟

۲۸. سری $\sum_{n=1}^{\infty}(1/nx)$ بهازای هیچ مقداری از x همگرا نیست. چرا؟

۲۹. نشان دهید که اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ سری همگرایی با جملات نامنفی باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n/n)$ همگراست.

۳۰. نشان دهید که اگر $\sum a_n$ و $\sum b_n$ سریهای همگرایی با ضوابط $a_n \geqslant 0$ و $b_n \geqslant 0$ باشند، آنگاه $\sum a_n b_n$ همگراست. (راهنمایی: از اندیسی به بعد، $a_n b_n \leqslant a_n + b_n$.)

۳۱. دنباله‌ای از اعداد چون $\{s_n\}$ که در آن بهازای هر n، $s_n \geqslant s_{n+1}$، یك **دنبالهٔ غیرصعودی** نامیده می‌شود. دنباله‌ای چون $\{s_n\}$ از پایین کراندار است اگر ثابتی متناهی مثل M با ضابطهٔ $M \leqslant s_n$ بهازای هر n وجود داشته باشد. چنین عدد Mی یك کران پایین دنباله نامیده می‌شود. از قضیهٔ ۱۰ نتیجه بگیرید که دنباله‌ای غیرصعودی که از پایین کراندار است، همگراست، و دنباله‌ای غیرصعودی که از پایین کراندار نیست، واگراست.

۳۲. آزمون چگالش کوشی. این آزمون چنین می‌گوید: فرض کنید $\{a_n\}$ یك دنبالهٔ غیرصعودی (بهازای هر n، $a_n \geqslant a_{n+1}$) از جملات مثبتی باشد که به ۰ همگرا هستند. در این صورت، $\sum a_n$ همگراست اگر و تنها اگر $\sum 2^n a_{2^n}$ همگرا باشد. مثلاً، $\sum(1/n)$ واگراست چون $\sum 2^n \cdot (1/2^n) = 1$ واگراست. نشان دهید که چرا این آزمون درست است.

۳۳. با استفاده از آزمون چگالش کوشی در مسألهٔ ۳۲، نشان دهید که

الف) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ واگراست

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ همگراست اگر $p > 1$ و واگراست اگر $p \leqslant 1$.

۳۴. از تصاویری نظیر شکل ۱۲.۱۱ چنین برمی‌آید که وقتی n افزایش می‌یابد، تغییر بسیار کمی در تفاضل بین مجموع

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

و انتگرال

$$\ln n = \int_1^n \frac{1}{x}\, dx$$

رخ می‌دهد. برای بررسی این ایده، گامهای زیر را بپیمایید.

الف) درنابرابری (۷) قراردهید $f(x) = 1/x$ و نشان دهید که

$$\ln(n+1) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leqslant 1 + \ln n$$

یا

$$0 < \ln(n+1) - \ln n \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \leqslant 1.$$

بنابراین، دنبالهٔ

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

از پایین و از بالا کراندار است.

ب) نشان دهید که

$$\frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, dx = \ln(n+1) - \ln n$$

و با استفاده از این نتیجه نشان دهید که دنبالهٔ $\{a_n\}$ درقسمت (الف) نزولی است.

چون دنباله‌ای نزولی که از پایین کراندار باشد همگراست (مسألهٔ ۳۱)، اعداد a_n که درقسمت (الف) تعریف شدند، همگرایند

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \to \gamma.$$

عدد γ، که مقدارش ...۰.۵۷۷۲ است، ثابت اویلر نامیده می‌شود. برخلاف اعداد خاص دیگر نظیر π و e هیچ عبارت دیگری که γ را با فرمولبندی ساده‌ای بیان کند، پیدا نشده است.

۳۵. اعداد اول، دنبالهٔ

$$\{p_n\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots\}$$

را تشکیل می‌دهند. می‌دانیم که $\lim_{n\to\infty}[n(\ln n)/p_n] = 1$. با استفاده از این مطلب نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{p_n} + \cdots$$

واگراست. (مسألهٔ ۲۶ را ببینید.)

۶.۱۱ سریهای بـا جملات نامنفی: آزمونهای نسبت و ریشه

آزمونهای همگرایی‌ که مبتنی بر مقایسهٔ یك سری با سری دیگر یا با یك انتگرال هستند، آزمونهای **برونی** نامیده‌می‌شوند. این آزمونها خیلی مفیدند ولی به‌دلایلی باید به جستجوی آزمونهایی بپردازیم که شامل چنین مقایسه‌هـایی نباشند. در عمل، ممکن است نتوانیم به‌راحتی سری دیگری یا تابع انتگرالپذیری پیدا کنیم کـه مقایسه را با آن انجام دهیم و علی‌الاصول، تمام اطلاعات مربوط به یك سری مفروض باید درجملات خودش نهفته باشد. پس، حال توجه خود را به‌آزمونهای **درونی** معطوف می کنیم که فقط با خود سری مورد نظر سروکار دارند.

آزمون نسبت

دو آزمون بعدی، درونی‌اند وکاربردشان آسان است. اولین آزمون، آزمون نسبت است که آهنگ رشد (یا نزول) یك‌سری را با بررسی نسبت $a_{n+۱}/a_n$ می‌سنجد. درمـورد سری هندسی، آهنگ رشد، ثابت است و سری همگراست اگر و تنها اگـر قدرمطلق نسبت آن کوچکتر از ۱ باشد. درمواردديگر اگر این‌نسبت‌ثابت نباشد، ممکن است بتوانیم یك‌سری هندسی بـرای مقایسه پیدا کنیم. این مطلب درمثال زیر روشن می‌شود.

مثال ۱ فرض‌کنید $a_{۱}=۱$ و $a_{n+۱}$ را به‌صورت زیر تعریف کنید

$$a_{n+۱}=\frac{n}{۲n+۱}a_n\,.$$

آیا سری $\sum a_n$ همگراست یا واگرا؟

حل: درآغاز کار، چندجملهٔ سری را می نویسیم

$$a_{۱}=۱,\quad a_{۲}=\frac{۱}{۳}a_{۱}=\frac{۱}{۳}$$

$$a_{۳}=\frac{۲}{۵}a_{۲}=\frac{۱\times ۲}{۳\times ۵},\quad a_{۴}=\frac{۳}{۷}a_{۳}=\frac{۱\times ۲\times ۳}{۳\times ۵\times ۷}\,.$$

ملاحظه می کنیم کـه هرجمله کمتر از ۱/۲ جملهٔ قبل از خود است، زیرا $n/(۲n+۱)$ کوچکتراز ۱/۲ است. بنا براین، جملات‌سری مفروض نا بیشتر از جملات سری هندسی

$$۱+\left(\frac{۱}{۲}\right)+\left(\frac{۱}{۴}\right)+\cdots+\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱}+\cdots$$

هستند که به ۲ همگراست. پس، سری ما نیز همگراست و مجموع آن کوچکتر از ۲ است. ■

برای اثبات درستی‌آزمون نسبت، همان‌طورکه درمثال بالا عمل کـردیم، سری را با سری هندسی مناسبی مقایسه می کنیم ولی وقتی ایـن آزمون را به کار می‌بریم، عملاً مقایسهٔ مستقیمی انجام نمی‌دهیم.

آزمون نسبت

فرض‌کنید $\sum a_n$ سریی با جملات مثبت باشد و نیز فرض کنیدکه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+۱}}{a_n}=\rho \quad (\text{حرف یونانی رو})$$

دراین‌صورت

الف) سری همگراست اگر $\rho<۱$

ب) سری واگراست اگر $\rho>۱$

پ) سری ممکن است همگرا یـا واگرا باشد اگر $\rho=۱$.
(آزمون اطلاعی به‌دست نمی‌دهد.)

اثبات

الف) ابتدا فرض‌کنیدکـه $\rho<۱$ و تصورکنید r عـددی بین ρ و ۱ باشد. دراین‌صورت، عدد

$$\epsilon=r-\rho$$

مثبت است. چون

$$\frac{a_{n+۱}}{a_n}\to\rho$$

وقتی n بـه‌قدر کافی بزرگ بـاشد، مثلاً بـه‌ازای هر $n\geqslant N$، $a_{n+۱}/a_n$ باید فاصله‌اش از ρ کمتر از ϵ باشد. پس

وقتی $n>N$، $\dfrac{a_{n+۱}}{a_n}<\rho+\epsilon=r$.

یعنی

$$\begin{aligned}
&a_{N+۱}<ra_N\\
&a_{N+۲}<ra_{N+۱}<r^{۲}a_N\\
&a_{N+۳}<ra_{N+۲}<r^{۳}a_N\\
&\quad\vdots\\
&a_{N+m}<ra_{N+m-۱}<r^{m}a_N\,.
\end{aligned}$$

این نابرابریها نشان می‌دهندکه جملات سری ما، بعداز جملهٔ Nام، سریعتر از جملات یك سری هندسی بـا نسبت $r<۱$ به‌صفر میل می کنند. به‌زبان دقیقتر، سری $\sum c_n$ را با ضابطهٔ $c_n=a_n$ به‌ازای $n=۱,۲,\ldots,N$ و $c_{N+۱}=ra_N$، $c_{N+۲}=r^{۲}a_N$، ...، $c_{N+m}=r^{m}a_N$، ... درنظر بگیریـد. حـال بـه ازای هـر n،

$a_n \leqslant c_n$ ، و

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} + a_N$$
$$+ra_N + r^2 a_N + \cdots$$
$$= a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1}$$
$$+ a_N(1 + r + r^2 + \cdots).$$

چون $|r| < 1$ ، سری هندسی $1 + r + r^2 + \cdots$ همگراست، و از این‌رو $\sum c_n$ نیز همگـراست. بنا بــه آزمون مقایسه، $\sum a_n$ نیز همگراست.

ب) سپس فرض کنید که $\rho > 1$. در این‌صورت، از اندیس M به‌بعد داریم

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \text{یا} \quad a_M < a_{M+1} < a_{M+2} < \cdots.$$

از این‌رو، وقتی n بینهـایت می‌شود، جملات سری بــه صفر میل نمی‌کنند، و سری بنا به آزمون جملهٔ nام واگراست.

پ) و بالاخره، دوسری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

نشان‌می‌دهند که وقتی $\rho = 1$ ، باید آزمون دیگری برای همگرایی به‌کاررود.

برای $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} \to 1.$$

برای $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to 1^2 = 1$$

درهر دومورد، $\rho = 1$ ولی‌سری اول واگراست درحالی که سری دوم همگراست.

درمواردی‌که جملات سری متضمن‌فاکتوریلهایی ازعبارات شامل n و یـا عباراتی به‌توان n یـا ترکیبات آن هستند، آزمون نسبت غالباً مؤثر واقع‌می‌شود. چند تا از این موارد را درمثال‌زیر می‌بینید. به‌یاد بیاورید که از

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$$

نتیجه‌می‌شود

$$(n+1)! = (n+1)n!$$

و $(2(n+1))! = (2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)!$. از ایـن روابط درقسمتهای (الف) و (ب)ی مثال استفاده شده‌است. درقسمت (ب) همچنین ازاین‌مطلب که $4 = 4^{n+1}/4^n$ ، بهره‌گیری شده‌است. به‌کمک ویژگیهای مربوط به‌حذف فاکتوریلها و توانها، عبارات ساده‌ای برای نسبت a_{n+1}/a_n به‌دست می‌آید.

مثال ۲ همگرایی یا واگرایی‌سریهای زیررا با استفاده ازآزمون نسبت بیازمایید.

(الف) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,n!}{(2n)!}$

(ب) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!\,n!}{(2n)!}$

(پ) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n}$

حل:

الف) اگر $a_n = n!\,n!/(2n)!$ ، آنگاه

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+2)!}$$

و

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\,(n+1)!\,(2n)!}{n!\,n!\,(2n+2)(2n+1)(2n)!}$$
$$= \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{4n+2} \to \frac{1}{4}.$$

این سری همگراست زیرا $\rho = 1/4$ کوچکتر از ۱ است.

ب) اگر $a_n = 4^n n!\,n!/(2n)!$ ، آنگاه

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4^{n+1}(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \times \frac{(2n)!}{4^n n!\,n!}$$
$$= \frac{4(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{2(n+1)}{2n+1} \to 1.$$

چون این‌حد عبارت است از $\rho = 1$ ، صرفاً براساس‌آزمون‌نسبت نمی‌توان نتیجه‌گرفت که این سری همگراست یا واگرا. ولی اگر توجه‌کنیم که $a_{n+1}/a_n = (2n+2)/(2n+1)$ ، نتیجه می‌گیریم که a_{n+1} همیشه بزرگتر از a_n است زیرا $(2n+2)/(2n+1)$ همیشه‌بزرگتراز ۱ است. بنابراین، همهٔ جملات ناکمتراز $a_1 = 2$ هستند، و وقتی n به بینهایت می‌گـراید، جملهٔ nام بــه سمت صفر

نمی‌رود. از این‌رو، سری بنا به آزمون جملهٔ nام واگراست.

پ) درمورد سری $\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+5)/3^n$ داریم

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2^{n+1}+5)/3^{n+1}}{(2^n+5)/3^n}=\frac{1}{3}\times\frac{2^{n+1}+5}{2^n+5}$$

$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{2+5\times 2^{-n}}{1+5\times 2^{-n}}\right)\to\frac{1}{3}\times\frac{2}{1}=\frac{2}{3}.$$

این سری همگراست چون $\rho=2/3$ کوچکتراز ۱ است.

این بدان‌معنی نیست که ۲/۳ مجموع سری است. در واقع،

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+5}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{3^n}$$

$$=\frac{1}{1-(2/3)}+\frac{5}{1-(1/3)}=\frac{21}{2}. \quad ■$$

نکته آزمون نسبت گرچه برای آن نوع سریهایی که اکنون دیدیم مفید است، ولی در مورد سریهایی از نوع p-سری چندان فایده‌ای ندارد.

در مثال زیر، سری برحسب توانهای x بیان شده‌است. با کاربرد آزمون نسبت، خواهیم‌دیدکه این‌سری به‌ازای چه‌مقادیری از x همگراست. به‌ازای آن مقادیر، سری تابعی از x را تعریف می‌کند. (در فصل ۱۲، این‌گونه سریها را با تفصیل بیشتری مورد بحث قرار خواهیم داد.)

مثال ۳ سری زیر به‌ازای چه‌مقادیری از x همگراست؟

$$x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$$

حل: جملهٔ nام سری این است

$$a_n=\frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

ابتدا حالتی را که x مثبت است درنظرمی گیریم. دراین حالت، سری یك‌سری مثبت است و

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{x^{2(n+1)-1}}{2(n+1)-1}\cdot\frac{2n-1}{x^{2n-1}}=\frac{(2n-1)x^2}{2n+1}\to x^2.$$

بنابراین، آزمون نسبت می‌گویدکه این سری همگراست اگر x مثبت وکوچکتراز ۱ باشد و واگراست اگر x بزرگتراز ۱ باشد. چون فقط توانهای فرد x درسری ظاهرمی‌شوند، می‌بینیم که اگر $-x$ به‌جای x قرارگیرد، فقط علامت سری تغییرمی‌کند.

پس همچنین سری به‌ازای $-1<x\leqslant 0$ همگرا و به‌ازای $x<-1$ واگراست. سری به‌ازای $x=0$ همگرا به‌صفراست.

پس تا اینجا دانستیم که سری

به‌ازای $|x|<1$ همگرا و به‌ازای $|x|>1$ واگراست

ولی نمی‌دانیم که به‌ازای $|x|=1$ چه اتفاقی می‌افتد. برای آزمودن سری در $x=1$، آزمون انتگرال را درمورد سری

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots$$

به‌کارمی بریم که این سری با قرار دادن $x=1$ در سری اصلی به‌دست می‌آید. انتگرال مربوطه این است

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{2x-1}=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln(2x-1)\Big|_1^b\right)=\infty.$$

پس وقتی $x=1$ سری به $+\infty$ واگراست. و وقتی $x=-1$ سری به $-\infty$ واگراست. پس‌تنها مقادیری از x که به‌ازای‌آنها سری مفروض همگراست عبارت‌اند از $-1<x<1$. ■

آزمون ریشهٔ nام

به‌سؤال «آیا $\sum a_n$ همگراست؟» برمی گردیم. وقتی فرمول‌ساده‌ای برای a_n وجود دارد، می‌توانیم یکی ازآزمونهای‌بالا را به‌کار بریم. ولی به‌مثال زیر توجه کنید.

مثال ۴ فرض‌کنید $a_n=f(n)/2^n$ که‌درآن،

$$f(n)=\begin{cases} n & \text{اگر } n \text{ یك‌عدد اول باشد}\\ 1 & \text{درغیراین‌صورت}\end{cases}$$

آیا سری $\sum a_n$ همگراست؟

حل: چند جمله ازسری را می‌نویسیم

$$\sum a_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{1}{16}+\frac{5}{32}+\frac{1}{64}+\frac{7}{128}$$

$$+\cdots+\frac{f(n)}{2^n}+\cdots$$

واضح است که این سری، سری هندسی نیست. وقتی $n\to\infty$ جملهٔ nام به‌صفرمیل می‌کند، لذا مطمئن‌نیستیم که سری‌واگرا باشد. آزمون انتگرال نتیجه بخش به‌نظر نمی‌رسد. ازآزمون نسبت این نتیجه به‌دست می‌آید

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}\,\frac{f(n+1)}{f(n)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & \text{اگر نه } n \text{ عدد اول باشد و نه } n+1\\[2mm] \dfrac{1}{2n} & \text{اگر } n \text{ یك عدد اول نا کمتر از ۳ باشد}\\[2mm] \dfrac{n+1}{2} & \text{اگر } n+1 \text{ یك عدد اول ناکمتر از ۵ باشد}\end{cases}$$

این نسبت گاهی به‌صفر نزدیك، گاهی بسیار بزرگ، و گاهی برابر با ۱/۲ است. این نسبت، حدی ندارد زیرا تعداد اعداد اول، بینهایت است. آزمونی که به‌سؤال مطرح شده در این مثال پاسخ (مثبت) می‌دهد، آزمون ریشهٔ nام است. برای استفاده از این آزمون توجه کنید که

$$\sqrt[n]{a_n}=\frac{\sqrt[n]{f(n)}}{2}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[n]{n}}{2} & \text{اگر } n \text{ یك عدد اول باشد}\\[2mm] \dfrac{1}{2} & \text{درغیر این‌صورت}\end{cases}$$

پس در این مثال، همیشه درست است که

$$\frac{1}{2}\leqslant\sqrt[n]{a_n}\leqslant\frac{\sqrt[n]{n}}{2}$$

و $\lim \sqrt[n]{a_n}=1/2$ (بنا به‌قضیهٔ ساندویچ درمورد حدها). چون این‌حد کوچکتر از ۱ است، آزمون ریشهٔ nام، همان‌طور که هم‌اکنون خواهیم دید، می‌گوید که سری مفروض همگراست. ■

آزمون ریشهٔ n ام

فرض کنید $\sum a_n$ سریی با ضابطهٔ $a_n\geqslant 0$ به ازای $n\geqslant n_0$ باشد و نیز تصور کنید که

$$\sqrt[n]{a_n}\to\rho .$$

دراین‌صورت

الف) سری همگراست اگر $\rho<1$

ب) سری واگراست اگر $\rho>1$

پ) آزمون جواب قطعی نمی‌دهد اگر $\rho=1$.

اثبات

الف) فرض می‌کنیم $\rho<1$، و $\epsilon>0$ را چنان کوچك انتخاب می‌کنیم که $\rho+\epsilon<1$. چون $\sqrt[n]{a_n}\to\rho$، جملات $\sqrt[n]{a_n}$ نهایتاً بیشتر از ϵ به ρ نزدیك می‌شوند. به‌عبارت دیگر، اندیسی چون $N\geqslant n_0$ هست به‌قسمی که

$$\sqrt[n]{a_n}<\rho+\epsilon \quad \text{وقتی } n\geqslant N،$$

پس این‌هم درست‌است که

$$a_n<(\rho+\epsilon)^n \quad \text{وقتی } n\geqslant N.$$

حال، $\sum_{n=N}^{\infty}(\rho+\epsilon)^n$ که یك سری هندسی با نسبت $(\rho+\epsilon)<1$ است، همگراست. بنا به‌مقایسه، $\sum_{n=N}^{\infty}a_n$ همگراست که از آن نتیجه می‌شود سری زیرنیز همگراست

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+\cdots+a_{N-1}+\sum_{n=N}^{\infty}a_n.$$

ب) فرض می‌کنیم $\rho>1$. دراین صورت، به‌ازای همهٔ اندیسهای بزرگتر از اندیسی چون M داریم $\sqrt[n]{a_n}>1$، بنابراین به‌ازای $n>M$ داریم $a_n>1$ و جملات سری به‌صفر همگرا نیستند. پس سری بنا به‌آزمون جملهٔ nام واگراست.

پ) سریهای $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$ و $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ نشان می‌دهند که این آزمون به ازای $\rho=1$ جواب قطعی نمی‌دهد. اولین سری واگرا و دومین‌سری همگراست، ولی درهردومورد، $\sqrt[n]{a_n}\to 1$.

مثال ۵ درمورد سری $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^n)$ داریم

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\frac{1}{n}\to 0 .$$

پس سری همگراست. ■

مثال ۶ درمورد سری $\sum_{n=1}^{\infty}(2^n/n^2)$ داریم

$$\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}}=\frac{2}{\sqrt[n]{n^2}}=\frac{2}{(\sqrt[n]{n})^2}\to\frac{2}{1^2}=2 .$$

پس سری واگراست. ■

مثال ۷ درمورد سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-1/n)^n=0+(1/4)+(8/27)+\cdots$$

داریم

$$\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\to 1 .$$

چون $\rho=1$ ، آزمون ریشه نتیجه‌بخش نیست. ولی به‌کمك آزمون جملهٔ nام برای واگرایی می بینیم که

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{-1}{n}\right)^n \to e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

پس سری واگراست. ■

فهرست آزمونها

برای آزمودن همگرایی یا واگرایی سریهای نامتناهی، نه آزمون داریم:

۱. آزمون سری هندسی.

۲. آزمون جملهٔ nام برای واگرایی (که درمورد همهٔ سریها قابل کاربرداست).

۳. آزمون «از بالا کراندار بودن» (که درمورد مجموعهای جزئی سریهای نامنفی به‌کارمی‌رود).

۴. الف) آزمون مقایسه‌ای برای همگرایی (سریهای نامنفی به‌ازای $n\geqslant n_0$).
ب) آزمون مقایسه‌ای برای واگرایی (سریهای نامنفی به‌ازای $n\geqslant n_0$).

۵. الف) آزمون مقایسه‌ای حدی برای همگرایی (برای همان سریهای ۴ (الف)).
ب) آزمون مقایسه‌ای حدی برای واگرایی (برای همان سریهای ۴ (ب)).

۶. صورت ساده شدهٔ آزمون مقایسه‌ای حدی (سریهای مثبت).

۷. آزمون انتگرال (سریهای نزولی مثبت).

۸. آزمون نسبت (سریهای مثبت).

۹. آزمون ریشهٔ nام (سریهای نامنفی به‌ازای $n\geqslant n_0$).

توجه: این آزمونها را برای مشخص کردن همگرایی یا واگرایی سریهای با جملات نامثبت یا منفی هم می‌توان به‌کار برد. کافی است در سری مورد نظر از ۱− فاکتور بگیریم و سری حاصل را که جملاتش نامنفی یا مثبت‌اند بیازماییم.

مثال ۸ سری زیر واگراست

$$\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}=-1\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$ ■

مثال ۹

$$\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{1}{2^n}=-1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=-1\times 2=-2.$$ ■

مسأله‌ها

درمسأله‌های ۱–۲۶ ، معلوم کنید که سری مفروض همگراست یا واگرا. برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۱. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

۲. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$

۳. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{10^n}$

۴. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n}$

۵. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-2}{n}\right)^n$

۶. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{1/25^n}$

۷. $\sum_{n=1}^{\infty}n!\,e^{-n}$

۸. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{3^n}$

۹. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n$

۱۰. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$

۱۱. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

۱۲. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{2}{n^2}\right)$

۱۳. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]$

۱۴. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$

۱۵. $\sum_{n=1}^{\infty}\tan\left(\frac{\ln n}{n}\right)$

۱۶. $\sum_{n=1}^{\infty}\tan(2^{-n}\ln n)$

۱۷. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

۱۸. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$

۱۹. $\sum_{n=2}^{\infty}n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

۲۰. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\tan\left(\frac{2+n}{n^2+5}\right)$

۲۱. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n!}$

۲۲. $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}(n^3)$

۲۳. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{3!\,n!\,3^n}$

۲۴. $\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{n^2}{2^n}$

۲۵. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$

۲۶. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

درمسأله‌های ۲۷ـ۳۲، همهٔ مقادیری از x راکه به‌ازای آنها سری مفروض همگراست، بیابید. پیشنهاد: ابتدا درجستجوی سری هندسی برآیید، سپس آزمون نسبت یا آزمون ریشهٔ nام را به‌کار گیرید، و درصورت لزوم ازآزمونهای دیگری استفاده کنید.

۲۷. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|nx^n|}{2^n}$

۲۸. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)x^{2n-1}}{4^n}$

۲۹. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2+1}{3}\right)^n$

۳۰. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{|x|}\right)^n$

۳۱. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n^2}$

۳۲. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,n!\,|2x|^n}{(2n)!}$

درهریك ازمسأله‌های ۳۳ـ۴۱، جملات یك‌سری با فرمولهای داده شده تعریف شده‌اند. آیا سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگراست یا واگرا؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۳۳. $a_1=2,\quad a_{n+1}=\frac{1+\sin n}{n}a_n$

۳۴. $a_1=\frac{1}{3},\quad a_{n+1}=\frac{3n-1}{2n+5}a_n$

۳۵. $a_1=3,\quad a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$

۳۶. $a_1=2,\quad a_{n+1}=\frac{2}{n}a_n$

۳۷. $a_1=-1,\quad a_{n+1}=\frac{1+\ln n}{n}a_n$

۳۸. $a_1=\frac{1}{2},\quad a_{n+1}=\frac{n+\ln n}{n+10}a_n$

۳۹. $a_n=\frac{2^n n!\,n!}{(2n)!}$

۴۰. $a_n=\frac{(3n)!}{n!\,(n+1)!\,(n+2)!}$

۴۱. $a_1=1$ ، $a_{n+1}=\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}a_n$ (راهنمایی: چندتا ازجملات سری را بنویسید، ببینید چه عاملهایی یکدیگر را حذف می‌کنند، و سپس تعمیم دهید.)

۷.۱۱ همگرایی مطلق

اکنون روشهایی راکه برای پاسخ‌دادن به‌سؤالات‌راجع به‌همگرایی سریهای با جملات نامنفی عرضه کردیم، درمورد سریهایی کـه هم جملات مثبت و هم جملات منفی دارند، تعمیم می‌دهیم. این تعمیم براساس قضیه‌ای میسرمی‌شود که می گوید اگـر یـك‌سری پس از تغییر عـلامت تمـام جملات منفی‌اش همگـرا بـاشد، آن سری همگراست.

قضیهٔ ۱۱

قضیهٔ همگرایی مطلق

اگر $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ همگرا باشد، $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگراست.

اثبات قضیه

برای هر n،

$$-|a_n| \leqslant a_n \leqslant |a_n|$$

پس

$$0 \leqslant a_n + |a_n| \leqslant 2|a_n|.$$

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد، $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ همگراست و بنا به آزمون مقایسه‌ای، سری نامنفی

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|)$$

همگراست. حال، برابری $a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|$ به‌ما امکان می‌دهد که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را به‌صورت تفاضل دوسری همگرا بنویسیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n| - |a_n|)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|.$$

پس، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست. ■

نتیجهٔ واضحی از قضیهٔ ۱۱ (که عکس نقیض این قضیه هم نامیده می‌شود) به‌صورت زیر است.

نتیجه

اگر $\sum a_n$ واگرا باشد، $\sum |a_n|$ واگراست.

(مسألهٔ ۱۹ را ببینید.)

تعریف

سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را **مطلقاً همگرا** گوییم اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد.

اکنون قضیهٔ ۱۱ را می‌توانیم به‌این‌صورت بیان کنیم که هرسری مطلقاً همگرا، همگراست. ولی در بخش بعد خواهیم دید که عکس این‌حکم درست‌نیست. بسیاری ازسریهای همگرا، مطلقاً همگرا نیستند. یعنی، سریهای بسیاری هستندکه همگرایی‌شان به‌داشتن بینهایت جملهٔ مثبت و منفی که به‌ترتیب خاصی مرتب‌شده باشند، بستگی دارد.

در اینجا مثالهایی می‌آوریم که نشان می‌دهند این‌قضیه در چه مواردی‌می‌تواند برای‌تعیین‌همگرایی به‌کاررود و درچه‌مواردی نمی‌تواند.

مثال ۱ سری زیر را درنظر بگیرید

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots.$$

سری متناظر قدرمطلقها این است

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$$

که همگراست چون یك p-سری با ضابطهٔ $p = 2 > 1$ است (بخش ۵.۱۱). بنابراین

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$$

مطلقاً همگراست. پس

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$$

همگراست. ■

مثال ۲ سری زیر را درنظر بگیرید

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2} = \frac{\sin 1}{1} + \frac{\sin 2}{4} + \frac{\sin 3}{9} + \cdots.$$

سری متناظر قدرمطلقها این است

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| = \frac{|\sin 1|}{1} + \frac{|\sin 2|}{4} + \cdots.$$

که بر اساس مقایسه با $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$ همگراست چون به ازای هر n، $|\sin n| \leqslant 1$. سری اصلی مطلقاً همگراست، پس همگرا نیز هست. ■

مثال ۳ سری زیر را درنظر بگیرید

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

سری متناظر قدرمطلقها این است

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots.$$

که واگراست. از این مطلب هیچ نتیجه‌ای درمورد همگرایی یا واگرایی سری اصلی نمی‌توان گرفت. آزمون دیگری باید یافت. در واقع، سری اصلی همان‌طور که در بخش بعد خواهیم دید همگراست. ■

مثال ۴ سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{5n+1}=-\frac{1}{6}+\frac{2}{11}-\frac{3}{16}+\frac{4}{21}-\cdots$$

بنا به آزمون جملهٔ nام همگرا نیست. پس، بنا به نتیجهٔ قضیهٔ ۱۱، این سری مطلقاً همگرا نیست. ■

نکته می‌دانیم که اگر $\sum|a_n|$ همگرا باشد، $\sum a_n$ همگراست، ولی در حالت کلی مجموعهای این دوسری یکسان نیست. مثلاً

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{2^n}\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{1-(1/2)}=2$$

درحالی که

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}=\frac{1}{1+(1/2)}=\frac{2}{3}.$$

در واقع، وقتی یك سری $\sum a_n$ مطلقاً همگراست فقط درصورتی می‌توان انتظارداشت $\sum a_n$ با $\sum|a_n|$ برابر باشد که هیچ یك از اعداد a_n منفی نباشد.

مطلب مهم دیگری دربارهٔ سریهای مطلقاً همگرا در قضیهٔ زیر آمده است.

قضیهٔ ۱۲

قضیهٔ تجدیدآرایش درمورد سریهای مطلقاً همگرا

اگر $\sum a_n$ مطلقاً همگرا باشد، و $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ آرایش دلخواهی از عناصر دنبالهٔ $\{a_n\}$ باشد، آنگاه $\sum b_n$ همگراست و

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n .$$

(برای ملاحظهٔ کلیات اثبات، مسألهٔ ۲۲ را ببینید.)

مثال ۵ همان‌طور که درمثال ۱ دیدیم، سری

$$1-\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{9}\right)-\left(\frac{1}{16}\right)+\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n^2}\right)+\cdots$$

مطلقاً همگراست. آرایش مجددی از جمله‌های سری می‌تواند به‌این‌صورت باشد که سری با یك جملهٔ مثبت شروع شود، بعد ۲ جملهٔ منفی بیاید، آنگاه ۳ جملهٔ مثبت، سپس ۴ جملهٔ منفی، و الی آخر؛ یعنی بعد از k جمله با یك علامت، $k+1$ جمله با علامت مخالف بیاید. اولین ده جملهٔ این‌سری به‌صورت زیرند

$$1-\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}$$

$$-\frac{1}{36}-\frac{1}{64}-\frac{1}{100}-\frac{1}{144}+\cdots.$$

قضیهٔ تجدیدآرایش می‌گوید که هر دوسری به‌مقدار واحدی همگرا هستند. دراین مثال، اگر ابتدا با سری دوم روبه‌رو می‌شدیم و می‌دانستیم که می‌توان آن را با سری اول معاوضه‌کرد، بسیار خوشحال می‌شدیم. در این مورد حتی‌چیزی بهتر از این‌هم می‌توان گفت مجموع هریك از دوسری با حاصل عبارت زیر نیز برابر است

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}.$$

(مسألهٔ ۲۳ را ببینید.) ■

ضرب سریها

نترسید: غالباً ممکن و مفید است که دوسری را با استفاده ازقانون توزیعپذیری درهم ضرب کنیم. برای سهولت نمادگذاری، سری اول را به‌صورت

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \qquad (1)$$

و سری دوم را به‌صورت

$$b_0+b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots \qquad (2)$$

و حاصلضرب را به‌صورت

$$\begin{aligned}&a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)+\cdots\\&+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_kb_{n-k}+\cdots \qquad (3)\\&+a_nb_0)+\cdots\end{aligned}$$

می‌نویسیم. به این ترتیب، هر جملهٔ سری اول به‌صورت ضریبی همراه با هرجملهٔ سری دوم، به‌شکل a_kb_{n-k}، ظاهر می‌شود.

مثال ۶ فرض کنید

$$a_0=1,\quad a_1=\frac{1}{2},\quad \ldots,\quad a_n=\frac{1}{2^n} \qquad (4)$$

و

$$b_0=1,\quad b_1=\frac{1}{3},\quad \ldots,\quad b_n=\frac{1}{3^n}. \qquad (5)$$

حاصلضربهای موجود در (۳) عبارت‌اند از

$$a_0b_0=1,\quad a_0b_1=\frac{1}{3},\quad a_1b_0=\frac{1}{2}$$

$$a_0b_2=\frac{1}{9},\quad a_1b_1=\frac{1}{6},\quad a_2b_0=\frac{1}{4}$$

و به‌طور کلی، همهٔ جملات به‌شکل

$$a_kb_{n-k}=\frac{1}{2^k3^{n-k}}$$

$$n=0,1,2,\ldots,\quad k=0,1,2,\ldots,n. \qquad \blacksquare$$

قضیهٔ زیر می‌گوید که مجموع همهٔ این حاصلضربها برابر است با مجموع سری اول یعنی ۲، ضرب در مجموع سری دوم یعنی ۳/۲ (هردوسری، هندسی‌اند: $r_1=1/2$ و $r_2=1/3$). از روی نحوهٔ تشکیل جملات سری حاصلضرب می‌بینیم هر عددی که بر عدد اولی بزرگتر از ۳ تقسیم‌پذیر نیست دقیقاً یک بار به عنوان مخرج ظاهر می‌شود. با تجدید آرایش جملات (به‌کمک قضیهٔ ۱۲) می‌توان مجموع را به‌صورت زیر نشان داد

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}+\frac{1}{18}+\frac{1}{24}+\frac{1}{27}+\cdots. \tag{6}$$

مجموع سری (۶)، ۳ است.

حال قضیهٔ ۱۳ را (بدون اثبات) بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۳

قضیهٔ ضرب سریها

فرض کنیم $\sum a_n$ و $\sum b_n$ سریهایی مطلقاً همگرا باشند. $\sum c_n$ را با معادلات زیر تعریف می‌کنیم

$$c_0=a_0b_0,\quad c_1=a_0b_1+a_1b_0,\ldots,c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}. \tag{7}$$

دراین‌صورت، $\sum c_n$ مطلقاً همگراست و

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)\times\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right). \tag{8}$$

مثال ۷ مجموع عکسهای اعداد صحیحی که به صورت حاصلضربهایی به شکل 3^a7^b هستند (a و b مستقلاً همهٔ مقادیر صحیح نامنفی را اختیار می‌کنند) این است

$$\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots\right)\times\left(1+\frac{1}{7}+\frac{1}{49}+\cdots+\frac{1}{7^n}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{1-(1/3)}\times\frac{1}{1-(1/7)}=\frac{3}{2}\times\frac{7}{6}=\frac{7}{4}. \qquad \blacksquare$$

درفصل ۱۲ به‌ضرب سریها بیشترخواهیم پرداخت.

مسأله‌ها

درهریک ازمسأله‌های ۱ــ۱۸، معلوم کنیدکه سری مطلقاً همگراست یا نه. درهرمورد، برای همگرایی یا واگرایی سری متناظر قدرمطلقها دلیل بیاورید.

۱. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

۲. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-n)^3}$

۳. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-n}{n^2}$

۴. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n$

۵. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n^2+2n+1}$

۶. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$

۷. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}$

۸. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-10}{n}$

۹. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$

۱۰. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

۱۱. $\sum_{n=۲}^{\infty}(-۱)^n \frac{n}{n+۱}$

۱۲. $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{-n}{۲^n}$

۱۳. $\sum_{n=۱}^{\infty}(۵)^{-n}$

۱۴. $\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{۲^n}-۱\right)$

۱۵. $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱۰۰)^n}{n!}$

۱۶. $\sum_{n=۲}^{\infty}(-۱)^n \frac{\ln n}{\ln n^۲}$

۱۷. $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲-n}{n^۳}$

۱۸. $\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{۲^n}-\frac{۱}{۳^n}\right)$

۱۹. نشان دهیدکه اگر $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ واگرا باشد، $\sum_{n=۱}^{\infty} |a_n|$ واگراست.

۲۰. نشان دهیدکه اگر $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ مطلقاً همگرا باشد، آنگاه

$$\left|\sum_{n=۱}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=۱}^{\infty} |a_n| .$$

۲۱. نشان‌دهیدکه اگر $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=۱}^{\infty} b_n$ هردومطلقاً همگرا باشند، سریهای زیرنیز چنین هستند

الف) $\sum(a_n+b_n)$

ب) $\sum(a_n-b_n)$

پ) $\sum ka_n$ (k عددی دلخواه)

۲۲. قضیهٔ ۱۲ را ثابت‌کنید. کلیات اثبات: فرض قضیه را درنظر بگیرید. تصورکنید $\epsilon>۰$. نشان دهید اندیسی چون $N_۱$ وجود دارد به‌قسمی که

$$\sum_{n=N_۱}^{\infty} |a_n| < \frac{\epsilon}{۲}$$

و اندیسی چون $N_۲ \geqslant N_۱$ موجود است به‌طوری که $|s_{N_۲}-L|<\epsilon/۲$ که درآن $s_n=\sum_{k=۱}^{n} a_k$. چون همهٔ جملات $a_۱$، $a_۲$، …، $a_{N_۲}$ درجاهایی از دنبالهٔ $\{b_n\}$ ظاهرمی‌شوند، اندیسی چون $N_۳ \geqslant N_۲$ هست به‌طوری‌که اگر $n \geqslant N_۳$، آنگاه $\sum_{k=۱}^{n} b_k - s_{N_۲}$، حداکثر، مجموع جملاتی به‌شکل a_m با ضابطهٔ $m \geqslant N_۱$ است. پس، اگر $n \geqslant N_۳$،

$$\left|\sum_{k=۱}^{n} b_k - L\right| \leqslant \left|\sum_{k=۱}^{n} b_k - s_{N_۲}\right| + |s_{N_۲}-L|$$

$$\leqslant \sum_{k=N_۱}^{\infty} |a_k| + |s_{N_۲}-L| < \epsilon .$$

۲۳. مطلب زیر را ثابت‌کنید: اگر $\sum|a_n|$ همگرا باشد و وقتی $a_n \geqslant ۰$، $b_n=a_n$ و وقتی $a_n<۰$، $b_n=۰$، آنگاه $\sum b_n$ همگراست. همین‌طور $\sum c_n$، که درآن $c_n=۰$ اگر $a_n \geqslant ۰$ و $c_n=-a_n$ اگر $a_n<۰$، همگراست. به‌عبارت دیگر، وقتی‌سری اصلی‌مطلقاً همگرا باشد، جملات مثبت آن خودشان سری‌همگرایی تشکیل می‌دهند، و همین‌طور، جملات منفی آن. و داریم

$$\sum_{n=۱}^{\infty} a_n = \sum_{n=۱}^{\infty} b_n - \sum_{n=۱}^{\infty} c_n$$

زیرا $b_n=(a_n+|a_n|)/۲$ و $c_n=(-a_n+|a_n|)/۲$.

۲۴. در مثال ۶، که درآن $a_n=۱/۲^n$ و $b_n=۱/۳^n$، فرض کنید همچون رابطهٔ (۳) داشته باشیم

$$c_n=a_۰b_n+a_۱b_{n-۱}+\cdots+a_nb_۰ .$$

ازآنجا که عدد a_kb_{n-k} نابیشتر از $(۱/۲)^n$ است، نشان دهیدکه $c_n \leqslant (n+۱)/۲^n$ وثابت کنیدکه $\sum c_n$ همگراست. آیا این‌سری مطلقاً همگراست؟

TOOLKIT PROGRAMS Sequences and Series

۸.۱۱ سریهای متناوب و همگرایی مشروط

سریی‌که جمله‌های آن به‌تناوب مثبت و منفی باشند، **سری متناوب** نامیده می‌شود. در اینجا سه نمونه ازسری متناوب را می بینید

$$۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}-\cdots+\frac{(-۱)^{n+۱}}{n}+\cdots \qquad (۱)$$

$$-۲+۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۸}+\cdots+\frac{(-۱)^n ۴}{۲^n}+\cdots \qquad (۲)$$

$$۱-۲+۳-۴+۵-۶+\cdots+(-۱)^{n-۱}n+\cdots \qquad (۳)$$

آیا این سریها همگرا هستند یا واگرا؟

سری (۱)، موسوم به **سری همساز متناوب**، چنانکه به‌زودی

خواهیم دید همگراست؛ ولی همگرایی‌اش مطلق نیست زیرا سری متناظر قدرمطلقها عبارت است ازسری همساز زیر

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

که می‌دانیم واگراست. یک چنین سری که همگراست ولی همگرایی‌اش مطلق نیست، **به‌طور مشروط همگرا** نامیده می‌شود.

سری (۲) یک سری هندسی با نسبت $r=-1/2$ است. می‌دانیم که این سری همگراست و مجموعش، $-2/(1+1/2)=-4/3$ است. این‌سری مطلقاً همگرا نیز هست زیرا سری متناظر قدرمطلقهایش این است

$$2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{4}{2^n}+\cdots.$$

سری (۳) واگراست زیرا جملهٔ nام به‌صفرمیل نمی‌کند.

همگرایی سری متناوب را می‌توان با استفاده از یک‌نتیجهٔ کلیتر، معروف به قضیهٔ لایب‌نیتس، ثابت کرد.

قضیهٔ ۱۴
قضیهٔ لایب‌نیتس
سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots \qquad (4)$$

همگراست اگر هرسه‌شرط زیر برقرار باشند

۱. همهٔ a_nها مثبت باشند.

۲. به‌ازای همهٔ nها، $a_n\geqslant a_{n+1}$.

۳. $a_n\to 0$.

اثبات اگر n یک عدد صحیح زوج باشد، مثلاً $n=2m$، آنگاه مجموع n جملهٔ اول این است

$$\begin{aligned}S_{2m}&=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2m-1}-a_{2m})\\&=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\cdots \qquad (5)\\&\quad-(a_{2m-2}-a_{2m-1})-a_{2m}.\end{aligned}$$

اولین برابری نشان می‌دهد که S_{2m} مجموع m جملهٔ نامنفی است زیرا عبارت داخل هر پرانتز مثبت یا صفر است. از این‌رو $S_{2m+2}\geqslant S_{2m}$ و دنبالهٔ $\{S_{2m}\}$ غیرنزولی است. برابری دوم نشان می‌دهد که $S_{2m}\leqslant a_1$. چون $\{S_{2m}\}$ غیرنزولی و ازبالا کراندار است، دارای یک‌حد است، مثلاً

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m}=L. \qquad (6)$$

اگر n عدد صحیح فردی باشد، مثلاً $n=2m+1$، آنگاه مجموع n جملهٔ اول این است

$$S_{2m+1}=S_{2m}+a_{2m+1}.$$

چون $a_n\to 0$،

$$\lim_{m\to\infty} a_{2m+1}=0$$

و وقتی $m\to\infty$،

$$S_{2m+1}=S_{2m}+a_{2m+1}\to L+0=L. \qquad (7)$$

اگرنتایج (۶) و (۷) را باهم ترکیب کنیم خواهیم داشت

$$\lim_{n\to\infty} S_n=L.$$

مثالهای زیرکاربرد قضیهٔ ۱۴ را نشان می‌دهند.

مثال ۱ سری همساز متناوب

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

درسه‌شرط قضیه صدق می‌کند. بنابراین، همگراست. این سری به طور مشروط همگراست زیرا سری متناظر قدرمطلقها، سری همساز است که واگراست. ■

مثال ۲ سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sqrt{n}=1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\cdots$$

بنابه‌آزمون جملهٔ nام واگراست. این سری در شرطهای ۲ و ۳ی قضیهٔ لایب‌نیتس صدق نمی‌کند. ■

مثال ۳ قضیهٔ ۱۴ اطلاعی دربارهٔ

$$\frac{2}{1}-\frac{1}{1}+\frac{2}{2}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{2}{n}-\frac{1}{n}+\cdots$$

به‌ما نمی‌دهد. دنبالهٔ $2/1, 1/1, 2/2, 1/2, 2/3, 1/3, \ldots$ یک دنبالهٔ یکنوا نیست. آزمون دیگری باید یافت. اگر جمله‌های سری را به‌صورت جفتهایی از عناصر متوالی دسته‌بندی کنیم

خواهیم داشت

$$\left(\frac{2}{1}-\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{2}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n}\right)+\cdots$$

می بینیم که $2n$امین مجموع جزئی سری مفروض و nامین مجموع جزئی سری همساز، مقدار واحدی دارند. پس دنبالهٔ مجموعهای جزئی، ودر نتیجه سری، واگراست. ■

مثال ۴ آیا سری $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(\ln n)/(n+1)$ همگـراست؟
گرچه‌واضح است که‌این‌سری‌متناوب است‌و $a_n=(\ln n)/(n+1)$ وقتی $n\to\infty$، به ۰ میل‌می‌کند، ولی در اولین‌نظر واضح نیست که $a_n \geqslant a_{n+1}$. تابع متناظر

$$f(x)=\frac{\ln x}{x+1}$$

را درنظرمی گیریم که مشتقش این است

$$f'(x)=\frac{(x+1)/x-\ln x}{(x+1)^2}.$$

این‌مشتق‌منفی‌است،واگر $\ln x$ بزرگتراز $(x+1)/x=1+1/x$ باشد، تـابع f نزولی است. به ازای $x=1,2,\ldots$ داریـم $2\geqslant(1/x)+1$، پس وقتی $\ln n>2$، دنبالـه نزولی است. چون $e^2\approx 7{,}4$، نتیجه‌می گیریم که دنبالهٔ اصلی به‌ازای $n\geqslant 8$ نزول می‌کند. یعنی، می‌توانیم با استفاده از قضیهٔ لایب‌نیتس نتیجه بگیریم کـه $\sum_{n=8}^{\infty}(-1)^n(\ln n)/(n+1)$ همگراست. بنا براین، سری اصلی نیز همگراست. ■

تعبیر نموداری زیر از مجموعهای جزئی را به‌کارمی بریم تا دراین بـاره بصیرت بیشتری به‌دست آوریم کـه یك سری متناوب، وقتی در سه شرط قضیه صدق می‌کند، چگونـه به حـدی چون L همگراست. ازمبدأ O روی محور اعـداد حقیقی (شکل ۱۴۰۱۱) به‌اندازهٔ فاصلهٔ مثبت

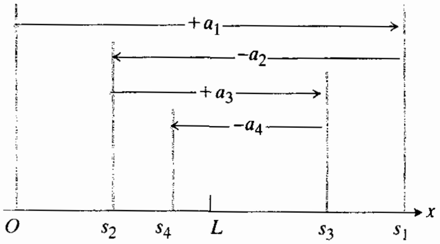
$$s_1=a_1$$

پیش می‌رویم. برای یافتن نقطهٔ متناظر با

$$s_2=a_1-a_2$$

بـایستی به‌اندازهٔ a_2 به‌عقب بـرگردیم. چون $a_2\leqslant a_1$، دراین برگشت از O دورتر نمی‌رویم. سپس مسافتی به انـدازهٔ a_3 پیش می‌رویم و نقطهٔ متناظر با

$$s_3=a_1-a_2+a_3$$



۱۴۰۱۱ مجموعهای جزئی یك‌سری متناوب‌که درفرضهای‌قضیهٔ لایب‌نیتس صدق‌می کند، حدشان را درمیان می‌گیرند.

را مشخص می کنیم. چون $a_3\leqslant a_2$، میزان پیش‌رفتن ما از طول گام قبلی بیشتر نیست؛ یعنی $s_3\leqslant s_1$. به‌این رفت و برگشت ادامـه می‌دهیم و با توجه به‌علامات جمله‌های سری عقب یا جلو می‌رویم. ولی درهر گام به‌پیش یا به‌پس، طول گام کوتاهتر از (یـا حداکثر مساوی با) طول گام قبلی است چون $a_{n+1}\leqslant a_n$. و چون‌وقتی n افزایش می‌یابد جملهٔ nام به‌صفرمیل می کند، طول گامی که به‌جلو یا به‌عقب برمی‌داریم کوچك و کوچکترمی‌شود. پس‌ما حول حد L نوسان می کنیم ولی دامنهٔ نوسان دائماً کاهش می‌یابد و به‌حد صفر میل‌می کند. مجموعهای‌جزئی‌شمارهٔ زوج، s_2، s_4، s_6، ...، s_{2m} دائماً به‌سمت L افزایش می‌یابند درحـالی کـه مجموعهای جزئی شمارهٔ فـرد، s_1، s_3، s_5، ...، s_{2m+1} دائماً به سمت L کاهش می‌یابند. حد L بین هردومجموع متوالی s_n و s_{n+1} قراردارد و از این‌رو اختلافش با s_n مقداری است کمتر از a_{n+1}.

به‌دلیل برقراری رابطهٔ زیر

$$|L-s_n|<a_{n+1}\quad\text{به‌ازای هر } n، \qquad (8)$$

می‌توانیم براوردهای مفیدی ازمجموعهای سریهای متناوب همگرا به‌دست آوریم.

قضیهٔ ۱۵

قضیهٔ براورد مجموع سری متناوب

اگر سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$$

سری متناوبی باشد کـه در سه شرط قضیهٔ لایب‌نیتس صدق کند، آنگاه

$$s_n=a_1-a_2+\cdots+(-1)^{n+1}a_n$$

مجموع سری، L، را بـا خطایی کـه قدرمطلقش کمتر از a_{n+1}،

مقدار عددی اولین جملهٔ به‌کارنرفته است تقریب می‌زند. به‌علاوه، علامت s_n-L با علامت اولین جملهٔ به‌کارنرفته یکی است.

تعیین علامت باقیمانده را به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌کنیم (مسألهٔ ۳۷ را ببینید).

مثال ۵ ابتدا قضیهٔ براورد را درمورد یک سری متناوب که مجموعش را می‌دانیم، یعنی سری هندسی

$$\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n\frac{۱}{۲^n}=۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}-\frac{۱}{۳۲}+\frac{۱}{۶۴}-\frac{۱}{۱۲۸}+\frac{۱}{۲۵۶}-\cdots$$

می‌آزماییم. بنا به‌قضیهٔ ۱۵ اگر این سری را ازجملهٔ هشتم به‌بعد ببریم، مجموعی را که مثبت و کوچکتر از $۱/۲۵۶$ است کنار گذاشته‌ایم. محاسبهٔ سریعی نشان می‌دهد که مجموع هشت جملهٔ اول این است

$$۰٫۶۶۴۰۶۲۵.$$

مجموع سری این است

$$\frac{۱}{۱-(-۱/۲)}=\frac{۱}{۳/۲}=\frac{۲}{۳}. \qquad (۹)$$

تفاضل

$$\frac{۲}{۳}-۰٫۶۶۴۰۶۲۵=۰٫۰۰۲۶۰۴۱۶۶۶\ldots$$

مثبت است و کوچکتر از

$$\frac{۱}{۲۵۶}=۰٫۰۰۳۹۰۶۲۵. \qquad ■$$

سری مربوط به $\ln(۱+x)$

در فصل ۱۲ نشان خواهیم داد که یک سری برای محاسبهٔ $\ln(۱+x)$ وقتی $|x|<۱$ به‌صورت زیر است

$$\ln(۱+x)=x-\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۳}{۳}-\cdots+(-۱)^{n+۱}\frac{x^n}{n}\cdots \qquad (۱۰)$$

این سری به‌ازای $۰<x<۱$ درهرسه شرط قضیهٔ ۱۴ صدق می‌کند، و به‌کمک قضیهٔ براورد می‌توان دید که از روی پنج جملهٔ اول این سری چه تقریب خوبی از $\ln(۱+x)$ می‌توان به‌دست آورد.

مثال ۶ $\ln(۱٫۱)$ را با استفاده از تقریب

$$\ln(۱+x)\approx x-\frac{x^۲}{۲} \qquad (۱۱)$$

حساب کنید و خطای محاسبه را براورد کنید. آیا دراین مورد، $x-(x^۲/۲)$ خیلی بزرگ است یا خیلی کوچک؟

حل:

$$\ln(۱٫۱)\approx(۰٫۱)-\frac{(۰٫۱)^۲}{۲}=۰٫۰۹۵.$$

تفاوت این تقریب با مقدار دقیق $\ln ۱٫۱$ کمتر از

$$\frac{(۰٫۱)^۳}{۳}=۰٫۰۰۰۳۳۳\ldots$$

است. چون علامت این عدد، اولین جملهٔ به‌کار نرفته، مثبت است، باقیمانده مثبت است یعنی $۰٫۰۹۵<\ln ۱٫۱<۰٫۰۹۵\overline{۳}$.

■

مثال ۷ چندجمله از سری (۱۰) را باید به‌کار ببریم تا مطمئن شویم که خطا درمحاسبهٔ $\ln(۱٫۲)$ کمتر از $۱۰^{-۶}$ است؟

حل:

$$\ln(۱٫۲)=(۰٫۲)-\frac{(۰٫۲)^۲}{۲}+\frac{(۰٫۲)^۳}{۳}-\cdots$$

با آزمایش درمی‌یابیم که جملهٔ هشتم

$$-\frac{(۰٫۲)^۸}{۸}=-۳٫۲\times ۱۰^{-۷}$$

اولین جملهٔ سری است که قدرمطلقش کوچکتر از $۱۰^{-۶}$ است. پس مجموع هفت جملهٔ اول، مقدار $\ln(۱٫۲)$ را با خطایی کمتر از $۱۰^{-۶}$ به‌دست می‌دهد. استفاده از جملات بیشتر، تقریب بهتری به‌دست خواهد داد، ولی هفت جملهٔ اول برای تأمین دقتی که ما می‌خواهیم کافی است. به‌علاوه، توجه کنید که ما نشان نداده‌ایم که با استفاده از شش جمله، این دقت به‌دست نمی‌آید. ■

هشدار در بارهٔ تجدید آرایش: اگر آرایش تعدادی نامتناهی از جملات یک سری به‌طور مشروط همگرا را تغییر دهیم، ممکن است نتایجی به‌دست آوریم که بسیار متفاوت با مجموع سری اصلی باشند. مثال زیر، برخی از اتفاقات ممکن را نشان می‌دهد.

مثال ۸ سری همساز متناوب زیر را درنظر بگیرید

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\cdots.$$

دراینجا، سری جملات $\sum 1/(2n-1)$ واگرا به $+\infty$ و سری جملات $-\sum 1/2n$ واگرا به $-\infty$ است. همیشه می‌توانیم به‌تعداد کافی جملهٔ مثبت اختیار کنیم (مهم نیست که دردنبالهٔ جمله‌های شمارهٔ فرد، ازکجا شروع کنیم) تا مجموعی به‌دست آوریم که به‌قدر دلخواه بزرگ باشد. همین‌طور، درمورد جمله‌های منفی، صرف‌نظر از اینکه ازکجا شروع کنیم، می‌توانیم به‌تعداد کافی جمله‌های شمارهٔ زوج‌متوالی راجمع کنیم تا مجموعی‌منفی به‌دست آوریم که‌قدرمطلقش به‌قدر دلخواه بزرگ باشد. اگر بخواهیم چنین‌کاری بکنیم، مثلاً می‌توانیم‌شروع به‌جمع کردن جمله‌های شمارهٔ‌فرد کنیم تا وقتی که‌مجموعی برابر با $+3$ به‌دست آوریم وسپس به‌تعداد کافی جملات منفی متوالی اضافه‌کنیم تا مجموع جدید، -4 شود و بعد می‌توانیم به‌تعدادکافی‌جملهٔ مثبت بیفزاییم تا مجموع بزرگتر از $+5$ شود، و به‌دنبالش از جملات منفی به‌کار نرفتهٔ متوالی اضافه‌کنیم تا مجموع جدید -6 گردد، و الی‌آخر. به‌این‌ترتیب، می‌توانیم نوسانات را در هر دوجهت مثبت و منفی به قدر دلخواه بزرگ کنیم.

امکان دیگری که درمورد همین‌سری‌وجود دارد، تمرکز روی یك حد خاص است. فرض‌کنید سعی می‌کنیم مجموعهایی به‌دست آوریم که به ۱ همگرا باشند. باجملهٔ اول، ۱/۱، شروع می‌کنیم، بعد ۱/۲ را ازآن کم می‌کنیم، سپس ۱/۳ و ۱/۵ را می‌افزاییم که باعث می‌شود مجموع دوباره ۱ یا بیشترشود. آنگاه جمله‌های منفی متوالی را اضافه می‌کنیم تا وقتی که مجموع کوچکتر از ۱ شود. به‌همین‌نحو ادامه می‌دهیم: وقتی مجموع کمتر از ۱ است، جمله‌های مثبت را اضافه می‌کنیم تا وقتی که مجموع ۱ یا بیشتر شود. این فرایند را می‌توان به‌طور نامتناهی ادامه داد. چون هم جملات شمارهٔ فرد و هم جملات شمارهٔ زوج سری اصلی وقتی $n\to\infty$ به صفر میل می‌کنند. میزانی که مجموعهای جزئی ما به‌آن میزان بیشتر یا کمتر از ۱ اند، به صفر میل می‌کند. بنابراین سری جدید به ۱ همگراست. سری با آرایش جدید به‌این‌صورت شروع می‌شود

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{6}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{8}+\frac{1}{15}$$

$$+\frac{1}{17}-\frac{1}{10}+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}-\frac{1}{12}+\frac{1}{23}+\frac{1}{25}-\frac{1}{14}$$

$$+\frac{1}{27}-\frac{1}{16}+\cdots. \qquad \blacksquare$$

وضعی که در این مثال دیدید، نمونه‌ای است ازآنچه که درمورد هرسری به‌طور مشروط همگرا می‌تواند پیش آید. نتیجهٔ اخلاقی: جملات چنین سریی را به‌همان ترتیب مفروض باهم جمع کنید.

مسأله‌ها

در مسأله‌های ۱–۱۵، معلوم کنید کدام سری متناوب همگرا و کدام واگراست.

۱. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$

۲. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln n}$

۳. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$

۴. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{10^n}{n^{10}}$

۵. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}+1}{n+1}$

۶. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$

۷. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{3/2}}$

۸. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{\ln n^2}$

۹. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

۱۰. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}$

درهریك ازمسأله‌های ۱۱–۲۸، معلوم کنید که سری داده شده مطلقاً همگراست یا به‌طور مشروط همگراست و یا اینکه واگراست.

۱۱. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(0.1)^n$

۱۲. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$

۱۳. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^3+1}$

۱۴. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$

۱۵. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+3}$

۱۶. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin n}{n^2}$

۱۷. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3+n}{5+n}$

۱۸. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n^3}$

۱۹. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1+n}{n^2}$

۲۰. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{n+5^n}$

۲۱. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2(2/3)^n$

۲۲. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\sqrt[n]{10})$

۲۳. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\tan^{-1}n}{n^2+1}$

۲۴. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\ln n}$

۲۵. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right)$

۲۶. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(0.1)^n}{n}$

۲۷. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

۲۸. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n!)^2}{(2n)!}$

در هریك از مسأله‌های ۲۹ــ۳۲، اگرچهارجمله برای تقریب‌زدن سری به‌کار رود، بزرگی خطا را براورد کنید.

۲۹. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

۳۰. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{10^n}$

۳۱. $\ln(1.01)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(0.01)^n}{n}$

۳۲. $\frac{1}{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n,\quad 0<t<1$

در هریك ازمسأله‌های ۳۳ و ۳۴، مجموع را تا پنج رقم اعشار تقریب بزنید (بزرگی خطا کوچکتر از 5×10^{-6}).

۳۳. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}$ (این $\cos 1$ است، کسینوس یك رادیان)

۳۴. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}$ (این $1/e$ است.)

۳۵. الف) سری

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{9}-\frac{1}{4}+\frac{1}{27}-\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{2^n}+\dots$$

یکی از شرطهای قضیهٔ ۱۴ را براورده نمی‌سازد. کدام یك را؟

ب) مجموع سری (الف) را بیابید.

۳۶. حد L یك سری متناوب که درشرطهای قضیهٔ ۱۴ صدق می‌کند بین مقادیر هردومجموع جزئی متوالی قراردارد. این مطلب، الهامبخش استفاده ازمتوسط

$$\frac{s_n+s_{n+1}}{2}=s_n+\frac{1}{2}a_{n+1}$$

برای براورد L است. مطلوب است محاسبهٔ

$$s_{20}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{21}$$

به‌عنوان تقریبی از مجموع سری همساز متناوب. مجموع دقیق عبارت است از $\ln 2=0.6931\dots$.

۳۷. نشان‌دهید که هروقت یك سری متناوب با یکی ازمجموعهای جزئی‌اش تقریب‌زده می‌شود، اگر سه شرط قضیهٔ لایب‌نیتس صادق باشند، علامت باقیمانده (مجموع جمله‌های به‌کارنرفته) با علامت اولین جملهٔ به‌کارنرفته یکی است. (راهنمایی: جمله‌های باقیمانده را درجفتهای متوالی دسته‌بندی کنید.)

۳۸. نشان دهید که مجموع $2n$ جملهٔ اول سری

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots$$

برابر است با مجموع n جملهٔ اول سری

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times 6}+\cdots$$

آیا این سریها همگرا هستند؟مجموع $2n+1$ جملهٔ اول سری اول چیست؟ اگر این سریها همگرا هستند، مجموعشان چیست؟

۳۹. با ذکر مثال نشان دهید که ممکن‌است $\sum_{n=1} a_n$ و $\sum_{n=1} b_n$ هردو همگرا باشند ولی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ واگرا باشد.

۴۰. نشان دهید که سری متناوب

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$$

واگراست. این سری در کدام یك از شرطهای قضیهٔ لایب‌نیتس صدق نمی‌کند؟ (راهنمایی: ابتدا نشان دهید که

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$$

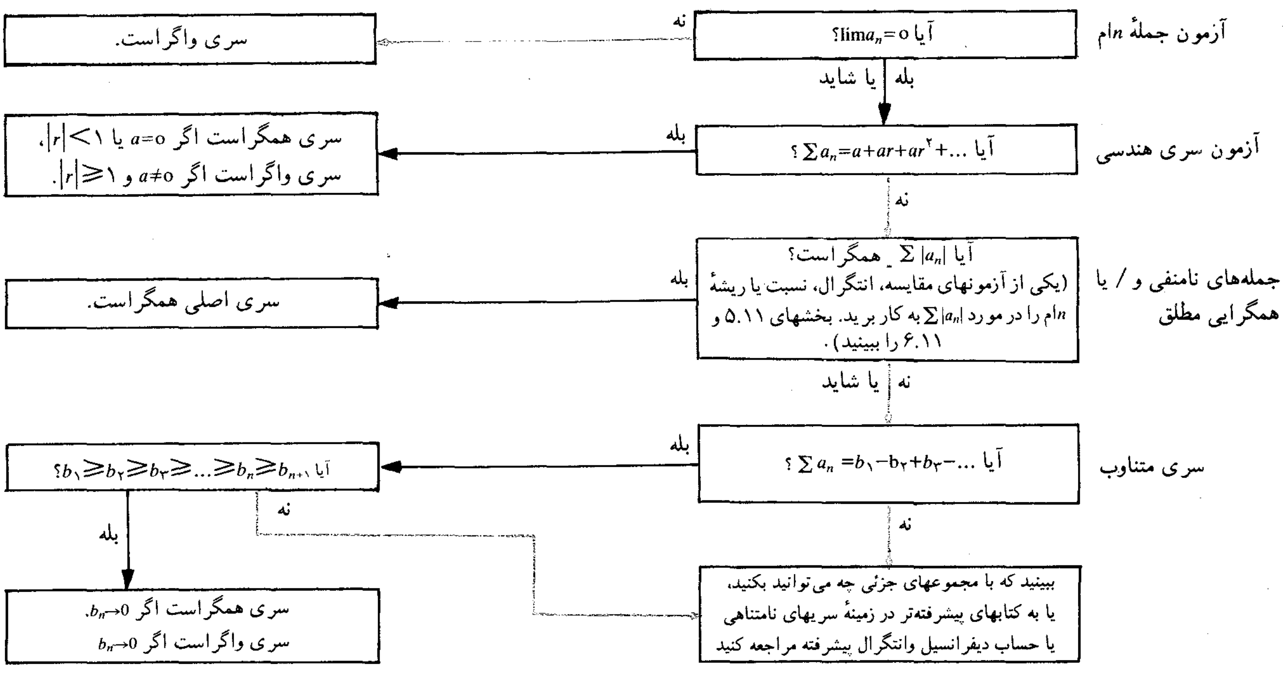
و سری مفروض را به‌صورت تفاضل دوسری بنویسید که یکی از آنها همگرا و دیگری واگرا باشد. برای همگرایی یا واگرایی هریك، دلیل بیاورید.)

۴۱. ماشین‌حساب فرض‌کنید درمثال ۸ هدف این باشد که جمله‌ها را به‌نحوی آرایش‌دهیم که سری جدیدی‌همگرا به $-1/2$ به‌دست آید. آرایش جدید جمله‌ها را با اولین جملهٔ منفی شروع کنید. هروقت مجموعی دارید که نابیشتر از $-1/2$ است، شروع به واردکردن جمله‌های‌مثبت، به‌ترتیب، کنید تاوقتی که مجموع جدید بزرگتر از $-1/2$ شود. آنگاه جمله‌های منفی را اضافه‌کنید تا وقتی که مجموع دوباره نابیشتر از $-1/2$ شود. این فرایند را تا زمانی‌که مجموعهای جزئی شما دست‌کم سه‌بار بالاتر از هدف قرارگیرند ادامه دهید و در این مقدار یا کمتر از آن، فرایند را متوقف‌کنید. اگر s_n مجموع n جملهٔ اول سری جدید شما باشد، نقاط (n, s_n) را مشخص‌کنید و رفتار مجموعها را نشان دهید.

TOOLKIT PROGRAMS
Sequences and Series

۹.۱۱ مرور

اکنون چندین آزمون برای‌همگرایی یا واگرایی یك‌سری در دست داریم، و یك نمودار عمل (شکل ۱۵.۱۱) عرضه می‌کنیم که نشان می‌دهد این آزمونها را چگونه‌می‌توان به‌کاربرد. اما چنین‌نموداری نمی‌تواند جانشین قضاوت خوب شود. مثلاً، اگر سری متناوبی دارید که درشرطهای قضیهٔ لایب‌نیتس صدق می‌کند، تکلیف مسأله معلوم است و نیازی نیست که از بالای نمودار شروع کنید و تا



۱۵.۱۱ Σa_n همگراست؟

پایین بیایید. همین‌طور، اگرسری یك‌سری‌هندسی یا p-سری باشد، احتمالاً این موضوع را تشخیص می‌دهید و می‌دانید سری جدید همگراست یا واگرا.

کلمهٔ شاید درجاهایی ازنمودارآمده که پاسخ به‌سؤال مطرح شده ممکن است واضح نباشد. مثلاً، اگر $a_n = 3^n n!\,n!/(2n)!$، آیا می‌توانید به‌سرعت بگویید $\lim a_n$ برابرصفراست یا نه؟ اگردرعبارت مربوط به a_n نما یا فاکتوریل وجود داشته باشد، معمولاً بهتراست مستقیماً به‌سراغ آزمون‌نسبت بروید. دراین مورد، با مختصری عملیات جبری معلوم می‌شود که $a_{n+1}/a_n = 3(n+1)/(4n+2)$ و حد این‌نسبت، ۳/۴ است. بنابراین، سری $\sum a_n$ همگراست وحال می‌دانیم که $\lim a_n = 0$.

وقتی آزمون نسبت را درمورد $\sum |a_n|$ به‌کارمی‌بریم، اگر به‌ازای هر n داشته باشیم $|a_{n+1}/a_n| \geqslant 1$، آنگاه $|a_{n+1}| \geqslant |a_n|$ و جمله‌ها وقتی $n \to \infty$ به‌صفر میل نمی‌کنند: سری واگراست.

آزمون نسبت وآزمون ریشهٔ nام گاهی از یك میزان کارایی برخوردار هستند. بد نیست گهگاه برای تمرین خطمشی خود را تغییردهید و ببینید کدام یك از این دوآزمون را ترجیح می‌دهید. مثلاً، اگر $a_n = n/2^n$، آنگاه

وقتی $n \to \infty$، $$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}\sqrt[n]{n} \to \frac{1}{2}$$

و

وقتی $n \to \infty$، $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\,\frac{n+1}{n} \to \frac{1}{2}.$$

بنابرهردوآزمون، $\sum a_n$ همگراست. اگر بپرسید «کدام آزمون را باید به‌کارببرم؟» پاسخ می‌دهیم «هر کدام‌که اول به‌ذهنتان رسید، ولی به‌یکی چنان اتکا نکنید که دیگری نادیده گرفته شود.»

وقتی‌جمله‌های یك‌سری به‌وسیلهٔ یك‌فرمول بازگشت تعریف می‌شوند، ممکن‌است تعیین‌موضوع همگرایی مستقیماً و با استفاده ازآزمون نسبت میسر باشد. مثلاً، اگر $a_1 = 1$ و به‌ازای هر $n \geqslant 1$ داشته‌باشیم $a_{n+1} = (3/4)a_n$، آنگاه $a_{n+1}/a_n = 3/4$ یك‌مقدار ثابت است. این سری یك‌سری هندسی با نسبت $|r| < 1$ است، پس همگراست. اگر نسبت a_{n+1}/a_n با n تغییر کند، همواره کمتر از ۱ است ولی وقتی $n \to \infty$ به حد ۱ میل می‌کند، پس بهترین کار این است که چند جمله از این سری را بنویسیم.

مثال فرض کنید که $a_1 = 4$ و $a_{n+1} = (n/(n+2))a_n$. آیا $\sum a_n$ همگراست؟

حل: چون‌نسبت $a_{n+1}/a_n = n/(n+2)$ کمتراز ۱ است ولی وقتی $n \to \infty$ به ۱ میل می‌کند، چند جملهٔ سری را با استفاده از فرمول بازگشت $a_{n+1} = (n/(n+2))a_n$ می‌نویسیم

$$n=1: \quad a_2 = \frac{1}{3}a_1 = \frac{4}{3}$$

$$n=2: \quad a_3 = \frac{2}{4}a_2 = \frac{4\times 2}{3\times 4}$$

$$n=3: \quad a_4 = \frac{3}{5}a_3 = \frac{4\times 2\times 3}{3\times 4\times 5} = \frac{4\times 2}{4\times 5}$$

$$n=4: \quad a_5 = \frac{4}{6}a_4 = \frac{4\times 2\times 3\times 4}{3\times 4\times 5\times 6} = \frac{4\times 2}{5\times 6}.$$

ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای $n=3$، $n=4$، و $n=5$ جمله‌ها درفرمول زیرصدق می‌کنند

$$a_n = \frac{4\times 2}{n(n+1)}.$$

در واقع این فرمول به‌ازای $n=1$ و $n=2$ هم برقرار است و با استقرای ریاضی می‌توانیم نشان‌دهیم‌که به‌ازای همهٔ nها برقرار است. پس سری مورد نظر ما به‌صورت $\sum(4\times 2)/n(n+1)$ است و این‌سری همگراست چون جمله‌های آن همگی کوچکتر از جمله‌های متناظر سری $\sum 8/n^2$ هستند که همگراست. (درحقیقت دریکی از مثالهای قبلی نشان دادیم که $\sum 1/(n(n+1)) = 1$؛ از این‌رو، سری ما به ۸ همگراست.) ■

مسأله‌ها

درمسأله‌های ۱–۲۰، معلوم کنید $\sum a_n$ همگراست یا نه.

۱. $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$

۲. $a_n = \dfrac{4^n n!\,n!}{(2n)!}$

۳. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = -\dfrac{n}{n+1}a_n$

۴. $a_n = n!/n^n$

۵. $a_n = n^n/n!$

۶. $a_1 = 4, \quad a_{n+1} = (a_n)^{1/n}$

۷. $a_n = n^2/2^n$

۸. $a_n = 2^n/n^2$

۹. $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$

۱۰. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n$

۱۱. $a_n = 2, \quad a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n$

۱۲. $a_n = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n$

۱۳. $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(1+a_n)}$

۱۴. $a_1 = 0, \quad a_{n+1} = na_n$

۱۵ $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = na_n$

۱۶. $a_1 = 10, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{n}$

۱۷. $a_n = 1$ اگر n فرد باشد، $a_n = -1$ اگر n زوج باشد.

۱۸. $a_n = 1/3^n$ اگر n فرد باشد، $a_n = -n/3^n$ اگر n زوج باشد.

۱۹. $a_n = \frac{\sin n}{n^2}$

۲۰. $a_n = \frac{2n+3}{n^3+2}$

۲۱. الف) قضیهٔ زیر را ثابت کنید: اگر $\{c_n\}$ دنباله‌ای از اعداد باشد به‌قسمی که هر مجموع $t_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$ کراندار باشد، آنگاه سری $\sum c_n/n$ همگرا و برابر $\sum t_n/(n(n+1))$ است.

(کلیات اثبات: t_1 را به‌جای c_1 و $t_n - t_{n-1}$ را با ضابطهٔ $n \geqslant 2$ به‌جای c_n قرار دهید. اگر $s_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} c_k/k$، نشان دهید که

$$s_{2n+1} = t_1\left(1-\frac{1}{2}\right) + t_2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \dots + t_{2n}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right) + \frac{t_{2n+1}}{2n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} \frac{t_k}{k(k+1)} + \frac{t_{2n+1}}{2n+1}.$$

چون به‌ازای ثابتی مثل M داریم $|t_k| < M$، سری $\sum_{k=1}^{\infty} t_k/k(k+1)$ مطلقاً همگراست و s_{2n+1} وقتی $n \to \infty$ دارای حد است. بالاخره، اگر $s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} c_k/k$، آنگاه $s_{2n+1} - s_{2n} = c_{2n+1}/(2n+1)$ وقتی $n \to \infty$ به‌صفر میل می‌کند زیرا $|c_{2n+1}| = |t_{2n+1} - t_{2n}| < 2M$. پس، دنبالهٔ مجموعهای جزئی سری $\sum c_k/k$ همگراست و حد، $\sum_{k=1}^{\infty} t_k/(k(k+1))$ است.)

ب) نشان دهید که قضیهٔ بالا چگونه در مورد سری همساز متناوب زیر به‌کار می‌رود

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

پ) نشان دهید که سری

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots$$

همگراست. (پس از جملهٔ اول، علامتها دوتا منفی، دوتا مثبت، دوتا منفی، دوتا مثبت، و الی آخر، است.)

□ 10.11 براورد کردن مجموع سریی با جمله‌های مثبت

حال بازمی‌گردیم به‌سؤالی که قبلاً مطرح شد: اگر یك سری همگرا باشد، مجموعش چیست؟ معمولاً، مجموع را تنها تا چند رقم اعشاری می‌توان تعیین کرد و تعداد ارقام اعشاری بستگی به ظرفیت ابزار محاسبه‌ای دارد که به‌کار می‌بریم. در هر براوردی که به‌دست می‌آوریم، دو نوع خطا ممکن است وجود داشته باشد: (۱) خطای برش و (۲) خطای گرد کردن.

خطاهای برش اگر مجموع یك سری، S باشد، مجموعهای جزئی به‌حد S میل می‌کنند

$$\lim s_n = S$$

که در آن s_n مجموع n جملهٔ اول سری است. از لحاظ نظری، این بدان معنی است که به‌ازای هر $\epsilon > 0$، شاخصی چون N وجود دارد به‌طوری که

$$\text{به‌ازای هر } n > N\text{،}\quad |s_n - S| < \epsilon.$$

اگر خطای گرد کردن در کار نمی‌بود، درجهٔ دقت مطلوب را می‌توانستیم به‌این طریق تعیین کنیم که ϵ را مشخص کرده سپس s_n را به‌عنوان تقریبی از S، با انتخاب دلخواه $N > n$، به‌کار بریم.

اختلاف $R_n=S-s_n$ بین مجموع سری و مجموع جزئی nام آن، **باقیمانده** یا **خطای برش** نامیده می‌شود.

خطاهای گردکردن چون درمحاسبهٔ s_n بیشتر عملیات حسابی تنها تا تعداد محدودی رقم اعشاری (یا دودویی) انجام می‌شوند، امکان خطای گردکردن درمحاسبهٔ هرجملهٔ سری و بنابراین درمجموعهای جزئی وجود دارد. می‌توان انتظار داشت که تعادلی بین خطاهای گردکردن مثبت و منفی برقرار باشد، و بنابراین، مجموع جزئی باید دقیقتر از آن باشد که «سناریوی بدترین حالت» پیش‌بینی می‌کند.

براوردکردن باقیمانده به‌کمك انتگرال

همان‌طورکه دربالا دیدیم، تفاضل $R_n=S-s_n$ بین مجموع یك‌سری‌همگرا و مجموع جزئی nام آن، باقیمانده یا خطای برش نامیده‌می‌شود. چون R_n خودش به‌صورت یك‌سری نامتناهی داده می‌شودکه، علی‌الاصول، محاسبه‌اش به اندازهٔ محاسبهٔ سری اصلی مشکل است، ممکن است فکرکنید که عطف توجه به R_n فایده‌ای ندارد. ولی گاه حتی براورد ناپخته‌ای‌از R_n می‌تواند به‌براوردی از S منجرشودکه بیشتر از s_n به S نزدیك باشد.

مثلاً، فرض‌کنید که می‌خواهیم مقدار عددی سری زیر را بدانیم

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots.$$

این‌یك p-سری با ضابطهٔ $p=2$ است ولذا همگرا است. این‌مطلب بدان‌معنی است که دنبالهٔ مجموعهای جزئی

$$s_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

دارای حدی چون S است. اگربخواهیم مقدار S را تا دورقم اعشار بدانیم، سعی می‌کنیم عدد صحیحی چون n پیدا کنیم به‌طوری‌که مجموع متناهی متناظر، s_n، اختلافش با S کمتر از، مثلاً، ۰٫۰۰۵ باشد. سپس‌این s_n را به‌جای S، تا دورقم‌اعشار، به‌کارمی‌بریم. اگر بنویسیم

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots$$

می‌بینیم که

$$R_n=S-s_n=\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots.$$

خطای R_n را می‌توانیم ازطریق‌مقایسهٔ آن‌با مساحت‌زیرخم

$$y=\frac{1}{x^2}$$

از $x=n$ تا $x=\infty$ براوردکنیم. باتوجه به‌شکل ۱۶۰۱۱ آشکار است که

$$R_n<\int_n^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx=\frac{1}{n}.$$

این رابطه حاکی است که اگر ۲۰۰ جملهٔ سری را اختیارکنیم، می‌توانیم مطمئن باشیم که تفاضل بین مجموع‌کل سری، S، و مجموع این ۲۰۰ جمله، s_{200}، کمتر از $1/200=0{,}005$ خواهد بود.

بااستفاده ازقاعدهٔ ذوزنقه‌ای برای‌تقریب‌زدن مساحت‌زیرخم درشکل ۱۶۰۱۱، براورد دقیقتری از R_n به‌دست می‌آید. u_k را برای $1/k^2$ می‌نویسیم و تقریب ذوزنقه‌ای زیررا درنظرمی‌گیریم

$$\begin{aligned}T_n&=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2}(u_k+u_{k+1})\\&=\frac{1}{2}(u_n+u_{n+1})+\frac{1}{2}(u_{n+1}+u_{n+2})+\cdots\\&=\frac{1}{2}u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots=\frac{1}{2}u_n+R_n.\end{aligned}$$

حال، چون خم $y=1/x^2$ تعقرش روبه‌بالاست،

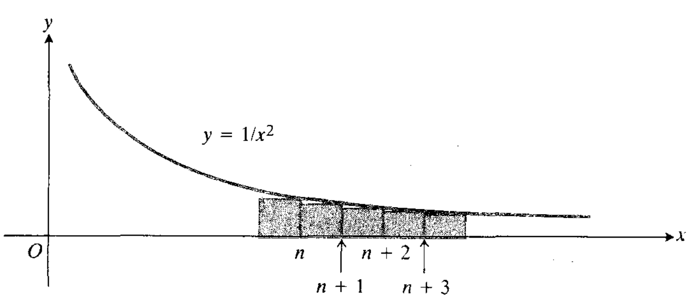
$$T_n>\int_n^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx=\frac{1}{n}$$

و داریم

$$R_n=T_n-\frac{1}{2}u_n>\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}.$$

می‌دانیم که

$$\frac{1}{n}>R_n>\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}$$



۱۶۰۱۱ مساحت R_n برابراست با

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+3)^2}+\cdots<\int_n^{\infty}\frac{dx}{x^2}.$$

و $S=s_n+R_n$ را می‌توان به‌صورت زیر براورد کرد

$$s_n+\frac{1}{n}>S>s_n+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}. \qquad (1)$$

پس اگر برای براوردکردن S از s_n+1/n به‌جای s_n استفاده کنیم، خطایی مرتکب می‌شویم که مقدار عددی‌اش کمتر از $1/(2n^2)$ است. بنابراین، اگر n را ناکمتر از ۱۰ بگیریم، این خطا کمتر از ۰٫۰۰۵ است. تفاوت زمان لازم برای محاسبهٔ ۱۰ جمله و محاسبهٔ ۲۰۰ جمله ممکن است آن‌قدر زیاد باشد که باعث شود این نوع تحلیل دقیقتر از اهمیت عملی برخوردار باشد.

کارهایی را که درمورد این مثال خاص انجام دادیم، می‌توان در هر موردی که نمودار تابع $y=f(x)$ مانند شکل ۱۶.۱۱ تقعرش رو به بالا باشد انجام داد. می‌بینیم که وقتی $\int_n^\infty f(x)\,dx$ موجود است،

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\int_n^\infty f(x)\,dx \qquad (2)$$

گرایش به این دارد که براوردی اضافی از سری به‌دست دهد، ولی مقدار اضافه براورد کمتر از $u_n/2$ است.

به‌کاربردن آزمون نسبت برای براوردکردن باقیمانده سریی چون $\sum a_n$ مرکب از جمله‌های مثبت را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم نسبت a_{n+1}/a_n که نشان‌دهندهٔ آهنگ رشد جمله‌هاست دارای حدی چون $\rho<1$ است. و نیز، فرض می‌کنیم برای اندیسی چون N،

$$r_1\leqslant\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant r_2 \qquad n\geqslant N \text{ ،به‌ازای }$$

که در آن r_1 و r_2 ثابتهایی هستند که هردو کوچکتر از ۱ اند. پس، از نابرابریهای

$$r_1a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant r_2a_n \qquad (n=N,\ N+1,\ N+2,\ \dots)$$

استنتاج می‌کنیم که

$$a_N(r_1+r_1^2+r_1^3+\cdots)\leqslant\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n\leqslant a_N(r_2+r_2^2+r_2^3+\cdots). \qquad (3)$$

مجموعهای این دوسری هندسی اینها هستند

$$r_1+r_1^2+r_1^3+\cdots=\frac{r_1}{1-r_1}$$

$$r_2+r_2^2+r_2^3+\cdots=\frac{r_2}{1-r_2}.$$

پس، خطای برش

$$R_N=\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n$$

بین دومقدار زیر واقع است

$$a_N\frac{r_1}{1-r_1} \quad \text{و} \quad a_N\frac{r_2}{1-r_2}.$$

یعنی

$$a_N\frac{r_1}{1-r_1}\leqslant S-s_N\leqslant a_N\frac{r_2}{1-r_2} \qquad (4)$$

اگر

$$0\leqslant r_1\leqslant\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant r_2<1. \qquad n\geqslant N \text{ ،به‌ازای }$$

مثال باقیماندهٔ سری زیر را براورد کنید

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1\times2}{3\times5}+\frac{1\times2\times3}{3\times5\times7}+\cdots=a_1+a_2+a_3+\cdots$$

که در آن

$$a_1=1 \quad \text{و به‌ازای} \quad n\geqslant1\text{،} \quad a_{n+1}=\frac{n}{2n+1}a_n.$$

حل: می‌بینیم که نسبت

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{2n+1}$$

به‌ازای همهٔ nها کوچکتر از $1/2$ است. پس می‌توانیم در (۳) و (۴)، r_2 را برابر با $1/2$ بگیریم. همچنین ملاحظه می‌کنیم که دنبالهٔ $\{n/(2n+1)\}$ دنباله‌ای صعودی است، پس می‌توان قرارداد: $r_1=N/(2N+1)$. اگر این مقادیر r_1 و r_2 را در (۴) قراردهیم، خواهیم داشت

$$a_N\frac{N}{N+1}\leqslant S-s_N\leqslant a_N.$$

مثلاً، به‌ازای $N=10$، تفاضل بین مجموع همهٔ جملات سری و مجموع ده جملهٔ اول بین $a_{10}(10/11)$ و a_{10} قرار دارد. به‌ازای $N=20$، تفاضل بین $a_{20}(20/21)$ و a_{20} است. مقادیر s_{20} و a_{20} را محاسبه کرده‌ایم که عبارت‌اند از

$$s_{20}=1.570795962,\quad a_{20}=3.80\times10^{-7}.$$

بنابراین، $R_{۲۰}$ بین $۳٫۳۸۰\times ۱۰^{-۷}$ و $a_{۲۰}(۲۰/۲۱)$ است که برابر است با $۳٫۶۲\times ۱۰^{-۷}$. مجموع S را برای کل سری با استفاده از رابطهٔ $S=s_{۲۰}+R_{۲۰}$ برآورد می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$۱٫۵۷۰۷۹۶۳۲۴\leqslant S\leqslant ۱٫۵۷۰۷۹۶۳۴۲ . \qquad \blacksquare$$

هشدار: این محاسبات با خطای گردکردن همراه‌اند که به‌آسانی می‌تواند برآخرین رقم اعشاری و یا چند رقم قبل‌ازآن اثر بگذارد. به‌نظرمی‌رسد که با اطمینان بتوان گفت شش رقم اعشاری نخستین درست‌اند. اهل علم و مهندسانی‌که به دقتی بیش از این نیاز دارند باید به‌کتابهایی در زمینهٔ آنالیز عددی مراجعه کنند.

مسأله‌ها

۱. کامپیوتر فرض کنید

$$s_n=\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{k^۲},\quad r_n=\sum_{k=n+۱}^{\infty}\frac{۱}{k^۲}.$$

دریافتیم‌که تقریب بسیارخوبی از r_n عبارت است از $x+x^۲/۲+x^۳/۶$ با ضابطهٔ $x=۱/(n+۱)$. یک برنامهٔ بیسیک برای محاسبهٔ s_n و $s_n+x+x^۲/۲+x^۳/۶$ به ازای $n=۱$ تا $n=۴۰$ بنویسید و اجرا کنید. دربارهٔ نتایج توضیح دهید. (سری $\sum ۱/n^۲$ به $\pi^۲/۶=۱٫۶۴۴۹۳۴۰۶۷$ تا نه رقم اعشاری همگراست.) تقریب r_n را به‌این طریق یافتیم که تقریب ذوزنقه‌ای مساحت زیرخم $y=۱/x^۲$ را از $x=n+۱$ تا $x=\infty$ درنظر گرفتیم و مجموع مساحات قطعات باریکی را که تفاضل بین مساحت زیرخم و ذوزنقه‌ها را نشان‌می‌دهند به‌دست آوردیم. شکل ۱۷۰۱۱ را ببینید. تفاضل از $x=k$ تا $x=k+۱$ برابر است با

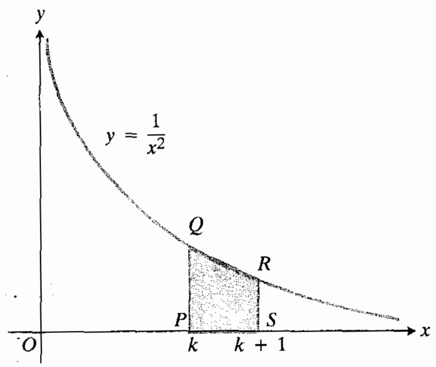
$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{k^۲}+\frac{۱}{(k+۱)^۲}\right)-\left(\frac{۱}{k}-\frac{۱}{k+۱}\right)=\frac{۱}{۲}\,\frac{۱}{k^۲(k+۱)^۲}$$

و

$$\int_{n+۱}^{\infty}\frac{۱}{۲}\,\frac{dx}{x^۴}=\frac{۱}{۶}\,\frac{۱}{(n+۱)^۳}$$

را به‌عنوان تقریب سری زیر درنظر گرفتیم

$$\sum_{k=n+۱}^{\infty}\frac{۱}{۲}\,\frac{۱}{k^۲(k+۱)^۲}.$$



۱۷۰۱۱ مساحت ذوزنقهٔ $PQRS$ برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{k^۲}+\frac{۱}{(k+۱)^۲}\right).$$

مساحت متناظر زیرخم برابر است با

$$\int_k^{k+۱}\frac{۱}{x^۲}\,dx=\frac{۱}{k}-\frac{۱}{k+۱}.$$

مساحت بین خم و وتر QR برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{k^۲}+\frac{۱}{(k+۱)^۲}\right)-\left(\frac{۱}{k}-\frac{۱}{k+۱}\right)=\frac{۱}{۲k^۲(k+۱)^۲}.$$

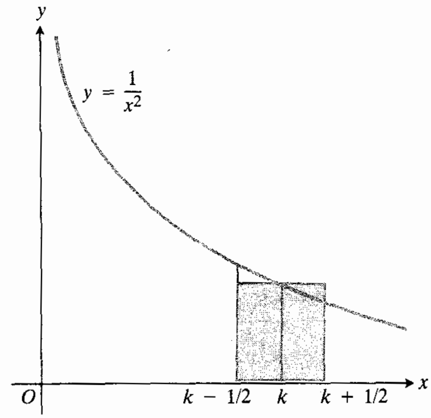
۲. کامپیوتر یک فرمول برآورد نقطهٔ وسط. فرض کنید $f(x)=۱/x^۲$ و $u_k=۱/k^۲$. تصور کنید یک مجموع جزئی $s_N=u_۱+u_۲+\ldots+u_N$ را محاسبه کرده می‌خواهیم باقیماندهٔ $R_N=u_{N+۱}+u_{N+۲}+\ldots$ را برآورد کنیم. این‌بار، مساحت مستطیلی به‌ارتفاع u_k و به‌قاعدهٔ از $k-۱/۲$ تا $k+۱/۲$ را با مساحت متناظر زیرخم $y=۱/x^۲$ مقایسه‌می‌کنیم. شکل ۱۸۰۱۱ را ببینید. مساحت اخیر را A_k می‌نامیم

$$A_k=\int_{k-۱/۲}^{k+۱/۲}\frac{۱}{x^۲}\,dx=-۱/x\Big]_{k-۱/۲}^{k+۱/۲}=۱/(k^۲-۱/۴).$$

حال، $R_N=\sum_{k=N+۱}^{\infty}u_k$ تقریباً برابر با مساحت زیر $y=۱/x^۲$ از $x=N+۱/۲$ تا $x=\infty$ است که عبارت است از $۱/(N+۱/۲)$. این برآورد را می‌توان با توجه به‌میزان افزونی مساحت زیرخم از $x=k$ تا $x=k+۱$ نسبت به‌مساحت‌مستطیل بهتر کرد. این افزونی برابراست با

$$\frac{۱}{k^۲-۱/۴}-\frac{۱}{k^۲}=\frac{۱/۴}{k^۲(k^۲-۱/۴)}.$$

برای تصحیح برآورد قبلی R_N، کافی است مجموع این افزونیها، از $k=N+۱$ تا $k=\infty$، راکم کنیم. برای‌آسانی‌کار، به‌جای



۱۸۰۱۱ مستطیل دارای مساحت $u_k = 1/k^2$ است چون قاعدهٔ از $k - 1/2$ تا $k + 1/2$ طولش ۱ است. مساحت زیر قسمت متناظر خم $y = 1/x^2$ برابر است با $1/(k^2 - 1/4)$. مساحت زیر خم به‌اندازهٔ

$$(1/4)/[k^2(k^2 - 1/4)]$$

بیشتر از مساحت مستطیل است. باقیماندهٔ $R_N = u_{N+1} + u_{N+2} + \dots$ تقریباً برابر است با

$$\int_{N+1/2}^{\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)dx - \frac{1}{4}\int_{N+1/2}^{\infty}\left(\frac{1}{x^4}\right)dx .$$

آن مجموع قرار می‌دهیم

$$\int_{N+1/2}^{\infty}\frac{1}{4}\,\frac{1}{x^4}\,dx = \frac{1}{12}\;\frac{1}{(N+1/2)^3}$$

که به‌براورد زیر منجر می‌شود

$$R_N \approx w - w^3/12 \quad \text{که در آن} \quad w = 1/(N+1/2)$$

و $S = s_N + R_N \approx s_N + w - w^3/12$. مجموع صحیح عبارت است از $\pi^2/6 \approx 1{,}644934067$. براوردهایی که ما به‌کمک یک کامپیوتر به‌دست آورده‌ایم به‌ازای چند مقدار N عبارت‌اند از

N	مجموع براورد شده
۱۰	۱٫۶۴۴۹۳۳۹۲۳
۳۴	۱٫۶۴۴۹۳۴۰۶۶
$\geqslant$۳۸	۱٫۶۴۴۹۳۴۰۶۷

یک برنامهٔ بیسیک برای محاسبهٔ s_N و $s_N + w - w^3/12$ به‌ازای $N = 1$ تا $N = 40$ بنویسید.

۳. فرض کنید $a_n = n/3^n$. اعداد r_1 و r_2 را که هردو کوچکتر از ۱ باشند بیابید به‌طوری که $r_1 \leqslant a_{n+1}/a_n \leqslant r_2$ وقتی (الف) $n \geqslant 10$، (ب) $n \geqslant 100$. به‌کمک این نتایج، باقیمانده‌های $R_{10} = \sum_{n=11}^{\infty} a_n$ و $R_{100} = \sum_{n=101}^{\infty} a_n$ را براورد کنید.

پرسشها و تمرینهای مروری

۱. «دنباله»، «سری»، و «دنبالهٔ مجموعهای جزئی یك سری» را تعریف کنید.

۲. «همگرایی» (الف) یك دنباله، (ب) یك‌سری نامتناهی، را تعریف کنید.

۳. از گزاره‌های زیر، کدامها درست و کدامها نادرست‌اند؟
الف) اگر دنباله‌ای همگرا نباشد، واگراست.
ب) اگر دنباله‌ای چون $\{f(n)\}$ همگرا نباشد، آنگاه وقتی n به‌بینهایت می‌گراید $f(n)$ هم به‌بینهایت میل می‌کند.
پ) اگر یك‌سری همگرا نباشد، آنگاه وقتی n به‌بینهایت می‌گراید، جملهٔ nام سری به‌صفر میل نمی‌کند.
ت) اگر وقتی n به بینهایت می‌گراید جملهٔ nام یك‌سری به‌صفر میل نکند، آن سری واگراست.
ث) اگر دنباله‌ای چون $\{f(n)\}$ همگرا باشد، آنگاه عددی‌مثل L هست به‌طوری که فاصلهٔ $f(n)$ از L (i) به‌ازای همهٔ مقادیر n، (ii) به‌ازای همهٔ مقادیر n به‌استثنای تعدادی متناهی از آنها، بیشتر از ۱ نیست.
ج) اگر همهٔ مجموعهای جزئی یك‌سری کوچکتر از ثابتی چون L باشند، آن سری همگراست.
چ) اگر یك‌سری همگرا باشد، مجموعهای جزئی آن، s_nها، کراندارند (یعنی به‌ازای ثابتهایی چون m و M داریم $m \leqslant s_n \leqslant M$).

۴. سه‌آزمون برای همگرایی (یا واگرایی) یك سری نامتناهی نام ببرید.

۵. تحت چه شرایطی یك‌دنبالهٔ کراندار، همگراست؟

۶. «همگرایی مطلق» و «همگرایی مشروط» را تعریف کنید. مثالهایی ازسریهایی که (الف) مطلقاً همگرا، (ب) به‌طور مشروط همگرا، هستند، بیاورید.

۷. برای قضاوت دراین باره که یك‌سری متناوب مفروض همگراست یا نه، چه‌آزمونی را معمولاً به‌کار می‌برند؟ مثالهایی از سریهای متناوب همگرا و واگرا بیاورید.

مسأله‌های گوناگون

۱. مجموع جزئی nام سری $\sum_{n=2}^{\infty} \ln(1-1/n^2)$ را به‌طور صریح پیدا کنید، و از آنجا معلوم کنید که این سری همگراست یا نه.

۲. $\sum_{k=2}^{\infty} 1/(k^2-1)$ را محاسبه کنید؛ به‌این منظور، مجموع جزئی nام را بیابید و حد آن را وقتی n بینهایت می‌شود پیدا کنید.

۳. ثابت کنید که دنبالهٔ $\{x_n\}$ و سری $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{k+1}-x_k)$ یا هردو همگرا هستند یا هردو واگرا.

۴. آیا سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

الف) همگراست؟

ب) مطلقاً همگراست؟

پ) به‌طور مشروط همگراست؟

ت) واگراست؟

۵. با فرض اینکه $|x|>1$ نشان دهید که

$$\frac{1}{1-x}=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}-\cdots.$$

۶. آیا سری $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech} n$ همگراست؟ چرا؟

۷. آیا $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \tanh n$ همگراست؟ چرا؟

همگرایی یا واگرایی سریهایی را که جمله‌های nام آنها در مسائل ۸–۱۹ داده شده، ثابت کنید.

۸. $\dfrac{1}{\ln(n+1)}$

۹. $\dfrac{n}{2(n+1)(n+2)}$

۱۰. $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

۱۱. $\dfrac{1}{n(\ln n)^2},\quad n\geqslant 2$

۱۲. $\dfrac{1+(-2)^{n-1}}{2^n}$

۱۳. $\dfrac{n}{1000n^2+1}$

۱۴. $e^n/n!$

۱۵. $\dfrac{1}{n\sqrt{n^2+1}}$

۱۶. $\dfrac{1}{n^{1+1/n}}$

۱۷. $\dfrac{1\times 3\times 5\cdots(2n-1)}{2\times 4\times 6\cdots(2n)}$

۱۸. $\dfrac{n^2}{n^3+1}$

۱۹. $\dfrac{n+1}{n!}$

۲۰. اگر سری زیر همگراست، مجموعش را بیابید.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

۲۱. الف) فرض کنید a_1، a_2، a_3، ...، a_n اعداد مثبتی هستند که درشرطهای زیر صدق می‌کنند

i) $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\cdots$

ii) سری $a_2+a_4+a_8+a_{16}+\cdots$ واگراست.

نشان دهید که سری زیر واگراست

$$\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots.$$

ب) با استفاده از نتیجهٔ بالا نشان دهید که سری زیر واگراست

$$1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}.$$

۲۲. فرض کنید سری $\sum a_n$، $a_n\neq 1$، $a_n>0$، همگراست.

الف) نشان دهید که $\sum a_n^2$ همگراست.

ب) آیا $\sum a_n/(1-a_n)$ همگراست؟ توضیح دهید.

۲۳. اگر p عدد ثابتی باشد، نشان دهید که سری

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln(\ln n))^p}$$

الف) همگراست اگر $p>1$

ب) واگراست اگر $p \leqslant ۱$.

(نکته اگر $f_۱(x) = x$ ؛ $f_{n+۱}(x) = \ln(f_n(x))$ ؛ و n مقادیر ۱، ۲، ۳، ... را اختیار کند داریم $f_۲(x) = \ln x$، $f_۳(x) = \ln(\ln x)$، و الی آخر. پس به‌شرط اینکه حد بالای انتگرال چنان باشد که $f_n(a) > ۱$، آنگاه

$$\int_a^\infty \frac{dx}{f_۱(x) f_۲(x) \cdots f_n(x) (f_{n+۱}(x))^p}$$

(i) همگراست وقتی $p > ۱$ و (ii) واگراست وقتی $p \leqslant ۱$.)

۰۲۴ الف) قضیهٔ زیر را ثابت کنید: فرض کنید $\{c_n\}$ دنباله‌ای از اعداد باشد به‌طوری‌که مجموعهای $t_n = \sum_{k=۱}^{n} c_k$ به‌ازای ثابتهایی چون M و h در شرط $|t_n| \leqslant M n^h$ با ضابطهٔ $h < ۱$ صدق کنند. دراین صورت، سری $\sum c_n / n$ همگرا و برابر با $\sum t_n / n(n+۱)$ است. (مسألهٔ ۲۱ در بخش ۹۰۱۱ را ببینید.)

ب) به‌کمك قضیهٔ قسمت (الف) همگرایی سری زیر را ثابت کنید

$$۱ - \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۷} - \frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۹} - \frac{۱}{۱۰} + \cdots$$

دراین سری، پس از k جملهٔ مثبت، $k+۱$ جملهٔ منفی و سپس $k+۲$ جملهٔ مثبت می‌آید $(k = ۱, ۳, ۵, ۷, \ldots)$.

پ) **کامپیوتر** مجموع سری قسمت (ب) را براورد کنید. (براورد ما تا هفت رقم اعشاری، ۰٫۵۱۷۱۰۰۴ است.)

۱۲

سریهای توانی

چشم‌انداز

درفصل ۱۱ بیشتر با دنباله‌ها وسریهایی‌سروکار داشتیم که جملاتشان مقادیر ثابت بودند. همهٔ آزمونهای همگرایی یا واگرایی که در آنجا به‌کار بردیم دراین‌فصل نیز به‌کار می‌آیند ولی‌دراینجا دنباله‌ها و سریهایی را بررسی می‌کنیم که جملهٔ nام آنها تابعی چون $u_n(x)$ است. به‌خصوص، سری توانی کلی

$$a_\circ + a_۱ x + a_۲ x^۲ + a_۳ x^۳ + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

را مطالعه می‌کنیم.

سریهای توانی‌ازکجا می‌آیند و چه فایده‌ای دارند؟ سریهای توانی و سایر انواع سریهای نامتناهی درحل معادلات دیفرانسیل درفیزیك ریاضی، ازجمله درتوصیف ریاضی تارهای مرتعش، جریان‌گرما، انتقال جریان الکتریکی، حرکت‌آونگ ساده و بسیاری از پدیده‌های دیگر به‌کارمی‌آیند. درشاخه‌ای از ریاضیات که آنالیز عددی نام دارد، به‌کمك سریهای توانی می‌توان تعیین کرد که برای تضمین دقت مطلوب درمحاسبه، چند رقم اعشاری لازم است. همچنین می‌توان سریهای توانی را برای‌گسترش دامنهٔ تعریف e^x، $\sin x$، $\cos x$، و سایرتابعهای مقدماتی ازمجموعهٔ اعداد حقیقی به‌مجموعهٔ اعداد مختلط به‌کار گرفت. (چنین توابعی، مثلاً، درفیزیك و مهندسی برق مفید واقع می‌شوند.) بیشتر این کاربردها درچارچوب موضوعهای خاص مربوطه بررسی می‌شوند (نظریهٔ توابع متغیرهای مختلط، در ریاضیات موضوع پیشرفته‌ای محسوب می‌شود) و دراین‌کتاب به‌آنها نخواهیم پرداخت.

۱.۱۲ مقدمه

دراین فصل، به‌دنباله‌ها و سریهایی می‌پردازیم که جملهٔ nام آنها تابعی‌چون $u_n(x)$ است. دربیشترموارد، $u_n(x)$ حاصلضرب مقدار ثابتی در x^n یا $(x-a)^n$ خواهد بود. مثلاً اگر

$$u_\circ(x) = ۱, \quad u_۱(x) = x$$
$$u_۲(x) = x^۲, \; \ldots, \; u_n(x) = x^n \qquad (۱)$$

آنگاه **دنبالهٔ** $\{u_n(x)\} = \{x^n\}$ به‌صفر همگراست اگر $-۱ < x < ۱$؛ به ۱ همگراست اگر $x = ۱$؛ و درجاهای دیگر واگراست.

اگرجمله‌های دنبالهٔ $\{x^n\}$ را با علامتهای به‌علاوه به‌هم مربوط‌کنیم، **سری** هندسی زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\sum_{n=\circ}^{\infty} x^n = ۱ + x + x^۲ + x^۳ + \cdots + x^n + \cdots \qquad (۲)$$

که می‌دانیم به $۱/(۱-x)$ همگراست اگر $|x| < ۱$ و در غیراین‌صورت، واگراست. خواه فرمول جمع‌وجوری برای $\sum x^n$ داشته باشیم و خواه نداشته باشیم، می‌گوییم‌که $\sum x^n$ تابعی بر $(-۱, ۱)$ تعریف می‌کند.

سری توانی صوری

اگر دنباله‌ای از جمله‌های کلیتر به‌صورت زیر داشته باشیم

$$u_0=a_0,\quad u_1=a_1x,\quad u_2=a_2x^2,\quad u_3=a_3x^3,\ \dots,\ u_n=a_nx^n,\ \dots \qquad (3)$$

و جمله‌های این دنباله را با علامتهای به‌علاوه به‌هم مربوط کنیم، **سری توانی صوری** را به‌دست می‌آوریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots+a_nx^n+\dots \qquad (4)$$

درعبارتهای (۳) و (۴)، a_nها ثابت (مستقل از x) اند و x متغیری است که دامنه‌اش فعلاً می‌تواند هرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد. اغلب می‌توان با به‌کاربردن آزمونهایی از قبیل آزمون نسبت یا آزمون ریشهٔ nام در مورد سری (۴)، تعیین کرد که به‌ازای چه مقادیری از x سری مفروض همگرا است. به‌ازای چنین‌مقداری از x، سری نشان‌دهندهٔ تابعی از x است. مثلاً می‌توان نوشت

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\dots+x^n+\dots,\qquad -1<x<1 \qquad (5)$$

چون سری سمت راست رابطهٔ (۵) به‌ازای هر x بین $1-$ و $1+$ به‌همان عددی میل می‌کند که مقدار تابع سمت چپ.

سریی که جمله‌های آن به‌صورت $u_n=n!\,x^n$ هستند نسبتاً عجیب وغریب است

$$0!+1!\,x+2!\,x^2+3!\,x^3+\dots+n!\,x^n+\dots \qquad (6)$$

اگر $x=0$، این سری به اولین جمله‌اش، $0!$، تقلیل می‌یابد و دارای مقدار ۱ است. به ازای همهٔ مقادیر دیگر x، جملهٔ nام $u_n=n!\,x^n$ وقتی $n\to\infty$، به صفر نمی‌رود پس این سری واگراست. این سری هیچ کاربرد عملی ندارد مگر به‌عنوان مثالی از یک سری که تنها در یک نقطه همگراست. بیشتر سریهای توانیی که ما مطالعه خواهیم کرد، روی بازه‌ای ازمقادیر x همگرا خواهند بود. اغلب سریهای توانی مورد بحث ما، آنهایی هستند که در جریان جستجوی تقریبهای چند جمله‌ای برای تابعهای مقدماتی متداول نظیر e^x، $\sin x$، $\cos x$، $\ln(1+x)$، و $\tan^{-1}x$ به‌دست می‌آیند. تقریبهای درجهٔ اول و درجهٔ دوم چنین توابعی، برای مقادیر کوچک x، درفصلهای قبلی عرضه شده‌اند. در برخی کاربردها این تقریبها به‌اندازهٔ کافی مناسب‌اند و در برخی دیگر، چنین نیستند. از این‌رو، توجه خود را به بررسی سری مکلورن و سری تیلر معطوف می‌کنیم: این دو نوع سری چیستند؟ آنها را چگونه به‌دست می‌آوریم؟ درکجا همگرا هستند؟ آیا وقتی همگرا هستند مقادیر واقعی توابع مولد خود را به‌دست می‌دهند؟

۲.۱۲ چندجمله‌ای تیلر

چنین نیست که هر تابعی یک سری توانی با بینهایت جمله تولید کند (یا چنین سریی به‌آن وابسته باشد). ولی هر تابعی چون f که در یک همسایگی $x=0$ تعریف شود و در ۰ دارای مشتقهای متناهی f'، f''، ...، $f^{(n)}$ باشد، چند جمله‌ایهایی مثل $p_0(x)$، $p_1(x)$، $p_2(x)$، ...، $p_n(x)$ تولید می‌کند که تابع مفروض $f(x)$ را به‌ازای xهای نزدیک ۰ تقریب می‌زنند. معمولاً وقتی که درجهٔ چندجمله‌ای افزایش می‌یابد، تقریبها بهتر می‌شوند.

منظور ما از «چندجمله‌ایهایی که تابع f تولید می‌کند» چیست؟ به‌ازای هرعدد صحیح k از ۰ تا n، فرض کنید چندجمله‌ای p_k عبارت باشد از

$$p_k(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_kx^k. \qquad (1)$$

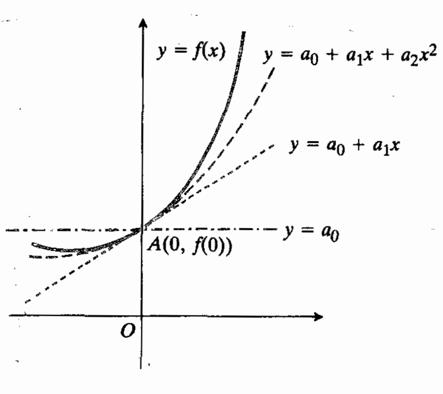
ضرایب a_0، a_1، a_2، ...، a_k باید معین شوند. توجه خویش‌را برقسمتی ازخم $y=f(x)$ نزدیک نقطهٔ $A(0, f(0))$، که در شکل ۱.۱۲ نشان داده‌شده، متمرکز می‌کنیم.

۱. نمودار چندجمله‌ای $p_0(x)=a_0$ ازدرجهٔ صفر از $(0, f(0))$ می‌گذرد اگر فرض کنیم

$$a_0=f(0).$$

۲. نمودار چندجمله‌ای $p_1(x)=a_0+a_1x$ از $(0, f(0))$ می‌گذرد و شیب آن با شیب خم‌مفروض در آن نقطه یکی‌است اگر درنظر بگیریم

$$a_0=f(0)\quad \text{و}\quad a_1=f'(0).$$



۱.۱۲ تابع $f(x)$ درنزدیکی $x=0$ به‌وسیلهٔ چند جمله‌ایهایی که مشتقاتشان در $x=0$ با مشتقات f تطبیق می‌کنند، تقریب‌زده می‌شود.

۳. نمودار چندجمله‌ای $p_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ از $(0, f(0))$ می‌گذرد و مشتقهای اول و دوم آن با مشتقهای اول و دوم تابع مفروض در آن نقطه یکی است اگر

$$a_0=f(0), \quad a_1=f'(0)$$

و

$$a_2=\frac{f''(0)}{2}.$$

۴. به‌طور کلی، چندجمله‌ای

$$p_k(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_kx^k$$

که آن را برای تقریب‌زدن نمودار $y=f(x)$ در نزدیك $x=0$ انتخاب می‌کنیم، چندجمله‌ایی است که نمودارش از $(0, f(0))$ می‌گذرد و k مشتق اولش با مشتقهای متناظر f در $x=0$ یکی است. داریم

$$\begin{aligned}
p_k(x) &= a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots+a_kx^k\\
p_k'(x) &= a_1+2a_2x+3a_3x^2+\dots+ka_kx^{k-1}\\
p_k''(x) &= 2a_2+3\cdot 2a_3x+\dots+k(k-1)a_kx^{k-2}\\
&\ \vdots\\
p_k^{(k)}(x) &= (k!)a_k.
\end{aligned}$$

اگر قرار دهیم $x=0$، $p_k(0)=f(0)$، $p_k'(0)=f'(0)$، $p_k''(0)=f''(0)$، …، $p_k^{(k)}(0)=f^{(k)}(0)$، و معادلات را نسبت به a_0، a_1، a_2، …، a_k حل کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$a_0=f(0), \quad a_1=f'(0), \quad a_2=\frac{f''(0)}{2!}$$

$$a_3=\frac{f'''(0)}{3!}, \dots, a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

پس

$$p_k(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(x)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3+\dots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \qquad (2)$$

چندجمله‌ایی است که با f و k مشتق اول آن در $x=0$ تطابق دارد. این چندجمله‌ای، **چندجمله‌ای تیلر** مرتبهٔ kام تولیدشده به‌وسیلهٔ f در $x=0$ نامیده‌می‌شود. به‌ازای هر k از ۰ تا n چنین چندجمله‌ای تیلری وجود دارد.

وقتی تابع f در $x=0$ دارای مشتقات تمام مراتب است، چنانکه در مثال زیر هست، به‌ازای هر عدد صحیح نامنفی n یك چندجمله‌ای تیلر $p_n(x)$ که به‌وسیلهٔ f تولید شده، وجود دارد.

مثال ۱ مطلوب است چند جمله‌ایهای تیلر $p_n(x)$ تولید شده به‌وسیلهٔ $f(x)=e^x$ در $x=0$.

حل: تابع مفروض و مشتقات آن برحسب x به‌صورت زیرند

$$f(x)=e^x, \quad f'(x)=e^x, \ \dots, \ f^{(n)}(x)=e^x$$

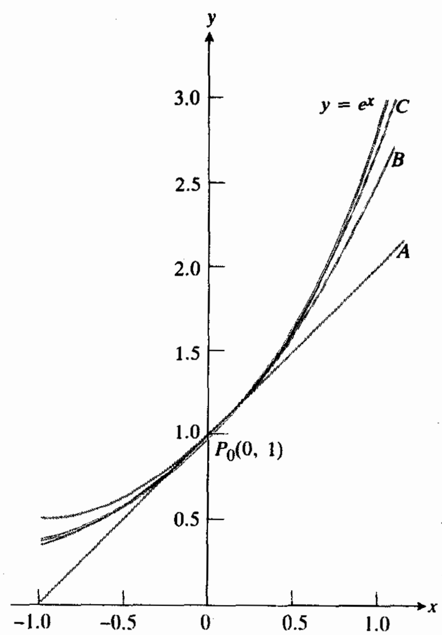
پس

$$f(0)=e^0=1, \quad f'(0)=1, \ \dots, \ f^{(n)}(0)=1$$

و

$$p_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!} \qquad (3)$$

شکل ۲.۱۲ را ببینید.



۲.۱۲ نمودار تابع $y=e^x$ و نمودارهای سه چندجمله‌ای تقریب‌زننده: (A) یك خط راست، (B) یك سهمی، و (C) یك خم درجهٔ سوم. ■

مثال ۲ مطلوب است چندجمله‌ایهای $p_n(x)$ تولید شده به‌وسیلهٔ $f(x)=\cos x$ در $x=۰$.

حل: کسینوس و مشتقهای آن عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x, & f'(x) &= -\sin x,\\ f''(x) &= -\cos x, & f^{(۳)}(x) &= \sin x,\\ &\vdots & &\vdots\\ f^{(۲k)}(x) &= (-۱)^k\cos x, & f^{(۲k+۱)}(x) &= (-۱)^{k+۱}\sin x. \end{aligned}$$

وقتی $x=۰$، کسینوسها ۱ و سینوسها ۰ هستند، پس

$$f^{(۲k)}(۰)=(-۱)^k,\quad f^{(۲k+۱)}(۰)=۰.$$

دراین مورد، چندجمله‌ایهای تیلر مرتبهٔ $۲k$ و مرتبهٔ $۲k+۱$ یکی هستند

$$p_{۲k}(x)=p_{۲k+۱}(x)=۱-\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۴}{۴!}-\cdots+(-۱)^k\frac{x^{۲k}}{(۲k)!}. \tag{۴}$$

شکل ۳۰۱۲ نشان می‌دهد که می‌توان انتظار داشت این چندجمله‌ایها $y=\cos x$ را در نزدیکی $x=۰$ به‌خوبی تقریب بزنند. تنها قسمتهای سمت راست نمودارها نشان داده‌شده‌اند زیرا نمودارها نسبت به‌محور y متقارن‌اند.

بعد از جملهٔ x^n جملات دیگری اضافه می‌شود، ضرایب جمله‌ها تا x^n وخود x^n تغییری نمی‌کنند. همهٔ این‌چندجمله‌ایها، مجموعهای جزئی یك‌سری توانی صوری معروف به‌**سری مکلورن** تولید شده به‌وسیلهٔ تابع f هستند.

سری مکلورن تولید شده به‌وسیلهٔ f

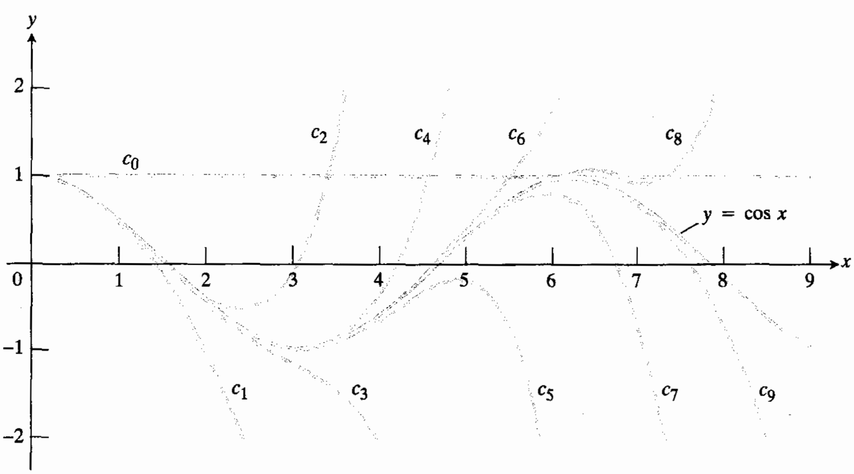
$$f(۰)+\frac{f'(۰)}{۱!}x+\frac{f''(۰)}{۲!}x^۲+\frac{f'''(۰)}{۳!}x^۳+\cdots+\frac{f^{(n)}(۰)}{n!}x^n+\cdots \tag{۵}$$

گرچه سری‌مکلورنی که f تولید می‌کند دارای مجموعهایی جزئی‌است که مقادیر ومشتقاتشان با مقادیر و مشتقات f در $x=۰$ تطبیق می‌کنند، ولی نمی‌دانیم که این سری به‌ازای هر x دیگری (به‌غیر از $x=۰$) واقعاً همگراست یا نه. بنابراین، در (۵) معادله‌ای نداریم و فقط عبارتی داریم که مقادیر x را می‌توان در آن قرارداد. قسمت اعظم این فصل با سؤالاتی دربارهٔ همگرایی سری‌مکلورن (وسری‌تیلر مشابه‌که به‌زودی به‌آن‌خواهیم‌پرداخت) سروکاردارد.

سؤال ۱: آیا سری‌توانی‌صوری (۵) به‌ازای‌مقادیری‌از x به‌غیر از $x=۰$ همگراست؟

سؤال ۲: وقتی‌که سری همگراست، آیا به‌مقدار مطلوب یعنی $f(x)$ همگراست؟

درمورد برخی از تابعها، پاسخ هردوسؤال مثبت است.



۳۰۱۲ چندجمله‌ایهای

$$c_n(x)=\sum_{k=۰}^{n}[(-۱)^k x^{۲k}/(۲k)!]$$

وقتی $n\to\infty$، به $\cos x$ میل می‌کنند. ■

سری مکلورن و سری تیلر

اگر f در $x=۰$ دارای‌مشتقهای تمام مراتب‌باشد، چندجمله‌ایهای تیلری تولید می‌کند که تابع را درنزدیکی $x=۰$ تقریب می‌زنند و درجه‌های این چندجمله‌ایها هیچ کرانی ندارند. همچنین، وقتی

نمودارهایی که درشکلهای ۲۰۱۲ و ۳۰۱۲ دیده می‌شوند دلگرم‌کننده هستند و مطالب بخشهای بعدی مؤید این مطلب هستند که معمولاً می‌توانیم انتظار داشته‌باشیم که سری‌مکلورن دربازه‌ای حول مبدأ به تابع مولدش همگرا باشد. برای بسیاری از توابع،

این بازه، سراسرمحور x است.

اگر به‌جای تقریب‌زدن مقادیر f درنزدیکی‌صفر، توجهمان به‌مقادیر x در نزدیکی نقطهٔ دیگری چون a معطوف باشد، چندجمله‌ایهای تقریب‌زننده را برحسب توانهایی از $(x-a)$ می‌نویسیم

$$p_n(x)=a_۰+a_۱(x-a)+a_۲(x-a)^۲+\cdots+a_n(x-a)^n. \qquad (۶)$$

حال اگر ضرایب $a_n, \ldots, a_۱, a_۰$ را چنان معین کنیم که چندجمله‌ای و n مشتق اولش با تابع مفروض و مشتقات آن در $x=a$ تطابق داشته باشند، به‌یك سری دست می‌یابیم که **سری تیلر** تولید شده به‌وسیلهٔ f در $x=a$ نامیده می‌شود.

سری تیلر تولید شده به‌وسیلهٔ f در $x=a$

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{۲!}(x-a)^۲+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots \qquad (۷)$$

دراینجا باید به‌دونکته توجه‌کرد. اول‌اینکه سریهای مکلورن همان سریهای‌تیلر با ضابطهٔ $a=۰$ هستند. دوم‌اینکه، نمی‌توان یك‌تابع را حول $x=a$ به‌سری تیلر بسط داد مگر اینکه در $x=a$ دارای مشتقات متناهی از تمام مراتب باشد. مثلاً، $f(x)=\ln x$ سری مکلورنی تولید نمی‌کند چون خود تابع در $x=۰$ مقدار متناهی ندارد چه برسد به‌مشتقاتش. از طرف دیگر، بسط این‌تابع به‌سری تیلر برحسب توانهای $(x-۱)$ امکان‌پذیراست چون $\ln x$ وهمهٔ مشتقاتش در $x=۱$ متناهی‌اند.

در اینجا چند مثال از سریهای تیلر می‌آوریم.

مثال ۳ ازفرمولی‌که درمثال ۲ برای چندجمله‌ایهای تیلر $\cos x$ به‌دست‌آوردیم بلافاصله نتیجه می‌شود که

$$\sum_{k=۰}^{\infty}(-۱)^k\frac{x^{۲k}}{(۲k)!}=۱-\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۴}{۴!}-\frac{x^۶}{۶!}+\cdots$$

سری مکلورن تولید شده به‌وسیلهٔ $\cos x$ است. ■

مثال ۴ سری تیلری را بیابیدکه $\cos x$ درنقطهٔ $a=۲\pi$ تولید می‌کند.

حل: مقادیر $\cos x$ و مشتقات آن در $a=۲\pi$ با مقادیر

■ ■ ■

دربارهٔ نام سریهای تیلر و مکلورن

کسی‌که اولین‌بار سری تیلر را توصیف‌کرد، تیلرنبود و توصیف سری مکلورن هم مرهون مکلورن نیست. در ۱۶۸۸، وقتی تیلر سه‌ساله بود و ده‌سال قبل از تولد مکلورن، جیمز گرگوری ریاضیدان انگلیسی‌سریهای تیلرتوابع را معرفی‌کرد و انتشارداد. او از سریهای‌مکلورن مربوط به $\tan x$، $\sec x$، $\tan^{-۱}x$، و $\sec^{-۱}x$ نیز اطلاع داشت. تقریباً درهمین زمان، ریاضیدانی بنام نیکولاس مرکاتور سری‌مکلورن $\ln(۱+x)$ را کشف‌کرد.

بروك تیلر (۱۶۸۵-۱۷۳۱) ظاهراً وقتی‌که درسال ۱۷۱۵ کتاب روشهای مستقیم و معکوس نمو خود را منتشرکرد، ازکار گرگوری بی‌خبر بود. دراین‌کتاب، آنچه‌که اکنون به‌سریهای تیلر موسوم است، آمده‌است. کالین‌مکلورن‌اسکاتلندی (۱۶۹۸-۱۷۴۶) در رساله در باب فلوکسیونها که درسال ۱۷۴۲ انتشاریافت، ازکار تیلر یادکرد. این رسالهٔ تأثیرگذار، نمایش توابع به‌وسیلهٔ سریها را به‌همگان شناساند، وگرچه مکلورن هیچ ادعایی در زمینهٔ اکتشاف این نتایج نداشت، بسط تابع به‌سری تیلر حول مقدار $a=۰$ به‌نام سری مکلورن شناخته‌شد. شاید این‌نامگذاری چندان دور از عدالت نباشد: مکلورن‌که ریاضیدان درخشانی بود، اولین کاشف روشی برای حل دستگاههای معادلات است‌که امروز این روش به‌نام قاعدهٔ کرامر معروف است.

آنها در $a=0$ یکی هستند. پس مانند مثال ۲

$$f^{(2k)}(2\pi)=f^{(2k)}(0)=(-1)^k$$

و

$$f^{(2k+1)}(2\pi)=f^{(2k+1)}(0)=0.$$

سری مطلوب، این است

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(x-2\pi)^{2k}}{(2k)!}=1-\frac{(x-2\pi)^2}{2!}+\frac{(x-2\pi)^4}{4!}-\cdots \qquad \blacksquare$$

نکته درمحاسبهٔ عباراتی نظیر

$$\frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{و} \quad \frac{(x-2\pi)^{2k}}{(2k)!}$$

که درسریهای توانی مثالهای ۳ و ۴ مطرح شدند، وقتی $k=0$ قراردادی را رعایت می‌کنیم. علاوه براین توافق معمولی که $0!=1$، فرض می‌کنیم

$$\frac{x^0}{0!}=\frac{1}{1}=1 \quad \text{و} \quad \frac{(x-2\pi)^0}{0!}=\frac{1}{1}=1$$

حتی اگر $x=0$ یا $x=2\pi$.

مثال ۵ اولین پنج جملهٔ سری تیلوری که $f(x)=1/x$ در $x=2$ تولید می‌کند چیست؟

حل: باید $f(2)$، $f'(2)$، $f''(2)$، $f'''(2)$ و $f^{(4)}(2)$ را محاسبه کنیم. با مشتقگیری به‌دست می‌آوریم

$$f(x)=x^{-1}, \qquad f(2)=2^{-1}=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=-x^{-2}, \qquad f'(2)=-\frac{1}{2^2}$$

$$f''(x)=2x^{-3}, \qquad f''(2)=\frac{2!}{2^3}$$

$$f'''(x)=-6x^{-4}, \qquad f'''(2)=-\frac{(3!)}{2^4}$$

$$f^{(4)}(x)=24x^{-5}, \qquad f^{(4)}(2)=\frac{4!}{2^5}.$$

اولین پنج جملهٔ سری تیلر اینها هستند

$$\frac{1}{2}-\frac{(x-2)}{2^2}+\frac{(x-2)^2}{2^3}-\frac{(x-2)^3}{2^4}+\frac{(x-2)^4}{2^5}.$$

به‌نظرمی‌رسد اینها جمله‌های یک‌سری هندسی با این مشخصات‌اند: اولین جمله $1/2$ و نسبت، $r=-(x-2)/2$. اگر بقیهٔ سری هم از همین الگو پیروی کند، سری همگراست به

$$\frac{1/2}{1-r}=\frac{1/2}{1+(x-2)/2}=\frac{1}{2+(x-2)}=\frac{1}{x}$$

به‌شرطی که

$$\left|\frac{x-2}{2}\right|<1 \quad \text{یا} \quad |x-2|<2 \quad \text{یا} \quad 0<x<4.$$

پس در این مثال به‌ازای $0<x<4$ می‌توان نوشت

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{(x-2)}{2^2}+\frac{(x-2)^2}{2^3}-\frac{(x-2)^3}{2^4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{(x-2)^{n-1}}{2^n}+\cdots$$

چون می‌دانیم سری هندسی سمت راست به‌ازای $0<x<4$ به $1/x$ همگراست. ■

مثال ۶ سری مکلورنی که $f(x)=(1+x)^3$ تولید می‌کند چیست؟

حل: عبارت (۵) را به‌کارمی‌بریم و مشتقها و مقادیر آنها در $x=0$ را به‌صورت زیرمحاسبه می‌کنیم

$$f(x)=(1+x)^3, \qquad f(0)=1$$

$$f'(x)=3(1+x)^2, \qquad f'(0)=3$$

$$f''(x)=6(1+x), \qquad f''(0)=6$$

$$f'''(x)=6, \qquad f'''(0)=6.$$

همهٔ مشتقات‌مراتب بالاتر متحد با صفرند؛ بنابراین، سری مکلورنی

که f تولید می‌کند، عبارت است از

$$f(\circ)+\frac{f'(\circ)}{1!}x+\frac{f''(\circ)}{2!}x^2+\frac{f'''(\circ)}{3!}x^3+\cdots$$

$$=1+3x+\frac{6}{2}x^2+\frac{6}{6}x^3+\frac{\circ}{24}x^4+\cdots$$

$$+\frac{\circ}{n!}x^n+\cdots$$

$$=1+3x+3x^2+x^3.$$

دراین‌مورد، سری مکلورن نامتناهی فقط چهارجملهٔ ناصفر دارد و لذا به‌ازای همهٔ مقادیر x همگراست. ملاحظه می‌کنیم که $1+3x+3x^2+x^3$ عبارت است از بسط دوجمله‌ای زیر

$$(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3.$$

پاسخ دوسؤالِ راجع به‌همگرایی مثبت است:

۱. سری به‌ازای همهٔ مقادیر x همگراست.
۲. وقتی‌سری‌همگراست، به‌مقدارمطلوب، یعنی $f(x)=(x+1)^3$ همگراست. ■

پرسش مروری ۲ را در انتهای این فصل ببینید. در آنجا تابعی مثال زده شده‌که سری مکلورنی تولید می‌کندکه به‌ازای همهٔ مقادیر x همگراست ولی به مقدار تابع مولدش همگرا نیست (مگر در $x=\circ$).

مسأله‌ها

در مسأله‌های ۱ــ۹، با استفاده از رابطهٔ (۲) چندجمله‌ایهای تیلر $p_3(x)$ و $p_4(x)$ را برای‌هریک ازتابعهای $f(x)$ ذیل در $x=\circ$ بنویسید. در هرمورد، اولین گام شما باید پرکردن جدولی نظیر جدول زیر باشد

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(\circ)$
۰		
۱		
۲		
۳		
۴		

۱. e^{-x}

۲. $\sin x$

۳. $\cos x$

۴. $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

۵. $\sinh x$

۶. $\cosh x$

۷. x^4-2x+1

۸. x^3-2x+1

۹. x^2-2x+1

درمسأله‌های ۱۰ــ۱۳، سری مکلورن تولید شده به‌وسیلهٔ هر تابع را بیابید.

۱۰. $\frac{1}{1+x}$

۱۱. x^2

۱۲. $(1+x)^2$

۱۳. $(1+x)^{3/2}$

۱۴. سری مکلورن تابع $f(x)=1/(x-1)$ را بیابید. نشان دهیدکه این سری واگراست وقتی $|x|\geqslant 1$ و همگراست وقتی $|x|<1$.

درمسأله‌های ۱۵ــ۲۰، فرمول (۷) را به‌کاربگیرید و سری تیلر تولید شده به‌وسیلهٔ تابع مفروض حول نقطهٔ مفروض را بنویسید.

۱۵. $f(x)=e^x,\quad a=10$

۱۶. $f(x)=x^2,\quad a=\frac{1}{2}$

۱۷. $f(x)=\ln x,\quad a=1$

۱۸. $f(x)=\sqrt{x},\quad a=4$

۱۹. $f(x)=\frac{1}{x},\quad a=-1$

۲۰. $f(x)=\cos x,\quad a=-\frac{\pi}{4}$

در مسأله‌های ۲۱و۲۲، مجموع اولین سه‌جملهٔ سری تیلر را برای

تابع مفروض حول نقطهٔ مفروض a بنویسید.

۲۱. $f(x)=\tan x, \quad a=\frac{\pi}{4}$

۲۲. $f(x)=\ln\cos x, \quad a=\frac{\pi}{3}$

۳.۱۲ قضیهٔ تیلر با باقیمانده: سینوسها، کسینوسها، و e^x

در بخش قبل این پرسش را مطرح کردیم که چه موقع می‌توان انتظار داشت سری تیلری که یك تابع تولید می‌کند، به تابع همگرا باشد. در این بخش، این پرسش را با قضیه‌ای که منسوب به ریاضیدان انگلیسی بروك تیلر (۱۶۸۵–۱۷۳۱) است، پاسخ می‌دهیم.

قضیهٔ ۱

قضیهٔ تیلر

اگر f و n مشتق اولش $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ بر $[a,b]$ یا بر $[b,a]$ پیوسته باشند، و $f^{(n)}$ بر (a,b) یا بر (b,a) مشتقپذیر باشد، آنگاه عددی چون c بین a و b وجود دارد به‌قسمی که

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

اثبات فرض می‌کنیم f در فرضهای قضیه صدق کند و چندجمله‌ای تیلر حول a ازمرتبهٔ n را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$p_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \qquad (1)$$

این چندجمله‌ای و n مشتق اولش با تابع f و n مشتق اولش در $x=a$ تطابق دارند. اما این تطابق با افزودن جملهٔ دیگری به‌شکل $K(x-a)^{n+1}$ که در آن K ثابت دلخواهی باشد، مخدوش نمی‌شود زیرا چنین تابعی و n مشتق اولش همگی در $x=a$ با صفر برابرند. پس تابع جدید

$$\phi_n(x)=p_n(x)+K(x-a)^{n+1} \qquad (2)$$

و n مشتق اولش نیز با f و n مشتق اولش در $x=a$ تطابق دارند.

اکنون مقدار خاصی از K را انتخاب می‌کنیم که باعث می‌شود خم $y=\phi_n(x)$ با خم اصلی $y=f(x)$ در $x=b$ تطابق داشته باشد. این کار را می‌توان انجام داد: کافی است داشته باشیم

$$f(b)=p_n(b)+K(b-a)^{n+1} \qquad \text{(۳ الف)}$$

یا

$$K=\frac{f(b)-p_n(b)}{(b-a)^{n+1}}. \qquad \text{(۳ ب)}$$

با درنظرداشتن این تعریف K، فرض می‌کنیم $F(x)=f(x)-\phi_n(x)$؛ بنابراین $F(x)$ اندازهٔ اختلاف تابع اصلی f و تابع تقریب‌زننده، ϕ_n، را به‌ازای هر x متعلق به $[a,b]$ یا متعلق به $[b,a]$ (اگر $b<a$) به‌دست می‌دهد. برای ساده‌کردن سیستم نمادگذاری فرض می‌کنیم $a<b$، پس a نقطهٔ انتهایی چپ همهٔ بازه‌های مذکور است. اگر a به جای اینکه نقطهٔ انتهایی چپ باشد، نقطهٔ انتهایی راست بازه باشد (مثلا $[b,a]$، (b,a)، (c_1,a)، $\ldots$، (c_n,a)) باز هم همین اثبات معتبر است.

در بقیهٔ این اثبات، مکرراً از قضیهٔ رول استفاده می‌کنیم. ابتدا، چون $F(a)=F(b)=0$ و هردوی F و F' بر $[a,b]$ پیوسته‌اند، می‌دانیم که

به‌ازای عددی چون c_1 در (a,b)، $F'(c_1)=0$.

حال، چون $F'(a)=F'(c)=0$ و هردوی F' و F'' بر $[a,c_1]$ پیوسته‌اند، می‌دانیم که

به‌ازای عددی چون c_2 در (a,c_1)، $F''(c_2)=0$.

باکاربرد متوالی قضیهٔ رول درمورد F''، F'''، $\ldots$، $F^{(n-1)}$، وجود

c_3 در (a,c_2) به‌قسمی که $F'''(c_3)=0$

c_4 در (a,c_3) به‌قسمی که $F^{(4)}(c_4)=0$

$\vdots$

c_n در (a,c_{n-1}) به‌قسمی که $F^{(n)}(c_n)=0$

نتیجه می‌شود. و بالاخره، چون $F^{(n)}$ بر $[a,c_n]$ پیوسته و بر (a,c_n) مشتقپذیر است و $F^{(n)}(a)=F^{(n)}(c_n)=0$، ازقضیهٔ رول نتیجه می‌شود که عددی چون c_{n+1} در (a,c_n) وجود دارد به‌قسمی که

$$F^{(n+1)}(c_{n+1})=0. \qquad (4)$$

اگر از

$$F(x)=f(x)-p_n(x)-K(x-a)^{n+1}$$

$n+1$ بار مشتق بگیریم، خواهیم داشت

$$F^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-0-(n+1)!\,K \,. \quad (5)$$

روابط (۲) و (۵) همراه باهم نتیجهٔ زیر را به‌دست می‌دهند

(۶) به‌ازای عددی‌چون $c=c_{n+1}$ در (a,b)، $K=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$.

روابط (۳ ب) و (۶) را باهم ترکیب‌می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم

$$\frac{f(b)-p_n(b)}{(b-a)^{n+1}}=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

یا

$$f(b)=p_n(b)+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

به‌ازای عددی چون c بین a و b. ■

نتیجه

اگر f دربازهٔ بازی چون I که شامل a است دارای مشتقات تمام مراتب باشد، آنگاه به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n و به‌ازای هر x در I،

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x) \quad (۷\ \text{الف})$$

که درآن

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \,.$$
به‌ازای cیی بین a و x، (۷ ب)

این نتیجه بلافاصله از قضیهٔ تیلر به‌دست می‌آید چون وجود مشتقات تمام‌مراتب دربازه‌ای‌مثل I، پیوستگی آن مشتقهارا ایجاب می‌کند و ما فقط درفرمول آخر، x را به‌جای b گذاشته‌ایم.

تابع $R_n(x)$ **باقیماندهٔ مرتبهٔ** n نامیده می‌شود و عبارت است از تفاضل $f(x)-p_n(x)$ که درآن، $p_n(x)$ چندجمله‌ای تیلرمرتبهٔ nی است‌که برای تقریب‌زدن $f(x)$ درنزدیکی $x=a$ به‌کاررفته است. این تفاضل را کـه «خطا»ی تقریب $p_n(x)$ هم نامیده می‌شود، اغلب می‌توان به‌کمك رابطهٔ (۷ ب) براوردکرد. درمثال بعد این را ملاحظه خواهیدکرد.

اگر به‌ازای همهٔ xهای واقع در بازه‌ای حول $x=a$، وقتی $n\to\infty$ داشته باشیم $R_n(x)\to 0$، می‌گوییم کـه بسط $f(x)$ به‌سری‌تیلر، روی‌آن بازه به $f(x)$ میل‌می‌کند و می‌نویسیم

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \,. \quad (8)$$

مثال ۱ سری مربوط به e^x. نشان دهیدکـه سری تیلر تولید شده به‌وسیلهٔ $f(x)=e^x$ در $a=0$ به‌ازای هـرمقدار حقیقی x بـه $f(x)$ همگراست.

حل: فرض‌کنیم $f(x)=e^x$. این تـابع و همهٔ مشتقاتش درهـرنقطه‌ای پیوسته‌اند، پس قضیهٔ تیلر را می‌توان بـا هرمقدار مناسبی از a به‌کار بـرد. فـرض می‌کنیم $a=0$، زیـرا محاسبهٔ مقدارهای f و مشتقاتش دراین نقطه آسان است. قضیهٔ تیلربه‌سری زیر می‌انجامد

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x) \quad (۹\ \text{الف})$$

که درآن

(۹ ب) به‌ازای cیی بین ۰ و x، $R_n(x)=\dfrac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$.

چون e^x تابعی‌صعودی از x و c بین ۰ و x است، مقدار e^c بین ۱ و e^x است. پس اگر x منفی باشد، c هم منفی‌است و $e^c<1$؛ اگـر x مثبت بـاشد، c نیز مثبت است و $e^c<e^x$. از ایـن‌رو می‌توان نوشت

(۹ پ) وقتی $x<0$، $|R_n(x)|<\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$

و

(۹ ت) وقتی $x>0$، $R_n(x)<e^x\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

وقتی $x=0$، جملهٔ اول‌سری مذکور در (۹ الف) عبارت‌است از $e^0=1$؛ پس «خطا» صفراست. و بالاخره، چون

به‌ازای هر x، $\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$،

این گزاره درست است که

به‌ازای هرمقدار x، $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^k}{k!}+\dots \,. \quad (10)$$

■

براوردکردن باقیمانده

اغلب می‌توان $R_n(x)$ را به‌همان صورتی که در مثال ۱ دیدید براوردکرد. این‌روش براورد بسیار راحت و مناسب است و برای مراجعات بعدی آن را به‌صورت یك قضیه بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۲

قضیهٔ براورد باقیمانده

اگر ثابتهای مثبتی چون M و r وجود داشته باشند به‌طوری که به‌ازای هر t در $[a, x]$ داشته باشیم $|f^{(n+1)}(t)| \leqslant Mr^{n+1}$، آنگاه جملهٔ باقیمانده درقضیهٔ تیلر، $R_n(x)$، در نابرابری زیر صدق می‌کند

$$|R_n(x)| \leqslant M\frac{r^{n+1}|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

به‌علاوه، اگر این‌شرطها به‌ازای هر n برقرار باشند و $f(x)$ درهمهٔ شرطهای دیگر قضیهٔ تیلر صدق کند، آنگاه این سری به $f(x)$ همگراست.

در مثالهای ساده می‌توانیم r را برابر با ۱ بگیریم به‌شرط اینکه ثابتی چون M باشد که‌کران f و همهٔ مشتقاتش باشد. ولی اگر $f(x)=2\cos(3x)$، هربار که مشتق می‌گیریم یك ضریب ۳ به‌دست می‌آوریم. پس می‌توانیم r را برابر ۳ و M را برابر ۲ اختیار کنیم.

برای اینکه ببینیم قضیهٔ براورد باقیمانده و قضیهٔ تیلر را چگونه‌می‌توان همراه باهم برای حل وفصل مسائل همگرایی به‌کار برد، نظری به‌چند مثال می‌افکنیم. همچنانکه خواهید دید، این دوقضیه را همچنین می‌توان برای تعیین دقت تقریب‌زدن یك تابع به‌وسیلهٔ یکی از چندجمله‌ایهای تیلرش به‌کار برد.

مثال ۲ سری مربوط به $\sin x$. نشان دهید که سری مکلورن $\sin x$ به‌ازای همهٔ xها به $\sin x$ همگراست.

حل: تابع و مشتقاتش برحسب x عبارت‌اند از

$$f(x) = \sin x, \quad f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x$$

$$\vdots$$

$$f^{(2k)}(x)=(-1)^k\sin x, \quad f^{(2k+1)}(x)=(-1)^k\cos x$$

پس

$$f^{(2k)}(0)=0 \quad \text{و} \quad f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k.$$

این سری تنها جمله‌های توان فرد دارد و، به‌ازای $n=2k+1$، ازقضیهٔ تیلر نتیجه می‌شود

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$+R_{2k+1}(x).$$

حال، چون قدرمطلق همهٔ مشتقهای $\sin x$ نابیشتر از ۱ است، می‌توانیم قضیهٔ براورد باقیمانده را با ضوابط $M=1$ و $r=1$ به‌کاربریم و به‌دست‌آوریم

$$|R_{2k+1}(x)| \leqslant 1\cdot\frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!}.$$

چون وقتی $k\to\infty$، $[|x|^{2k+2}/(2k+2)!]\to 0$، مقدار x هرچه باشد،

$$R_{2k+1}(x)\to 0$$

و سری مکلورن $\sin x$ به‌ازای هر x به $\sin x$ همگراست.

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad (11)$$
$$= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots.$$

■

مثال ۳ سری مربوط به $\cos x$. نشان دهید که سری مکلورن $\cos x$ به‌ازای هرمقدار x به $\cos x$ همگراست.

حل: درآغاز کار، جملهٔ باقیمانده را به‌چندجمله‌ای تیلر $\cos x$ در رابطهٔ (۴) بخش قبل می‌افزاییم تا فرمول تیلر $\cos x$ را به‌ازای $n=2k$ به‌دست‌آوریم

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$
$$+R_{2k}(x).$$

چون قدرمطلق مشتقهای کسینوس نابیشتر از ۱ است، قضیهٔ براورد باقیمانده را با ضوابط $M=1$ و $r=1$ به‌کارمی‌بریم و به‌دست

می‌آوریم

$$|R_{2k}(x)| \leqslant 1 \cdot \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}\,.$$

به‌ازای هـرمقدار x، وقتی $k \to \infty$، $R_{2k} \to 0$. بنابـراین، این‌سری به‌ازای هرمقدار x به $\cos x$ همگراست

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\,. \tag{12}$$

■

مثال ۴ سری‌مکلورن $\cos 2x$ را بیابید و نشان‌دهیدکه این‌سری به‌ازای هرمقدار x به $\cos 2x$ همگراست.

حل: سری مکلورن $\cos x$ به‌ازای هرمقدار x به $\cos x$ همگراست و بنابراین، به‌ازای هرمقدار $2x$ نیز به‌آن همگراست

$$\cos 2x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x)^{2k}}{(2k)!}$$

$$= 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \cdots\,.$$ ■

سریهای تیلر را می‌تـوان مانند سریهای دیگر برهم افزود، ازهم کم کرد، در ثابتهایی ضرب کرد، و نتایج حاصل بازهم سری تیلر خواهند بـود. سری تیلرمربـوط به $f(x)+g(x)$ مجموع سریهای تیلر مـربـوط به $f(x)$ و $g(x)$ است زیـرا مشتق nام $f(x)+g(x)$ عبارت است از $f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x)$، و درمورد بقیهٔ اعمال هم شبیه همین‌حالت برقرار است. درمثال‌زیر، سریهای e^x و e^{-x} را باهم جمع می‌کنیم و بر ۲ تقسیم می‌کنیم تـا سری تیلر $\cosh x$ بـه دست آید.

مثال ۵ سری مربوط بـه $\cosh x$. سری مکلورن $\cosh x$ را بیابید.

حل:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 \quad + \frac{x^2}{2!} \quad + \frac{x^4}{4!} \quad + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\,.$$ ■

اتحاد $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

تا اینجادر بررسی‌خود ازسریها اعداد موهومی‌را به‌کارنگرفته‌ایم. به‌یاد می‌آوریم که اعداد مختلط در حل معادلات درجهٔ دوم مطرح می‌شوند. فرمول ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

$$ax^2 + bx + c = 0$$

این است

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

که درآن، a، b، c اعـدادی حقیقی‌اند و $a \neq 0$. وقتی مبین $D = b^2 - 4ac$ منفی است، دوریشه عبارت‌اند از اعداد مختلط

$$u - iv \quad \text{و} \quad u + iv$$

که درآن

$$u = -\frac{b}{2a}$$

$$v = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\,.$$

منظور ما از مرور این مطالب، عمدتاً یادآوری علامت i،

$$i = \sqrt{-1}$$

و نیز یادآوری این است‌که

$$i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 i = -i$$

$$i^4 = i^2 i^2 = 1, \quad i^5 = i^4 i = i$$

و الی‌آخر.

بـا درنظرداشتن ایـن مطالب، $i\theta$ را به‌جـای x درسری مکلورن e^x قرار می‌دهیم و حـاصل را ساده می‌کنیم تا به‌دست

آوریم

$$e^{i\theta}=1+\frac{i\theta}{1!}+\frac{i^2\theta^2}{2!}+\frac{i^3\theta^3}{3!}+\frac{i^4\theta^4}{4!}+\frac{i^5\theta^5}{5!}+\frac{i^6\theta^6}{6!}+\cdots$$
$$=\left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\cdots\right)$$
$$+i\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\cdots\right)$$
$$=\cos\theta+i\sin\theta.$$

درست نیست که بگوییم با این محاسبات، اتحاد

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \qquad (13)$$

ثابت‌می‌شود بلکه این نظر را می‌پذیریم که رابطهٔ (۱۳) تعریف $e^{i\theta}$ است. این تعریف، که تعریف متداولی است، ازملاحظهٔ سریهای $\cos\theta$، $\sin\theta$، و e^x با ضابطهٔ $x=i\theta$ ناشی می‌شود.

به‌محض اینکه تعریف (۱۳) را به‌عنوان تعریف $e^{i\theta}$ بپذیریم، درستی قانون زیر را به‌سرعت می‌توان تحقیق کرد.

قانون جمع نماهای موهومی

اگر θ_1 و θ_2 اعداد حقیقی دلخواهی باشند، آنگاه

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \qquad (14)$$

اثبات بنا به‌تعریف

$$e^{i\theta_1}=\cos\theta_1+i\sin\theta_1,\quad e^{i\theta_2}=\cos\theta_2+i\sin\theta_2.$$

با ضرب کردن و ساده‌کردن خواهیم داشت

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}=(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)$$
$$+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)$$
$$=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)$$
$$=e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

همچنین توجه کنید که وقتی $\theta=0$، $i\theta=0$ و از رابطهٔ (۱۳) نتیجه می‌شود

$$e^0=\cos 0+i\sin 0=1$$

که وقتی $x=0$، با $e^x=1$ سازگار است.

اگر $\theta_1=\theta$ و $\theta_2=-\theta$، آنگاه $\theta_1+\theta_2=0$، و رابطهٔ (۱۴) نتیجهٔ زیر را به‌دست می‌دهد

$$e^{i\theta}e^{-i\theta}=e^0=1$$

پس

$$e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}. \qquad (15)$$

بنابراین، قوانین معمولی حاکم برتابع نمایی درمورد تابع $e^{i\theta}$ که به‌وسیلهٔ رابطهٔ (۱۳) تعریف شد هم به‌کارمی‌روند.

خطای برش

دراینجا مثالهایی می‌آوریم که نشان‌می‌دهند چگونه از قضیهٔ براورد باقیمانده برای براوردکردن خطای بریدن استفاده می‌شود.

مثال ۶ مطلوب است محاسبهٔ e با خطایی کوچکتر از 10^{-6}.

حل: با استفاده ازنتیجهٔ مثال ۱، رابطهٔ (۹ الف)، به‌ازای $x=1$ می‌نویسیم

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+R_n(1)$$

که درآن

به‌ازای cیی بین ۰ و ۱، $R_n(1)=e^c\dfrac{1}{(n+1)!}$.

به‌خاطرمقاصدی‌که دراین مثال داریم، فرض می‌کنیم که نمی‌دانیم $e=2.71828\ldots$، ولی قبلاً نشان داده‌ایم $e<3$. پس، مطمئن هستیم که

$$\frac{1}{(n+1)!}<R_n(1)<\frac{3}{(n+1)!}$$

چون $1<e^c<3$.

با آزمایش پی‌می‌بریم $1/9!>10^{-6}$ درحالی‌که $3/10!<10^{-6}$. پس باید $(n+1)$ را حداقل برابر ۱۰ یا n را حداقل برابر ۹ بگیریم. با خطایی کوچکتر از 10^{-6} خواهیم داشت

$$e=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{9!}\approx 2.718282. \quad ■$$

مثال ۷ به ازای چه مقدارهایی از x می‌توان $x-(x^3/3!)$ را به‌جای $\sin x$ قرار داد به‌طوری که بزرگی خطا بیشتر از 3×10^{-4} نباشد؟

حل: در اینجا از این مطلب می‌توان بهره‌گرفت که سری مکلورن $\sin x$ به‌ازای هرمقدار ناصفر x یک‌سری متناوب است. بنا به‌قضیهٔ براورد سری متناوب دربخش ۸۰۱۱، خطای برش

$$\sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} \Big| + \frac{x^۵}{۵!} - \cdots$$

پس از جملهٔ $(x^۳/۳!)$ بزرگتر از

$$\left|\frac{x^۵}{۵!}\right| = \frac{|x|^۵}{۱۲۰}$$

نیست. بنابراین، خطا نابیشتر از ۳×۱۰^{-۴} است اگر

$$\frac{|x|^۵}{۱۲۰} < ۳ \times ۱۰^{-۴}$$

یا

$$|x| < \sqrt[۵]{۳۶۰ \times ۱۰^{-۴}} \approx ۰٫۵۱۴ .$$

قضیهٔ براورد سری متناوب گویای مطلبی است که قضیهٔ براورد باقیمانده نیست: یعنی اینکه براورد $x-(x^۳/۳!)$ برای $\sin x$ وقتی x مثبت‌است، براوردی نقصانی‌است زیرا $x^۵/۱۲۰$ دراین صورت مثبت است.

درشکل ۴۰۱۲ نمودار $\sin x$ و نمودارهای تعدادی از چندجمله‌ایهای تیلر تقریب‌زنندهٔ آن دیده می‌شود. توجه کنید که نمودار $s_۱ = x-(x^۳/۳!)$ وقتی $-۱ \leqslant x \leqslant ۱$ تقریباً برخم سینوس منطبق است، ولی‌محور x را در $\pm\sqrt{۶} \approx ۲٫۴۵$ قطع می‌کند درحالی که خم‌سینوس این محور را در $\pm\pi \approx ۳٫۱۴$ قطع می‌کند.

ممکن است ازخودتان بپرسید که براورد حاصل ازقضیهٔ براورد باقیمانده درمقایسه‌با براوردی که‌هم‌اکنون ازقضیهٔ براورد سری متناوب به‌دست‌آمد چگونه است. اگر بنویسیم

$$\sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + R_۳$$

آنگاه ازقضیهٔ براورد باقیمانده به‌دست می‌آوریم

$$|R_۳| \leqslant ۱ \cdot \frac{|x|^۴}{۴!} = \frac{|x|^۴}{۲۴}$$

که چندان خوب نیست. ولی اگر دقت کنیم که $x - x^۳/۳! = ۰ + x + ۰x^۲ - x^۳/۳! + ۰x^۴$ چندجمله‌ای تیلر مرتبهٔ ۴ و نیز مرتبهٔ ۳ است، خواهیم داشت

$$\sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + ۰ + R_۴$$

و ازقضیهٔ براورد باقیمانده به‌ازای $M = r = ۱$ نتیجه می‌شود

$$|R_۴| \leqslant ۱ \cdot \frac{|x|^۵}{۵!} = \frac{|x|^۵}{۱۲۰} .$$

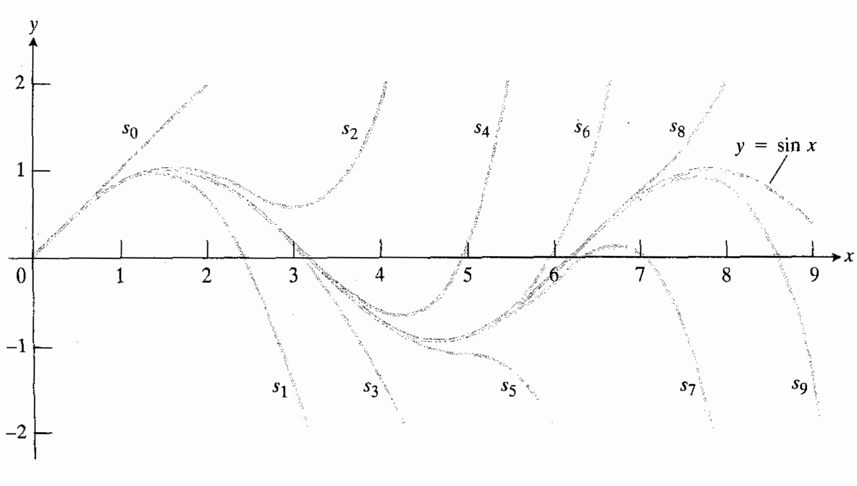
و این‌چیزی‌است که ازقضیهٔ براورد سری‌متناوب حاصل‌شد. ■

درمثالهایی که تاکنون از کاربرد قضیهٔ باقیمانده آورده‌ایم، توانسته‌ایم r را برابربا ۱ بگیریم. درمثال بعد، $f(x) = \sin ۲x$. و هربارکه مشتق می‌گیریم یك ضریب ۲ به‌دست می‌آوریم، پس داریم $r = ۲$.

مثال ۸ فرض کنید $f(x) = \sin ۲x$. تقریب $\sin ۲x \approx (۲x) - (۲x)^۳/۳! + (۲x)^۵/۵!$ به‌ازای‌چه‌مقادیری از x خطایش بیش‌از ۵×۱۰^{-۶} نیست؟

حل: چون چندجمله‌ایهای تیلر مرتبهٔ ۵ و مرتبهٔ ۶ برای $\sin ۲x$ یکی هستند، یعنی‌تنها تفاوتشان درجمله‌ای است که دارای ضریب صفر است، مطمئن هستیم که خطا بزرگتر از $۲^۷|x|^۷/۷!$ نیست (براساس‌مقایسه با مثال ۷). پس‌نامعادلهٔ زیررا حل می‌کنیم

$$\frac{|۲x|^۷}{۷!} < ۵ \times ۱۰^{-۶} .$$



۴۰۱۲ چندجمله‌ایهای

$$s_n(x) = \sum_{k=۰}^{n} [(-۱)^k x^{۲k+۱}/(۲k+۱)!]$$

وقتی $n \to \infty$ به $\sin x$ همگرایند.

نتیجه این است

$$|۲x| < \sqrt[۷]{۷! \times ۵ \times ۱۰^{-۶}} = \sqrt[۷]{۰٫۰۲۵۲۰۰} \approx ۰٫۵۹۱۰۶$$

یا $|x| < ۰٫۲۹۵۵۳ \text{ rad}$. ■

مسأله‌ها

درمسأله‌های ۱-۶، سری مکلورن هر تابع را بنویسید.

۱. $e^{x/۲}$

۲. $\sin ۳x$

۳. $۵ \cos \frac{x}{\pi}$

۴. $\sinh x$

۵. $\frac{x^{۲}}{۲} - ۱ + \cos x$

۶. $\cos^{۲} x = \frac{۱ + \cos ۲x}{۲}$

۷. با استفاده ازسری ثابت کنید که

الف) $\cos(-x) = \cos x$

ب) $\sin(-x) = -\sin x$

۸. نشان‌دهید که

$$e^x = e^a \left[۱ + (x-a) + \frac{(x-a)^{۲}}{۲!} + \cdots \right].$$

درمسأله‌های ۹-۱۱، برای تابع مفروض، فرمول تیلر (رابطهٔ ۷ الف) را به‌ازای $n = ۲$ و $a = ۰$ بنویسید.

۹. $\frac{۱}{۱+x}$

۱۰. $\ln(۱+x)$

۱۱. $\sqrt{۱+x}$

۱۲. سری تیلر e^x را در $a = ۱$ بیابید. سری‌خود را با نتیجه‌ای که درمسألهٔ ۸ به‌دست‌آمد مقایسه کنید.

۱۳. به‌ازای چه مقادیر تقریبی x می‌توان $\sin x$ را با $x - (x^{۳}/۶)$ تعویض کرد به‌طوری‌که مقدار خطا بزرگتر از ۵×۱۰^{-۴} نباشد؟

۱۴. اگر $\cos x$ با $۱ - (x^{۲}/۲)$، $|x| < ۰٫۵$ تعویض شود، چه براوردی از خطا می‌توان کرد؟ آیا $۱ - (x^{۲}/۲)$ گرایش به‌این‌دارد که خیلی بزرگ باشد یا خیلی کوچک؟

۱۵. تقریب $\sin x = x$ وقتی $|x| < ۱۰^{-۳}$ تا چه حد دقیق است؟ ازمیان این‌مقدارهای x، به‌ازای‌چه‌مقادیری $\sin x < x$؟

۱۶. براورد $\sqrt{۱+x} = ۱ + (x/۲)$ وقتی به‌کار می‌رود که $|x|$ کوچک باشد. خطا را وقتی $|x| < ۰٫۰۱$، براورد کنید.

۱۷. تقریب $e^x = ۱ + x + (x^{۲}/۲)$ وقتی به‌کار می‌رود که x کوچک باشد. به‌کمک قضیهٔ براورد باقیمانده، خطا را وقتی $|x| < ۰٫۱$ براورد کنید.

۱۸. وقتی $x < ۰$، سری مربوط به e^x یک‌سری متناوب است. به‌کمک قضیهٔ براورد سری‌متناوب، خطای ناشی از تعویض e^x با $۱ + x + (x^{۲}/۲)$ را به‌ازای $-۰٫۱ < x < ۰$ براورد کنید. نتیجه را با نتیجهٔ مسألهٔ ۱۷ مقایسه کنید.

۱۹. خطای تقریب $\sinh x = x + (x^{۳}/۳!)$ را وقتی $|x| < ۰٫۵$ براوردکنید. (راهنمایی: از $R_{۴}$ استفاده‌کنید نه از $R_{۳}$.)

۲۰. اگر $۰ \leqslant h \leqslant ۰٫۰۱$، نشان دهید که e^h را می‌توان با $۱ + h$ تعویض کرد و مقدارخطای این‌کار بیشتر از ۰٫۶٪ مقدار h نیست. از رابطهٔ $e^{۰٫۱} = ۱٫۱۰۵$ استفاده کنید.

۲۱. فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ در $a = ۰$ دارای مشتقاتی از تمام مراتب‌اند. نشان‌دهید که سری مکلورن $f + g$ این است

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{f^{(n)}(۰) + g^{(n)}(۰)}{n!} x^n.$$

۲۲. هریك از مجموعهای زیر، مقدار یك تابع مقدماتی در یك نقطه است. تابع و نقطه را پیدا کنید.

الف) $$(۰٫۱) - \frac{(۰٫۱)^{۳}}{۳!} + \frac{(۰٫۱)^{۵}}{۵!} - \cdots + \frac{(-۱)^k (۰٫۱)^{۲k+۱}}{(۲k+۱)!} + \cdots$$

ب) $$۱ - \frac{\pi^{۲}}{۴^{۲} \times ۲!} + \frac{\pi^{۴}}{۴^{۴} \times ۴!} - \cdots + \frac{(-۱)^k (\pi)^{۲k}}{۴^{۲k} \cdot (۲k)!} + \cdots$$

پ) $$۱ + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۴!} + \cdots + \frac{۱}{(۲k)!} + \cdots$$

۲۳. هریك از عبارات زیررا به‌شکل $u + iv$، که u و v حقیقی

باشند، بنویسید.

الف) $e^{i\pi}$

ب) $e^{i\pi/4}$

پ) $e^{-i\pi/2}$

ت) $e^{i\pi} \cdot e^{-i\pi/2}$

۲۴. با استفاده از (۱۳) نشان دهید که

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{و} \quad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\,.$$

این اتحادها را گاهی اتحادهای اویلر می‌نامند.

۲۵. با به‌کارگیری نتایج مسألهٔ ۲۴ نشان دهید که

$$\cos^3\theta=\frac{1}{4}\cos 3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta$$

و

$$\sin^3\theta=-\frac{1}{4}\sin 3\theta+\frac{3}{4}\sin\theta\,.$$

۲۶. وقتی a و b حقیقی‌اند، $e^{(a+ib)x}$ را به‌صورت $e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)$ تعریف می‌کنیم. با توجه به‌این تعریف نشان دهید که

$$\frac{d}{dx}e^{(a+ib)x}=(a+ib)e^{(a+ib)x}\,.$$

۲۷. دوعدد مختلط، $a+ib$ و $c+id$، باهم برابرند اگر و تنها اگر $a=c$ و $b=d$. با استفاده از این‌مطلب، انتگرالهای

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx \quad \text{و} \quad \int e^{ax}\sin bx\,dx$$

را از

$$\int e^{(a+ib)x}\,dx=\frac{a-ib}{a^2+b^2}e^{(a+ib)x}+C$$

محاسبه کنید که در آن

$$C=C_1+iC_2$$

یك ثابت مختلط انتگرالگیری است.

TOOLKIT PROGRAMS

Taylor Series

۴.۱۲ نقطه‌های بسط، قضیهٔ دوجمله‌ای، آرکتانژانتها، و π

دراین بخش، بررسی بسط تابعهای مقدماتی معمولی به‌سریها را ادامه‌می‌دهیم و از این بسطها برای تقریب‌زدن مقادیر تابعها استفاده می‌کنیم. پیش از انجام دادن این کار، این موضوع را بررسی می‌کنیم که انتخاب نقطهٔ بسط، a، چه تأثیری برکارایی محاسبات ما روی سریها دارد.

انتخاب نقطهٔ بسط

بسط تیلر

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x) \qquad (1)$$

مقدارتابع در x را برحسب مقدارش و مقدارهای مشتقاتش در a به‌اضافه یك جملهٔ باقیمانده بیان می‌کندکه امیدواریم این جمله آن‌قدرکوچك باشد که بتوانیم آن را با اطمینان حذف کنیم. پس درکاربرد سریها درمحاسبات عددی لازم است a طوری انتخاب شود که $f(a)$، $f'(a)$، $f''(a)$، . . . ، معلوم باشند. مثلاً[۶] وقتی با تابعهای مثلثاتی‌سروکار داریم‌می‌توانیم a را برابر با ۰، $\pm\pi/6$، $\pm\pi/4$، $\pm\pi/3$، $\pm\pi/2$، و نظایراینها، بگیریم. همچنین، مطلوب آن است که مقدار a درنزدیکی مقداری از x که تابع به‌ازای آن محاسبه‌می‌شود انتخاب گردد تا $(x-a)$ آن‌قدرکوچك باشدکه با افزایش n، جمله‌های سری به‌سرعت کاهش یابند.

مثال ۱ برای‌محاسبهٔ $\sin 35°$، درسری‌تیلر (۱) چه مقداری‌برای a درنظر بگیریم؟ همچنین‌خطاهای برش وگرد کردن را مورد بحث قراردهید.

حل: $35°$ برحسب رادیان برابراست با $35\pi/180$. می‌توانیم a را برابر ۰ بگیریم و سری

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

$$+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+0\cdot x^{2n-2}+R_{2n+2}(x) \qquad (2)$$

را به‌کاربریم. و نیز می‌توانیم a را برابر $\pi/6$ (که معادل با

۳۰° است) بگیریم و سری

$$\sin x=\sin\frac{\pi}{۶}+\cos\frac{\pi}{۶}\left(x-\frac{\pi}{۶}\right)-\sin\frac{\pi}{۶}\,\frac{(x-\pi/۶)^{۲}}{۲!}$$

$$-\cos\frac{\pi}{۶}\,\frac{(x-\pi/۶)^{۳}}{۳!}+\cdots$$

$$+\sin\left(\frac{\pi}{۶}+n\frac{\pi}{۲}\right)\frac{(x-\pi/۶)^{n}}{n!}+R_n(x)$$

را به‌کار ببریم. جملهٔ باقیماندهٔ سری (۲) در نابرابری

$$|R_{۲n+۲}(x)|\leqslant\frac{|x|^{۲n+۳}}{(۲n+۳)!}$$

صدق می‌کند که، هرقدر $|x|$ بزرگ باشد، این باقیمانده وقتی $n\to\infty$ به‌صفر می‌گراید. پس‌می‌توانیم $\sin ۳۵^\circ$ را به‌این‌طریق محاسبه‌کنیم که

$$x=\frac{۳۵\pi}{۱۸۰}\approx ۰٫۶۱۰۸۶۵۲$$

را درتقریب زیرقراردهیم

$$\sin x\approx x-\frac{x^{۳}}{۶}+\frac{x^{۵}}{۱۲۰}-\frac{x^{۷}}{۵۰۴۰}.$$

دراینجا بزرگی خطای برش بیشتر از $۳٫۳\times۱۰^{-۸}$ نیست زیرا

$$\left|R_{۸}\left(\frac{۳۵\pi}{۱۸۰}\right)\right|<\frac{(۰٫۶۱۱)^{۹}}{۹!}<۳٫۳\times۱۰^{-۸}.$$

با استفاده ازسریی که از قراردادن $a=\pi/۶$ حاصل می‌شود، با نمای n کوچکتر به‌همین میزان دقت می‌توان دست یافت ولی به‌این‌قیمت که $\cos\pi/۶=\sqrt{۳}/۲$ را به‌عنوان یکی ازضرایب واردکار کنیم. دراین‌سری، با ضابطهٔ $a=\pi/۶$، داریم

$$x=\frac{۳۵\pi}{۱۸۰}$$

وکمیتی که به‌توانهای مختلف می‌رسد این است

$$x-\frac{\pi}{۶}=\frac{۵\pi}{۱۸۰}\approx ۰٫۰۸۷۲۶۶۵$$

که وقتی به‌توانهای بزرگ می‌رسد، به‌سرعت‌کاهش می‌یابد.

خطای گردکردن اگر درچندجمله‌ای

$$f(x)=x-\frac{x^{۳}}{۳!}+\frac{x^{۵}}{۵!}-\frac{x^{۷}}{۷!}$$

به‌جای $۳۵\pi/۱۸۰$ عدد ۰٫۶۱۰۸۶۵۲ را برای x به‌کار بریم، چه‌خطای اضافی ایجاد می‌شود؟

دوراه برای پاسخگویی به‌این پرسش وجود دارد:

۱. با استفاده ازکامپیوتر، و
۲. با استفاده از دیفرانسیلها.

ما با استفاده ازکامپیوتر و با درنظر گرفتن تقریب کامپیوتری $۳۵\pi/۱۸۰$ تا ۱۴ رقم‌اعشاری، یعنی ۰٫۶۱۰۸۶ ۵۲۳۸۱ ۹۸۳۳، مقدار $f(x)$ را محاسبه‌کردیم

$$f(x)=۰٫۵۷۳۵۷۶۴۰۳۸$$ (تا ۱۰ رقم‌اعشاری)

و از روی جدول سینوسها مقدار زیر را یافتیم

$$\sin ۳۵^\circ=۰٫۵۷۳۵۷۶۴۳۶۳۵۱۰۴۶$$ (تا ۱۵ رقم‌اعشاری)

این نتایج نشان می‌دهند که خطای برش برای $x-f(x)$ تقریباً برابر است با $۳٫۲۶\times۱۰^{-۸}$.

در ادامهٔ استفاده ازکامپیوتر، $f(x_۰)$ را به‌ازای $x_۰=۰٫۶۱۰۸۶۵۲$ (که اختلافش با $۳۵\pi/۱۸۰$ تقریباً $۳٫۸۲\times۱۰^{-۸}$ است) محاسبه کردیم و مقدار زیر را به‌دست آوردیم

$$f(x_۰)=۰٫۵۷۳۵۷۶۳۷۲۵$$ (تا ۱۰ رقم اعشاری)

خطای نشان داده شده (خطای برش به‌اضافهٔ خطای گردکردن) برابر بود با

$$\sin x-f(x_۰)\approx ۶٫۳۸\times۱۰^{-۸}.$$

پس خطای گردکردن نیز تقریباً این است

$$(۶٫۳۸-۳٫۲۶)\times۱۰^{-۸}=۳٫۱۲\times۱۰^{-۸}.$$

دراستفاده از دیفرانسیلها، فرض می‌کنیم

$$dx=\frac{۳۵\pi}{۱۸۰}-x_۰\approx ۳٫۸۲\times۱۰^{-۸}.$$

تفاضل متناظر،

$$f(x_۰+dx)-f(x_۰)\approx f'(x_۰)\,dx$$

تقریبا برابر است با

$$\cos x_۰\,dx\approx ۰٫۸۲\,dx\approx ۳٫۱۳\times۱۰^{-۸}.$$

هر دو روش براورد خطای گرد کردن، به نتایج تقریباً یکسانی

می‌انجامند و نشان می‌دهند که خطای گردکردن در این مثال تقریباً برابر با خطای برش است. ■

اگر سری تیلر را با ضابطهٔ $a=\pi/6$ به‌کاربریم نتایج مشابهی به دست می‌آید که ما از ذکر جزئیات آن خودداری می‌کنیم.

سری دوجمله‌ای

سری‌دوجمله‌ای، یکی از مفیدترین سریها در تمام اعصار، سری مکلورن تابع $f(x)=(1+x)^m$ است. نیوتن از این‌سری برای براوردکردن انتگرالها استفاده کرد (ما هم دربخش ۵.۱۲ این‌کار را خواهیم کرد)، وآن‌را می‌توان برای به‌دست‌آوردن براوردهای دقیقی از ریشه‌ها به‌کاربرد. برای به‌دست‌آوردن این سری، ابتدا تابع و مشتقهایش را می‌نویسیم

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^m\\
f'(x) &= m(1+x)^{m-1}\\
f''(x) &= m(m-1)(1+x)^{m-2}\\
f'''(x) &= m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}\\
&\vdots\\
f^{(k)}(x) &= m(m-1)(m-2)\dots(m-k\\
&\quad +1)(1+x)^{m-k}.
\end{aligned}
$$

سپس مقدارآنها را در $x=0$ محاسبه می‌کنیم و درفرمول سری مکلورن قرارمی‌دهیم و به‌دست می‌آوریم

$$
1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\dots \tag{3}
$$
$$
+\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)}{k!}x^k+\dots.
$$

اگر m عدد صحیحی ناکمتر از صفر باشد، سری پس از $(m+1)$ جمله پایان می‌یابد زیرا ضرایب از $k=m+1$ به‌بعد صفرند. ولی وقتی m یك عدد صحیح نباشد، سری نامتناهی است. سری مکلورن، قضیهٔ دوجمله‌ای را به‌نماهایی‌که صحیح و یا مثبت نیستند، بسط می‌دهد.

مثال ۲ به‌کمك سری دوجمله‌ای، $\sqrt{1{,}25}$ را با خطایی‌کمتر از $0{,}001$ براوردکنید.

حل: در (۳) قرار می‌دهیم $x=1/4$ و $m=1/2$ و به‌دست می‌آوریم

$$
\left(1+\frac{1}{4}\right)^{1/2}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{(1/2)(-1/2)}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2
$$
$$
+\frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{3!}\left(\frac{1}{4}\right)^3+\dots
$$
$$
=1+\frac{1}{8}-\frac{1}{128}+\frac{1}{1024}-\frac{5}{32768}+\dots.
$$

سری پس از اولین جمله متناوب است، پس تقریب

$$
\sqrt{1{,}25}\approx 1+\frac{1}{8}-\frac{1}{128}=1{,}1171875
$$

فاصله‌اش از مقدار دقیق، بیشتر از $1/1024$ نیست وبنابراین، از دقت لازم برخوردار است؛ اگرآن را تا سه رقم‌اعشاری گردکنیم، خواهیم‌داشت: $\sqrt{1{,}25}\approx 1{,}117$. ■

محاسبهٔ لگاریتمها

لگاریتمهای طبیعی را می‌توان از روی سریها محاسبه‌کرد. نقطهٔ شروع‌کار، سری مربوط به $\ln(1+x)$ برحسب توانهای x است

$$
\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots
$$
$$
+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\dots. \tag{4}
$$

برای استنتاج مستقیم این‌سری مکلورن (یا سری تیلر به‌ازای $a=0$)، می‌توان قضیهٔ تیلر با باقیمانده را به‌کاربرد و نشان‌داد که اگر $-1<x\leqslant 1$، باقیمانده وقتی $n\to\infty$، به‌صفر میل می‌کند.

درحالت خاص، وقتی $x=1$، سری سمت راست به‌سری همساز متناوب تبدیل می‌شود که می‌دانیم همگراست، و حال می‌دانیم که به $\ln 2$ همگراست.

محاسبهٔ π

اعداد π، $\sqrt{2}$، و e احتمالاً معروفترین اعداد گنگ هستند. بی‌شك در بین این سه، π از دیگران معروفتر است. درطول‌قرنها، افراد بسیاری، تقریبهای گویایی از آن را محاسبه‌کرده‌اند خواه به صورت کسرهایی نظیر ۲۲/۷، و ۳۵۵/۱۱۳ یا به‌صورت اعدادی اعشاری نظیر ۳٫۱۴۱۵۹ ۲۶۵۳۵ ۸۹۷۹۳ ۲۳۸۴۶.

یك ریاضیدان فرانسوی به‌نام ویتا[1] (۱۵۴۰-۱۶۰۳) فرمول زیر را به‌دست آورد

$$\frac{۲}{\pi}=\sqrt{\frac{۱}{۲}}\times\sqrt{\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۱}{۲}}\right)}\times\sqrt{\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\sqrt{\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۱}{۲}}\right)}\right)}\times\cdots \tag{۵}$$

که ترنبال[2] آن را «اولین فرمول واقعی برای عدد کهنسال π» می‌نامد. ازجملهٔ سایرفرمولها،

$$\frac{\pi}{۴}=\frac{۲\times۴\times۴\times۶\times۶\times۸\times\cdots}{۳\times۳\times۵\times۵\times۷\times۷\times\cdots} \tag{۶}$$

است که والیس، ریاضیدان انگلیسی آن را کشف کرد، و

$$\frac{\pi}{۴}=۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۷}+\cdots$$

که به فرمول لایب‌نیتس معروف است. جان مشین فرمول زیر را کشف کرد

$$\frac{\pi}{۴}=۴\tan^{-۱}\frac{۱}{۵}-\tan^{-۱}\frac{۱}{۲۳۹}$$

و آن را همراه با سری زیر به‌کاربرد

$$\tan^{-۱}x=x-\frac{x^۳}{۳}+\frac{x^۵}{۵}-\frac{x^۷}{۷}+\cdots$$

این سری را جیمز گرگوری در ۱۶۷۱ کشف کرده بود. نتیجهٔ محاسبهٔ π به‌وسیلهٔ مشین، که تا ۱۰۰ رقم اعشاری درست است، در ۱۷۰۶ انتشار یافت. اولین تقریبهای π با بیش‌از ۱۰۰۰ رقم اعشاری‌را رنچ[3] و اسمیت[4] در ژوئن ۱۹۴۹ تا«حدود ۱۱۲۰ رقم اعشاری» به‌دست آوردند. درسپتامبر ۱۹۴۹، جورج رایت ویسنر[5] و همکارانش در آزمایشگاههای تحقیقات بالستیك آمریکا عدد π را تا «حدود ۲۰۳۷ رقم» حساب کردند. در این محاسبه از کامپیوتر انیاك[6]، که یکی ازکامپیوترهای اولیه است، استفاده‌شد. فرمولی که به‌کاررفت، فرمول مشین‌بود وکل‌زمانی که انیاك برای‌محاسبه‌صرف کرد (با احتساب زمان‌کارت‌خوانی) ۷۰ ساعت بود.

جدیدترین اطلاعی که دراین باره داریم این است که مقدار π را با استفاده از یك نوع جدید سوپرکامپیوتر کری[7]-۲ تا ۲۹ ۳۶۰ ۱۲۸ رقم حساب کرده‌اند[8]. برنامهٔ این محاسبه را یکی‌از دانشمندان مرکز تحقیقات فضایی آمریکا (دراوقات فراغتش!) براساس الگوریتمی که در دانشگاه دالهوسی[9] کانادا تهیه شده، نوشته است. این برنامه ۲۸ ساعت از وقت کامپیوتر را گرفته و ۱۳۸ میلیون کلمه ازحافظهٔ اصلی آن را اشغال کرده و انجام ۱۲ تریلیون عمل حسابی را ایجاب کرده است. برای آزمودن نتیجه، برنامهٔ دیگری براساس الگوریتم قدیمیتری نوشته و اجرا شده که درعدد حاصل، فقط ۱۷ رقم‌آخر با نتیجهٔ اولی متفاوت بوده‌است.

چرا کار محاسبهٔ π را تا این حد ادامه می‌دهند؟ از لحاظ نظری، π همچنان مسائلی در ریاضیات مطرح می‌کند، از قبیل مسألهٔ آماری تصادفی بودن ارقام π. ازلحاظ عملی، محاسبهٔ π به منزلهٔ شیوه‌ای برای آزمودن قابلیت اعتماد، دقت، وکارایی کامپیوتر همچنان مورد توجه قراردارد.

اکنون توجه خود را به‌سری مربوط به $\tan^{-۱}x$ معطوف می‌کنیم زیرا، همان‌طورکه در بالا اشاره شد، این سری به‌فرمول لایب‌نیتس و فرمولهای دیگری‌که π را از روی آنها تا تعداد زیادی رقم اعشاری حساب کرده‌اند، می‌انجامد.

چون

$$\tan^{-۱}x=\int_{۰}^{x}\frac{dt}{۱+t^۲}$$

از سری هندسی زیر، با باقیمانده، انتگرال می‌گیریم

$$\frac{۱}{۱+t^۲}=۱-t^۲+t^۴-t^۶+\cdots+(-۱)^n t^{۲n}+\frac{(-۱)^{n+۱}t^{۲n+۲}}{۱+t^۲}. \tag{۷}$$

پس

$$\tan^{-۱}x=x-\frac{x^۳}{۳}+\frac{x^۵}{۵}-\frac{x^۷}{۷}+\cdots+(-۱)^n\frac{x^{۲n+۱}}{۲n+۱}+R$$

که در آن

$$R=\int_{۰}^{x}\frac{(-۱)^{n+۱}t^{۲n+۲}}{۱+t^۲}\,dt.$$

مخرج انتگرالده ناکمتر از ۱ است؛ از این‌رو

$$|R|\leqslant\int_{۰}^{|x|}t^{۲n+۲}\,dt=\frac{|x|^{۲n+۳}}{۲n+۳}.$$

---

1. Viéta 2. Turnbull 3. Wrench 4. L. B. Smith 5. George W. Reitwiesner
6. ENIAC (electronic numerical integrator and computer) 7. Cray
8. اطلاع جدیدتراین است که π تا یك بیلیون رقم محاسبه شده است [-م.].
9. Dalhousie

سریهای مکلورنی‌که بسیار به‌کار می‌روند

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n, \quad |x|<1$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-x)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \quad |x|<1$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \quad |x|<\infty$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |x|<\infty$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad |x|<\infty$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}, \quad -1<x\leqslant 1$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\tanh^{-1}x=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x|<1$$

$$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}, \quad |x|\leqslant 1$$

سری دوجمله‌ای

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)x^2}{2!}+\frac{m(m-1)(m-2)x^3}{3!}+\cdots+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)x^k}{k!}+\cdots$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{m}{k}x^k, \quad |x|<1$$

که در آن

$$\binom{m}{1}=m, \quad \binom{m}{2}=\frac{m(m-1)}{2!}, \quad \binom{m}{k}=\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} \quad (\text{برای } k\geqslant 3)$$

توجه: معمولاً $\binom{m}{0}$ را برابر با ۱ تعریف می‌کنند و فرض می‌کنند $x^0=1$ (حتی در حالت $x=0$ که معمولاً این حالت را کنار می‌گذارند) تا بتوان سری دوجمله‌ای را به‌شکل فشردهٔ زیر نوشت

$$(1+x)^m=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}x^k, \quad |x|<1.$$

اگر m یك عدد صحیح مثبت باشد، سری در x^m ختم می‌شود و نتیجه به‌ازای همهٔ xها همگراست.

اگر $|x| \leqslant ۱$ ، سمت‌راست این‌نابرابری وقتی $n \to \infty$ ، به‌صفر میل‌می‌کند. بنابراین، R نیز به‌صفرمیل می‌کند و داریم

$$\tan^{-۱}x=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^n x^{۲n+۱}}{۲n+۱}\,.$$

$$\tan^{-۱}x=x-\frac{x^۳}{۳}+\frac{x^۵}{۵}-\frac{x^۷}{۷}+\cdots,\quad |x|\leqslant ۱\,. \qquad (۸)$$

اگر در رابطهٔ (۸) قراردهیم $x=۱$ و $\tan^{-۱}۱=\pi/۴$ ، فرمول لایب‌نیتس به‌دست می‌آید

$$\frac{\pi}{۴}=۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۹}-\cdots+\frac{(-۱)^{n-۱}}{۲n-۱}+\cdots.$$

چون همگرایی این سری خیلی کند است ، آن را برای تقریب‌زدن π تا تعداد زیادی رقم اعشاری به‌کار نمی برند. سری $\tan^{-۱}x$ وقتی x نزدیك صفر است همگرایی بسیار سریعی دارد. به این دلیل، کسانی‌که سری $\tan^{-۱}x$ را برای محاسبهٔ π به‌کار می‌گیرند، از اتحادهای مثلثاتی‌متعددی‌استفاده می کنند. مثلاً ، اگر

$$\beta=\tan^{-۱}\frac{۱}{۳}\quad و \quad \alpha=\tan^{-۱}\frac{۱}{۲}$$

آنگاه

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{(۱/۲)+(۱/۳)}{۱-(۱/۶)}$$

$$=۱$$

$$=\tan\frac{\pi}{۴}$$

و

$$\frac{\pi}{۴}=\alpha+\beta=\tan^{-۱}\frac{۱}{۲}+\tan^{-۱}\frac{۱}{۳}\,. \qquad (۹)$$

اکنون می‌توان رابطهٔ (۸) را به‌ازای $x=۱/۲$ برای محاسبهٔ $\tan^{-۱}۱/۲$ و به‌ازای $x=۱/۳$ برای محاسبهٔ $\tan^{-۱}۱/۳$ به‌کار برد. مجموع این نتایج ضربدر ۴ ، π را به‌دست می‌دهد.

مسأله‌ها

درمسأله‌های ۱-۶ ، به‌کمك سری‌مناسبی ، کمیت‌نشان داده‌شده را تا سه رقم اعشار محاسبه‌کنید. درهرمورد، نشان دهیدکه جملهٔ باقیمانده از ۵×۱۰^{-۴} تجاوز نمی‌کند.

۱. $\cos ۳۱^\circ$

۲. $\tan ۴۶^\circ$

۳. $\sin ۶٫۳$

۴. $\cos ۶۹$

۵. $\ln ۱٫۲۵$

۶. $\tan^{-۱}۱٫۰۲$

۷. سری مکلورن $\ln(۱+۲x)$ را بیابید. این سری به‌ازای چه مقدارهایی از x همگراست؟

۸. به ازای چه‌مقدارهایی از x می‌توان $\ln(۱+x)$ را با x تعویض‌کرد به‌طوری‌که مقدار خطا بیشتر از یك‌صدم قدرمطلق x نباشد؟

در مسأله‌های ۹ و ۱۰، انتگرالها را به‌کمك سریها تا سه رقم اعشاری محاسبه‌کنید.

۹. $\displaystyle\int_۰^{۰٫۱}\frac{\sin x}{x}dx$

۱۰. $\displaystyle\int_۰^{۰٫۱}e^{-x^۲}\,dx$

۱۱. نشان‌دهیدکه‌اختلاف‌ارتفاع‌خم‌زنجیری $y=a\cosh x/a$ با سهمی $x^۲=۲a(y-a)$ درمحدودهٔ $|x/a|\leqslant ۱/۳$ کمتر از $۰٫۰۰۳|a|$ است.

۱۲. الف) درسری $\ln(۱+x)$ به‌جای x قراردهید $-x$ تا سری $\ln(۱-x)$ به‌دست آید. این سری را با سری $\ln(۱+x)$ ترکیب‌کنید و نشان دهیدکه

به‌ازای $|x|<۱$ ، $\displaystyle\ln\frac{۱+x}{۱-x}=۲\left(x+\frac{x^۳}{۳}+\frac{x^۵}{۵}+\cdots\right)$.

ب) به‌ازای‌چه‌مقداری‌از x داریم $(۱+x)/(۱-x)=۲$؟ این مقدار x را درسری قسمت (الف) به‌کاربرید و $\ln ۲$ را تا سه رقم اعشاری براوردکنید.

۱۳. مجموع سری زیررا بیابید

$$\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲+\frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{۲}\right)^۳-\frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{۲}\right)^۴+\cdots.$$

۱۴. چندجمله از سری مربوط به $\tan^{-۱}۱$ را باید به هم بیفزاییم

تا بتوان براساس قضیهٔ براورد سری متناوب، $\pi/۴$ را تا دو رقم اعشاری به‌دست آورد؟

۱۵. ماشین‌حساب رابطهٔ (۸) و رابطهٔ زیر

$$\pi = ۴۸\tan^{-۱}\frac{۱}{۱۸} + ۳۲\tan^{-۱}\frac{۱}{۵۷} - ۲۰\tan^{-۱}\frac{۱}{۲۳۹}$$

سریی به‌دست می‌دهند که به‌طور نسبتاً سریع به $\pi/۴$ همگراست. π را با این سری تا سه رقم اعشاری براورد کنید. درمقابل، همگرایی $\sum_{n=۱}^{\infty}(۱/n^۲)$ به $\pi^۲/۶$ آن‌قدر آهسته است که حتی ۵۰ جمله هم نتیجه‌ای که تا دو رقم صحیح باشد به‌دست نمی‌دهند.

۱۶. ماشین‌حساب

الف) π را با فرمول والیس تا دو رقم اعشاری حساب کنید.

ب) اگر ماشین‌حساب شما برنامه‌پذیر است، با استفاده از فرمول ویتا عدد π را تا پنج رقم اعشاری حساب کنید.

۱۷. ماشین‌حساب حالت خاصی از الگوریتم سالامین[1] برای براوردکردن π، با تعریف دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ به‌وسیلهٔ قاعده‌های زیر

$$a_۰ = ۱, \qquad b_۰ = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$a_{n+۱} = \frac{(a_n + b_n)}{۲}, \quad b_{n+۱} = \sqrt{a_n b_n}$$

آغاز می‌شود. سپس، دنبالهٔ $\{c_n\}$ که به‌ازای $n \geqslant ۱$ به‌صورت

$$c_n = \frac{۴a_n b_n}{۱ - \sum_{j=۱}^{n} ۲^{j+۱}(a_j^۲ - b_j^۲)}$$

تعریف می‌شود، به π همگراست. $c_۳$ را محاسبه کنید.

۱۸. نشان دهید که سری مذکور در رابطهٔ (۸) برای $\tan^{-۱}x$، به‌ازای $|x| > ۱$ واگراست.

۱۹. نشان دهید

$$\int_۰^x \frac{dt}{۱-t^۲} = \int_۰^x \left(۱ + t^۲ + t^۴ + \dots + t^{۲n} + \frac{t^{۲n+۲}}{۱-t^۲}\right) dt$$

یا، به‌عبارت دیگر، نشان‌دهید

$$\tanh^{-۱}x = x + \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۵}{۵} + \dots + \frac{x^{۲n+۱}}{۲n+۱} + R$$

که در آن

$$R = \int_۰^x \frac{t^{۲n+۲}}{۱-t^۲}\, dt\,.$$

۲۰. نشان‌دهید که درمسألهٔ ۱۹، R بزرگتر از

$$\frac{۱}{۱-x^۲} \cdot \frac{|x|^{۲n+۳}}{۲n+۳} \quad (x^۲ < ۱)$$

نیست.

۲۱. الف) از اتحاد

$$\frac{۱}{۱-x} = ۱ + x + x^۲ + \dots + x^n + \frac{x^{n+۱}}{۱-x}$$

مشتق بگیرید و بسط زیر را به‌دست آورید

$$\frac{۱}{(۱-x)^۲} = ۱ + ۲x + ۳x^۲ + \dots + nx^{n-۱} + R\,.$$

ب) ثابت کنید که اگر $|x| < ۱$، آنگاه وقتی $n \to \infty$، $R \to ۰$.

پ) دریک‌بار ریختن دوتاس، احتمال اینکه مجموع خالهای رو شده ۷ باشد برابراست با $p = ۱/۶$. اگرتاسها مکرراً ریخته شوند، احتمال اینکه در بار nام مجموع خالها برای اولین بار ۷ باشد، $q^{n-۱}p$ است که در آن $q = ۱ - p = ۵/۶$. تعداد مورد انتظار دفعاتی که تاسها باید ریخته شوند تا برای اولین‌بار مجموع ۷ ظاهرشود، $\sum_{n=۱}^{\infty} nq^{n-۱}p$ است. این‌سری را به‌طور عددی محاسبه کنید.

ت) مهندسی برای اعمال کنترل کیفیت آماری بریك فرایند تولید صنعتی، چند عدد ازکالا را که به‌تصادف ازخط تولید برداشته می‌شوند بازرسی می‌کند. هرعددکالا که نمونه گیری می‌شود تحت عنوان «بد» یا «خوب» طبقه‌بندی می‌شود. اگر احتمال خوب بودن کالا p و احتمال بد بودنش $q = ۱ - p$ باشد، احتمال اینکه اولین‌کالای بد در nامین بازرسی پیدا شود $p^{n-۱}q$ است. تعداد متوسط بازرسیهایی که باید انجام شود تا اولین‌کالای بد به دست آید، $\sum_{n=۱}^{\infty} np^{n-۱}q$ است. این‌سری را با فرض $۰ < p < ۱$ محاسبه کنید.

۲۲. درنظریهٔ احتمال، متغیری‌تصادفی چون X می‌تواند مقادیر ۱، ۲، ۳، ... را با احتمالهای $p_۱$، $p_۲$، $p_۳$، ... اختیارکندکه p_k احتمال برابر بودن X با k $(k = ۱, ۲, \dots)$ است. معمولاً

1. Salamin

فرض می‌کنند $p_k \geqslant 0$ و $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$. مقدار مورد انتظار [امید ریاضی] X که با $E(X)$ نشان داده می‌شود به‌صورت $\sum_{k=1}^{\infty} k p_k$ تعریف می‌گردد به‌شرط اینکه این سری همگرا باشد. در هریك از موارد زیر، نشان دهید که $\sum p_k = 1$ و $E(X)$ را، درصورت وجود، پیدا کنید. (راهنمایی: مسألهٔ ۲۱ را ببینید.)

الف) $p_k = 2^{-k}$

ب) $p_k = \dfrac{5^{k-1}}{6^k}$

پ) $p_k = \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$

TOOLKIT PROGRAMS
Sequences and Series   Taylor Series

۵.۱۲ همگرایی سریهای توانی: مشتقگیری، انتگرالگیری، ضرب، و تقسیم

حال که سریهای توانی مربوط به‌توابع مقدماتی معمولی‌را بررسی کرده‌ایم، می‌پردازیم به مسائل مربوط به‌سریهای توانیی که از راههای دیگری ــ مثلاً در حل معادلهٔ دیفرانسیل ــ پدید می‌آیند. (نمونه‌هایی از این‌گونه سریها در فیزیك ریاضی مطرح می‌شوند، و نمونه‌های ساده‌تری را ما در فصل ۲۰ خواهیم آورد.) همچنین عملهایی از قبیل ضرب، تقسیم، مشتقگیری، و انتگرالگیری از سریهای توانی را مورد بحث قرار می‌دهیم. دراینجا، لازم است هشداری بدهیم: انواع دیگری ازسریها، ازجمله سریهای (فوریهٔ) مثلثاتی نیز درمهندسی و فیزیك اهمیت دارند، و برخی ازعملهایی که برای سریهای توانی قابل اجرا هستند درمورد بعضی از آن سریها نمی‌توانند اجرا شوند. مثلاً، قضیه‌ای که برای‌سریهای‌توانی صادق است در واقع می‌گوید که مشتق یك سری توانی چون $\sum a_n x^n$ عبارت است از $\sum n a_n x^{n-1}$. ولی این‌مطلب درست‌نیست که مشتق‌سری‌مثلثاتی $\sum (1/n) \sin nx$ عبارت‌است از $\sum \cos nx$. به‌علاوه، اثبات برخی از مهمترین قضیه‌ها را نمی‌آوریم زیرا این اثباتها دشوارتر از حدی هستند که در یك درس مقدماتی حساب دیفرانسیل و انتگرال بیایند. (آنها را درکتابهای درسی پیشرفته‌تر می‌توان یافت.) ولی نتایج سودمندند وکاربردشان ساده‌است.

همگرایی سریهای توانی

اکنون می‌دانیم که برخی‌ازسریها، نظیرسریهای مربوط به $\sin x$، $\cos x$، و e^x، به‌ازای همهٔ مقادیر x همگرا هستند و برخی‌دیگر، نظیر سریهای مربوط به $\ln(1+x)$ و $\tan^{-1} x$، فقط روی بازه‌های متناهی همگرایند. ولی همهٔ این اطلاعات را ازتحلیل فرمولهای باقیمانده به‌دست‌آورده‌ایم وهنوز با این‌پرسش روبروییم که وقتی فرمولی برای باقیمانده وجود ندارد، همگرایی یك‌سری توانی را چگونه تحقیق‌کنیم. به علاوه، همهٔ سریهای توانیی که با آنها سروکار داشته‌ایم سریهای تیلری بوده‌اند که توابع مولدآنها را از قبل می‌شناخته‌ایم. دربارهٔ سایر سریهای توانی چه می‌توان گفت؟ آیا آنها نیز سریهای تیلر توابعی هستند که ما آنها را نمی‌شناسیم؟

اولین گام در پاسخگویی به‌این پرسشها توجه به‌این‌نکته‌است که یك سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ هرگاه همگرا باشد تابعی تعریف می‌کند، یعنی تابع f را که مقدارش درهر x عدد زیراست

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n . \qquad (1)$$

پس‌می‌توانیم‌دربارهٔ نوع‌دامنهٔ f، نحوهٔ مشتقگیری و انتگرالگیری از f (درصورتی‌که این‌اعمال ممکن‌باشد)، اینکه f سری تیلری دارد یا نه، و اگردارد، سری تیلرش چگونه به‌سری تعریف‌کنندهٔ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ مربوط می‌شود، سؤالاتی مطرح‌کنیم.

پرسشهای مربوط به دامنهٔ f و مقادیری‌که می‌توان انتظار داشت سری (۱) به‌ازای آنها همگرا باشد، به‌وسیلهٔ قضیهٔ ۳ و بحثی‌که به‌دنبال آن می‌آید پاسخ داده‌می‌شود. ما قضیهٔ ۳ را ثابت خواهیم‌کرد و سپس، پس از افکندن نگاهی به چند مثال، به‌قضایای ۴ و ۵ خواهیم رسید‌که پاسخگوی این پرسشها هستند که آیامی‌توان از f مشتق و انتگرال‌گرفت و اگرمی‌توان، چگونه. علاوه‌براین، درقضیهٔ ۵ مسأله‌ای حل‌می‌شود‌که درچندین فصل پیش مطرح شد ولی تا اینجا حل‌نشده‌است: مسألهٔ یافتن‌عبارتهای‌مناسبی برای محاسبهٔ انتگرالهایی نظیر

$$\int_0^{0.5} \sqrt{1+x^4}\, dx \quad \text{و} \quad \int_0^1 \sin x^2\, dx$$

که در کاربردها بسیار پیش می‌آیند. (مثالهای ۸، ۹، و ۱۰ را دراین بخش‌ببینید.) سرانجام، خواهیم‌دید‌که درداخل‌دامنهٔ تعریف، تابع f سری مکلورنی دارد و این سری چیزی نیست مگر سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ که تعریف کنندهٔ تابع‌است.

قضیهٔ ۳

قضیهٔ همگرایی برای سریهای توانی

اگر یك‌سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \qquad (2)$$

به‌ازای $x=c$ $(c\neq 0)$ همگرا باشد، آنگاه به‌ازای هر xی که در $|x|<|c|$ صدق کند مطلقاً همگراست. اگر این سری به‌ازای $x=d$ واگرا باشد، آنگاه به‌ازای هر xی که در $|x|>|d|$ صدق کند واگراست.

اثبات فرض کنیم که سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n \qquad (۳)$$

همگراست. در این صورت

$$\lim_{n\to\infty} a_n c^n = 0.$$

از این‌رو، اندیسی چون N وجود دارد به‌قسمی که

به‌ازای هر $n\geqslant N$ ، $|a_nc^n|<1$.

یعنی

(۴) به‌ازای هر $n\geqslant N$ ، $|a_n|<\frac{1}{|c|^n}$.

حال x دلخواهی می‌گیریم به‌طوری که $|x|<|c|$ و عبارت زیر را در نظر می‌گیریم

$$|a_0|+|a_1x|+\cdots+|a_{N-1}x^{N-1}|+|a_Nx^N|+|a_{N+1}x^{N+1}|+\cdots.$$

قبل از $|a_Nx^N|$ فقط تعدادی متناهی جمله وجود دارد، و مجموع این جمله‌ها متناهی است. اگر از $|a_Nx^N|$ شروع کنیم و پیش برویم، جمله‌ها بنا به‌ویژگی نابرابری (۴) کوچکتر از

$$\left|\frac{x}{c}\right|^N+\left|\frac{x}{c}\right|^{N+1}+\left|\frac{x}{c}\right|^{N+2}+\cdots \qquad (۵)$$

هستند. ولی سری مذکور در (۵) یك سری هندسی با نسبت $r=|x/c|$ است که کوچکتر از ۱ است زیرا $|x|<|c|$. پس سری (۵) همگراست و بنا بر این، سری اصلی (۳) مطلقاً همگراست. بدین ترتیب، نیمهٔ اول قضیه ثابت می‌شود.

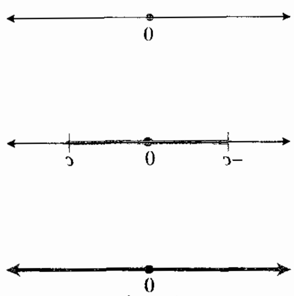
نیمهٔ دوم قضیه چیز جدیدی در بر ندارد. اگر سری در $x=d$ واگرا و درمقداری چون x_0 با ضابطهٔ $|x_0|>|d|$ همگرا باشد، می‌توانیم در نیمهٔ اول قضیه فرض کنیم $c=x_0$ و نتیجه بگیریم که سری در d مطلقاً همگراست. اما این سری نمی‌تواند در یك زمان هم مطلقاً همگرا و هم واگرا باشد، پس اگر در d واگرا باشد به‌ازای همهٔ xهایی که $|x|>|d|$ ، واگراست.

شعاع و بازهٔ همگرایی

مضمون قضیهٔ ۳ این است که یك‌سری توانی همیشه دقیقاً به‌یکی از سه صورت زیر رفتار می‌کند. (شکل ۵۰۱۲)

انواع رفتاری که یك‌سری توانی ممکن‌است داشته باشد

۱. در $x=0$ همگراست و درهرجای دیگر واگرا.
۲. عدد مثبتی چون c موجود است به‌قسمی که سری به‌ازای $|x|>c$ واگراست‌ولی به‌ازای $|x|<c$ مطلقاً همگراست. سری درهریك‌ازنقاط انتهایی $x=c$ و $x=-c$ ممکن‌است همگرا باشد یا نباشد.
۳. به‌ازای هر x مطلقاً همگراست.



۵۰۱۲

درحالت ۲ ، مجموعهٔ همهٔ نقاطی که سری به‌ازای آنها همگراست یك‌بازهٔ متناهی است. با توجه به‌مثالهای قبل می‌دانیم که این‌بازه، بسته به‌سری مورد نظر، ممکن است باز، نیمباز، یا بسته باشد. ولی صرف‌نظر از اینکه بازه از چه نوع است، c را **شعاع همگرایی** سری می‌نامند، و همگرایی‌درهر نقطهٔ داخلی بازه، مطلق است. این بازه، **بازهٔ همگرایی** نام دارد. اگر یك سری توانی به‌ازای همهٔ مقادیر x مطلقاً همگرا باشد، می‌گوییم شعاع‌همگرایی بینهایت است. اگر سری تنها در $x=0$ همگرا باشد، می‌گوییم شعاع همگرایی صفر است.

سریهای‌تیلر $\sin x$ ، $\cos x$ ، و e^x نمونه‌هایی ازسریهای توانی هستند که شعاعهای همگرایی‌آنها بینهایت‌اند. این سریها به‌ازای هرمقدار x همگرا هستند.

سریهای زیرهم نمونه‌هایی از سریهایی هستندکه شعاعهای همگرایی‌آنها متناهی‌اند:

سری	بازهٔ همگرایی
$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$	$-1<x<1$
$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$	$-1<x\leqslant 1$
$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots$	$-1\leqslant x\leqslant 1$

یافتن بازهٔ همگرایی

بازهٔ همگرایی یک‌سری توانی چون $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ را اغلب می‌توان با به‌کار بردن آزمون نسبت یا آزمون ریشه درمورد سری‌قدرمطلقها

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$$

پیدا کرد. مثلاً اگر

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| \quad \text{یا اگر} \quad \rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|}$$

آنگاه

الف) $\sum |a_n x^n|$ در همهٔ مقادیری از x که به‌ازای آنها $\rho < ۱$، همگراست.

ب) $\sum |a_n x^n|$ درهمهٔ مقادیری از x که به‌ازای آنها $\rho > ۱$، واگراست.

پ) $\sum |a_n x^n|$ درمقداری از x که به‌ازای آن $\rho = ۱$، ممکن است همگرا یا واگرا باشد.

چگونه می‌توان این سه‌گزاره را به صورت احکامی دربارهٔ سری $\sum a_n x^n$ بیان کرد؟ گزارهٔ (الف) می‌گوید که $\sum a_n x^n$ درهمهٔ مقادیری از x که به‌ازای آنها $\rho < ۱$، مطلقاً همگراست. اطلاعی که گزارهٔ (پ) دربارهٔ سری $\sum a_n x^n$ می‌دهد بیشتر از آنچه درمورد $\sum |a_n x^n|$ می‌گوید، نیست. سری در مقداری از x که به‌ازای آن $\rho = ۱$، ممکن است همگرا یا واگرا باشد. درحالت (ب) عملاً می‌توانیم نتیجه بگیریم که $\sum a_n x^n$ درهمهٔ مقادیری از x که به‌ازای آنها $\rho > ۱$، واگراست. استدلال به‌این‌صورت است: همان‌طور که از بحثهای بخش ۶.۱۱ به یاد می‌آورید، اینکه ρ بزرگتر از ۱ است بدین‌معنی است که یا

$$۰ < |a_n x^n| < |a_{n+1} x^{n+1}| < |a_{n+2} x^{n+2}| < \dots$$

یا، به‌ازای n به‌قدرکافی بزرگ

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} > ۱.$$

بنابراین، جمله‌های این‌سری وقتی $n \to \infty$ به‌صفر میل نمی‌کنند، و سری بنابرآزمون جملهٔ nام، با یا بدون قدرمطلقها واگراست.

بنابراین، آزمونهای‌نسبت و ریشه، وقتی با موفقیت درمورد $\sum |a_n x^n|$ به‌کار روند، به سه نتیجه‌گیری زیر درمورد $\sum a_n x^n$ می‌انجامند:

الف) $\sum a_n x^n$ درهمهٔ مقادیری از x که به‌ازای آنها $\rho < ۱$، مطلقاً همگراست.

ب) $\sum a_n x^n$ درهمهٔ مقادیری‌از x که به‌ازای آنها $\rho > ۱$، واگراست.

پ) $\sum a_n x^n$ درمقداری از x که به‌ازای آن $\rho = ۱$، ممکن است همگرا یا واگرا باشد.

درحالت (پ) به‌آزمون‌دیگری‌نیاز داریم. آزمون‌مقایسه‌ای، آزمون مقایسه‌ای حدی یا آزمون سری متناوب اغلب کارساز واقع می‌شوند. (مسألهٔ ۴۶ را که درآن آزمون راب توصیف می‌شود ببینید.)

مثال ۱ بازهٔ همگرایی سری زیر را بیابید

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}. \tag{۶}$$

حل: آزمون نسبت را درمورد سری قدرمطلقها به‌کار می‌بریم و به‌دست می‌آوریم

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} \right| = |x|.$$

پس سری اصلی‌مطلقاً همگراست اگر $|x| < ۱$ و واگراست اگر $|x| > ۱$. وقتی $x = +۱$، سری به‌صورت زیر درمی‌آید

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \dots$$

که واگراست. وقتی $x = -۱$، سری به‌این‌صورت درمی‌آید

$$-\left(۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \dots\right)$$

که بنا به‌قضیهٔ لایب‌نیتس همگراست. بنابراین، سری (۶) به‌ازای $-۱ \leqslant x < ۱$ همگراست و به‌ازای تمام مقادیر دیگر x واگراست. ■

مثال ۲ سری زیر به‌ازای چه‌مقادیری از x همگراست؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(۲x-۵)^n}{n^۲}.$$

حل: این سری را به‌صورت یک‌سری توانی برحسب متغیر $۲x-۵$ درنظر می‌گیریم. با کاربرد آزمون ریشه درمورد سری قدرمطلقها به‌دست می‌آوریم

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(۲x-۵)^n}{n^۲}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|۲x-۵|}{\sqrt[n]{n^۲}}$$

$$= \frac{|۲x-۵|}{۱} = |۲x-۵|.$$

(استفاده ازآزمون نسبت هم به‌همین نتیجه می‌انجامد.) سری در بازه‌های زیر مطلقاً همگراست

$$|۲x-۵|<۱ \quad \text{یا} \quad -۱<۲x-۵<۱$$

یا

$$۴<۲x<۶ \quad \text{یا} \quad ۲<x<۳ .$$

وقتی $x=۲$، سری عبارت است از $\sum_{n=۱}^{\infty}[(-۱)^n/n^۲]$ که همگراست.

وقتی $x=۳$، سری عبارت است از $\sum_{n=۱}^{\infty}[(۱)^n/n^۲]$ که همگراست. بنابراین، بازهٔ همگرایی عبارت‌است از $۲\leqslant x\leqslant ۳$. ■

گاهی آزمون مقایسه‌ای به‌خوبی هر آزمون دیگری عمل می‌کند.

مثال ۳ سری زیر به‌ازای چه مقدارهایی از x همگراست؟

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\cos^n x}{n!} .$$

حل: به‌ازای هرمقدار x،

$$\left|\frac{\cos^n x}{n!}\right|\leqslant\frac{۱}{n!} .$$

این سری به‌ازای هرمقدار x همگراست. ■

مشتقگیری از سریهای توانی

قضیهٔ بعدی می‌گوید که تابعی که به‌وسیلهٔ یك سری توانی تعریف می‌شود، در هر نقطهٔ داخلی بازهٔ همگرایی‌اش دارای مشتقاتی از تمام مراتب است. مشتقها را می‌توان با مشتقگیری از جمله‌های سریهای اصلی به‌صورت سریهای توانی به‌دست‌آورد. اولین مشتق با یك بار مشتقگیری از جمله‌های سری اصلی به دست می‌آید

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=۰}^{\infty}(a_n x^n)=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{d}{dx}(a_n x^n)=\sum_{n=۰}^{\infty}na_n x^{n-۱}.$$

برای به‌دست‌آوردن مشتق دوم، ازجمله‌ها دوباره مشتق می‌گیریم، و همین‌طور الی‌آخر. قضیه را بدون اثبات بیان می‌کنیم ومستقیماً به‌سراغ چند مثال می‌رویم.

قضیهٔ ۴

قضیهٔ مشتقگیری جمله به‌جمله

اگر $f(x)=\sum_{n=۰}^{\infty}a_n x^n$ دارای شعاع همگرایی c باشد، آنگاه

۱. $\sum_{n=۰}^{\infty}na_n x^{n-۱}$ نیز دارای شعاع همگرایی c است،

۲. $f(x)$ بر $(-c,c)$ مشتقپذیر است، و

۳. روی $(-c,c)$، $f'(x)=\sum_{n=۰}^{\infty}na_n x^{n-۱}$.

درقضیهٔ ۴ ظاهراً فقط از f و f' سخن به‌میان آمده است. ولی چون شعاع همگرایی f' با شعاع همگرایی f یکی‌است، این قضیه درمورد f' هم به‌همان اندازه صادق است یعنی f' مشتقی چون f'' بر $(-c,c)$ دارد. این‌نیز به‌نوبهٔ خود نتیجه می‌دهد که f'' بر $(-c,c)$ مشتقپذیر است، و الی‌آخر. پس، اگر $f(x)=\sum_{n=۰}^{\infty}a_n x^n$ روی $(-c,c)$ همگرا باشد، در هرنقطه از $(-c,c)$ دارای مشتقات تمام مراتب است.

مثال ۴ درستی رابطهٔ $(d/dx)(\sin x)=\cos x$ با مشتقگیری جمله به‌جمله ازسری مربوط به $\sin x$ به‌دست می‌آید

$$\sin x=x-\frac{x^۳}{۳!}+\frac{x^۵}{۵!}-\frac{x^۷}{۷!}+\cdots$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=۱-\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۴}{۴!}-\frac{x^۶}{۶!}+\cdots$$

$$=\cos x .$$ ■

همگرایی در یك یا هردونقطهٔ انتهایی بازهٔ همگرایی یك سری توانی ممکن‌است درفرایند مشتقگیری ازمیان برود. به‌این‌دلیل است که در قضیهٔ ۴ فقط ازبازهٔ باز $(-c,c)$ سخن به‌میان می‌آید.

مثال ۵ سری $f(x)=\sum_{n=۱}^{\infty}(x^n/n)$ مثال ۱ به‌ازای $-۱\leqslant x<۱$ همگراست. سری مشتقات

$$f'(x)=\sum_{n=۱}^{\infty}x^{n-۱}=۱+x+x^۲+x^۳+\cdots$$

یك‌سری هندسی‌است که فقط به‌ازای $-۱<x<۱$ همگراست. این‌سری درنقطهٔ انتهایی $x=-۱$ و نیز درنقطهٔ انتهایی $x=۱$ واگراست. ■

انتگرالگیری از سریهای توانی

از يك سری توانی همان‌طور که می‌توان جمله به‌جمله مشتق گرفت، انتگرال جمله به‌جمله هم می‌توان گرفت. سری جدید مسلماً در بازهٔ بازی کــه سری اصلی همگراست، همگرا می‌بـاشد و ممکن است دريك یا هردونقطهٔ انتهایی نیز همگرا باشد. توجیه انتگرالگیری جمله به‌جمله از يك‌سری، قضیهٔ زیراست که این قضیه را نیز بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۵

قضیهٔ انتگرالگیری جمله به‌جمله

اگــر $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ دارای شعاع همگرایی c باشد، آنگاه

۱. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}$ نیز دارای شعاع همگرایی c است،

۲. $\int f(x)\,dx$ به‌ازای xهای متعلق به $(-c,c)$ وجود دارد،

۳. بر $(-c,c)$، $\int f(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}+C$.

مثال ۶ سری

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3\dots$$

روی بازهٔ باز $-1<t<1$ همگراست. بنابراین

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}\,dt$$
$$=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\dots\Big]_0^x$$
$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots,\quad -1<x<1.$$

همان‌طور که می‌دانید، سری اخیر در $x=1$ نیز همگراست ولی این نتیجه از قضیهٔ بالا به‌دست نمی‌آید. ■

مثال ۷ بـا قرار دادن t^2 به‌جـای t در سری مثال ۶، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-t^6+\cdots,\quad -1<t<1.$$

بنابراین

$$\tan^{-1}x=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\,dt=t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+\dots\Big]_0^x$$
$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots,\quad -1<x<1.$$

این نتیجه به‌اندازهٔ نتیجه‌ای کــه در بخش ۴.۱۲ به‌دست آوردیــم شسته‌رفته نیست چون در آنجا توانستیم بـا تحلیل يك بـاقیمانده نشان دهیم که بازهٔ همگرایی، $-1\leqslant x\leqslant 1$ است. ولی در اینجا نتیجه سریعتر به‌دست آمد. ■

مثال ۸ انتگرال زیر را به‌صورت يك‌سری توانی بیان کنید

$$\int\sin x^2\,dx.$$

حل: ازسری $\sin x$ به‌دست می‌آوریم

$$\sin x^2=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+\cdots,$$
$$-\infty<x<\infty.$$

بنابراین،

$$\int\sin x^2\,dx=C+\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{7\times 3!}$$
$$+\frac{x^{11}}{11\times 5!}-\frac{x^{15}}{15\times 7!}+\cdots,$$
$$-\infty<x<\infty.$$ ■

مثال ۹ مطلوب است براورد $\int_0^1\sin x^2\,dx$ با خطایی کوچکتر از ۰٫۰۰۱ .

حل: با توجه به‌انتگرال نامعین درمثال ۸ داریم

$$\int_0^1\sin x^2\,dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{7\times 3!}+\frac{1}{11\times 5!}-\frac{1}{15\times 7!}$$
$$+\frac{1}{19\times 9!}-\cdots.$$

این سری، متناوب است و با آزمایش درمی‌یابیم که

$$\frac{1}{11\times 5!}\approx 0.00076$$

نخستین جمله‌ای است که از لحاظ عددی کوچکتر از ۰٫۰۰۱ است. با توجه به‌مجموع دوجملهٔ قبل داریم

$$\int_0^1\sin x^2\,dx\approx\frac{1}{3}-\frac{1}{42}\approx 0.310.$$

بـا دوجملهٔ بیشتر، براورد زیر را بـا خطایی کوچکتر از 10^{-6}

به‌دست می‌آوریم

$$\int_0^1 \sin x^2\,dx \approx 0.310268$$

و فقط با یک‌جملهٔ دیگر، براورد زیر با خطایی کوچکتر از 10^{-9} به‌دست می‌آید

$$\int_0^1 \sin x^2\,dx \approx \frac{1}{3}-\frac{1}{42}+\frac{1}{1320}-\frac{1}{75600}+\frac{1}{6894720} \approx 0.310268303$$

برای تضمین این میزان دقت با فرمول خطای قاعدهٔ ذوزنقه‌ای، باید بازه را به ۱۳۰۰۰ زیربازه تقسیم کنیم. ■

مثال ۱۰ مطلوب است براورد $\int_0^{0.5}\sqrt{1+x^4}\,dx$ با خطایی کوچکتر از 10^{-4}.

حل: بسط دوجمله‌ای $(1+x^4)^{1/2}$ این است

$$(1+x^4)^{1/2}=1+\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{8}x^8+\cdots.$$

جملات این سری، پس ازجملهٔ دوم، به‌تناوب مثبت و منفی است. پس با خطایی کوچکتر از ۰٫۰۰۰۰۳ داریم

$$\int_0^{0.5}\sqrt{1+x^4}\,dx = x+\frac{1}{2\times 5}x^5-\frac{1}{8\times 9}x^9+\cdots\Big]_0^{0.5}$$
$$=0.5+0.0031-0.00003+\cdots$$
$$\approx 0.5031.$$
■

سری مکلورن تولید شده به‌وسیلهٔ $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

درآغاز بخش حاضر این پرسش را مطرح کردیم که آیا تابع

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

که به وسیلهٔ یک سری توانی همگرا تعریف می‌شود دارای سری تیلری هست یا نه. اکنون می‌توانیم پاسخ دهیم که تابعی که به‌وسیلهٔ یک‌سری توانی با شعاع همگرایی $c>0$ تعریف‌می‌شود دارای سری مکلورنی است که در هرنقطه از $(-c,c)$ به تابع همگراست. چرا؟ زیرا سری مکلورن تولید شده به‌وسیلهٔ تابع $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ عبارت است از خود سری $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. برای ملاحظهٔ این مطلب، از

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

جمله به‌جمله مشتق می‌گیریم و در هرمشتق $f^{(n)}(x)$ قرار می‌دهیم $x=0$. به‌این‌ترتیب به‌ازای هر n خواهیم داشت

$$f^{(n)}(0)=n!\,a_n \quad \text{یا} \quad a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

پس

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,\quad -c<x<c. \tag{7}$$

یک پیامد فوری این، آن است که سریهایی نظیر

$$x\sin x=x^2-\frac{x^4}{3!}+\frac{x^6}{5!}-\frac{x^8}{7!}+\cdots$$

و

$$x^2e^x=x^2+x^3+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^5}{3!}+\cdots$$

که ازضرب سری مکلورن درتوانهای x به‌دست می‌آیند و نیز سریهایی که از انتگرالگیری و مشتقگیری ازسریهای توانی‌حاصل می‌شوند، خودشان سریهای مکلورن تولید شده به‌وسیلهٔ توابعی هستند که این سریها معرف آنها می‌باشند.

برابری سریهای توانی

پیامد دیگری از (۷) این است که اگر دوسری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ به ازای همهٔ مقادیر x در یک بازهٔ باز شامل مبدأ $x=0$ باهم برابر باشند، آنگاه به‌ازای هر n، $a_n=b_n$. زیرا اگر

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n,\quad -c<x<c$$

آنگاه a_n و b_n هردوبرابرند با $f^{(n)}(0)/n!$.

ضرب سریهای توانی

موضوع را با ذکرمثالی روشن می‌کنیم.

مثال ۱۱ با ضرب سری مربوط به e^x و سری مربوط به $\cos x$ دریکدیگر، جملات بسط $e^x \cos x$ به‌سری مکلورن را تا x^4 به‌دست آورید.

حل: با توجه به‌بخش ۳.۱۲،

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots .$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots .$$

واضح است که اگر فقط به‌جملات شامل x^n به‌ازای $n \leqslant 4$ نیاز داشته باشیم می‌توانیم هر دوسری را در جملهٔ x^4 ببریم و چندجمله‌ایهای حاصل را در هم ضرب‌کرده و همهٔ جملاتی را که شامل توانهای بالاتر نظیر $x^5, \ldots, x^8$ هستند کنار بگذاریم. نتیجه این است

$$e^x \cos x = 1 + x + x^2\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{2!}\right) + x^3\left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!}\right) + x^4\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{2!2!} + \frac{1}{4!}\right) + \cdots$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + \cdots . \qquad (8) \quad \blacksquare$$

با استفاده از $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ می‌توانیم نتیجهٔ زیر را به‌دست‌آوریم (این نتیجه را در اینجا ثابت نمی‌کنیم)

$$e^x \cos x = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n + (1-i)^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n \cos(n\pi/4)}{n!} x^n \qquad (9)$$

چون

$$1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}, \quad 1 - i = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4} .$$

به‌کمک رابطهٔ (۹) به‌آسانی نشان داده می‌شود که سری به $e^x \cos x$ به ازای همهٔ مقادیر حقیقی x مطلقاً همگراست. این‌امر را قضیهٔ زیر نیز، که آن را ثابت نخواهیم کرد، تضمین می‌کند.

قضیهٔ و

قضیهٔ ضرب سریها درمورد سریهای توانی

اگر هردوی $\sum a_n x^n$ و $\sum b_n x^n$ به‌ازای $|x| < R$ مطلقاً همگرا باشند و

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad (\text{۱۵ الف})$$

آنگاه سری $\sum c_n x^n$ نیز به‌ازای $|x| < R$ مطلقاً همگراست، و

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots . \qquad (\text{۱۵ ب})$$

□ تقسیم سریهای توانی

بازهم موضوع را با آوردن مثالی توضیح می‌دهیم.

مثال ۱۲ تعدادی ازجملات سری مکلورن $\tan x$ را با تقسیم سری $\sin x$ برسری $\cos x$ به‌دست‌آورید.

حل: تقسیم را به‌همان صورتی که تقسیم‌معمولی چندجمله‌ایها را در جبر انجام می‌دهند، انجام می‌دهیم، جمله‌ها را تا x^5 تعقیب می‌کنیم و همهٔ توانهای بالاتر x را کنار می‌گذاریم

$$\begin{array}{r|l}
 & x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + \cdots = \tan x \\ \hline
\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots & x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots = \sin x \\
 & x - \dfrac{x^3}{2!} + \dfrac{x^5}{4!} \cdots \\ \cline{2-2}
 & \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{30} \cdots \\
 & \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{6} \cdots \\ \cline{2-2}
 & \dfrac{2}{15}x^5 \cdots \\
 & \dfrac{2}{15}x^5 \\ \cline{2-2}
\end{array}$$

پس تا جملهٔ x^5 داریم

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\cdots. \quad (11)$$

ما این‌چندجملهٔ اول‌سری $\tan x$ را درمثال۲ی بخش ۶.۱۲ به‌کار خواهیم برد. ■

نکته چون $\cos(\pi/2)=0$ ، مسلماً نمی‌توانیم انتظار داشته‌باشیم که سری مکلورن $\tan x$ درخارج از بازهٔ $|x|<\pi/2$ همگرا باشد.

برای محاسبهٔ ضرایب سری مکلورن $f(x)/g(x)$ روش دیگری هست که به‌آسانی می‌توان آن را قابل استفاده درکامپیوتر کرد. این‌روش مبتنی برواقعیات زیر است.

۱. اگر به ازای $|x|<R_1$ ، $f(x)=\sum a_n x^n$، و به‌ازای $|x|<R_2$ ، $g(x)=\sum b_n x^n$، وداشته‌باشیم $b_0=g(0)\neq 0$، آنگاه $f(x)/g(x)$ روی بازه‌ای چون $(-h,h)$ دارای نمایشی به‌شکل سری توانی $\sum c_n x^n$ است.

۲. درآن بازه،

$$\sum a_n x^n=f(x)=g(x)\cdot\frac{f(x)}{g(x)}=\sum b_n x^n\cdot\sum c_n x^n$$

$$=\sum_n\left(\sum_{k=0}^{n}b_k c_{n-k}\right)x^n$$

و از این‌رو

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}b_k c_{n-k}.$$

به‌عبارت دیگر

$a_0=b_0c_0$ ، $a_1=b_0c_1+b_1c_0$ ، و غیره.

بنابراین، ضرایب c_n را می‌توان یکی پس‌از دیگری به‌صورت زیر به‌دست‌آورد

$$c_0=\frac{a_0}{b_0},\quad c_1=\frac{a_1-b_1c_0}{b_0} \qquad (\text{۱۲ الف})$$

و، به‌ازای هر $n\geqslant 1$ ،

$$c_n=\frac{a_n-(b_1c_{n-1}+b_2c_{n-2}+\cdots+b_nc_0)}{b_0}$$

$$=\frac{a_n-\sum_{k=1}^{n}b_kc_{n-k}}{b_0}. \qquad (\text{۱۲ ب})$$

مثال ۱۳ فرض کنید

$$f(x)=\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

بنابراین

$$a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=0,\ a_3=-\frac{1}{3!},\ a_4=0,\ \ldots$$

ونیز فرض کنید

$$g(x)=\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

بنابراین

$b_0=1$ ، $b_1=0$ ، $b_2=-\frac{1}{2!}$ ، $b_3=0$ ، $b_4=\frac{1}{4!}$ ، وغیره.

دراین‌صورت

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots$$

که درآن

$$c_0=\frac{a_0}{b_0}=0$$

$$c_1=\frac{a_1-b_1c_0}{b_0}=\frac{1-0}{1}=1$$

و الی‌آخر. اگر مقادیر c_0 ، c_1 ، ... ، c_{n-1} را بدانیم، مقدار c_n از رابطهٔ (۱۲ ب) برحسب ضرایب‌معلوم به‌دست‌می‌آید. ■

مسأله‌ها

درمسأله‌های ۱ــ۲۰ ، بازهٔ همگرایی مطلق را بیابید. اگر این‌بازه متناهی‌است، معلوم کنید که سری‌درهر نقطهٔ انتهایی‌همگراست یا نه.

۱. $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$

۲. $\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n$

۳. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{2^n}$

۴. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}$

۵. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

۶. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$

۷. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}(x+2)^n$

۸. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

۹. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

۱۰. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2}$

۱۱. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{2^n}$

۱۲. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^5}$

۱۳. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n e^n}{n+1}$

۱۴. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\cos x)^n}{n^n}$

۱۵. $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$

۱۶. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x+6)^n}{n!}$

۱۷. $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n(n+1)(x-1)^n$

۱۸. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-2)^n}{n\times 2^n}$

۱۹. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^2-1}{2}\right)^n$

۲۰. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^{n-1}}{n}$

۲۱. مجموع سری مذکور درمسألهٔ ۱۶ را بیابید.

۲۲. در بازه‌ای که سری مسألهٔ ۱۹ همگراست، مجموع سری چیست؟

۲۳. به‌کمك سریها تحقیق کنیدکه

الف) $\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$

ب) $\int_0^x \cos t\,dt=\sin x$

پ) $y=e^x$ یك جواب معادلهٔ $y'=y$ است.

۲۴. سری مکلورن $1/(1+x)^2$ را از روی سری $-1/(1+x)$ بیابید.

۲۵. بـه کمك سری مکلورن $1/(1-x^2)$ یـك سری بـرای $2x/(1-x^2)^2$ بیابید.

۲۶. به‌کمك اتحـاد $\sin^2 x=(1-\cos 2x)/2$ یـك سری برای $\sin^2 x$ پیدا کنید. سپس، بامشتقگیری از این‌سری یك‌سری برای $2\sin x\cos x$ به‌دست‌آورید. تحقیق‌کنیدکـه این، سری مربوط به $\sin 2x$ است.

ماشین‌حساب درمسأله‌هـای ۲۷ـ۳۴، بـا استفاده از سری و یك ماشین‌حساب، هرانتگرال‌را با خطایی‌کوچکتراز ۰٫۰۰۱ براورد کنید.

۲۷. $\int_0^{0.2}\sin x^2\,dx$

۲۸. $\int_0^{0.1}\tan^{-1}x\,dx$

۲۹. $\int_0^{0.1}x^2 e^{-x^2}\,dx$

۳۰. $\int_0^{0.1}\frac{\tan^{-1}x}{x}\,dx$

۳۱. $\int_0^{0.4}\frac{1-e^{-x}}{x}\,dx$

۳۲. $\int_0^{0.1}\frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$

۳۳. $\int_0^{0.1}\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$

۳۴. $\int_0^{0.25}\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$

۳۵. **ماشین‌حساب** الف) مطلوب است یك‌سری توانی برای

$$\sinh^{-1}x=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}.$$

ب) با استفاده از نتیجهٔ (الف)، $\sinh^{-1} 0.25$ را تا سه رقم اعشاری براورد کنید.

۳۶. **ماشین‌حساب** مطلوب است براورد $\int_0^1 \cos x^2\,dx$ با خطایی کوچکتر از یک‌میلیونیم.

۳۷. با آوردن مثال نشان دهید سریهای توانیی وجود دارند که فقط در $x=0$ همگرایند.

۳۸. با آوردن مثالهایی نشان دهید که همگرایی یک‌سری در یک نقطهٔ انتهایی بازهٔ همگرایی‌اش ممکن‌است مشروط یا مطلق باشد.

۳۹. فرض کنید r عدد مثبت دلخواهی‌باشد. با استفاده ازقضیهٔ ۳ نشان دهید که اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ به‌ازای $-r<x<r$ همگرا باشد، آنگاه به‌ازای $-r<x<r$ مطلقاً همگراست.

۴۰. با استفاده ازآزمون نسبت نشان‌دهید که سری دوجمله‌ای به‌ازای $|x|<1$ همگراست. (با وجود این، از اینجا معلوم نمی‌شود که این سری به $(1+x)^m$ همگراست.)

۴۱. با انجام عمل ضرب مناسبی، جمله‌های‌سری مکلورن مربوط به $e^x \sin x$ را تا x^5 بیابید. این سری قسمت موهومی سری مربوط به

$$e^x \cdot e^{ix} = e^{(1+i)x}$$

است. با توجه به‌این‌مطلب، پاسخ‌خود را تحقیق‌کنید. سری مربوط به $e^x \sin x$ به‌ازای چه‌مقادیری از x باید همگرا باشد؟ چرا؟

۴۲. عدد ۱ را بر تعداد کافی از جملات سری مکلورن $\cos x$ تقسیم‌کنید تا جملات سری مکلورن $\sec x$ تا x^4 به‌دست‌آید. فکرمی‌کنید صورت کامل سری مکلورن حاصل درچه جاهایی باید همگرا باشد؟

۴۳. از اولین سه‌جملهٔ ناصفر سری مکلورن مربوط به $\tan t$ از ۰ تا x انتگرال بگیرید تا اولین سه جملهٔ ناصفرسری مکلورن مربوط به $\ln \sec x$ به‌دست‌آید.

۴۴. ادامهٔ مسألهٔ ۴۳. راه دیگری برای به‌دست‌آوردن تعدادی ازجملات سری‌مکلورن مربوط به $\ln \sec x$ به‌صورت زیراست: فرض کنید $\sec x = 1+y$ و بنا براین

$$y = x^2/2 + 5x^4/24 + \cdots$$

(از مسألهٔ ۴۲). دراین‌صورت، به‌ازای $|y|<1$ داریم

$$\ln \sec x = \ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \cdots .$$

با صرفنظرکردن ازتوانهای x بالاتر از x^4، نشان دهید که این‌نیز به‌رابطهٔ زیر می‌انجامد

$$\ln \sec x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \cdots .$$

۴۵. دایره‌ای به‌شعاع $r_1 = 1$ درمثلث متساوی‌الاضلاعی محاط شده‌است. دایره‌ای به‌شعاع r_2 از رئوس این‌مثلث می‌گذرد و در مربعی‌محاط‌است. دایره‌ای به‌شعاع r_3 از رئوس این‌مربع‌می‌گذرد و دریک پنج ضلعی منتظم محاط‌است. به‌همین‌ترتیب ادامه دهید: دایره‌ای به‌شعاع r_{n-1} از رئوس یک n ضلعی منتظم می‌گذرد و دریک $(n+1)$ ضلعی‌منتظم محاط‌است.

الف) نشان دهید که $r_2 = r_1 \sec(\pi/3)$، $r_3 = r_2 \sec(\pi/4)$، و به‌طورکلی

$$r_n = r_{n-1} \sec \frac{\pi}{n+1} .$$

ب) نشان دهید که

$$\ln r_n = \ln r_1 + \ln \sec \frac{\pi}{3} + \ln \sec \frac{\pi}{4} + \cdots + \ln \sec \frac{\pi}{n+1} .$$

پ) آیا وقتی n به‌بینهایت می‌گراید، r_n حدی متناهی‌دارد؟ (پیشنهاد: سری $\sum_{n=3}^{\infty} \ln \sec(\pi/n)$ را با استفاده ازآزمون مقایسه‌ای حدی با سری $\sum_{n=3}^{\infty} 1/n^2$ مقایسه کنید.) می‌توانید از پاسخ مسألهٔ ۴۴ استفاده‌کنید.

۴۶. آزمون راب (یا گاوس). این‌آزمون را می‌توان تعمیمی ازآزمون نسبت درنظر گرفت. درواقع، آزمون راب آهنگ‌رشد سری ما، $\sum u_n$، را با آهنگ رشد متناظر p-سری $\sum 1/n^p$ مقایسه می‌کند. (اگر سری ما سریعتر ازیک p-سری همگرا رشد نکند، آنگاه سری ما همگراست. اگر سری دست‌کم به‌همان سرعت یک p-سری‌واگرا رشد کند، آنگاه‌سری ما واگراست.) این‌آزمون را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

آزمون راب. اگر $\sum u_n$ سریی باشد که جملاتش ثابتهایی مثبت باشند و ثابتهای C، K، و N وجود داشته باشند به‌قسمی که

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{C}{n} + \frac{f(n)}{n^2} \qquad \text{(i)}$$

که درآن به‌ازای $n \geqslant N$ داشته باشیم $|f(n)| < K$، آنگاه $\sum u_n$

(ii الف) همگراست اگر $C > 1$

و

(ii ب) واگراست اگر $C \leqslant 1$.

الف) نشان‌دهید که نتایج آزمون راب با آنچه‌ازقبل دربارهٔ همگرایی و واگرایی‌سریهای $\sum 1/n^2$ و $\sum 1/n$ می‌دانستید تطبیق می‌کند.

ب) جملات سری $\sum u_n$ به‌طور بازگشتی با فرمولهای $u_1 = 1$ و

$$u_{n+1} = \frac{(2n-1)(2n-1)}{2n(2n+1)}\, u_n$$

تعریف می‌شوند. با استفاده از آزمون راب معلوم‌کنید که سری همگراست یا واگرا.

TOOLKIT PROGRAMS
Taylor Series

۶.۱۲ صورتهای مبهم

وقتی‌نسبت دوتابع $f(x)$ و $g(x)$ را درهمسایگی‌نقطه‌ای چون a که درآنجا $f(a)$ و $f(b)$ صفرند درنظرمی گیریم، می‌توانیم به‌سرعت حد

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{1}$$

را تعیین‌کنیم اگرسریهای تیلری‌که به‌این توابع دریك همسایگی $x = a$ همگرا هستند، برما معلوم باشند. مثالهای زیرنشان می‌دهند که این‌کار چگونه انجام می‌شود.

مثال ۱ مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x \to 1}[(\ln x)/(x-1)]$.

حل: فرض‌کنید $f(x) = \ln x$، $g(x) = x - 1$. سری تیلر مربوط به $f(x)$ به‌ازای $a = 1$ به‌این‌صورت به‌دست می‌آید

$$f(x) = \ln x, \qquad f(1) = \ln 1 = 0$$
$$f'(x) = 1/x, \qquad f'(1) = 1$$
$$f''(x) = -1/x^2, \quad f''(1) = -1$$

پس

$$\ln x = 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \cdots$$

$$\frac{\ln x}{x-1} = 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \cdots$$

و

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \to 1}\left[1 - \frac{1}{2}(x-1) + \cdots\right] = 1. \qquad \blacksquare$$

مثال ۲ مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x \to 0}[(\sin x - \tan x)/x^3]$.

حل: سریهای مکلورن $\sin x$ و $\tan x$ تا جملهٔ x^5 عبارت‌اند از

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$
$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots.$$

از این‌رو

$$\sin x - \tan x = -\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{8} - \cdots$$
$$= x^3\left(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} - \cdots\right)$$

و

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} = \lim_{x \to 0}\left(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} - \cdots\right)$$
$$= -\frac{1}{2}. \qquad \blacksquare$$

وقتی‌از سریها برای محاسبهٔ حد $\lim_{x \to 0}(1/\sin x - 1/x)$ مذکور درمثال ۷ بخش ۸.۳ کمك‌می گیریم، نه‌تنها حد را به‌طرز موفقیت‌آمیزی محاسبه می‌کنیم بلکه همچنین، فرمول تقریبی‌خوبی برای $\csc x$ کشف می‌کنیم.

مثال ۳ مطلوب است

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$$

حل:

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)}{x \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)}$$

$$= \frac{x^3\left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \cdots\right)}{x^2\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \cdots\right)} = x\,\frac{\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \cdots}{1 - \frac{x^2}{3!} + \cdots}.$$

بنابراین

$$\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱}{\sin x}-\frac{۱}{x}\right)=\lim_{x\to ۰}\left(x\,\frac{\frac{۱}{۳!}-\frac{x^{۲}}{۵!}+\cdots}{۱-\frac{x^{۲}}{۳!}+\cdots}\right)=۰ .$$

درواقع، از روی سریهای فوق می‌توان دیدکه اگر $|x|$ کوچك باشد، آنگاه

$$\frac{۱}{\sin x}-\frac{۱}{x}\approx x\cdot\frac{۱}{۳!}=\frac{x}{۶} \quad \text{یا} \quad \csc x\approx\frac{۱}{x}+\frac{x}{۶}. \;\blacksquare$$

مسأله‌ها

حدهای مذکور درمسائل ۱ـ۲۰ را به‌کمك سریها محاسبه‌کنید.

۱. $\lim_{h\to ۰}\frac{\sin h}{h}$

۲. $\lim_{x\to ۰}\frac{e^{x}-(۱+x)}{x^{۲}}$

۳. $\lim_{t\to ۰}\frac{۱-\cos t-\frac{۱}{۲}t^{۲}}{t^{۴}}$

۴. $\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{۱}{x}$

۵. $\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۲}}{۱-\cosh x}$

۶. $\lim_{h\to ۰}\frac{(\sin h)/h-\cos h}{h^{۲}}$

۷. $\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{\sin x}$

۸. $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{e^{x}-۱}$

۹. $\lim_{z\to ۰}\frac{\sin(z^{۲})-\sinh(z^{۲})}{z^{۶}}$

۱۰. $\lim_{t\to ۰}\frac{\cos t-\cosh t}{t^{۲}}$

۱۱. $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x-x+\frac{x^{۳}}{۶}}{x^{۵}}$

۱۲. $\lim_{x\to ۰}\frac{e^{x}-e^{-x}-۲x}{x-\sin x}$

۱۳. $\lim_{x\to ۰}\frac{x-\tan^{-۱}x}{x^{۳}}$

۱۴. $\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x-\sin x}{x^{۳}\cos x}$

۱۵. $\lim_{x\to\infty}x^{۲}(e^{-۱/x^{۲}}-۱)$

۱۶. $\lim_{x\to ۰}\frac{\ln(۱+x^{۲})}{۱-\cos x}$

۱۷. $\lim_{x\to ۰}\frac{\tan ۳x}{x}$

۱۸. $\lim_{x\to ۱}\frac{\ln x^{۲}}{x-۱}$

۱۹. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{۱۰۰}}{e^{x}}$

۲۰. $\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱}{۲-۲\cos x}-\frac{۱}{x^{۲}}\right)$

۲۱. الف) ثابت کنید که وقتی $x\to+\infty$، $\int_{۰}^{x}e^{t^{۲}}dt\to+\infty$.

ب) مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to\infty}x\int_{۰}^{x}e^{t^{۲}-x^{۲}}dt$

۲۲. مقادیر r و s را چنان بیابیدکه

$$\lim_{x\to ۰}(x^{-۳}\sin ۳x+rx^{-۲}+s)=۰ .$$

۲۳. **ماشین‌حساب** تقریب $\csc x\approx ۱/x+x/۶$ در مثال ۳ به‌تقریب $\sin x\approx ۶x/(۶+x^{۲})$ منجر می‌شود. هردوطرف این تقریب اخیر را به‌ازای (رادیان) $x=\pm ۱٫۰, \pm ۰٫۱, \pm ۰٫۰۱$ محاسبه‌کنید. این مقادیر x را در تقریب $\sin x\approx x$ آزمایش کنید. چه تقریبی از $\sin x$ به‌نظر می‌رسد نتایج بهتری به دست دهد؟

TOOLKIT PROGRAMS

Taylor Series

□ ۷.۱۲ یك معمای کامپیوتری

ممکن است درعمل هیچگاه مجبور نشوید که ازسریها برای محاسبهٔ مقدار π، $\ln 2$، e، $\sin 35^\circ$، یا نظایر اینها استفاده کنید زیرا اگر به‌هریك از این اعداد نیاز داشته باشید می‌توانید به‌جدول مربوطه نگاه کنید و یا (با احتمال بیشتر) x را به‌کامپیوتر بدهید و از کامپیوتر، $\ln x$ یا چیز دیگری را بخواهید. ولی تا مدتی قبل، یك ایدهٔ جدید و هیجان‌انگیز در ریاضیات، تشخیص این نکته بود که می‌توان همهٔ اطلاعات مربوط به e^x را از این واقعیت که $e^0 = 1$ ومشتق e^x خود e^x است، به‌دست آورد (این ایده هنوزهم می‌تواند هیجان‌انگیز باشد). کافی است سری مربوط به e^x را به‌دست آوریم که به‌ازای همهٔ xها به e^x همگرا است. همچنین می‌توانیم با ضرب کردن سری مربوط به e^x درسری مربوط به e^y نشان دهیم که $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$؛ با مشتقگیری می‌توانیم نشان‌دهیم که‌مشتق سری مربوط به e^x خود همین سری است، والی آخر. (چند سال پیش یك ریاضیدان برجستهٔ آمریکایی به‌نام تاملینسن‌فورت، کتابی در زمینهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال نوشت که با مبحث سریها شروع شده و بقیهٔ موضوع براساس این مبحث شرح و بسط داده شده بود.)

خوانندگانی که به‌علوم کامپیوترعلاقه دارند، «چیستان» زیر به‌نظرشان جالب خواهدآمد. ما خواستیم به‌منظور روشن شدن موضوع، سه‌روش متفاوت محاسبهٔ e را با هم مقایسه کنیم.

۱. e ریشهٔ معادلهٔ $\ln x = 1$ است. (روش نیوتن با نقطهٔ شروع $x_1 = 3$ عدد ۲٫۷۱۸۲۸۱۸۲۸ را درسومین تکرار به‌دست داد.)

۲. e مجموع سری زیراست

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots.$$

(وقتی ۱۴ جمله ویا تعداد بیشتری ازجملات این‌سری را به‌کار بردیم، همین درجه ازدقت حاصل‌شد.)

۳. $$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

این را اغلب به‌عنوان تعریف e درنظرمی گیرند. اگرکامپیوتری در دسترس باشد، می‌توان هر عدد بزرگ n را انتخاب کرد و از کامپیوترخواست که مقدار $s_n = (1+1/n)^n$ را چاپ کند. البته، این‌هم آموزنده‌است که ببینیم درجریان کار به‌ازای مقادیرمختلف n چه‌اتفاقی می‌افتد. وقتی ما این‌کار راکردیم با وضع شگفت‌انگیزی روبرو شدیم. در اینجا قسمتی ازجدول مقادیررا که ما به‌دست آوردیم، و از $n = 10^5$ شروع می‌شود، می‌بینید.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	
10^5	۲٫۷۱۸۲۶ ۸۲۳۷	
2×10^5	۲٫۷۱۸۲۷ ۵۳۰۵	
3×10^5	۲٫۷۱۸۲۷ ۶۶۶۴	
4×10^5	۲٫۷۱۸۲۷ ۷۴۷۹	
5×10^5	۲٫۷۱۸۲۷ ۷۷۵۱	
6×10^5	۲٫۷۱۸۲۷ ۹۱۱۰	
7×10^5	۲٫۷۱۸۲۷ ۹۱۱۰	(این چیست؟ یك نتیجهٔ تکراری؟)
8×10^5	۲٫۷۱۸۲۸ ۱۸۲۸	(هورا!)
9×10^5	۲٫۷۱۸۲۷ ۹۱۱۰	(ماشین این عددرا دوست دارد؟)
10^6	۲٫۷۱۸۲۸ ۱۸۲۸	(خوب، این بهتراست.)
10^{13}	۱	(جریان ازچه‌قراراست؟)
⋮		
10^{19}	۱	

این را به‌صورت یك معما مطرح می‌کنیم. ماشین چه‌می‌کند؟ (ابتدا حداکثر سعی خود را برای حل معما بکنید و سپس ادامهٔ مطلب را بخوانید). اگر سرنخی می‌خواهید، تعریف a^b را به‌یادآورید.

حل معما

مادر بالامقادیری برای $(1+1/n)^n$ به‌ازای چندمقدار n بین 10^5 و 10^{19} عرضه کرده‌ایم. خطاهای آشکار در بعضی‌از این‌پاسخها را چگونه می‌توان توجیه کرد؟

با تعریف a^b به‌صورت $\exp(b\ln a)$ شروع می‌کنیم

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right). \qquad (1)$$

به‌ازای مقادیر بزرگ n، $1/n$ کوچك است و ما به‌سری مربوط به $\ln(1+x)$ با ضابطهٔ $x = 1/n$ نظرمی‌افکنیم. نتیجه این‌است

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots. \qquad (2)$$

واضح است که این سری وقتی $n\to\infty$ به‌صفر میل می‌کند. اما رابطهٔ (۱) ایجاب می‌کند که این سری را در n ضرب کنیم. با

انجام‌دادن این کار، به‌دست می‌آوریم

$$n\ln\left(۱+\frac{۱}{n}\right)=۱-\frac{۱}{۲n}+\frac{۱}{۳n^۲}-\dots \qquad (۳)$$

به‌ازای مقادیر بزرگ n، جمله‌های از $۱/۳n^۲$ به‌بعد درمقایسه با دوجملهٔ اول بسیار کوچك‌اند. پس، به عنوان اولین تقریب، داریم

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n\approx\exp\left(۱-\frac{۱}{۲n}\right). \qquad (۴)$$

دربارهٔ داده‌های نامنظمی که از کامپیوتر به‌دست‌آوردیم چه می‌توان گفت؟ ما حدس زدیم که دلیل آن، نادقیق بودن مقادیر $\ln(۱+۱/n)^n$ است. از این‌رو به‌کامپیوتر برنامه‌ای دادیم که آن داده‌ها را به‌دست‌دهد. درعین‌حال، ازکامپیوتر خواستیم که مقادیر $(۱/۲n)-۱$ و $(۱/۳n^۲)+(۱/۲n)-۱$ را بدهد. مقادیر اخیر به‌ازای همهٔ مقادیر nی که در جدول نشان داده شده، یکسان بودند. و این مقادیر مسلماً دقیقتر از مقادیر ماشین برای $n\ln(۱+۱/n)$ هستند.

n	$n\ln(۱+۱/n)$	$۱-(۱/۲n)+(۱/۳n^۲)$
$۱۰^۵$	۰٫۹۹۹۹۹۹ ۵	۰٫۹۹۹۹۹۹ ۵
۲×۱۰^۵	۰٫۹۹۹۹۹۹ ۷۶	۰٫۹۹۹۹۹۹ ۷۵
۳×۱۰^۵	۰٫۹۹۹۹۹۹ ۸۱	۰٫۹۹۹۹۹۹ ۸۳۳۳
۴×۱۰^۵	۰٫۹۹۹۹۹۹ ۸۴	۰٫۹۹۹۹۹۹ ۸۷۵
۵×۱۰^۵	۰٫۹۹۹۹۹۹ ۸۵	۰٫۹۹۹۹۹۹ ۹۰
۶×۱۰^۵	۰٫۹۹۹۹۹۹ ۹۰	۰٫۹۹۹۹۹۹ ۹۱۶۶۷
۷×۱۰^۵	۰٫۹۹۹۹۹۹ ۹۰	۰٫۹۹۹۹۹۹ ۹۲۸۵۷
۸×۱۰^۵	۱	۰٫۹۹۹۹۹۹ ۹۴۴۴۴
۹×۱۰^۵	۰٫۹۹۹۹۹۹ ۹	۰٫۹۹۹۹۹۹ ۹۵
$۱۰^۶$	۱	۰٫۹۹۹۹۹۹ ۹۵۴۵۵
$۱٫۱\times۱۰^۶$	۱٫۰۰۰۰۰۰ ۰۱	۰٫۹۹۹۹۹۹ ۹۵۸۳۳
$۱٫۲\times۱۰^۶$	۰٫۹۹۹۹۹۹ ۶	۰٫۹۹۹۹۹۹ ۹۶۱۵۴
$۱٫۳\times۱۰^۶$	۰٫۹۹۹۹۹۹ ۰	۰٫۹۹۹۹۹۹ ۹۶۴۲۹
$۱٫۴\times۱۰^۶$	۱٫۰۰۰۰۰۰ ۰۴	۰٫۹۹۹۹۹۹ ۹۶۶۶۷
$۱٫۵\times۱۰^۶$	۱٫۰۰۰۰۰۰ ۰۵	۰٫۹۹۹۹۹۹ ۹۶۸۷۵
۲×۱۰^۶	۱	۰٫۹۹۹۹۹۹ ۹۷۵۰۰

طبیعتاً اگر ماشین مقادیرغلطی از $n\ln(۱+۱/n)$ داشته باشد، پاسخهای غلطی برای $\exp(n\ln(۱+۱/n))$ خواهدداد. پس‌منشأ اشکال‌را پیداکرده‌ایم: مقدارهای $\ln(۱+۱/n)$ آن‌قدر دقیق نیستند که وقتی در n ضرب می‌شوند (اگر $n\geqslant ۳\times۱۰^۵$) پاسخهای صحیحی به‌دست‌دهند. به‌ازای $n=۱۰^{۱۳}$ کامپیوتر می‌گوید $\ln(۱٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱)=۰$. وقتی این مقدار در $۱۰^{۱۳}$ ضرب شود باز هم کامپیوتر می‌گوید «صفر» و $\exp(۰)=۱$. ما ازمحدودهٔ قابلیت‌اعتماد کامپیوترفراتررفته‌ایم. این نه‌تقصیرکامپیوتراست و نه‌تقصیرما. ولی ما بصیرتی درحل‌معما به‌دست‌آورده‌ایم.

یك‌نکتهٔ دیگر: اگرتقریب (۴) و برابری‌زیررا به‌کارگیریم

$$\exp\left(۱-\frac{۱}{۲n}\right)=\exp(۱)\cdot\exp\left(-\frac{۱}{۲n}\right) \qquad (۵)$$

می‌توانیم یك‌گام جلوتر برویم. به‌یادداشته‌باشید که ما از $n\geqslant ۳\times۱۰^۵$ صحبت می‌کنیم، بنابراین

$$(۱/۲n)\leqslant(۱/۶)\times۱۰^{-۵}.$$

اگر در سری مکلورن مربوط به $\exp(h)=e^h$ قرار دهیم $h=-۱/۲n$، برابری

$$\exp\left(-\frac{۱}{۲n}\right)=۱-\frac{۱}{۲n} \qquad (۶)$$

را بنابه‌قضیهٔ براورد سری متناوب با خطایی‌کوچکتر از $(۱/۲)(۱/۲n)^۲$ به‌دست می‌آوریم. این خطا به‌ازای $n\geqslant ۳\times۱۰^۵$ کوچکتر از $۰٫۳\times۱۰^{-۱۱}$ است. بنابراین، به‌ازای مقادیر بزرگ n، با ترکیب نتایج روابط (۴)، (۵)، و (۶) خواهیم داشت

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n\approx e\cdot\left(۱-\frac{۱}{۲n}\right)\approx e-\frac{e}{۲n}.$$

به‌ازای $n=۱۰^۶$ ماشین نباید مقدار ۲٫۷۱۸۲۸۱۸۲۸ را (که این‌قدر دقیق به‌نظرمی‌رسد) به‌دست دهد بلکه باید عدد ۲٫۷۱۸۲۸۰۴۶۹ را تا ۹ رقم اعشاری بدهد.

پرسشها و تمرینهای مروری

۱. قضیهٔ تیلر با باقیمانده را بیان‌کنید.

۲. می‌توان (باکمی دشواری) نشان‌دادکه درهرمقدار x، تابعی‌که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$f(x)=\begin{cases}۰ & x=۰\\ e^{-۱/x^۲} & x\neq۰\end{cases}$$

پیوسته و دارای مشتقات تمام مراتب است. درصفر، مشتقها همگی صفرند.

الف) سری مکلورن تولید شده به‌وسیلهٔ این تابع را بنویسید.

ب) باقیماندهٔ $R_n(x)$ برای این تابع چیست؟ آیا این سری به‌ازای مقادیری از x که مخالف صفر باشند همگراست؟ آیا سری در یک $x \neq 0$ به $f(x)$ همگراست؟ برای پاسخهایتان دلیل بیاورید.

۳. اگر قرار باشد یک سری تیلر برحسب توانهای $x-a$ برای محاسبهٔ عددی یک تابع به‌کار رود، چه‌چیزی در انتخاب a لازم یا مطلوب است؟ توضیح دهید.

۴. اگر $f(a)=g(a)=0$، روشی را که بتواند برای یافتن $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ مفید باشد شرح دهید.

۵. چه‌آزمونهایی را می‌توان برای یافتن بازهٔ همگرایی یک سری توانی به‌کار برد؟ آیا این آزمونها در نقاط انتهایی بازه هم کارایی دارند؟ با ذکر مثال توضیح دهید.

مسأله‌های گوناگون

۱. الف) سری مکلورن تابع $x^2/(x+1)$ را بیابید.

ب) آیا این سری وقتی $x=2$ همگراست؟ (دلیل مختصری بیاورید.)

۲. بسط $\sin^{-1}x$ به‌سری مکلورن را با انتگرالگیری ازسری مربوط به $(1-t^2)^{-1/2}$ از 0 تا x به‌دست آورید. بازه‌های همگرایی این سریها را بیابید.

۳. با قراردادن سری مربوط به $y=\sin x$ درسری مربوط به e^y، چهار جملهٔ اول سری مکلورن مربوط به $e^{\sin x}$ را به دست آورید.

۴. با فرض $|x|>1$، بسطهای زیر

$$\tan^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\dots,\quad x>1$$

$$\tan^{-1}x=-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}+\dots,\quad x<-1$$

را با انتگرالگیری ازسری زیر از $x(>1)$ تا $+\infty$ یا از $-\infty$ تا $x(<-1)$ به‌دست آورید

$$\frac{1}{1+t^2}=\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{1+(1/t^2)}=\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^4}+\frac{1}{t^6}-\frac{1}{t^8}+\dots.$$

۵. الف) با قراردادن سری‌مربوط به $y=1-\cos x$ درسری مربوط به $\ln(1-y)$، سری‌مکلورن مربوط به $\ln(\cos x)$ را تا جملهٔ x^6 به‌دست آورید.

ب) نتیجهٔ قسمت (الف) را به‌کار برید و

$$\int_0^{0.1}\ln(\cos x)\,dx$$

را تا پنج رقم اعشاری براورد کنید.

۶. مطلوب است محاسبهٔ $\int_0^1 [(\sin x)/x]\,dx$ تا سه‌رقم اعشاری.

۷. مطلوب است محاسبهٔ $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ تا سه‌رقم اعشاری.

۸. تابع $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ را برحسب توانهای $(x-1)$ بسط دهید و سه‌جملهٔ ناصفر را به‌دست آورید.

۹. تابع $f(x)=1/(1-x)$ را برحسب توانهای $(x-2)$ بسط دهید و بازهٔ همگرایی را پیدا کنید.

۱۰. $f(x)=1/(x+1)$ را برحسب توانهای $(x-3)$ بسط دهید.

۱۱. $\cos x$ را برحسب توانهای $(x-\pi/3)$ بسط دهید.

۱۲. نخستین سه‌جملهٔ بسط تابع $1/x$ را به‌سری تیلر حول نقطهٔ π به‌دست آورید.

۱۳. فرض کنید f و g توابعی باشند که درشرطهای زیر صدق می‌کنند: (الف) $f(0)=1$، (ب) $f'(x)=g(x)$، $g'(x)=f(x)$، (پ) $g(0)=0$. مطلوب است براورد $f(1)$ تا سه‌رقم اعشاری.

۱۴. فرض کنید $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. ثابت کنید که

الف) اگر $f(x)$ یک تابع زوج باشد، آنگاه $a_1=a_3=a_5=\dots=0$؛

ب) اگر $f(x)$ یک تابع فرد باشد، آنگاه $a_0=a_2=a_4=\dots=0$.

۱۵. چهارجملهٔ اول سری مکلورن $f(x)=e^{(e^x)}$ را (تا جملهٔ x^3) بیابید.

۱۶. الف) به‌کمک قضیهٔ تیلر با باقیمانده، یک کران بالا برای خطای تقریب $e^h=1+h$، درصورتی‌که h بین ۰ و ۰٫۰۱ باشد، پیدا کنید.

ب) ماشین‌حساب یا کامپیوتر مقادیر $n^{1/n}$ را به‌ازای $n=10^m$، $m=1, 2, 3, 4, \dots, 10$، محاسبه کنید و فهرست آنها را بنویسید.

پ) با فرض $\ln ۱۰ = ۲٫۳۰۲۵۸\ ۵۰۹۲۹\ ۹۴۰۴$ و $n^{۱/n} = \exp(۱/n \ln n)$، نشان دهید که

$$n^{۱/n} \approx ۱ + ۱۰^{-m}(m \ln ۱۰)$$

$$\approx ۱٫۰۰۰۰۰\ ۰۰۰۲۳\ ۰۲۵۸۵$$

تا ۱۵ رقم اعشاری به‌ازای $m = ۱۰$ درست است.
ت) اگر $n = ۱۰^{۱۰}$، نشان دهید که درچند رقم آخر براورد زیر از $n^{۱/n}$ خطایی وجود دارد

$$n^{۱/n} = ۱٫۰۰۰۰۰\ ۰۰۰۲۳\ ۰۲۵۸۵\ ۰۹۲۹۹\ ۴۰۴$$

و تقریبی را که تا ۲۱ رقم اعشاری خوب است پیدا کنید.

۱۷. اگر $(۱+x)^{۱/۳}$ را با $۱+x/۳$ تعویض کنیم و $۰ \leqslant x \leqslant ۱/۱۰$، چه براوردی می‌توان ازمقدارخطا به‌دست‌داد؟

۱۸. عبارت زیر را به‌کمك سری محاسبه‌کنید

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\ln(۱-x) - \sin x}{۱-\cos^۲ x}.$$

۱۹. مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to ۰} [(\sin x)/x]^{۱/x^۲}$.

۲۰. فرض‌کنیدکه $\sum a_n$ یك‌سری همگرا متشکل از اعداد مثبت است. آیا $\sum \ln(۱+a_n)$ همگراست؟ توضیح دهید.

درمسأله‌های ۲۱ـ۲۸، بازهٔ همگرایی هرسری را بیابید. اگر این بازه متناهی‌است، همگرایی را درنقاط انتهایی بیازمایید.

۲۱. $$۱ + \frac{x+۲}{۳\times ۱} + \frac{(x+۲)^۲}{۳^۲\times ۲} + \cdots + \frac{(x+۲)^n}{۳^n \times n} + \cdots$$

۲۲. $$۱ + \frac{(x-۱)^۲}{۲!} + \frac{(x-۱)^۴}{۴!} + \cdots + \frac{(x-۱)^{۲n-۲}}{(۲n-۲)!} + \cdots$$

۲۳. $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$$

۲۴. $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n!\,x^n}{n^n}$$

۲۵. $$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{n+۱}{۲n+۱}\,\frac{(x-۳)^n}{۲^n}$$

۲۶. $$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{n+۱}{۲n+۱}\,\frac{(x-۲)^n}{۳^n}$$

۲۷. $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n-۱}(x-۱)^n}{n^۲}$$

۲۸. $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

در هریك از مسأله‌های ۲۹ـ۳۱، همهٔ مقادیر xها را که سری به‌ازای آنها همگراست بیابید.

۲۹. $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(x-۲)^{۳n}}{n!}$$

۳۰. $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲^n(\sin x)^n}{n^۲}$$

۳۱. $$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}\left(\frac{x-۱}{x}\right)^n$$

۳۲. تابعی به‌وسیلهٔ سری توانی زیر تعریف می‌شود

$$y = ۱ + \frac{۱}{۶}x^۳ + \frac{۱}{۱۸۰}x^۶ + \cdots$$
$$+ \frac{۱\times ۴\times ۷\times \cdots \times (۳n-۲)}{(۳n)!}x^{۳n} + \cdots.$$

الف) بازهٔ همگرایی سری را بیابید.
ب) نشان دهید تابعی‌که به‌وسیلهٔ این‌سری تعریف می‌شود در یك معادلهٔ دیفرانسیل به شکل $y'' = x^a y + b$ صدق می‌کند، و ثابتهای a و b را بیابید.

۳۳. اگر $a_n > ۰$ و سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، ثابت‌کنیدکه $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n/(۱+a_n)$ همگراست.

۳۴. اگر $۱ > a_n > ۰$ و $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، ثابت‌کنیدکه $\sum_{n=۱}^{\infty} \ln(۱-a_n)$ همگراست. (راهنمایی: نخست نشان دهید که $|\ln(۱-a_n)| \leqslant a_n/(۱-a_n)$.)

۳۵. یك حاصلضرب نامتناهی را که به‌صورت $\prod_{n=۱}^{\infty}(۱+a_n)$ نشان داده می‌شود همگرا می‌گویند اگر سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \ln(۱+a_n)$ همگرا باشد. (این‌سری، لگاریتم طبیعی حاصلضرب است.) ثابت کنیدکه این حاصلضرب همگراست اگرهر a_n بزرگتر از -۱ و $\sum_{n=۱}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد.(راهنمایی: نشان‌دهید که‌وقتی $|a_n| < ۱/۲$،

رابطهٔ

$$|\ln(1+a_n)| \leqslant \frac{|a_n|}{1-|a_n|} < 2|a_n|$$

برقرار است.)

۳۶. با ضرب کردن جملات مناسبی‌ازسریهای مکلورن $\tan^{-1}x$ و $\ln(1+x)$ دریکدیگر، جملات سری مکلورن حاصلضرب $(\tan^{-1}x)\cdot\ln(1+x)$ را تا x^5 بیابید.

۳۷. با تقسیم یا ضرب سریها، جملات سری مکلورن $\tan^{-1}x/(1-x)$ را تا x^5 بیابید.

۳۸. گسترش پیوستهٔ خارج قسمتها. فرض کنید تابعی چون f به‌صورت سری توانی زیرنمایش داده می‌شود

$$f(x)=\sum a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

و $f(0)=0$. در این‌صورت $a_0=0$، و جملات این سری را می‌توان بر x تقسیم کرد. حال اگر تابعی چون g به‌وسیلهٔ سریی مثل $\sum b_n x^n$ نمایش داده‌شود و $g(0)=0$ ولی $g'(0)\neq 0$، آنگاه $b_0=0$ ولی $b_1\neq 0$. پس می‌توان xی را ازصورت و مخرج خارج‌قسمت $f(x)/g(x)=\sum a_n x^n/\sum b_n x^n$ حذف کرد تا f/g به‌صورت خارج‌قسمت دوسری جدید نمایش داده شود. در این نمایش جدید، مخرج در $x=0$ صفر نمی‌شود زیرا $b_1\neq 0$ جملهٔ ثابت است. پس، خارج‌قسمت جدید دامنهٔ تابع f/g را گسترش می‌دهد تا نقطهٔ $x=0$ را در برگیرد.

مثلاً، اگر $f(x)=x$ و $g(x)=e^x-1$، فرمول

$$\frac{x}{e^x-1} = \frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\cdots}$$

دامنهٔ خارج‌قسمت f/g را گسترش‌می‌دهد تا شامل $x=0$ شود. این گسترش، که خارج‌قسمت دوتابع پیوستهٔ ۱ و $1+(x/2)+(x^2/3!)+\cdots$ است، خود نیز پیوسته‌است. در سمت‌راست، صورت را برمخرج تقسیم کنید تا سه‌ضریب اول c_0، c_1، و c_2 برای‌سری $\sum c_n x^n$ که نشان‌دهندهٔ گسترش پیوستهٔ f/g است به‌دست آید.

۳۹. الف) با تقسیم یا به‌طریق دیگری نشان‌دهید که

$$\frac{1}{1+t} = 1-t+t^2-t^3+\cdots+(-1)^n t^n + \frac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}.$$

ب) با انتگرالگیری از رابطهٔ قسمت (الف) نسبت به t از ۰ تا x نشان دهیدکه

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+R_{n+1}$$

که در آن

$$R_{n+1} = (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt.$$

پ) اگر $x\geqslant 0$، نشان‌دهیدکه

$$|R_{n+1}|\leqslant \int_0^x t^{n+1}\,dt = \frac{x^{n+2}}{n+2}.$$

(راهنمایی: وقتی t از ۰ تا x تغییرمی‌کند، $1+t\geqslant 1$ و $t^{n+1}/(1+t)\leqslant t^{n+1}$ و

$$\left|\int_0^x f(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^x |f(t)|\,dt.\ )$$

ت) اگر $-1<x<0$، نشان‌دهیدکه

$$\left|R_{n+1}\right| \leqslant \left|\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-|x|}\,dt\right| = \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)(1-|x|)}$$

(راهنمایی: اگر $x<t\leqslant 0$، آنگاه $|1+t|\geqslant 1-|x|$ و $\left|\frac{t^{n+1}}{1+t}\right|\leqslant \frac{|t|^{n+1}}{1-|x|}$.)

ث) با استفاده از نتایج قسمتهای قبل ثابت کنید که سری

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}+\cdots$$

به‌ازای $-1<x\leqslant 1$ به $\ln(1+x)$ همگراست.

پیوستها

پ ۱

اثبات قضیه‌های مربوط به‌حد از بخش ۹.۱

دراین پیوست، قضیه‌های ۱ و ۲ از بخش ۹.۱ را ثابت‌می‌کنیم.

قضیهٔ ۱

قضیهٔ ترکیب حدها

اگر $\lim_{t\to c} F_1(t)=L_1$ و $\lim_{t\to c} F_2(t)=L_2$، آنگاه

i) $\lim\,[F_1(t)+F_2(t)]=L_1+L_2$

ii) $\lim\,[F_1(t)-F_2(t)]=L_1-L_2$

iii) $\lim F_1(t)F_2(t)=L_1L_2$

iv) $\lim kF_2(t)=kL_2$ (به‌ازای هرعدد k)

v) $\lim \dfrac{F_1(t)}{F_2(t)}=\dfrac{L_1}{L_2}$ ، با این‌شرط‌که $L_2\neq 0$.

درتمام این حدها، $t\to c$.

---

i) $\lim\,[F_1(t)+F_2(t)]=L_1+L_2$.

برای اینکه ثابت‌کنیم حدمجموع $F_1(t)+F_2(t)$ وقتی $t\to c$ عدد L_1+L_2 است، باید نشان دهیم به‌ازای هر $\epsilon>0$ عددی چون $\delta>0$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای همهٔ tها،

$$0<|t-c|<\delta \Rightarrow |F_1(t)+F_2(t)-(L_1+L_2)|<\epsilon. \qquad (۱\ \text{الف})$$

اگر ϵ مثبت باشد، $\epsilon/2$ هم مثبت است و چون $\lim_{t\to c} F_1(t)=L_1$، می‌دانیم یك $\delta_1>0$ وجود دارد به طوری که به‌ازای همهٔ tها،

$$0<|t-c|<\delta_1 \Rightarrow |F_1(t)-L_1|<\frac{\epsilon}{2}. \qquad (۱\ \text{ب})$$

همچنین یك $\delta_2>0$ وجود دارد به‌قسمی‌که به‌ازای همهٔ tها،

$$0<|t-c|<\delta_2 \Rightarrow |F_2(t)-L_2|<\frac{\epsilon}{2}. \qquad (۱\ \text{پ})$$

حال فرض می‌کنیم δ کوچکترین عدد از دوعدد δ_1 و δ_2 باشد. دراین‌صورت، δ عددی مثبت است و نابرابریهای مربوط به ϵ مذکور در (۱ ب) و (۱ پ) هردوبا شرط $0<|t-c|<\delta$ برقرارند. پس، به‌ازای‌همهٔ tها، ازنابرابری $0<|t-c|<\delta$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
&|F_1(t)+F_2(t)-(L_1+L_2)|\\
&\quad=|F_1(t)-L_1+F_2(t)-L_2|\\
&\quad\leqslant|F_1(t)-L_1|+|F_2(t)-L_2|\\
&\quad<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.
\end{aligned}$$

پس (۱ الف)، و لذا قسمت (i) قضیه، ثابت می‌شود.

(iii $\lim [F_۱(t)\cdot F_۲(t)]=L_۱\cdot L_۲$.

فرض کنیم ϵ یك عدد دلخواه مثبت باشد. می‌نویسیم

$$F_۱(t)=L_۱+[F_۱(t)-L_۱]$$
$$F_۲(t)=L_۲+[F_۲(t)-L_۲].$$

وقتی این دوعبارت را درهم ضرب و $L_۱L_۲$ را ازحاصل کم کنیم، داریم

$$\begin{aligned}F_۱(t)\cdot F_۲(t)-L_۱L_۲ &= L_۱[F_۲(t)-L_۲]+L_۲[F_۱(t)-L_۱]\\ &\quad +[F_۱(t)-L_۱]\cdot[F_۲(t)-L_۲].\end{aligned} \quad (۳\ \text{الف})$$

عددهای $\sqrt{\epsilon/۳}$، $\epsilon/[۳(۱+|L_۱|)]$، و $\epsilon/[۳(۱+|L_۲|)]$ همه مثبت‌اند. و ازآنجاکه حد $F_۱(t)$، $L_۱$ و حد $F_۲(t)$، $L_۲$ است، اعداد مثبتی چون $\delta_۱$، $\delta_۲$، $\delta_۳$، و $\delta_۴$ یافت می‌شوند به‌طوری‌که

$$|F_۱(t)-L_۱|<\sqrt{\frac{\epsilon}{۳}} \quad \text{وقتی} \quad \delta_۱>|t-c|>۰$$

$$|F_۲(t)-L_۲|<\sqrt{\frac{\epsilon}{۳}} \quad \text{وقتی} \quad \delta_۲>|t-c|>۰$$

$$|F_۱(t)-L_۱|<\frac{\epsilon}{[۳(۱+|L_۲|)]} \quad \text{وقتی} \quad \delta_۳>|t-c|>۰$$

$$|F_۲(t)-L_۲|<\frac{\epsilon}{[۳(۱+|L_۱|)]} \quad \text{وقتی} \quad \delta_۴>|t-c|>۰.$$

حال δ را کوچکترین عدد از چهار عدد مثبت $\delta_۱$، $\delta_۲$، $\delta_۳$، و $\delta_۴$ می‌گیریم. در این صورت δ عددی مثبت است و با شرط $\delta>|t-c|>۰$ هرچهار نابرابری بالا برقرارند. اگر از دوطرف رابطهٔ (۳ الف) قدرمطلق بگیریم و از نابرابری مثلثی استفاده کنیم، داریم

$$\begin{aligned}|F_۱(t)F_۲(t)-L_۱L_۲| &\leqslant |L_۱|\cdot|F_۲(t)-L_۲|+|L_۲|\cdot|F_۱(t)-L_۱| \quad (۳\ \text{ب})\\ &\quad +|F_۱(t)-L_۱|\cdot|F_۲(t)-L_۲|\\ &<\frac{\epsilon}{۳}+\frac{\epsilon}{۳}+\frac{\epsilon}{۳}=\epsilon \quad (\text{با این شرط که } \delta>|t-c|>۰),\end{aligned}$$

به‌این‌ترتیب، اثبات قسمت (iii) به‌انجام می‌رسد.

(iv $\lim kF_۲(t)=kL_۲$.

این قسمت، حالت خاصی از قسمت (iii) است اگر در قسمت (iii) تابع $F_۱(t)$ را به‌ازای همهٔ مقادیر t برابر با مقدار ثابت k بگیریم.

(ii $\lim [F_۱(t)-F_۲(t)]=L_۱-L_۲$.

این حکم به‌صورت زیر از قسمتهای (i) و (iv) به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}\lim[F_۱(t)-F_۲(t)] &= \lim[F_۱(t)+(-۱)F_۲(t)]\\ &=\lim F_۱(t)+\lim(-۱)F_۲(t)\\ &=\lim F_۱(t)+(-۱)\lim F_۲(t)\\ &=\lim F_۱(t)-\lim F_۲(t)\\ &=L_۱-L_۲.\end{aligned} \quad (۴)$$

(v اگر $L_۲\neq ۰$، $\lim\frac{F_۱(t)}{F_۲(t)}=\frac{L_۱}{L_۲}$.

چون $L_۲$ صفرنیست $|L_۲|$ عددی مثبت است، و چون حد $F_۲(t)$ وقتی $t\to c$ عدد $L_۲$ است، می‌دانیم عددی مثبت چون $\delta_۱$ وجود دارد که

$$|F_۲(t)-L_۲|<\frac{|L_۲|}{۲} \quad ، \quad \text{وقتی} \quad \delta_۱>|t-c|>۰.$$

(۵ الف)

حال، می‌توان نشان‌داد که به‌ازای اعداد دلخواه A و B،

$$|A|-|B|\leqslant|A-B| \quad \text{و} \quad |B|-|A|\leqslant|A-B|.$$

لذا داریم

$$||A|-|B||\leqslant|A-B|. \quad (۵\ \text{ب})$$

در (۵ ب) قرار می‌دهیم $A=F_۲(t)$ و $B=L_۲$ و از (۵ الف) نتیجه می‌گیریم که با شرط $\delta_۱>|t-c|>۰$ داریم

$$-\frac{۱}{۲}|L_۲|<|F_۲(t)|-|L_۲|<\frac{۱}{۲}|L_۲|.$$

اگر به‌هرسه‌جملهٔ نابرابری فوق $|L_۲|$ را بیفزاییم، نتیجه می‌شود

$$\frac{۱}{۲}|L_۲|<|F_۲(t)|<\frac{۳}{۲}|L_۲|$$

و ازآن با شرط $\delta_۱>|t-c|>۰$ به‌نتیجهٔ زیر دست می‌یابیم

$$\left|\frac{۱}{F_۲(t)}-\frac{۱}{L_۲}\right|=\left|\frac{L_۲-F_۲(t)}{L_۲F_۲(t)}\right|\leqslant\frac{۲}{|L_۲|^۲}|L_۲-F_۲(t)|$$

(۵ پ)

تا اینجا تنها ثابت کرده‌ایم که وقتی t به اندازهٔ کافی به c نزدیک باشد، قدرمطلق تفاضل بین عکسهای $F_2(t)$ و L_2 که در طرف چپ (۵ پ) آمده است از حاصلضرب یک مقدار ثابت در $|L_2-F_2(t)|$ بیشتر نیست. هنوز از این واقعیت که L_2 حد $F_2(t)$ است به‌اندازهٔ کافی استفاده نکرده‌ایم.

حال فرض کنید ϵ یک‌عدد مثبت‌دلخواه است. دراین‌صورت $(1/2)|L_2|^2\epsilon$ نیز عددی مثبت است و درنتیجه عددی مثبت چون δ_2 وجود دارد که

$$\text{اگر } 0<|t-c|<\delta_2 \text{ ،} \quad |L_2-F_2(t)|<\frac{\epsilon}{2}|L_2|^2 . \qquad \text{(۵ ت)}$$

با اختیارکردن $\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$ یک عدد مثبت δ به‌دست می‌آید، و از تلفیق نابرابریهای (۵ پ) و (۵ ت) نتیجهٔ زیرعاید می‌شود

$$\text{اگر } 0<|t-c|<\delta \text{ ،} \quad \left|\frac{1}{F_2(t)}-\frac{1}{L_2}\right|<\epsilon .$$

از این‌مطلب نتیجه می‌گیریم که

اگر $\lim F_2(t)=L_2$ وقتی که $t\to c$، و اگر $L_2\neq 0$، آنگاه

$$\lim\frac{1}{F_2(t)}=\frac{1}{L_2} .$$

چون قبلاً[*] قانون حاصلضرب را ثابت‌کرده‌ایم، می‌توانیم آن را درمورد $F_1(t)$ و $1/F_2(t)$ به‌صورت زیر به‌کاربریم و از آن قانون خارج‌قسمت را به‌دست آوریم

$$\lim\frac{F_1(t)}{F_2(t)}=\lim\left[F_1(t)\cdot\frac{1}{F_2(t)}\right]$$
$$=[\lim F_1(t)]\cdot\left[\lim\frac{1}{F_2(t)}\right]=L_1\cdot\frac{1}{L_2} .$$

قضیهٔ ۲

قضیهٔ ساندویچ

فرض‌کنید که به‌ازای تمام مقادیر $t\neq c$ در بازه‌ای حول c،

$$f(t)\leqslant g(t)\leqslant h(t)$$

و وقتی t به c میل می‌کند، $f(t)$ و $h(t)$ هر دو به‌یک حد L میل می‌کنند. دراین صورت

$$\lim_{t\to c} g(t)=L .$$

اثبات درمورد حد راست. اگر

$$\lim_{t\to c^+} f(t)=\lim_{t\to c^+} h(t)=L$$

آنگاه به‌ازای‌هر $\epsilon>0$ عددی‌چون $\delta>0$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای همهٔ tها،

$$c<t<c+\delta \Rightarrow L-\epsilon<f(t)<L+\epsilon$$

و

$$L-\epsilon<h(t)<L+\epsilon .$$

نابرابریهای مربوط به ϵ درطرف راست را با نابرابری $f(t)\leqslant g(t)\leqslant h(t)$ تلفیق می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم که

$$L-\epsilon<f(t)\leqslant g(t)\leqslant h(t)<L+\epsilon .$$

پس‌داریم

$$L-\epsilon<g(t)<L+\epsilon .$$

بنابراین، به‌ازای همهٔ tها،

$$c<t<c+\delta \Rightarrow |g(t)-L|<\epsilon .$$

نتیجه اینکه

$$\lim_{t\to c^+} g(t)=L .$$

اثبات درمورد حد چپ. اگر $\epsilon>0$ مفروض باشد، عددی چون $\delta>0$ یافت می‌شود به‌طوری‌که به‌ازای همهٔ tها،

$$c-\delta<t<c \Rightarrow L-\epsilon<f(t)<L+\epsilon$$

و

$$L-\epsilon<h(t)<L+\epsilon .$$

مانند مورد قبل نتیجه می‌گیریم که به‌ازای همهٔ tها،

$$c-\delta<t<c \Rightarrow L-\epsilon<g(t)<L+\epsilon$$

و لذا

$$\lim_{t\to c^-} g(t)=L .$$

اثبات درموردحددوطرفه. اگر $\lim_{t\to c} f(t)=L$ و $\lim_{t\to c} h(t)=L$، آنگاه وقتی $t\to c^-$ و $t\to c^+$، f و h به L میل‌می‌کنند. پس، همان‌طورکه دربالا نشان داده‌ایم، وقتی $t\to c^-$ و $t\to c^+$، $g(t)\to L$. چون حدهای چپ و راست g وقتی $t\to c$ وجود

دارند و هردو برابر با L هستند داریم

$$\lim_{t\to c} g(t)=L\,.$$

مسأله‌ها

۱. وقتی t به c میل می‌کند حدهای $F_1(t)$، $F_2(t)$، و $F_3(t)$ به‌ترتیب L_1، L_2، و L_3 است. نشان دهیدکه حد مجموع این تابعها $L_1+L_2+L_3$ است. این نتیجه را به‌مجموع هر تعداد متناهی از توابع تعمیم دهید.

۲. اگر n یك‌عدد صحیح و مثبت بزرگتر از یك باشد، و وقتی t به c میل می‌کند حدهای $F_1(t)$، $F_2(t)$، ...، $F_n(t)$ به‌ترتیب L_1، L_2، ...، L_n باشند، نشان‌دهید که حد حاصلضرب این n تابع $L_1 \cdot L_2 \cdot \ldots \cdot L_n$ است. (از استقرای ریاضی و قسمت iii قضیهٔ ۱ استفاده کنید.)

۳. با استفاده از نتایج بخش ۹.۱، مثال ۲، ومسألهٔ ۲ی بالا نشان دهیدکه به‌ازای هرعدد صحیح و مثبت n داریم $\lim\limits_{t\to c} t^n=c^n$.

۴. با استفاده ازنتیجهٔ مثال ۳ی مذکور دربخش ۹.۱ و مسائل ۱ و ۳ی بالا نشان دهیدکه به‌ازای هرتابع چندجمله‌ای

$$f(t)=a_0t^n+a_1t^{n-1}+\ldots+a_n$$

داریم

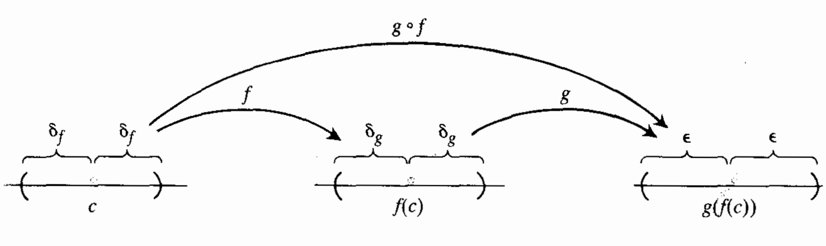
$$\lim_{t\to c} f(t)=f(c)\,.$$

۵. با استفاده ازقضیهٔ ۱ و نتیجهٔ مسألهٔ ۴ نشان‌دهیدکه اگر $f(t)$ و $g(t)$ توابع چندجمله‌ای باشند و اگر $g(c)\neq 0$، آنگاه

$$\lim_{t\to c}\frac{f(t)}{g(t)}=\frac{f(c)}{g(c)}\,.$$

۶. درشکل پ.۱ نمودار اثباتی از این‌مطلب دیده می‌شودکه ترکیب دوتابع پیوسته، پیوسته است. از روی نمودار، اثبات را بنویسید. حکم موردنظرچنین است

اگر $f(t)$ در $t=c$ و $g(x)$ در $x=f(c)$ پیوسته باشند، آنگاه ترکیب $g\circ f$ در $t=c$ پیوسته‌است.



پ.۱ نمودار اثباتی از این‌حکم که ترکیب دوتابع پیوسته یك تابع پیوسته است. این حکم درمورد هرتعداد متناهی از توابع نیز درست است. تنها شرط مورد نیاز این‌است که هرتابع درنقطهٔ مربوط پیوسته باشد. در این شکل باید f در c و g در $f(c)$ پیوسته باشد.

همچنین فرض‌کنید c یك نقطهٔ درونی دامنهٔ f و $f(c)$ یك نقطهٔ درونی دامنهٔ g باشد. با این‌فرض تمام حدهای موردنظر دوطرفه خواهند شد. (استدلال درحالاتی‌که c یا $f(c)$ و یا هردوی آنها نقاط انتهایی دامنه‌های f و g باشند نظیر استدلال درحالتی است‌که هردو را نقاط درونی فرض‌کنیم.)

پ ۲
استقرای ریاضی

درستی بسیاری از فرمولها، نظیرفرمول

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

به‌ازای هرعدد صحیح و مثبت n را می‌توان با به‌کاربردن اصل موضوعی موسوم به‌اصل استقرای ریاضی اثبات کرد. اثباتی که درآن این اصل موضوع به‌کار رود اثبات با استقرای ریاضی یا اثبات با استقرا نام دارد.

مراحل اثبات یك فرمول با استقرا عبارت‌اند از

مرحلهٔ ۱: درستی فرمول را به‌ازای $n=1$ می‌آزماییم.

مرحلهٔ ۲: ثابت‌می‌کنیم که اگرفرمول به‌ازای‌هرعدد صحیح و مثبت $n=k$ درست باشد به‌ازای $n=k+1$ نیز درست‌است.

وقتی این مراحل به انجام رسید (بنابه اصل موضوع مزبور) می‌دانیم که فرمول به‌ازای همهٔ اعداد صحیح و مثبت n درست است. بنابه‌مرحلهٔ ۱ برای $n=1$ برقراراست. بنابه‌مرحلهٔ ۲ برای $n=2$ و درنتیجه بنابه‌مرحلهٔ ۲ برای $n=3$، مجدداً بنابه‌همین مرحله برای $n=4$ و، همین‌طور الی‌آخر، درست است. مانند بازی دومینو، اگرمهرهٔ اول بیفتد و اگرهرمهرهٔ kام که می‌افتد مهرهٔ $k+1$ام را بیندازد، همهٔ مهره‌ها می‌افتند.

از دیدگاه دیگر، فرض کنید به‌ازای هرعدد صحیح و مثبت دنباله‌ای از گزاره‌ها به‌صورت

$$S_1,\, S_2,\, \ldots,\, S_n,\, \ldots$$

داشته باشیم. وتصورکنید می‌توانیم نشان دهیم که درستی‌گزاره‌ای درستی گزارهٔ بعدی را ایجاب می‌کند. همچنین فرض‌کنید که می‌توانیم‌درستی S_1 را اثبات کنیم. دراین‌صورت می‌توانیم نتیجه بگیریم که همهٔ گزاره‌های بعد از S_1 هم درست هستند.

مثال ۱ نشان‌دهید که به‌ازای هرعدد صحیح و مثبت n،

$$1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

حل: با طی‌کردن دومرحلهٔ استقرای ریاضی فرمول را اثبات می‌کنیم.

مرحلهٔ ۱: این‌فرمول به‌ازای $n=1$ برقرار است زیرا

$$1=\frac{1(1+1)}{2}.$$

مرحلهٔ ۲: آیا اگر این فرمول به‌ازای $n=k$ برقرارباشد به‌ازای $n=k+1$ نیز برقرار است؟پاسخ مثبت و دلیل‌آن به‌شرح زیر است: اگر

$$1+2+\dots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

آنگاه

$$\begin{aligned}1+2+\dots+k+(k+1)&=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\&=\frac{k^2+k+2k+2}{2}\\&=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\\&=\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}.\end{aligned}$$

آخرین عبارت این رشته از برابریها همان عبارت $n(n+1)/2$ به‌ازای $n=k+1$ است.

حال اصل استقرای ریاضی درستی فرمول اولیه را به‌ازای همهٔ اعداد صحیح و مثبت n تضمین می‌کند.

توجه‌کنید تنها کاری‌که ما باید انجام‌دهیم اجرای مراحل ۱ و ۲ است. بقیهٔ کار به‌عهدهٔ اصل استقرای ریاضی است. ■

مثال ۲ نشان‌دهید که به‌ازای همهٔ اعداد صحیح و مثبت n،

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}.$$

حل: با اجرای دومرحلهٔ استقرای ریاضی فرمول را اثبات می‌کنیم.

مرحلهٔ ۱: این فرمول به‌ازای $n=1$ برقرار است زیرا

$$\frac{1}{2^1}=1-\frac{1}{2^1}.$$

مرحلهٔ ۲: اگر

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^k}$$

آنگاه

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}&=1-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}\\&=1-\frac{1\times 2}{2^k\cdot 2}+\frac{1}{2^{k+1}}\\&=1-\frac{2}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}\\&=1-\frac{1}{2^{k+1}}.\end{aligned}$$

بنابراین دیده‌می‌شود که هرگاه فرمول‌اولیه به‌ازای $n=k$ برقرار باشد به‌ازای $n=k+1$ نیز برقرار است.

حال‌که این دومرحله طی شد اصل استقرای ریاضی درستی فرمول به‌ازای هرعدد صحیح و مثبت n را تضمین می‌کند. ■

آغازکردن با اعداد صحیح دیگر

در برخی از استدلالهای استقرایی به‌جای اینکه استدلال را با $n=1$ شروع‌کنند، با عدد صحیح دیگری شروع می‌کنند. مراحل این‌گونه استدلال به‌شرح زیراست.

مرحلهٔ ۱: درستی فرمول را به‌ازای $n=n_1$ (نخستین عدد صحیح مناسب) بررسی می‌کنیم.

مرحلهٔ ۲: ثابت‌می‌کنیم‌که اگرفرمول به‌ازای هرعدد صحیح و مثبت $n=k\geqslant n_1$ درست باشد، آنگاه به‌ازای $n=k+1$ نیز درست است.

وقتی این مراحل طی شود، اصل استقرای ریاضی درستی فرمول را به‌ازای هر $n\geqslant n_1$ تضمین می‌کند.

مثال ۳ نشان‌دهید که اگر n به‌اندازهٔ کافی بزرگ‌باشد $n!>3^n$.

حل: «به‌اندازهٔ کافی بزرگ» یعنی چه؟ به‌آزمایش می‌پردازیم

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
$n!$	۱	۲	۶	۲۴	۱۲۰	۷۲۰	۵۰۴۰
3^n	۳	۹	۲۷	۸۱	۲۴۳	۷۲۹	۲۱۸۷

به‌نظر می‌رسد که به‌ازای $n \geqslant ۷$ داریم $n! > ۳^n$. برای اطمینان، از استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم. در مرحلهٔ ۱ می‌گیریم $n_1 = ۷$ و به‌مرحلهٔ ۲ می‌پردازیم.

فرض کنید به‌ازای یك $k \geqslant ۷$ داشته‌باشیم $k! > ۳^k$. دراین‌صورت

$$(k+1)! \\ =(k+1)(k!) > (k+1)۳^k > ۷ \times ۳^k > ۳^{k+1}.$$

پس به‌ازای $k \geqslant ۷$،

$$k! > ۳^k \Rightarrow (k+1)! > ۳^{k+1}.$$

حال اصل استقرای ریاضی درستی $n! \geqslant ۳^n$ را به‌ازای هر $n \geqslant ۷$ تضمین می‌کند. ■

مسأله‌ها

۱. با این‌فرض‌که نابرابری‌مثلثی $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ به‌ازای هردوعدد a و b برقرار است نشان دهیدکه به‌ازای هر n عدد x_1، x_2، ...، x_n داریم

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

۲. نشان‌دهیدکه اگر $r \neq 1$، به‌ازای هرعدد صحیح و مثبت n داریم

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

۳. با استفاده ازقاعدهٔ حاصلضرب

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

و این واقعیت که

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

نشان دهیدکه به‌ازای هرعدد صحیح و مثبت n،

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

۴. فرض‌کنید تابعی‌چون $f(x)$ دارای‌این‌ویژگی‌است که به‌ازای هردوعدد مثبت x_1 و x_2، $f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2)$. نشان دهیدکه درمورد حاصلضرب n عددمثبت x_1، x_2، ...، x_n داریم

$$f(x_1 x_2 \cdots x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n).$$

۵. نشان‌دهیدکه به‌ازای هرعدد صحیح و مثبت n،

$$\frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n}.$$

۶. نشان دهیدکه‌اگر n به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد، $n! > n^3$.

۷. نشان‌دهیدکه اگر n به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد، $2^n > n^2$.

۸. نشان‌دهیدکه به‌ازای $n \geqslant -3$ داریم $2^n \geqslant 1/8$.

پ ۳
فرمولهایی از ریاضیات پیش‌دانشگاهی
جبر

۱. قانون نماها

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (ab)^m = a^m b^m$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, \qquad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

اگر $a \neq 0$،

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a^0 = 1, \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

۲. صفر

به‌ازای هرعدد غیر بینهایت a داریم

$$a \times 0 = 0 \times a = 0.$$

اگر $a \neq 0$،

$$\frac{0}{a} = 0, \quad 0^a = 0, \quad a^0 = 1.$$

تقسیم برصفر تعریف نمی‌شود.

۳. کسر

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}, \qquad \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$$

$$\frac{(a/b)+(c/d)}{(e/f)+(g/h)} = \frac{(a/b)+(c/d)}{(e/f)+(g/h)} \cdot \frac{bdfh}{bdfh}$$

$$= \frac{(ad+bc)fh}{(eh+fg)bd}$$

۴. قضیهٔ دوجمله‌ای به‌ازای عدد صحیح و مثبت n

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\times 2}a^{n-2}b^2$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3}a^{n-3}b^3+\cdots$$
$$+nab^{n-1}+b^n$$

مثلاً

$$(a+b)^1=a+b$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

۵. تفاضل توانهای صحیح یکسان، $n>1$.

$$a^n-b^n$$
$$=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

مثلاً

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3).$$

۶. تناسب

گزاره‌های «y مستقیماً با x تغییر می‌کند» و «y با x تناسب مستقیم دارد» یک‌معنا دارند و آن این است که به‌ازای عدد ثابتی چون k

$$y=kx.$$

ثابت k را ضریب تناسب معادلهٔ $y=kx$ می‌نامند.

به‌همین ترتیب، «y به‌طور معکوس با x تغییر می‌کند» و «y با x تناسب معکوس دارد» به این معنا هستند که به‌ازای عدد ثابتی چون k،

$$y=k\frac{1}{x}.$$

بازهم k ضریب تناسب معادله است.

۷. باقیمانده و عامل

اگر چندجمله‌ای

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

را تا آنجا بر $x-r$ تقسیم کنیم که باقیماندهٔ R مستقل از x باشد، آنگاه $R=f(r)$. به‌عبارت‌دیگر، $x-r$ عاملی از $f(x)$ است اگر و تنها اگر r جوابی برای معادلهٔ $f(x)=0$ باشد. مثلاً اگر $f(x)=x^2+x-1$ را بر $x-2$ تقسیم کنیم می‌بینیم که $R=5$:

$$\begin{array}{r|l} & x+3 \\ \hline x-2 & x^2+x-1 \\ & \underline{x^2-2x} \\ & \quad 3x-1 \\ & \quad \underline{3x-6} \\ & \qquad 5 \end{array}$$

پس،
$f(x)=x^2+x-1=(x-2)(x+3)+5$ و $f(2)=5$.
اگر $g(x)=x^2+x-6$ را بر $x-2$ تقسیم کنیم درمی‌یابیم که $R=0$:

$$\begin{array}{r|l} & x+3 \\ \hline x-2 & x^2+x-6 \\ & \underline{x^2-2x} \\ & \quad 3x-6 \\ & \quad \underline{3x-6} \\ & \qquad 0 \end{array}$$

پس، $g(x)=x^2+x-6=(x-2)(x+3)$ و $g(2)=0$.

۸. فرمول درجهٔ دوم

اگر دوجملهٔ اول معادلهٔ

$$ax^2+bx+c=0$$

را به‌صورت مربع‌کامل درآوریم و از معادلهٔ حاصل x را بیابیم (جزئیات محاسبه را نمی‌نویسیم) به‌فرمول زیر می‌رسیم

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

این رابطه را **فرمول درجهٔ دوم** می‌نامند. مثلاً جوابهای معادلهٔ

$$2x^2+3x-1=0$$

عبارت‌اند از

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{(3)^2-4(2)(-1)}}{2(2)}=\frac{-3\pm\sqrt{9+8}}{4}.$$

یا

$$x=\frac{-۳+\sqrt{۱۷}}{۴} \quad \text{و} \quad x=\frac{-۳-\sqrt{۱۷}}{۴}.$$

اگر فرمول درجهٔ دوم را درمورد معادلهٔ

$$x^{۲}+۲x+۲=۰$$

به‌کار بندیم به‌نتیجهٔ زیر می‌رسیم

$$x=\frac{-۲\pm\sqrt{۴-۴(۱)(۲)}}{۲(۱)}=\frac{-۲\pm\sqrt{-۴}}{۲}$$

$$=\frac{-۲\pm ۲\sqrt{-۱}}{۲}=-۱\pm\sqrt{-۱}=-۱\pm i.$$

جوابهای این معادله اعداد مختلط زیرهستند

$$x=-۱+i \quad \text{و} \quad x=-۱-i.$$

۹. روش هورنر

(معمولاً) سریعترین راه محاسبهٔ چندجمله‌ای

$$p(x)=a_{۰}+a_{۱}x+a_{۲}x^{۲}+\dots+a_{n}x^{n}$$

در $x=c$ عبارت‌است ازمحاسبهٔ

$$p(c)=a_{۰}+c(a_{۱}+c(a_{۲}+c(a_{۳}+\dots$$
$$+c(a_{n-۱}+ca_{n}))) \dots)$$

که در آن، محاسبات از درون آغاز می‌شود. به‌این ترتیب، محاسبه ساده می‌شود وکار ما صرفاً nبار ضرب وجمع کردن‌است؛ کلا $۲n$ (و اگرضریبی صفرباشد ازآن‌هم‌کمتر) عمل باید انجام شود.

مثلاً مقدار

$$p(x)=۳x^{۳}-۶x^{۲}+۴x+۵$$

در $x=۲$ برابراست با

$$p(۲)=۵+۲(۴+۲(-۶+۲\times۳))=۱۳۰.$$

⇑

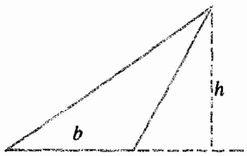
از اینجا آغاز می‌کنیم

و به‌طرف چپ ادامه می‌دهیم

هندسه

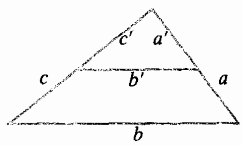
(مساحت $=A$، مساحت قاعده $=B$، محیط $=C$، مساحت‌سطح جانبی $=S$، حجم $=V$)

۱. مثلث



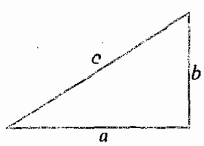
$$A=\tfrac{1}{2}bh$$

۲. مثلثهای متشابه



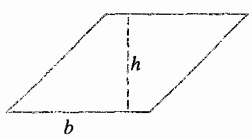
$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$$

۳. قضیهٔ فیثاغورس



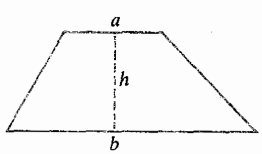
$$a^2+b^2=c^2$$

۴. متوازی‌الاضلاع



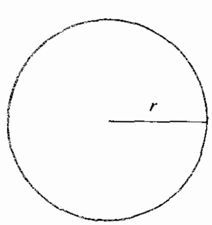
$$A=bh$$

۵. ذوزنقه



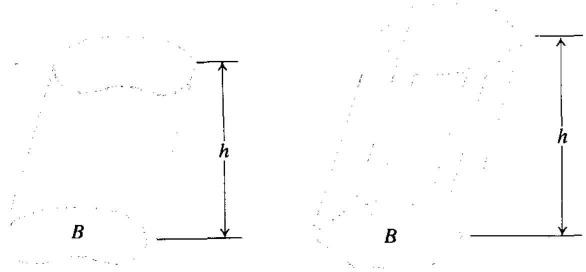
$$A=\tfrac{1}{2}(a+b)h$$

۶. دایره



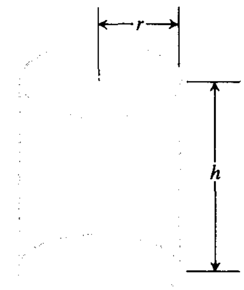
$$A=\pi r^2, \qquad C=2\pi r$$

۷. استوانه یا منشور با قاعده‌های متوازی



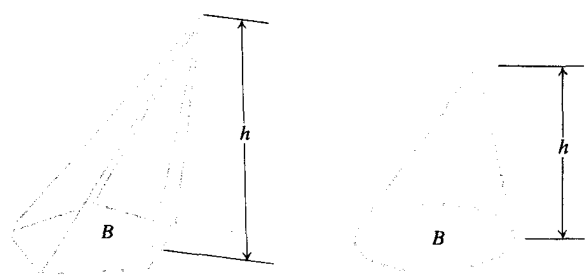
$$V = Bh$$

۸. استوانهٔ مستدیرقائم



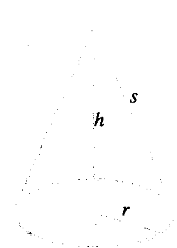
$$V = \pi r^2 h, \qquad S = 2\pi r h$$

۹. مخروط یا هرم



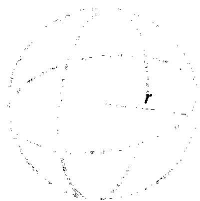
$$V = \tfrac{1}{3}Bh$$

۱۰. مخروط مستدیرقائم



$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h, \qquad S = \pi r s$$

۱۱. کره



$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3, \qquad S = 4\pi r^2$$

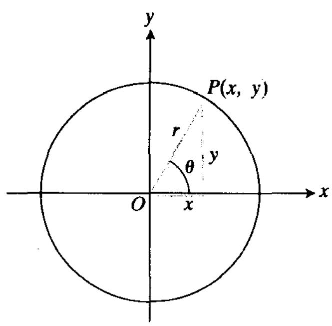
مثلثات

۱. تعریفها و اتحادهای اساسی

سینوس: $\sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{۱}{\csc\theta}$

کسینوس: $\cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{۱}{\sec\theta}$

تانژانت: $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{۱}{\cot\theta}$



$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\sin^{۲}\theta + \cos^{۲}\theta = ۱$$

$$\sec^{۲}\theta = ۱ + \tan^{۲}\theta$$

$$\csc^{۲}\theta = ۱ + \cot^{۲}\theta$$

$$\sin ۲\theta = ۲\sin\theta\cos\theta, \quad \cos ۲\theta = \cos^{۲}\theta - \sin^{۲}\theta$$

$$\cos^{۲}\theta = \frac{۱+\cos ۲\theta}{۲}, \quad \sin^{۲}\theta = \frac{۱-\cos ۲\theta}{۲}$$

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{۱-\tan A\tan B}$$

$$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{۱+\tan A\tan B}$$

$$\sin\left(A-\frac{\pi}{۲}\right)=-\cos A,\quad \cos\left(A-\frac{\pi}{۲}\right)=\sin A$$

$$\sin\left(A+\frac{\pi}{۲}\right)=\cos A,\quad \cos\left(A+\frac{\pi}{۲}\right)=-\sin A$$

$$\sin A\sin B=\frac{۱}{۲}\cos(A-B)-\frac{۱}{۲}\cos(A+B)$$

$$\cos A\cos B=\frac{۱}{۲}\cos(A-B)+\frac{۱}{۲}\cos(A+B)$$

$$\sin A\cos B=\frac{۱}{۲}\sin(A-B)+\frac{۱}{۲}\sin(A+B)$$

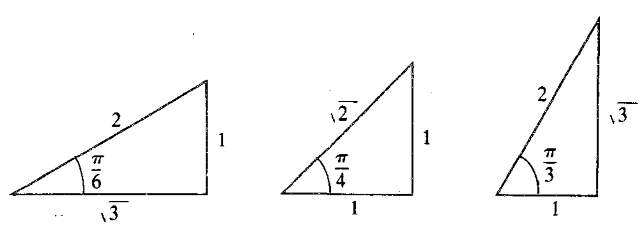
$$\sin A+\sin B=۲\sin\frac{۱}{۲}(A+B)\cos\frac{۱}{۲}(A-B)$$

$$\sin A-\sin B=۲\cos\frac{۱}{۲}(A+B)\sin\frac{۱}{۲}(A-B)$$

$$\cos A+\cos B=۲\cos\frac{۱}{۲}(A+B)\cos\frac{۱}{۲}(A-B)$$

$$\cos A-\cos B=-۲\sin\frac{۱}{۲}(A+B)\sin\frac{۱}{۲}(A-B)$$

۲. مثلثهایی که غالباً به‌آنها مراجعه می‌شود



۳. زاویه‌ها و ضلعهای مثلث

قانون کسینوسها: $c^{۲}=a^{۲}+b^{۲}-۲ab\cos C$

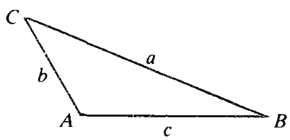
قانون سینوسها: $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$

$$\text{مساحت}=\frac{۱}{۲}bc\sin A=\frac{۱}{۲}ac\sin B=\frac{۱}{۲}ab\sin C$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

در اینجا

$$s=\frac{۱}{۲}(a+b+c)$$



TOOLKIT PROGRAMS	
Function Evaluator	Super * Grapher

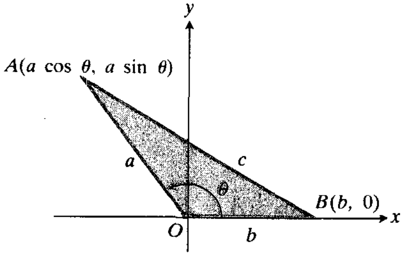
پ ۴
قانون کسینوسها و فرمولهای مربوط به‌مجموع زاویه‌ها

درشکل پ.۲ مثلث OAB چنان است که O درمبدأ و B برمحور xها درنقطهٔ $B(b, ۰)$ قرار دارد. مختصات رأس سوم یعنی نقطهٔ A عبارت‌اند از

$$x=a\cos\theta,\quad y=a\sin\theta. \qquad (۱)$$

θ اندازهٔ زاویهٔ BOA است. بنا به‌فرمول فاصلهٔ بین دونقطه، مربع فاصلهٔ c از A تا B برابر است با

$$c^{۲}=(a\cos\theta-b)^{۲}+(a\sin\theta)^{۲}$$
$$=a^{۲}(\cos^{۲}\theta+\sin^{۲}\theta)+b^{۲}-۲ab\cos\theta$$



پ.۲ برای به‌دست‌آوردن قانون کسینوسها فاصلهٔ بین A و B را محاسبه و نتیجه را مجذور می‌کنیم.

یا

$$c^{2}=a^{2}+b^{2}-2ab\cos\theta . \qquad (۲)$$

رابطهٔ (۲)، **قانون‌کسینوسها**ست. این‌قانون حاکی است‌که «مربع هرضلع یك‌مثلث برابراست با مجموع مربعات دوضلع دیگر منهای دوبرابرحاصلضرب آن دوضلع در کسینوس‌زاویهٔ بین آنها». وقتی $\theta=\pi/2$ ، $\cos\theta=0$ و رابطهٔ (۲) بـه قضیهٔ فیثاغورس بدل می‌شود. رابطهٔ (۲) به‌ازای هرزاویهٔ دلخواه θ برقرار است زیرا فقط براساس فرمول فاصله و روابط (۱) استوار است. بـا قرار دادن زاویهٔ بیرونی زاویهٔ θ یعنی $(2\pi-\theta)$ یا زاویه اخیر با علامت مخالف، بازهم این معادله برقراراست زیرا

$$\cos(2\pi-\theta)=\cos(\theta-2\pi)=\cos\theta .$$

وقتی A برمحور xها قرار دارد و $\theta=\pi$ یا $\theta=0$، بـا توجه به‌اینکه $\cos 0=1$ و $\cos\pi=-1$ به‌سادگی‌می‌توان نشان‌داد که این فرمول بازهم برقرار است. دراین حالتهای خـاص طرف راست رابطهٔ (۲) به‌صورت $(a-b)^{2}$ یا $(a+b)^{2}$ درمی‌آید.

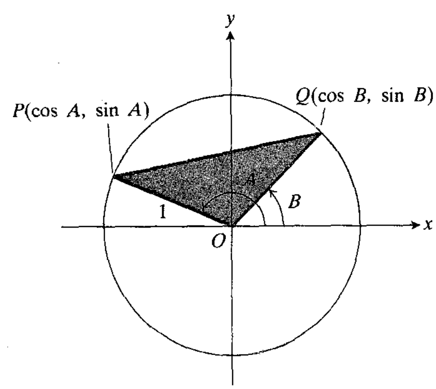
اثبات فرمولهای مربوط به‌مجموع

با به‌کار گرفتن قانون‌کسینوسها درمورد مثلث OPQ ازشکل پ.۳۰ رابطهٔ $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$ مذکور در بخـش ۶.۲ را بـه‌دست مـی‌آوریم. فـرض مـی‌کنیـم $OP=OQ=r=1$. دراین‌صورت مختصات P عبارت‌اند از

$$x_P=\cos A, \quad y_P=\sin A$$

و مختصات Q عبارت‌اند از

$$x_Q=\cos B, \quad y_Q=\sin B .$$



پ۳۰. برای به‌دست آوردن‌فرمول $\cos(A-B)$ قـانون کسینوسها را درمـورد این مثلث به‌کار می‌بندیم.

لذا مربع فاصلهٔ بین P و Q برابراست با

$$\begin{aligned}(PQ)^{2}&=(x_Q-x_P)^{2}+(y_Q-y_P)^{2}\\ &=(x_Q^{2}+y_Q^{2})+(x_P^{2}+y_P^{2})-2(x_Qx_P+y_Qy_P)\\ &=2-2(\cos A\cos B+\sin A\sin B).\end{aligned}$$

امـا زاویهٔ QOP برابر است با $A-B$ و بنابه‌قانون کسینوسها داریم

$$\begin{aligned}(PQ)^{2}&=(OP)^{2}+(OQ)^{2}-2(OP)(OQ)\cos(A-B)\\ &=2-2\cos(A-B).\end{aligned}$$

وقتی این دوعبارت مربوط به $(PQ)^{2}$ را برابرقراردهیم، داریم

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B \qquad (\text{۱۱ ت})$$

که همان رابطهٔ (۱۱ ت) دربخش ۶.۲ است.

حـال معادلات (۱۱ الف، ب، و پ) از بخش ۶.۲ را از معادلهٔ (۱۱ ت) به‌دست می‌آوریم. به‌نتایج زیرنیز نیاز داریم

$$\begin{aligned}&\sin 0=0, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1, \quad \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1\\ &\cos 0=1, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0, \quad \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0 .\end{aligned} \qquad (۳)$$

۱. در رابطهٔ (۱۱ت) قرار می‌دهیم $A=\pi/2$ و رابطه‌های (۳) را به‌کارمی‌بریم تا فرمول زیر را به‌دست‌آوریم

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\sin B . \qquad (۴)$$

اگر دراین‌فرمول به‌جای B، $\pi/2-B$ وبه‌جای $\pi/2-B$، $\pi/2-(\pi/2-B)$ را قراردهیم داریم

$$\cos B=\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right) . \qquad (۵)$$

رابطه‌های (۴) و (۵) به‌ما می‌گویندکه سینوس‌وکسینوس یك زاویه به‌ترتیب برابرند باکسینوس وسینوس زاویهٔ متمم آنها.

۲. حال اگر در رابطهٔ (۱۱ ت) قـرار دهیم $B=-\pi/2$ و از رابطه‌های (۳) استفاده‌کنیم داریم

$$\cos\left(A+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin A . \qquad (۶)$$

۳. ازفرمول (۱۱ ت) می‌توان با قراردادن $-B$ به‌جای B فرمول

$\cos(A+B)$ را به‌دست‌آورد

$$\cos(A+B)=\cos[A-(-B)]$$
$$=\cos A\cos(-B)+\sin A\sin(-B)$$
$$=\cos A\cos B-\sin A\sin B. \quad (\text{۱۱ ب})$$

۴. برای به‌دست آوردن فرمول $\sin(A\pm B)$، ابتدا دررابطهٔ (۴) به جای B می‌نویسیم $A+B$، و سپس از (۱۱ ت) استفاده می‌کنیم

$$\sin(A+B)=\cos\left[\frac{\pi}{۲}-(A+B)\right]$$
$$=\cos\left[\left(\frac{\pi}{۲}-A\right)-B\right]$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{۲}-A\right)\cos B \qquad (\text{۱۱ الف})$$
$$+\sin\left(\frac{\pi}{۲}-A\right)\sin B$$
$$=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$$

رابطه (۱۱پ) از بخش ۶.۲ از این فرمول، با قراردادن $-B$ به‌جای B، نتیجه می‌شود

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B. \quad (\text{۱۱پ})$$

پ ۵
اثباتی برای صورت قویترقاعدهٔ هوپیتال

در این پیوست قضیه‌ای از بخش ۸.۳ را اثبات می‌کنیم که آن را صورت قویتر قاعدهٔ هوپیتال نامیدیم.

قضیه

قاعدهٔ هوپیتال (صورت قویتر)

فرض کنید

$$f(x_\circ)=g(x_\circ)=\circ$$

و فرض کنید توابع f و g هردو بربازه‌ای باز چون (a,b) که شامل نقطهٔ $x_\circ$ است مشتقپذیر باشند. همچنین فرض کنید که به‌ازای همهٔ نقاط (a,b) بجز احتمالاً $x_\circ$، $g'\neq\circ$. دراین‌صورت

$$\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_\circ}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (۱)$$

با این‌شرط که حد طرف راست وجود داشته باشد.

اثبات صورت قویتر قاعدهٔ هوپیتال مبتنی است برقضیهٔ مقدار میانگین کوشی، قضیه‌ای در بارهٔ مقدار میانگین که به‌جای یك تابع با دوتابع سروکاردارد. ما ابتدا قضیهٔ کوشی را ثابت می‌کنیم و سپس چگونگی استفاده ازآن‌را برای به‌دست‌آوردن قاعدهٔ هوپیتال نشان می‌دهیم.

قضیه

قضیهٔ مقدار میانگین کوشی

فرض کنید توابع $f(x)$ و $g(x)$ بر $a\leqslant x\leqslant b$ پیوسته و بر $a<x<b$ مشتقپذیر باشند و بر $a<x<b$ داشته باشیم $g'(x)\neq\circ$. دراین‌صورت بین a و b عددی چون c وجود دارد که

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \qquad (۲)$$

اثبات قضیهٔ مقدار میانگین کوشی از قضیهٔ مقدار میانگین بخش ۷.۳ دوبار استفاده می‌کنیم. ابتدا با استفاده از آن نشان می‌دهیم که $g(b)\neq g(a)$. زیرا اگر $g(b)$ با $g(a)$ برابر باشد، با به‌کاربردن قضیهٔ مقدار میانگین در مورد g نتیجه می‌گیریم که به‌ازای عددی چون c بین a و b داریم

$$g'(c)=\frac{g(b)-g(a)}{b-a}=\circ.$$

اما چنین‌چیزی غیرممکن است زیرا بر $a<x<b$ داریم $g'(x)\neq\circ$.

حال قضیهٔ مقدارمیانگین را درمورد تابع زیر به‌کارمی‌بریم

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]. \qquad (۳)$$

درتمام نقاطی‌که f و g پیوسته و مشتقپذیرند این‌تابع نیز پیوسته و مشتقپذیر است و داریم $F(b)=F(a)=\circ$. پس عددی چون c بین a و b وجود دارد به‌طوری‌که $F'(c)=\circ$. برحسب f و g این مطلب حاکی است که

$$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g'(c)]=\circ \qquad (۴)$$

یا

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

که همان رابطهٔ (۲) است.

اثبات صورت قویتر قاعدهٔ هوپیتال ابتدا رابطهٔ(۱) را برای‌حالت $x \to x_\circ^+$ ثابت می‌کنیم. روشی که دراین‌مورد به‌کارمی‌بریم تقریباً بدون هیچ تغییری درمورد $x \to x_\circ^-$ نیز می‌تواند به‌کار رود و تلفیق این دوحالت، به‌اثبات نتیجه می‌انجامد.

فرض کنید x درسمت راست $x_\circ$ واقع باشد. دراین‌صورت $g'(x) \neq \circ$ و می‌توانیم قضیهٔ مقدار میانگین کوشی را درمورد بازهٔ بستهٔ از $x_\circ$ تا x به‌کار ببریم. دراین‌صورت عددی‌چون c بین $x_\circ$ و x وجود دارد که

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(x)-f(x_\circ)}{g(x)-g(x_\circ)}\,. \qquad (۵)$$

اما $f(x_\circ)=g(x_\circ)=\circ$، و لذا

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(x)}{g(x)}\,. \qquad (۶)$$

وقتی x به $x_\circ$ میل کند، c به $x_\circ$ میل می‌کند زیرا c بین x و $x_\circ$ واقع است. بنابراین

$$\lim_{x\to x_\circ^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to x_\circ^+}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to x_\circ^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

به‌این‌ترتیب، قاعدهٔ هوپیتال درحالتی‌که x از بالا به $x_\circ$ نزدیک می‌شود ثابت می‌گردد. با به‌کاربردن قضیهٔ مقدار میانگین کوشی درمورد بازهٔ بسته $[x, x_\circ]$، $x < x_\circ$، حالتی‌که x از پایین به $x_\circ$ نزدیک می‌شود ثابت می‌گردد.

مسأله‌ها

هرچند اهمیت قضیهٔ مقدار میانگین کوشی مربوط به‌مطلب دیگری است، ولی با حل مسائلی نظیر مسائل زیر می‌توانیم کنجکاوی خود را در مورد یکتابودن عدد c موجود درمعادلهٔ (۲) فرونشانیم.

درمسائل ۱ــ۴ تمام مقادیر c مربوط به‌قضیهٔ مقدار میانگین کوشی راکه در رابطهٔ (۲) صدق می‌کنند بیابید.

۱. $f(x)=x, \quad g(x)=x^۲, \quad [a,b]=[-۲,\circ]$

۲. $f(x)=x, \quad g(x)=x^۲$، $[a,b]$ اختیاری.

۳. $f(x)=\frac{x^۳}{۳}-۴x, \quad g(x)=x^۲, \quad [a,b]=[\circ,۳]$

۴. $f(x)=\sin x, \quad g(x)=\cos x, \quad [a,b]=[\circ,\pi/۲]$

پاسخها

فصل ۱

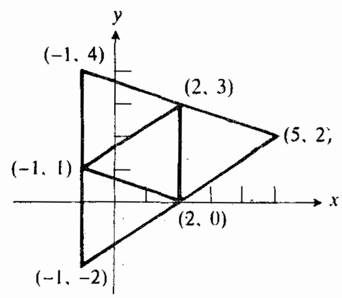
بخش ۱.۱، صفحه‌های ۳ تا ۴

	Q	R	S	T
۱.	(۱,۲)	(−۱,−۲)	(−۱,۲)	(−۲,۱)
۳.	(−۲,−۲)	(۲,۲)	(۲,−۲)	(۲,−۲)
۵.	(۰,−۱)	(۰,۱)	(۰,−۱)	(۱,۰)
۷.	(−۲,۰)	(۲,۰)	(۲,۰)	(۰,−۲)
۹.	(−۱,۳)	(۱,−۳)	(۱,۳)	(−۳,−۱)
۱۱.	$(-\pi,\pi)$	$(\pi,-\pi)$	(π,π)	$(-\pi,-\pi)$
۱۳.	$(x,-y)$	$(-x,y)$	$(-x,-y)$	$(y;x)$

۱۵. مختصات رأس‌چهارم: (۵,۲), (−۱,−۲), (−۱,۴)

۱۷. A(−۱.۲, ۲), B(−۱۲, −۵), C(۹, −۵)

۱۹. ۲



بخش ۲.۱، صفحه‌های ۸ تا ۱۰

۱. $\Delta x=$ ۲, $\Delta y=$ ۱

۳. $\Delta x=$ ۲, $\Delta y=-$ ۴

۵. $\Delta x=-$ ۵, $\Delta y=$ ۰

۷. الف) $\Delta x=$ ۵۷, $\Delta y=-$ ۱۰

ب) $\Delta x=-$ ۲, $\Delta y=-$ ۱۲

پ) $\Delta x=$ ۱, $\Delta y=-$ ۱۴

۹. بالا، راست

۱۱. چپ

۱۳. زیر، راست

۱۵. زیر

۱۷. $m=$ ۳, $m_\perp=-$ ۱/۳

۱۹. $m=-$ ۱/۳, $m_\perp=$ ۳

۲۱. $m=-$ ۱, $m_\perp=$ ۱

۲۳. $m=$ ۰, $m_\perp$ تعریف نمی‌شود

۲۵. $m=-$ ۱, $m_\perp=$ ۱

۲۷. $m=$ ۲, $m_\perp=-$ ۱/۲

۲۵. $m=y/x, \quad m_\perp=-x/y$

۲۷. $y-y_1=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_1)$

۲۹. $3x-y=2$

۳۱. m_{AB} تعریف نمی‌شود، $m_\perp=0$

۳۱. $x-y=-\sqrt{2}$

۳۳. $48.37^\circ \leqslant \alpha \leqslant 17.35^\circ$

۳۳. $5x+y=2.5$

۳۵. ۰٫۸۳۹۱

۳۵. $m=3, \quad (0,5), \quad (-5/3, 0)$

۳۷. فایبرگلاس بهترین عایق (-16 deg/in) و لایهٔ نازک کاری گچ بدترین عایق (-3 deg/in) است.

۳۷. $m=-1, \quad (0,2), \quad (2,0)$

۳۹. الف) غیرهمخط

ب) غیرهمخط

پ) D ،C ،B همخط‌اند

ت) غیرهمخط

ث) D ،C ،B ،A همخط‌اند

۳۹. $m=1/2, \quad (0,-2), \quad (4,0)$

۴۱. $(3,-3)$

۴۱. $m=4/3, \quad (0,-4), \quad (3,0)$

۴۳. $x=-2, \quad y=-9$

۴۳. $m=-4/3, \quad (0,4), \quad (3,0)$

۴۵. $m=3/2, \quad (0,3), \quad (-2,0)$

۴۷. $m=3, \quad (0,-20), \quad (20/3,0)$

۴۹. $m=-b/a, \quad (0,b), \quad (a,0)$

۵۱. $\sqrt{3}x+3y=3$

۵۳. الف) $x-y=1$

ب) $x+y=3$

پ) $3/\sqrt{2}$

۵۵. الف) $x+\sqrt{3}y=0$

ب) $\sqrt{3}x-y=0$

پ) $3/2$

۵۷. الف) $2x+y=-2$

ب) $x-2y=-6$

پ) $6/\sqrt{5}$

۵۹. الف) $2x-y=2$

ب) $x+2y=1$

پ) $4/\sqrt{5}$

۶۱. الف) $x=3$

ب) $y=2$

پ) ۸

۶۳. الف) $x=a$

ب) $y=b$

پ) $|a+1|$

بخش ۱٫۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷

۱. الف) $x=2$

ب) $y=3$

۳. الف) $x=0$

ب) $y=0$

۵. الف) $x=-4$

ب) $y=0$

۷. الف) $x=0$

ب) $y=b$

۹. $x-y=0$

۱۱. $x-y=-2$

۱۳. $2x-y=-b$

۱۵. $3x-2y=0$

۱۷. $x=1$

۱۹. $x=-2$

۲۱. $F_0x+Ty=TF_0$

۲۳. $x=0$

۲۵. $5x+15y=19$

۶۵. الف) $۳y+۴x=۳۴$
ب) $۳x-۴y=-۱۲$
پ) ۲۲/۵

۶۷. ۴۵°

۶۹. ۱۵۰°

۷۱. $۱۱۶٫۶^\circ$

۷۳. $۱۲۶٫۹^\circ$

۷۵. $\sqrt{۳}x-y=\sqrt{۳}-۴$

۷۷. $x=-۲$

۷۹. ۵٫۹۷ atm

۸۱. $s=۰٫۰۰۲۳t+۳۴٫۸۵$

۸۳. ۲۳ ft

بخش ۴.۱، صفحه‌های ۲۶ تا ۲۹

۱. $x \geqslant ۰,\quad y \geqslant ۰$

۳. $x \geqslant ۰,\quad y \leqslant ۰$

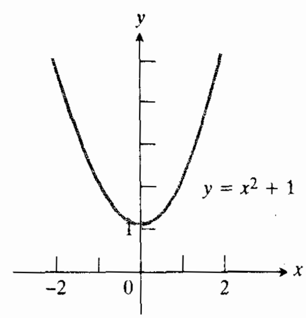
۵. $x \geqslant -۴,\quad y \geqslant ۰$

۷. $x \neq ۲,\quad y \neq ۰$

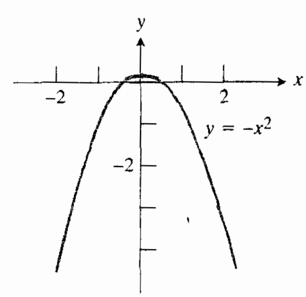
۹. همهٔ xها، $-۲ \leqslant y \leqslant ۲$

۱۱. همهٔ xها، $-۳ \leqslant y \leqslant ۳$

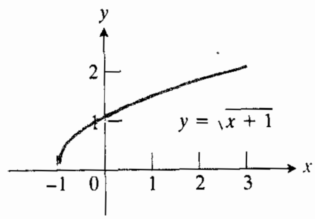
۱۳. همهٔ xها، $y \geqslant ۱$



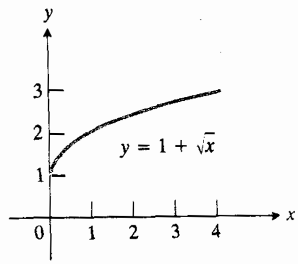
۱۵. همهٔ xها، $y \leqslant ۰$



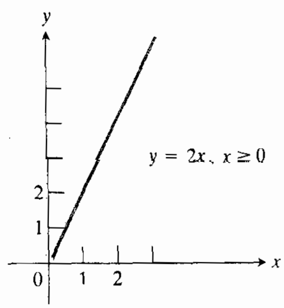
۱۷. $x \geqslant -۱,\quad y \geqslant ۰$



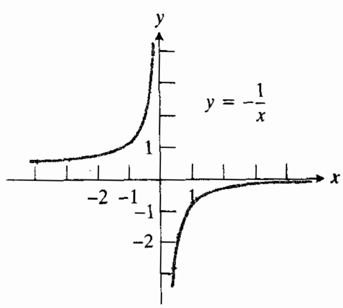
۱۹. $x \geqslant ۰,\quad y \geqslant ۱$



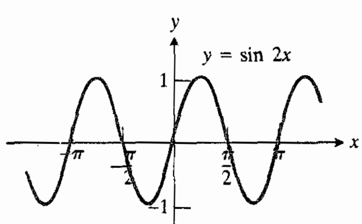
۲۱. $x \geqslant ۰,\quad y \geqslant ۰$



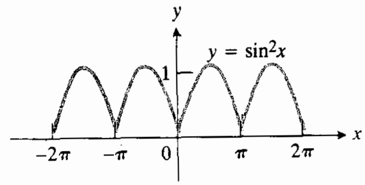
۲۳. $x \neq ۰,\quad y \neq ۰$



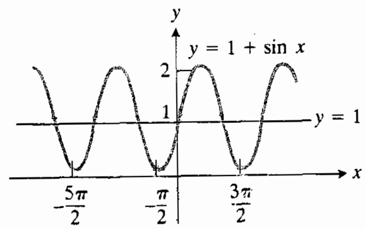
۲۵. همهٔ xها، $-۱ \leqslant y \leqslant ۱$



۲۷. همهٔ xها، $۰ \leqslant y \leqslant ۱$



۲۹.



۳۱. الف) خیر

ب) خیر

پ) $x > ۰$

۳۳. الف) خیر

ب) خیر

پ) خیر

ت) $۰ < x \leqslant ۱$

۳۵. الف) $(x/۲) \neq \pm(\pi/۲),\ \pm(۳\pi/۲), \ldots,$

$\pm((۲n-۱)\pi)/۲$

ب) $x \neq \pm\pi,\ \pm۳\pi, \ldots, \pm(۲n-۱)\pi$

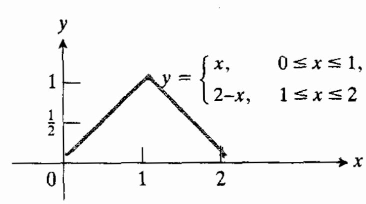
پ) همه مقادیر حقیقی

ت) دامنه، پاسخ قسمت (ب) و برد، پاسخ قسمت (پ) است

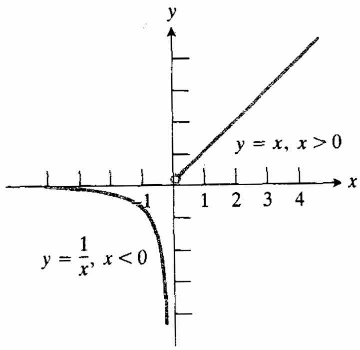
۳۷. i، iii، یا iv نمی‌تواند باشد زیرا $f(۰) \neq ۰$

۳۹.

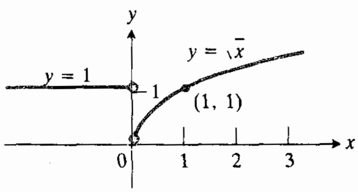
x	y
۰	۰
$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
۱	۱
$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
۲	۰



۴۱.



۴۳.



۴۵. D_f: همهٔ xها، $\quad D_g: x \geqslant ۱;$

$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_{g/f}: x \geqslant ۱;\ D_{f/g}: x > ۱$

۴۷. $D_f: x \geqslant ۰, \quad D_g: x \geqslant -۱;$

$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{fg} = D_{f/g}: x \geqslant ۰;\ D_{g/f}: x > ۰$

۴۹. الف) -۴

ب) ۱۱

پ) ۲

ت) $۱ + (۱/x)$

ث) $۱ + (۱/۲x)$

ج) $۱ + ۵x,\ x \neq ۰$

۵۱. $f(۱-x) = (x/x-۱)$

۵۳. ۴

بخش ۵.۱، صفحه‌های ۳۲ تا ۳۳

۱. ۳

۳. ۵

۵. ± ۲

۷. $-۱/۲, \quad -۹/۲$

۹. $۱۷/۳, \quad -۱/۳$

۱۱. ج

۱۳. پ

۱۵. ب

۱۷. ت

۱۹. الف

۲۱. $-۲<x<۲$

۲۳. $-۱\leqslant x\leqslant ۳$

۲۵. $-۴<x<۲$

۲۷. $-۳/۲<x<-۱/۲$

۲۹. $۰\leqslant x\leqslant ۱$

۳۱. $x\leqslant -۱$ یا $x\geqslant ۱$

۳۳. $|x|<۸$

۳۵. $|x+۲|<۳$

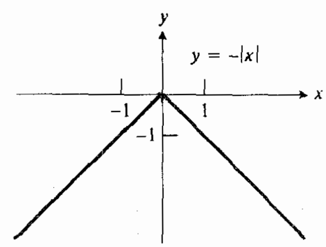
۳۷. $|y|<a$

۳۹. $|y-L|<\epsilon$

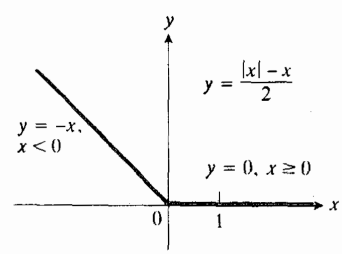
۴۱. $|x-x_۰|<۵$

۴۳. $f(x)=۱-x,\quad x\leqslant ۱\ ;\ f(x)=x-۱,\quad x\geqslant ۱$

۴۵.



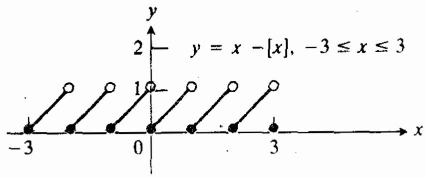
۴۷.



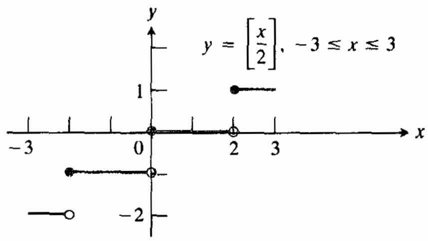
۴۹. دامنهٔ $y=\sqrt{x^۲}$ همهٔ xهاست، اما دامنهٔ $y=(\sqrt{x})^۲$ عبارت است از $x\geqslant ۰$. برد هردو یکی و عبارت است از $y\geqslant ۰$.

۵۱. $g(x)=\sqrt{x}$

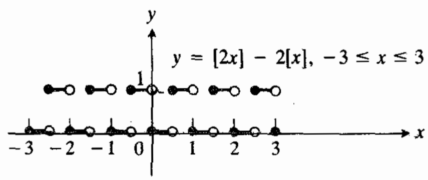
۵۳. الف)



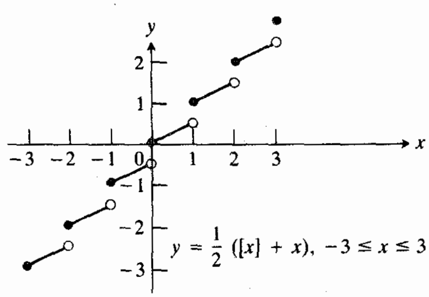
ب)



پ)



ت)



۵۵. وقتی $x<۰$ عددی صحیح نباشد، $[x]$ یك واحد کمتر از قسمت صحیح نمایش اعشاری x است.

بخش ۱.۶، صفحهٔ ۳۸

۱. تقریباً ۳٫۵ مگس در روز

۳. الف) $h^۲-۳$

ب) -۳

پ) $۳x+y=۳$

۵. الف) $۲x$
ب) $۴x-y=۳$
پ) $(۰,۱)$

۷. الف) $-۲x$
ب) $۲x-y=-۵$
پ) $(۰,۴)$

۹. الف) $۲x+۳$
ب) $x-y=-۱$
پ) $(-۳/۲,-۱/۴)$

۱۱. الف) $۲x+۴$
ب) $y=۰$
پ) $(-۲,۰)$

۱۳. الف) $۲x-۴$
ب) $۲x+y=۳$
پ) $(۲,۰)$

۱۵. الف) $۳x^۲$
ب) $۳x-y=۲$
پ) $(۰,۰)$

۱۷. الف) $۳x^۲-۳$
ب) $y=۲$
پ) $(-۱,۲),(۱,-۲)$

۱۹. الف) $۳x^۲-۶x$
ب) $y+۳x=۵$
پ) $(۰,۴),(۲,۰)$

بخش ۱.۷، صفحه‌های ۴۳ تا ۴۵

۱. $f'(x)=۲x, \quad m=۶, \quad ۶x-y=۹$

۳. $f'(x)=۲, \quad m=۲, \quad ۲x-y=-۳$

۵. $f'(x)=۱/(۲\sqrt{x}), \quad m=۱/(۲\sqrt{۳})$
$x-۲\sqrt{۳}y=-(۳+۲\sqrt{۳})$

۷. $f'(x)=-۲/(۲x+۱)^۲, \quad m=-۲/۴۹$
$۲x+۴۹y=۱۳$

۹. $f'(x)=۲x-۱, \quad m=۱۱, \quad ۱۱x-y=۱۳$

۱۱. $f'(x)=۴x^۳, \quad m=۱۰۸, \quad ۱۰۸x-y=۲۴۳$

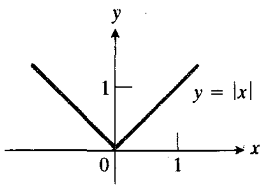
۱۳. $f'(x)=۱+(۱/x^۲), m=۱۰/۹, ۱۰x-۹y=۶$

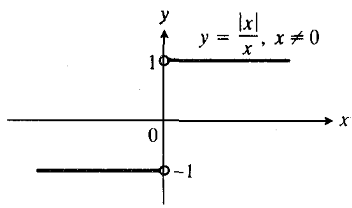
۱۵. $f'(x)=۱/\sqrt{۲x}, \ m=۱/\sqrt{۶}, \ x-\sqrt{۶}y=-۳$

۱۷. $f'(x)=۱/\sqrt{۲x+۳}, \ m=۱/۳, \ x-۳y=-۶$

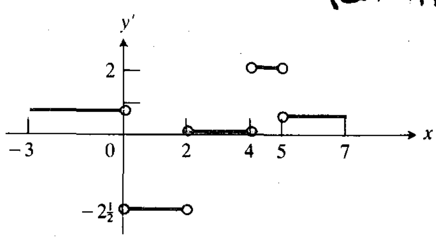
۱۹. $f'(x)=-۱/(۲x+۳)^{۳/۲}, \quad m=-۱/۲۷$
$x+۲۷y=۱۲$

۲۱. مشتق $f(x)=|x|$ برابر است با $f'(x)=|x|/x$، $x\neq ۰$





۲۳. الف)



ب) $۰,۲,۴,۵$

۲۵. ۰

۲۷. روباه در روز

بخش ۱.۸، صفحه‌های ۴۸ تا ۵۰

۳. الف) $v_{av}=۱٫۶ \quad \Delta s=۳٫۲,$
ب) $v(t)=۱٫۶t$
پ) $v(۲)=۳٫۲$

۵. الف) $v_{av}=۹ \quad \Delta s=۱۸,$
ب) $v(t)=۴t+۵$
پ) $v(۲)=۱۳$

۷. الف) $v_{av}=-۴ \quad \Delta s=-۸,$
ب) $v(t)=-۲t-۲$
پ) $v(۲)=-۶$

۰۹. الف) $\Delta s=۸,\quad v_{av}=۴$
ب) $v(t)=۴$
پ) $v(۲)=۴$

۱۱. الف) $s=۴۹۰t^{۲},\quad v=۹۸۰t$
ب) ۴/۷ sec, $v_{av}=۲۸۰$ cm/sec
پ) حدود ۰ر۳۴ ثانیه

۱۳. الف) ۳۲ ft/sec
ب) −۱۶ ft/sec
پ) ۰ ft/sec

۱۵. ۱۹۰ ft/sec

۱۷. $t=۸$ sec ; $v=۰$

۱۹. ۲ر۸ sec

۲۱. $dQ/dt=۸۰۰۰$ gal/min
$\Delta Q/\Delta t=۱۰۰۰۰$ gal/min

۲۳. الف) ۹۰دلار برای هر ماشین
ب) ۸۰ دلار برای هر ماشین
پ) $f(۱۰۱)-f(۱۰۰)=۱۱۰۸۰-۱۱۰۰۰=۸۰$

بخش ۱.۹، صفحه‌های ۵۹ تا ۶۳

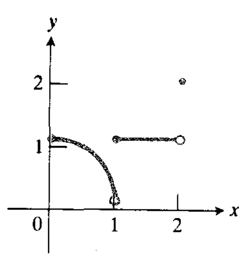
۰۱. ۴
۰۳. ۴
۰۵. ۲
۰۷. ۲۵
۰۹. ۱
۱۱. $۲x$
۱۳. ۰
۱۵. −۵
۱۷. ۱۸
۱۹. ۳۶
۲۱. ۲
۲۳. ۴
۲۵. ۱

۲۷. الف) −۱۰
ب) −۲۰

۲۹. الف) ۴
ب) −۲۱
پ) −۱۲
ت) −۷/۳

۳۱. ۵/۴
۳۳. ۰
۳۵. وجود ندارد
۳۷. −۱/۲
۳۹. −۱
۴۱. ۱/۳
۴۳. −۱/۲
۴۵. ۰
۴۷. ۳/۴
۴۹. −۳
۵۱. $۳/۴a$
۵۳. $f(x)=۱/x,\quad g(x)=-۱/x$
۵۵. $f(x)=۱/x,\quad g(x)=۱/x^{۲}$
۵۷. $f(x)=|x-۱|$

۵۹. الف) درهمهٔ c ها به استثنای ۰، ۱ و ۲
ب) $c=۲$
پ) $c=۰$



۶۱. ۰
۶۳. ۰
۶۵. ۱
۶۷. ۶

۶۹. به‌ازای همهٔ cهای غیرصحیح

۷۱. ۱

۷۳. ۱

۷۵. ۱

۷۷. ۰

۷۹. ۰

۸۱. −۱

۸۳. ۲

۸۵. ۲/۳

۸۹. الف) $L=5$، هر $\delta\leqslant\epsilon/2$
ب) $L=-1$، هر $\delta\leqslant\epsilon/2$
پ) $L=-1$، هر $\delta\leqslant\epsilon/3$
ت) $L=7$، هر $\delta>0$
ث) $L=4$، هر $\delta\leqslant\epsilon$
ج) $L=6$، هر $\delta\leqslant\epsilon$
چ) $L=-5$، هر $\delta\leqslant 2\epsilon/3$
ح) $L=2$، هر δ نابزرگتراز مینیمم $(1, \epsilon/2)$
خ) $L=-1/9$، هر δ نابزرگتر از مینیمم $(1, 18\epsilon)$

۹۱. الف) $\delta\leqslant 1/80$
ب) $\delta\leqslant 1/800$
پ) مینیمم $(1, \epsilon/8)\geqslant\delta$

۹۳. $f'(0)=0$

بخش ۱۰.۱، صفحه‌های ۶۷ تا ۶۹

۱. ۲/۵

۳. ۰

۵. ۰

۷. ۱/۲

۹. ۱

۱۱. ∞

۱۳. ۱

۱۵. ۳/۱۰

۱۷. ۱

۱۹. ۲

۲۱. ۱

۲۳. ۰

۲۵. −۲/۳

۲۷. ۱

۲۹. ۰

۳۱. ۲

۳۳. ∞

۳۵. ∞

۳۷. ۴

۳۹. ∞

۴۱. $-\infty$

۴۳. ∞

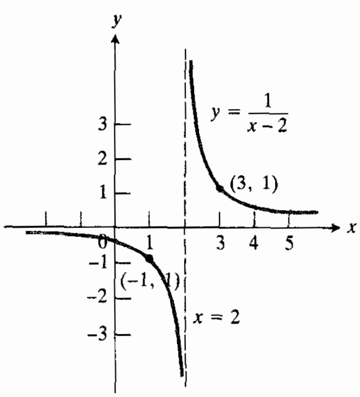
۴۵. ۰

۴۷. $-\infty$

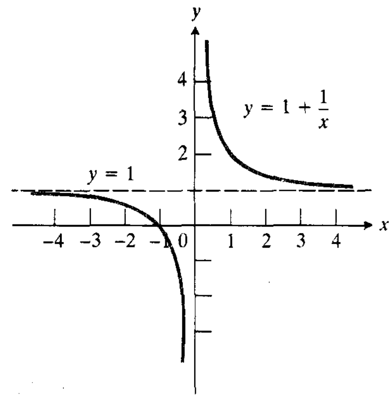
۴۹. −۷

۵۱. الف) −۱/۵
ب) ۰
پ) −۱/۳

۵۳.



۵۵.



۵۷. ۲

بخش ۱۱۰۱، صفحه‌های ۷۶ تا ۷۸

۱. الف) آری

ب) آری

پ) آری

ت) آری

۳. الف) خیر

ب) خیر

۵. الف) ۰

ب) ۰

۷. همهٔ xها بجز ۰، ۱

۹. همهٔ xهای دامنه بجز ۱، ۲

۱۱. همهٔ xها بجز ۱−، ۰، ۱

۱۳. $x=-۲$

۱۵. $x=۱, ۳$

۱۷. $x=-۲, ۵$

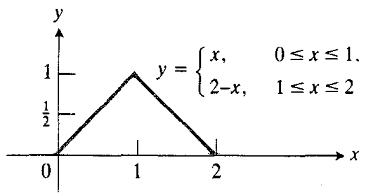
۱۹. چنین نقطه‌ای وجود ندارد

۲۱. $x=۰$

۲۳. ۶

۲۵. ۳/۲

۲۷. الف)



ب) آری

پ) خیر

۲۹. ۴/۳

۳۱. ۱

۳۳. ۰

۳۵. ماکسیمم ۱ و مینیمم ۰ است.

۳۷. ماکسیمم ندارد و مینیمم ۰ است؛ زیرا بازه باز است.

۳۹. بنا به‌قضیهٔ مقدار میانگین از $f(۰)<۰<f(۱)$ نتیجه می‌گیریم که xی وجود دارد به‌قسمی که $f(x)=۰$.

مساله‌های گوناگون، فصل ۱، صفحه‌های ۷۹ تا ۸۴

۱. $A(u-h, v-k)$

۵. الف) $۲x+۳y=-۷$

ب) $\sqrt{۱۳}$

۷. $x=۰;\quad ۳x+۴y=۰$

۹. الف) $-A/B$

ب) C/B

پ) C/A

ت) $Bx-Ay=۰$

۱۳. ۴ دایره:

$C(-۱-\sqrt{۵}, ۱),\ r=(\sqrt{۲}+\sqrt{۱۰})/۲$

$C(۰, -۲-\sqrt{۵}),\ r=(۳\sqrt{۲}+\sqrt{۱۰})/۲$

$C(۰, -۲+\sqrt{۵}),\ r=(۳\sqrt{۲}-\sqrt{۱۰})/۲$

$C(\sqrt{۵}-۱, ۱),\ r=(\sqrt{۱۰}-\sqrt{۲})/۲$

۱۵. اگر $L_۱ \nparallel L_۲$، همهٔ خطوط ازنقطهٔ تقاطع $L_۱$ و $L_۲$ می‌گذرند؛ اگر $L_۱ \parallel L_۲$، همهٔ خطوط موازی $L_۱$ و $L_۲$اند.

۱۷. ۲ خط: $x+۵y=۱۰\sqrt{۲}$، $x+۵y=-۱۰\sqrt{۲}$

۱۹. $A=\pi r^۲;\quad C=۲\pi r;\quad A=C^۲/۴\pi$

۲۱. $x \neq -۱;\quad y \neq ۰$

۲۳. $x \geqslant ۰;\quad ۰ < y \leqslant ۱$

۲۵. $ad + b = bc + d$

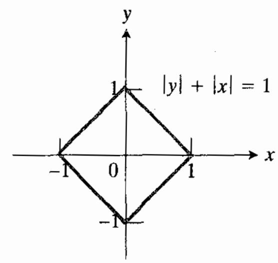
۲۷. الف) $۱/(۱-x)$

ب) $x/(x+۱)$

پ) x

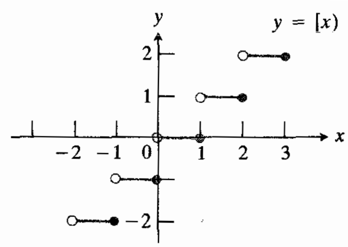
ت) $۱-x$

۲۹.

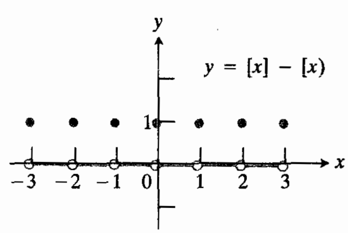


۳۱. $m(a,b) = (a+b)/۲ - |a-b|/۲$

۳۳. الف)



ب)



۳۵. الف) $۲/(x+۱)^{۲}$

ب) $(۳/۲)x^{۱/۲}$

پ) $-۱/(۳x^{۲/۳})$

۳۷. الف) ۶

ب) $(۰, ۲)$

۳۹. $dy/dx = ۱۸۰ - ۳۲x;\quad (۴۵/۸, ۲۰۲۵/۴)$

۴۱. $t = ۱,\quad s = ۱۶$

۴۳. ۰

۴۵. ۰

۴۷. $۱/۳$

۴۹. $۲a$

۵۱. $۲x$

۵۳. $-۱/x^{۲}$

۵۵. $۱/۲$

۵۷. وجود ندارد

۵۹. ۱

۶۱. -۱

۶۳. ۰

۶۵. ۰

۶۷. الف) ۰

ب) $-۱/۳$

پ) $f(-۱/x) = (-x^{۲} - x)/(۵x^{۲} + ۷x + ۲)$
$x \neq ۰;\quad f(۰) = -۱/۵;\quad ۱/f(x) = ۲x - ۵$
$x \neq ۱,\quad ۵/۲$

۶۹. الف) ۰

ب) $۱/۲$

۷۱. $M = ۱ + (۱/\epsilon)$

۷۵. خیر

۷۷. همهٔ xهای صحیح و $۰ < x < ۱$

۷۹. هر $\delta \leqslant \epsilon$

فصل ۲

بخش ۱.۲، صفحه‌های ۹۰ تا ۹۱

۱. $y' = ۱,\quad y'' = ۰$

۳. $y' = ۲x,\quad y'' = ۲$

۵. $y' = -۲x,\quad y'' = -۲$

۷. $y'=۲,\quad y''=۰$

۹. $y'=x^۲+x+۱,\quad y''=۲x+۱$

۱۱. $v=۳۲t,\quad a=۳۲$

۱۳. $v=۳۲t-۶۰,\quad a=۳۲$

۱۵. $v=gt+v_۰,\quad a=g$

۱۷. $y'=۱۵x^۲-۱۵x^۴,\quad y''=۳۰x-۶۰x^۳$

۱۹. $y'=x^۳-x^۲+x-۱,\quad y''=۳x^۲-۲x+۱$

۲۱. $y'=۲x^۳-۳x-۱,\quad y''=۶x^۲-۳$

۲۳. $y'=۵x^۴-۲x,\quad y''=۲۰x^۳-۲$

۲۵. $y'=۱۲x+۱۳,\quad y''=۱۲$

۲۷. پ

۲۹. $x+۹y=۲۹$

۳۱. $y=۴x-۲$ ؛ $y=۴x+۲$ ؛ کوچکترین شیب در $x=۰$ و برابر با ۱ است

۳۳. $(۰,۱۶)$ و $(-۴/۳,۰)$

۳۵. $a=۱,\quad b=۱,\quad c=۰$

۳۷. مریخ: حدود ۴۶ر۴ ثانیه؛ مشتری: حدود ۷۳ر۰ ثانیه

۳۹. حدود ۳۹ر۲۹ متر

۴۱. $a(۳)=۱۰,\quad a(-۱/۳)=-۱۰$

۴۳. $t=x_۱(۱-(۱/n))$ ؛ خطی از نقطه مفروض و $(t,۰)$ بگذرانید

بخش ۲.۲، صفحه‌های ۹۶ تا ۹۸

۱. $x^۲-x+۱$

۳. $۱۰x(x^۲+۱)^۴$

۵. $-۲(x+۱)(x^۲+۱)^{-۴}(۲x^۲+۳x-۱)$

۷. $-۱۹/(۳x-۲)^۲$

۹. $(۱+x^۲)^{-۲}(x^۲-۲x-۱)$

۱۱. $-۴۰/(۲x-۳)^۵$

۱۳. $۴x-۱۴$

۱۵. $۴۵(۲x-۱)^۲(x+۷)^{-۴}$

۱۷. $-۳۰(۲x^۳-۳x^۲+۶x)^{-۶}(x^۲-x+۱)$

۱۹. $۲x^{-۲}-۲x^{-۳}$

۲۱. $-۱۲x^{-۲}+۱۲x^{-۴}-۱۲x^{-۵}$

۲۳. $(x+۲)^{-۲}$

۲۵. $(۱-t^۲)/(t^۲+۱)^۲$

۲۷. $(۲-۴t)/(t^۲-t)^۳$

۲۹. $(۲-۶t^۲)/(۳t^۲+۱)^۲$

۳۱. $۳(t^۲+۳t)^۲(۲t+۳)$

۳۳. الف) ۱۳
ب) -۷
پ) ۷/۲۵
ت) ۲۰
ث) -۲۲۵
ج) -۳۰

۳۵. $۴y-۳x=۴$

۳۷. $۸(۳-۲x)^{-۳}$

۳۹. $۳x^۲-۱$

۴۱. $-۸x+۴x^۳$

۴۳. ۰ر۰۹y

۴۵. الف) $dP/dt=(a^۲k)/(akt+۱)^۲$
ب) $t=۰,\quad dP/dt=a^۲k$

بخش ۳.۲، صفحه‌های ۱۰۳ تا ۱۰۴

۱. $-x/y$

۳. $(۲x-y)/x$

۵. $۳x^۲/۲y$

۷. $-\sqrt{y/x}$

۹. $(۱-۲xy-۳x^۲)/(x^۲+۱)$؛ نیز $(y/x)-(x+y)^۲$

۱۱. $(۲x^۲+۱)/\sqrt{x^۲+۱}$

۱۳. $(۱-۲y)/(۲x+۲y-۱)$

۱۵. $۲x/[y(x^۲+۱)^۲]$

۱۷. $[۵(۳x+۷)^۴]/۲y^۲$

۱۹. $(-y/x)^۲$

۲۱. $(۲x-۱)/۲y$

۲۳. $-(x^۲+۹)/[۳x^۲(x^۲+۳)^{۲/۳}]$

۲۵. $(۶y-x^۲)/(y^۲-۶x)$

۲۷. $-(۲/۵)(۲x+۵)^{-۶/۵}$

۲۹. $-(۱/۴)(x-x^{۳/۲})^{-۱/۲}$

۳۱. $(-۴,۰)$ و $(۰,۱)$

۳۳. $(۲/۳)a^{-۱/۳}$؛ برای اینکه db/da وجود داشته باشد باید $a\neq ۰$

۳۵. $-x/y;\quad -۱/y^۳$

۳۷. $-(y/x)^{۱/۳};\quad (۱/۳)x^{-۴/۳}y^{-۱/۳}$

۳۹. $(y+۱)^{-۱};\quad -(y+۱)^{-۳}$

۴۱. $(۱+y^{-۱/۲})^{-۱};\quad (۱/۲)(\sqrt{y}+۱)^{-۳}$

۴۳. الف) $۴y-۷x=-۲$
ب) $۷y+۴x=۲۹$

۴۵. الف) $y-۳x=۶$
ب) $۳y+x=۸$

۴۷. الف) $y+x=-۱$
ب) $y-x=۳$

۴۹. $y+۲x=۳,\quad y+۲x=-۳$

۵۱. $(-۱۳/۴,\ ۱۷/۱۶)$

۵۳. $(\pm\sqrt{۷},۰),\quad m=-۲$

۵۵. $v=۲/۵\ \mathrm{m/sec};\quad a=-۴/۱۲۵\ \mathrm{m/sec^۲}$

بخش ۴-۲، صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۲

۱. ۱٫۰۴؛ $۴x-۳$

۳. ۰٫۴۷۵؛ $-(۱/۴)x+۱$

۵. ۰٫۲؛ $۲x-۲$

۷. ۶؛ $۱۰x-۱۳$

۹. ۲٫۰۲۵؛ $(۱/۴)x+۱$

۱۱. ۵٫۱۶؛ $-(۴/۵)x+۹/۵$

۱۳. $۱+۲x$

۱۵. $۱-۵x$

۱۷. $۲+۸x$

۱۹. $۲+x$

۲۱. $۱-x$

۲۳. الف) ۱٫۰۲
ب) ۱٫۰۰۳
پ) ۱٫۰۰۱

۲۵. الف) ۰٫۲۱
ب) ۰٫۲
پ) ۰٫۰۱

۲۷. الف) ۰٫۲۳۱
ب) ۰٫۲
پ) ۰٫۰۳۱

۲۹. الف) $-۰٫\overline{۳}$
ب) $-۰٫۴$
پ) $۰٫۰\overline{۶}$

۳۱. $۴\pi r^۲\,dr$

۳۳. $۳x^۲\,dx$

۳۵. $۲\pi hr\,dr$

۳۷. $(۲/۳)\pi hr\,dr$

۳۹. الف) $۰٫۰۸\pi$
ب) ٪۲

۴۱. ٪۳

۴۳. کمتر از ٪۱ خطا

۴۵. کمتر از ٪۱/۳

۴۷. کمتر از ٪۱

۴۹. کمتر از ٪۰٫۰۵

۵۳. ب) $x=۰٫۰۴,\quad ۱+(۱/۲)x,\quad ۲+۲x$
پ) $f(۰٫۰۴)\approx ۰٫۰۰۳$

۵۵. ۱۲٪ سرعت نور

بخش ۲.۵، صفحه‌های ۱۱۶ تا ۱۱۷

۱. $۸t - ۲۰$

۳. $-t^{۲}$

۵. $-۱/۹$

۷. $-t^{-۲}(۲t^{-۱}+۲)^{-۱/۲}$

۹. $۸t+۱۰$

۱۱. $۱۸x+(۱/۳x^{۲})$

۱۳. $(۱۶t^{۲}-۲۰t+۱)^{-۱/۲}(۱۶t-۱۰)$

۱۵. $(۱-۲v)/[v^{۲}(v-۱)^{۲}]$

۱۷. $۲۴t$

۱۹. $-(۱/۴t^{۲})$

۲۱. ۱

۲۳. $\sqrt{۲}/۴$

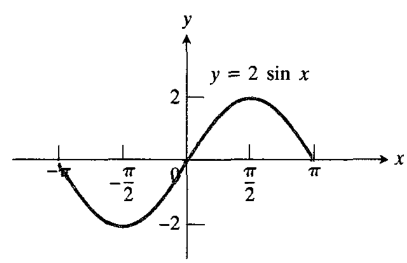
۲۵. ۰

۲۷. $dv/dt=(۱/۲)k^{۲}$

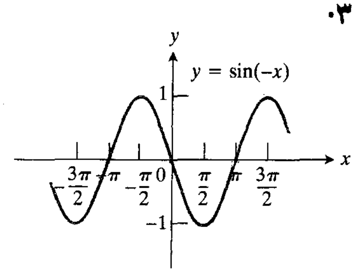
۲۹. $kT/۲$

بخش ۲.۶، صفحه‌های ۱۲۳ تا ۱۲۴

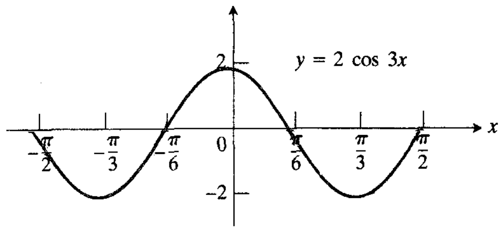
۱.



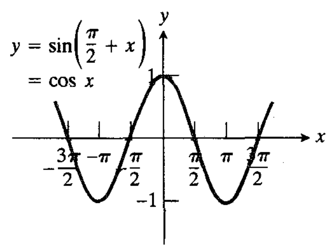
۳.



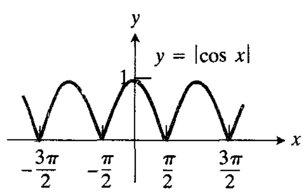
۵.



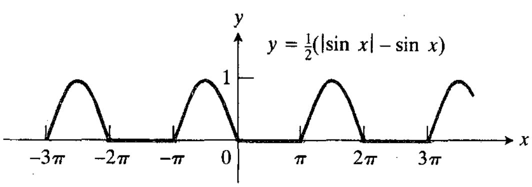
۷.



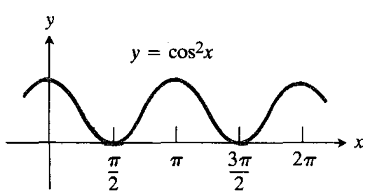
۹.



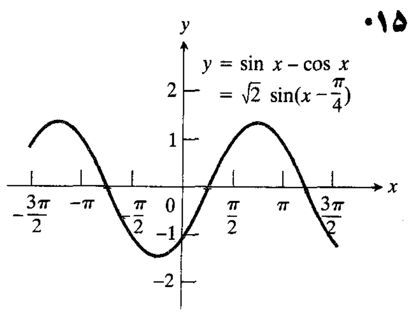
۱۱.



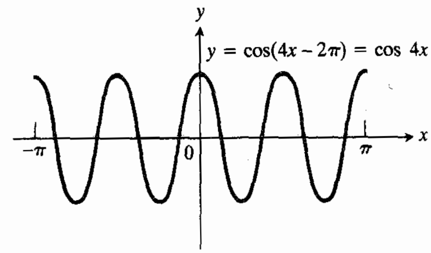
۱۳.



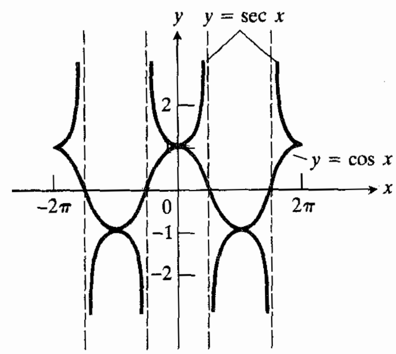
۱۵.



۱۷.



۱۹.



۲۱. الف) ۳۷

ب) ۳۶۵

پ) ۱۰۱

ت) ۲۵

۲۳. ۰

۲۵. ۰

۲۷. $\cos^۲ A+\sin^۲ A=۱$

بخش ۲.۷، صفحه‌های ۱۲۸ تا ۱۳۰

۱. $\cos(x+۱)$

۳. $\frac{۱}{۲}\cos(x/۲)$

۵. $-۵\sin ۵x$

۷. $-۲\sin ۲x$

۹. $۳\cos(۳x+۴)$

۱۱. $x\cos x+\sin x$

۱۳. $x\cos x$

۱۵. $\tan x\sec x$

۱۷. $\tan(x-۱)\sec(x-۱)$

۱۹. $-\tan(۱-x)\sec(۱-x)$

۲۱. $۲\sec^۲ ۲x$

۲۳. $۲\sin x\cos x=\sin ۲x$

۲۵. $-۱۰\sin ۵x\cos ۵x=-۵\sin ۱۰x$

۲۷. $۵\sec^۲(۵x-۱)$

۲۹. $۲\cos ۲x$

۳۱. $(-\sin ۲x)/\sqrt{۲+\cos ۲x}=(-\sin ۲x)/y$

۳۳. $-(\sin\sqrt{x})/۲\sqrt{x}$

۳۵. $y=\sqrt{\cos^۲ x}=|\cos x|$. بنابراین اگر $\cos x>۰$، $y'=-\sin x$ و اگر $\cos x<۰$، $y'=-\sin x$؛ یا $y'=(-\sin ۲x)/\sqrt{۲(۱+\cos ۲x)}$. توجه کنید که در هر حال به‌ازای $x=(۲k+۱)(\pi/۲)$، k صحیح، y' وجود ندارد.

۳۷. $\cos^۲ y$

۳۹. $(-\sin ۸x)/y$

۴۱. $-(۱/x)[y+\cos^۲(xy)]$

۴۳. $y=۲x$

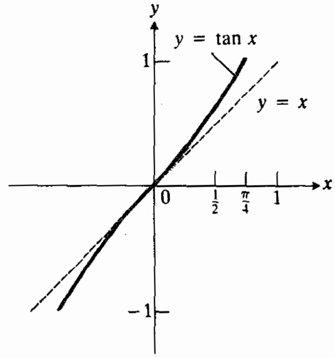
۴۵. ۱

۴۷. ۱

۴۹. ۱

۵۱. $-\sin a$

۵۳.



۵۵. $b=۱$؛ f در $x=۰$ پیوسته‌است، اما $f'(۰)$ وجود ندارد.

۵۷. $۱+(۳/۲)x$؛ مجموعشان است

بخش ۸.۲، صفحه‌های ۱۳۳ تا ۱۳۴

۱. $x^۲+y^۲=۱$؛ از $(۱,۰)$ شروع و پس از پیمودن مسیر در خلاف جهت ساعت به‌همین نقطه منتهی می‌شود.

۳. نظیر مسألهٔ ۱

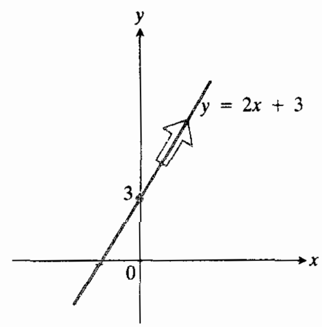
۵. $x^۲+y^۲=۹$؛ از $(۳,۰)$ شروع و به همین نقطه منتهی می‌شود، حرکت درخلاف جهت ساعت‌است.

۷. $x+y=۱$؛ از $P(۱,۰)$ تا $Q(۰,۱)$

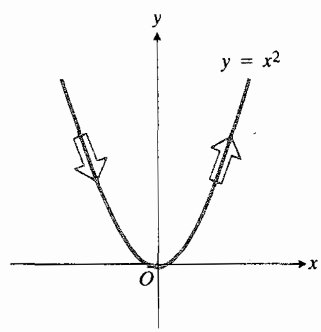
۹. الف) $x=۲\cos t,\quad y=-۲\sin t,\quad ۰\leqslant t\leqslant ۲\pi$

ب) $x=۲\cos t,\quad y=۲\sin t,\quad ۰\leqslant t\leqslant ۲\pi$

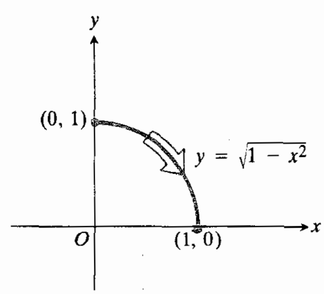
۱۱.



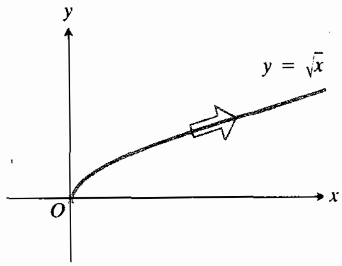
۱۳.



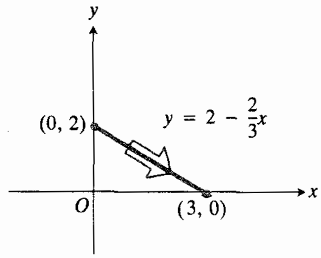
۱۵.



۱۷.



۱۹.



۲۱. $y=۱+(x/۲);\quad dy/dt=۱,\quad dx/dt=۲$

$dy/dx=۱/۲$

۲۳. $x^۲+y^۲=۲۵;\quad dy/dt=۵\cos t$

$dx/dt=-۵\sin t,\ dy/dx=-x/y=-\cot t$

۲۵. $y=\cos x;\quad dy/dt=۲t\cos(t^۲),\quad dx/dt=۲t$

$dy/dx=\cos[(\pi/۲)+x]=-\sin x$

۲۷. $x^۲+(y-۱)^۲=۱;\quad dy/dt=\cos t$

$dx/dt=-\sin t$

$dy/dx=-x/(y-۱)=-\cos t/\sin t$

۲۹. پ

۳۱. الف) $۵/۳$

ب) $۳y-۵x=-۸$

۳۳. الف) $۱/۱۱$

ب) $۱۱y-x=۱۶$

۳۵. الف) -۲

ب) $۲y+۴x=۹$

۳۷. ۲

۳۹. -۳

۴۱. ۰

۴۳. $-(۱/۴)t^{-۳/۲}$

۴۵. $۲t^{-۳}$

۴۷. $-۱/\sin^{۳}t$

۴۹. $-۱/۲۰۰$

۵۱. ۳

بخش ۹.۲، صفحه‌های ۱۳۸ تا ۱۳۹

۱. ۰٫۶۱۸

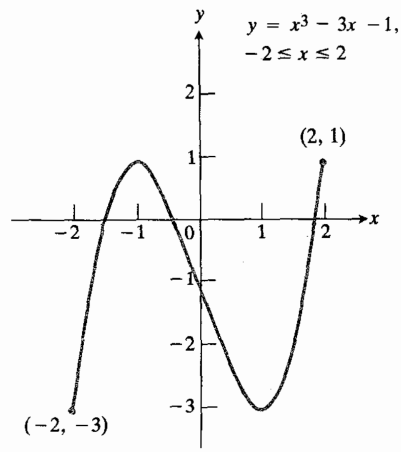
۳. ۱٫۱۶۴

۵. $-۱٫۱۸۹$

۷. همگی برابر با $x_{۰}$اند.

۹. ۱٫۱۷۹۵۰۹

۱۱. ب)



پ) ۱٫۸۷۹۳۹

ت) $-۱٫۵۳۲۰۹,\quad -۰٫۳۴۷۳۰$

۱۳. ۰٫۷۳۹۰۹

۱۵. ۲٫۵۷۳۲۷۲، ۰٫۶۳۰۱۱۵

بخش ۱۰.۲، صفحه‌های ۱۳۹ تا ۱۴۰

۱. $(۳x^{۲}-۳)\,dx$

۳. $[(۱-۲x^{۲})/\sqrt{۱-x^{۲}}]\,dx$

۵. $[(۱-y)/(۱+x)]\,dx$

۷. $۵\cos ۵x\,dx$

۹. $۲\sec^{۲}(x/۲)\,dx$

۱۱. $\csc[۱-(x/۳)]\cot[۱-(x/۳)]\,dx$

۱۳. $dx=dt,\quad dy=(۱+t)\,dt,\quad dy/dx=۱+t$

۱۵. $dx=-\sin t\,dt,\quad dy=\cos t\,dt$

$dy/dx=-\cot t$

مسأله‌های گوناگون، فصل ۲، صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۷

۱. $-۴(x^{۲}-۴)^{-۳/۲}$

۳. $-y/(x+۲y)$

۵. $-(۲xy+y^{۲})/(۲xy+x^{۲})$

۷. $۲\sin(۱-۲x)$

۹. $(x+۱)^{-۲}$

۱۱. $(۳x^{۳}-۲xa^{۲})/\sqrt{x^{۲}-a^{۲}}$

۱۳. $۲x/(۱-x^{۲})^{۲}$

۱۵. $۱۰\sec^{۲}۵x\tan ۵x$

۱۷. $[(۴x+۵)\sqrt{۲x^{۲}+۵x}]/۲$

۱۹. $(-۲y^{۲}\sqrt{xy}-y)/(۴xy\sqrt{xy}+x)$

۲۱. $-\sqrt[۳]{y/x}$

۲۳. $-y/x$

۲۵. $-(x+۲y+y^{۲})/(۲x+۴y+۲xy)$

۲۷. $۱/[۲y(x+۱)^{۲}]$

۲۹. $-(y+۲)/(x+۳)$

۳۱. $(y-۳x^{۲})/(۳y^{۲}-x)$

۳۳. $(۱+x)^{-۱/۲}(۱-x)^{-۳/۲}$

۳۵. $x^{۲}(x^{۳}+۱)^{-۲/۳}$

۳۷. $-۲\csc^{۲}۲x$

۳۹. $(\cos^{۲}x+۲\sin^{۲}x)/\cos^{۳}x$

۴۱. $-۸x^{۲}\sin ۸x+۲x\cos ۸x$

۴۳. $(۱+\cos x)^{-۱}$

۴۵. $-\csc x\cot x$

۴۷. $-\sin ۲x\sin(\sin^{۲}x)$

۴۹. $۲\sec^{۲}x\tan x$

۵۱. $-۳\sin ۶x\sin(\sin^{۲}۳x)$

۵۳. $۲(۱+t)/\sqrt{۲t+t^{۲}}$

نیز $(۴x+۸)/\sqrt{۴x^{۲}+۱۶x+۱۵}$

۵۵. $۲x+[۲x(۱-x^{۲})]/(۱+x^{۲})^{۳}$

۵۷. $۳t^{۲}/(۲t+۱)$

نیز $[۳(y+۱)^{۲/۳}]/[۲(y+۱)^{۱/۳}+۱]$

۵۹. $۱, y=x$

۶۱. $۲, y-۲x=-۵$

۶۳. $\pi(۲۰x-x^{۲})$

۶۵. ۵۶ ft/sec

۶۷. $-۱۲+۱۸x,\quad f(x)=(۲-۳x)^{۲}$

۶۹. $-۸/۵$

۷۱. $-۳/۳۲$

۷۳. $x+y=۳$

۷۵. الف) $۳(۲x-۱)^{-۵/۲}$

ب) $-۱۶۲(۳x+۲)^{-۴}$

پ) $۶a$

۷۹. $h+۲k=۵;\quad h=-۴,\quad k=۹/۲,\quad r=۵\sqrt{۵}/۲$

۸۱. $۵y+۸x=۱۸;\quad ۵y-۳x=-۱۸$

۸۳. ۳ ft

۸۵. $dy=۰٫۹,\quad \Delta y=۰٫۹۲$

۸۷. ۳۰

۸۹. $۲/[۳\sqrt{x^{۲}+x}(۲x+۱)(۲y+۱)]$

۹۱. $[۳/(x+۱)^{۲}]\sin[(۲x-۱)/(x+۱)]^{۲}$

۹۳. $dy/dt=[-x(x-۱)^{۲}]/\sqrt{x^{۲}+۱۶};\quad -۱۲/۵$

۹۵. $(\sin z+\sin y+xy\cos y\cos z$
$-۲y^{۲}\cos z)/[\sin y(\sin z+\sin y)]$

۹۹. طول ضلع برابر است با $۲r\sin(\pi/n)$؛ $۲\pi r$؛ آری

۱۰۱. $-۲\cos ۲t;\ -۲$

۱۰۳. $۲, -۲$

۱۰۹. همهٔ مقادیر m و b به‌قسمی که $m=-b/\pi$؛ $m=-۱$، $b=\pi$

۱۱۱. ب) $۲x\sin(۱/x)-\cos(۱/x)$

پ) خیر، $\lim_{x\to ۰}\cos(۱/x)$ وجود ندارد

فصل ۳

بخش ۱.۳، صفحه‌های ۱۵۲ تا ۱۵۳

۱. $y'=۲x-۱$، بر $(-\infty,۱/۲)$ نزولی و بر $(۱/۲,\infty)$ صعودی است؛ $y(۱/۲)=۳/۴$ مینیمم است.

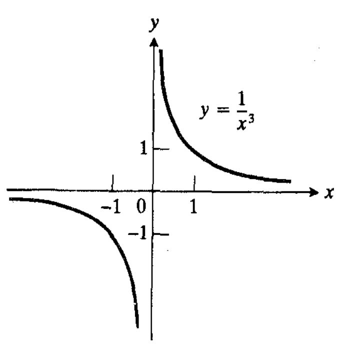
۳. $y'=x^{۲}-x-۲$، بر $(-\infty,-۱)\cup(۲,\infty)$ صعودی و بر $(-۱,۲)$ نزولی است؛ $y(-۱)=۳/۲$ ماکسیمم موضعی است. $y(۲)=-۳$ مینیمم موضعی است.

۵. $y'=۳x^{۲}-۲۷$، بر $(-\infty,-۳)\cup(۳,\infty)$ صعودی و بر $(-۳,۳)$ نزولی است؛ $y(-۳)=۹۰$ ماکسیمم موضعی است، $y(۳)=-۱۸$ مینیمم موضعی است.

۷. $y'=۶x-۶x^{۲}$، بر $(-\infty,۰)\cup(۱,\infty)$ نزولی و بر $(۰,۱)$ صعودی است؛ $y(۰)=۰$ مینیمم موضعی، $y(۱)=۱$ ماکسیمم موضعی است.

۹. $y'=۴x^{۳}$، بر $(-\infty,۰)$ نزولی و بر $(۰,\infty)$ صعودی است؛ $y(۰)=۰$ مینیمم است.

۱۱. $y'=-۳x^{-۴}$، بر همهٔ xهای مخالف صفر نزولی، مقادیر اکسترمم ندارد.



۱۳. $y'=-۲(x+۱)^{-۳}$، بر $(-\infty,-۱)$ صعودی و بر $(-۱,\infty)$ نزولی است، مقادیر اکسترمم ندارد.

پ) ۱٫۹۰

بخش ۲.۳، صفحه‌های ۱۵۶ تا ۱۵۸

۰۱. الف) $(۲, \infty)$

ب) $(-\infty, ۲)$

پ) هربازه‌ای

ت) وجودندارد. مینیمم در $(۲, -۱)$، نقطهٔ عطف ندارد.

۰۳. الف) هربازه‌ای

ب) وجود ندارد

پ) $(۰, \infty)$

ت) $(-\infty, ۰)$. نقاط اکسترمم ندارد، $(۰, ۰)$ نقطهٔ عطف است.

۰۵. الف) $(-\infty, -۱)\cup(۱, \infty)$

ب) $(-۱, ۱)$

پ) $(۰, \infty)$

ت) $(-\infty, ۰)$. ماکسیمم موضعی در $(-۱, ۵)$، مینیمم موضعی در $(۱, ۱)$، $(۰, ۳)$ نقطهٔ عطف است.

۰۷. الف) $(-\infty, ۱)\cup(۳, \infty)$

ب) $(۱, ۳)$

پ) $(۲, \infty)$

ت) $(-\infty, ۲)$. ماکسیمم موضعی در $(۱, ۵)$، مینیمم موضعی در $(۳, ۱)$، $(۲, ۳)$ نقطهٔ عطف است.

۰۹. الف) هربازه‌ای

ب) وجود ندارد

پ) $(۲, \infty)$

ت) $(-\infty, ۲)$. مقادیراکسترمم ندارد، $(۲, ۱)$ نقطهٔ عطف است.

۰۱۱. الف) $(-\pi/۲, \pi/۲)$

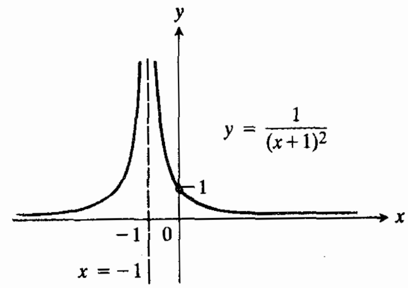
ب) وجودندارد

پ) $(۰, \pi/۲)$

ت) $(-\pi/۲, ۰)$. مقادیراکسترمم ندارد، $(۰, ۰)$ نقطهٔ عطف است.

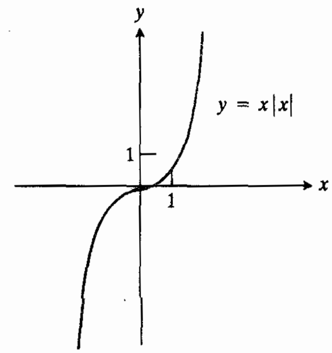
۰۱۳. الف) $(-\infty, ۰)$

ب) $(۰, \infty)$



۰۱۵. $y' = -\sin x$، بر $(-\pi, ۰)\cup(\pi, ۳\pi/۲]$ صعودی و بر $[-۳\pi/۲, -\pi)\cup(۰, \pi)$ نزولی‌است؛ $y(۰)=۱$ ماکسیمم است، $y(-\pi)=y(\pi)=-۱$ مینیمم است.

۰۱۷. y' به‌ازای $x>۰$ برابر با $۲x$ و به‌ازای $x<۰$ برابر با $-۲x$ است، همواره صعودی است، مقادیراکسترمم ندارد.



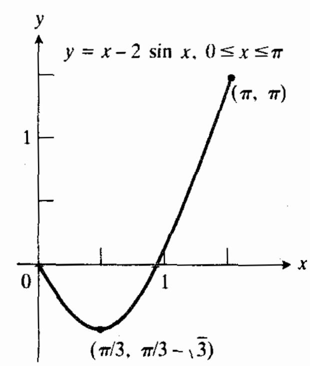
۰۱۹. ماکسیمم‌در $x=۰$ و برابر با ۱ است، مینیمم در $x=-\pi$ یا $x=\pi$ و برابر با ۱ − است.

۰۲۱. $y'=(x+۱)^{-۲}$ به‌ازای $x\neq -۱$ همواره مثبت‌است.

۰۲۳. $f(x)=\begin{cases} ۱-x & x\leqslant ۰ \\ ۱-۲x & x>۰ \end{cases}$ (این‌جواب یکتا نیست.)

۰۲۵. الف) $y'<۰$ اگر $۰\leqslant x<\pi/۳$، $y'(\pi/۳)=۰$، $y'>۰$ اگر $\pi/۳<x\leqslant\pi$

ب)



پ) وجود ندارد

ت) هر بازه‌ای ماکسیمم در (۰, ۰)

۱۵. $y=(x-۱)^۲$. این جواب یکتا نیست.

۱۷. ماکسیمم در (−۱, ۷).

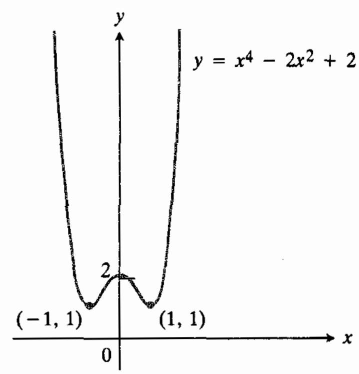
۱۹. ماکسیمم موضعی در (۱, ۱۶)، مینیمم موضعی در (۳, ۰)، نقطهٔ عطف در (۲, ۸)

۲۱. ماکسیمم موضعی در (−۲, ۲۸)، مینیمم موضعی در (۲, −۴)، نقطهٔ عطف در (۰, ۱۲)

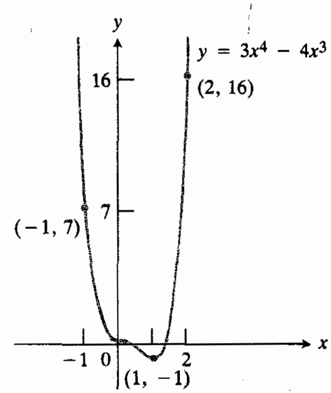
۲۳. نقطهٔ عطف در (−۱, ۱)

۲۵. ماکسیمم موضعی در (−۵, ۴۰۰)، مینیمم موضعی در (۹, −۹۷۲)، نقطهٔ عطف در (۲, −۲۸۶)

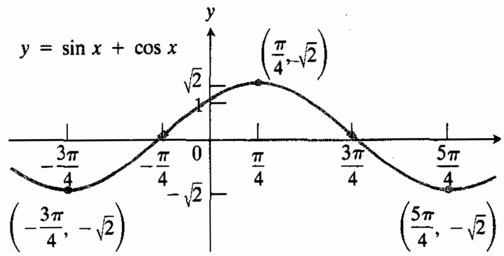
۲۷. ماکسیمم موضعی در (۰, ۲)، مقادیر مینیمم در (−۱, ۱) و (۱, ۱)، نقاط عطف در (−۱/√۳, ۱۳/۹) و (۱/√۳, ۱۳/۹)



۲۹. مینیمم در (۱, −۱)، نقاط عطف در (۰, ۰) و (۲/۳, −۱۶/۲۷)



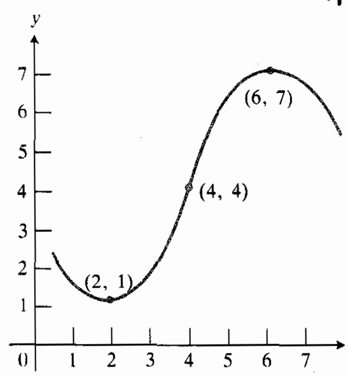
۳۱. ماکسیمم به‌مقدار $\sqrt{۲}$ در $x=\pi/۴, -۷\pi/۴, \ldots$؛ مینیمم به‌مقدار $-\sqrt{۲}$ در $x=۵\pi/۴, -۳\pi/۴, \ldots$؛ نقاط عطف درهمهٔ نقاط محل تقاطع خم با محور x



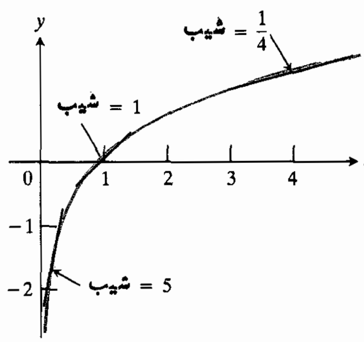
۳۳. الف) T

ب) P

۳۵.



۳۷. تقعر رو به پایین



۳۹. الف) سه بار، یکی یک بار در بازه‌های (−۲, −۱)، (−۱/۲, ۰)، و (۱, ۱/۳)

ب) یک بار، در بازهٔ (−۲, −۱)

پ) یک بار در بازهٔ (۱, ۲)

۴۱. مینیمم موضعی در $x=-۱۵$، $y=-۳۷۱۲۵$، و $x=۹$، $y=-۹۴۷۷$؛ ماکسیمم موضعی در $x=۰$، $y=۰$؛ (−۹, −۲۱۱۴۱) و (۵, −۵۱۲۵) نقاط عطف‌اند.

۴۳. الف) $x=۲$

ب) $x=۲$

بخش ۳.۳، صفحه‌های ۱۶۲ تا ۱۶۴

۱. فرد

۳. فرد

۵. نه‌فرد است نه‌زوج

۷ زوج

۹. زوج

۱۱. فرد

۱۳. الف) ندارد

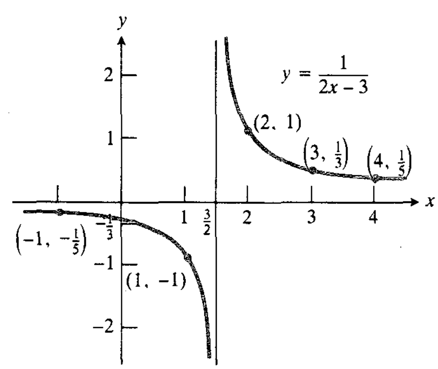
ب) $(0, -1/3)$

پ) $x=3/2$؛ $y=0$

ت) $-2/9$

ث) به‌ازای همهٔ مقادیر x جز $x=3/2$ نزولی است.

ج) بر $(-\infty, 3/2)$ تقعر روبه پایین و بر $(3/2, \infty)$ تقعر روبه‌بالاست.



۱۵. الف) تابع فرد؛ تقارن نسبت به مبدأ

ب) $(\pm 1, 0)$

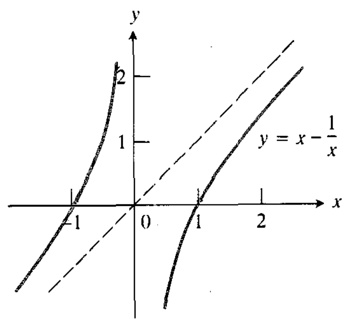
پ) $x=0$، $y=x$

ت) ۲

ث) به‌ازای همهٔ xها جز $x=0$ صعودی است.

ج) بر $(-\infty, 0)$ تقعر روبه بالا و بر $(0, \infty)$ تقعر روبه‌پایین است.

چ) به‌ازای xهای بزرگ $y \approx x$، به‌ازای xهای کوچک $y \approx -1/x$



۱۷. الف) ندارد

ب) $(0, 3/2)$، $(-3, 0)$

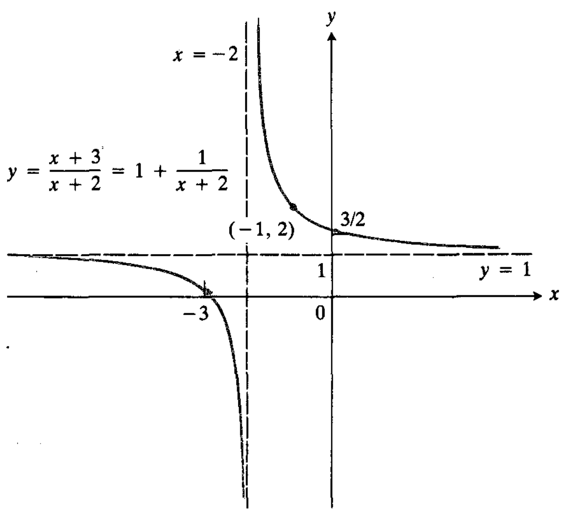
پ) $x=-2$، $y=1$

ت) -1، $-1/2$

ث) به‌ازای همهٔ xها جز $x=-2$ نزولی است.

ج) بر $(-\infty, -2)$ تقعر روبه‌پایین و بر $(-2, \infty)$ تقعر روبه‌بالاست.

چ) به‌ازای xهای بزرگ $y \approx 1$، به‌ازای xهای نزدیک $x=-2$، $y \approx 1/(x+2)$



۱۹. الف) ندارد

ب) $(0, -1)$، $(-1, 0)$

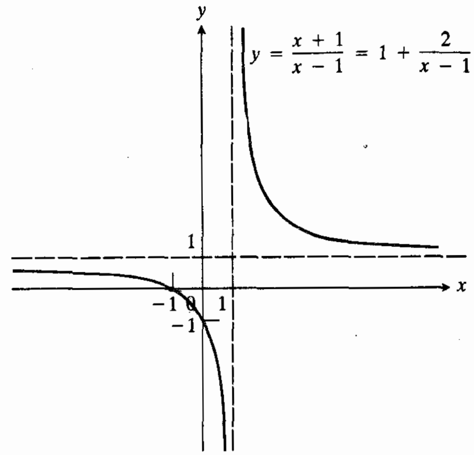
پ) $x=1$، $y=1$

ت) -2، $-1/2$

ث) به‌ازای همهٔ xها جز $x=1$ نزولی است.

ج) بر $(-\infty, 1)$ تقعر روبه‌پایین و بر $(1, \infty)$ تقعر روبه‌بالاست.

ج) به‌ازای xهای بزرگ $y \approx ۱$، به‌ازای xهای نزدیک $x=۱$، $y \approx ۲/(x-۱)$



۲۱. الف) محور y

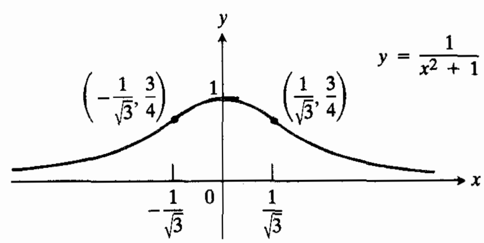
ب) $(۰,۱)$

پ) $y=۰$

ت) ۰

ث) بر $(۰,\infty)$ نزولی و بر $(-\infty,۰)$ صعودی است.

ج) بر $(-۱/\sqrt{۳},۱/\sqrt{۳})$ تقعر روبه‌پایین، بر $(-\infty,-۱/\sqrt{۳})\cup(۱/\sqrt{۳},\infty)$ تقعر روبه‌بالاست.



۲۳. الف) مبدأ

ب) $(۰,۰)$

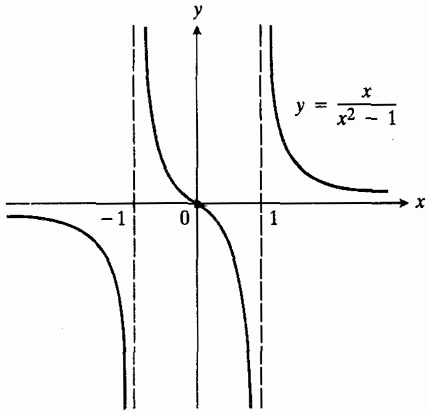
پ) $x=\pm۱$، $y=۰$

ت) -۱

ث) به‌ازای همهٔ xها جز $x=\pm۱$ نزولی است.

ج) بر $(-\infty,-۱)\cup(۰,۱)$ تقعر رو به پایین، بر $(-۱,۰)\cup(۱,\infty)$ تقعر روبه‌بالاست.

چ) در نزدیک $x=۱$، $y \approx ۱/(۲(x-۱))$؛ در نزدیک $x=-۱$، $y \approx ۱/(۲(x+۱))$



۲۵. الف) زوج

ب) $(۰,۰)$

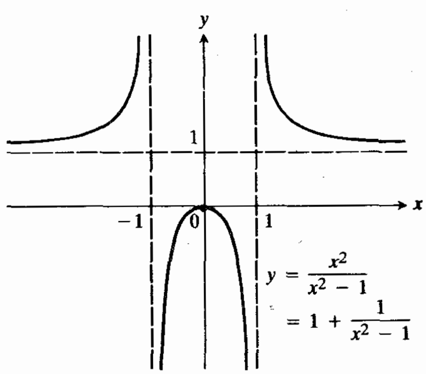
پ) $x=\pm۱$، $y=۱$

ت) ۰

ث) بر $(-\infty,-۱)\cup(-۱,۰)$ صعودی، بر $(۰,۱)\cup(۱,\infty)$ نزولی

ج) بر $(-۱,۱)$ تقعر روبه‌پایین، بر $(-\infty,-۱)\cup(۱,\infty)$ تقعر روبه‌بالا

چ) به‌ازای xهای بزرگ $y \approx ۱$، نزدیک $x=۱$، $y \approx ۱/(۲(x-۱))$، در نزدیک $x=-۱$، $y \approx ۱/(۲(x+۱))$



۲۷. الف) ندارد

ب) $(۰,۲)$، $(\pm۲,۰)$

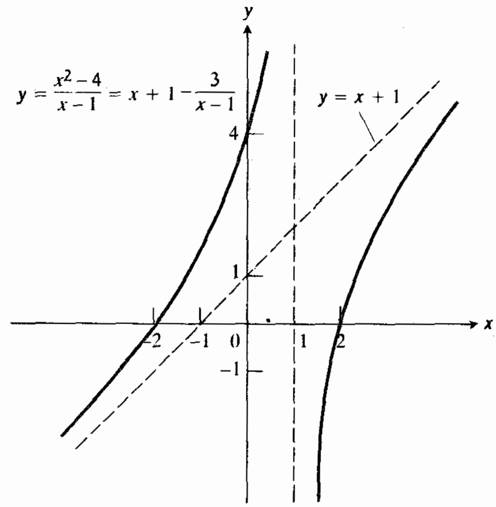
پ) $x=۱$، $y=x+۱$

ت) $y'(۰)=۴$، $y'(-۲)=۴/۳$، $y'(۲)=۴$

ث) همواره صعودی

ج) بر $(-\infty, ۱)$ تقعر رو به بالا، بر $(۱, \infty)$ تقعر رو به پایین

چ) به ازای xهای بزرگ $y \approx x$ (یا $y \approx x+۱$)، در نزدیک $x=۱$، $y \approx -۳/(x-۱)$



۲۹. الف) ندارد

ب) $(۰, -۱/۲)$، $(\pm ۱, ۰)$

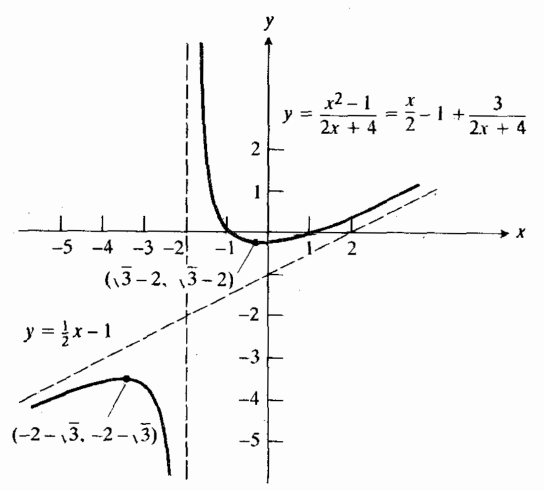
پ) $x=-۲$، $y=۱/۲x-۱$

ت) $y'(۱)=۱/۳$، $y'(-۱)=-۱$، $y'(۰)=۱/۸$

ث) بر $(-\infty, -۲-\sqrt{۳}) \cup (-۲+\sqrt{۳}, \infty)$ صعودی، بر $(-۲-\sqrt{۳}, -۲+\sqrt{۳})$ نزولی

ج) بر $(-۲, \infty)$ تقعر رو به بالا، بر $(-\infty, -۲)$ تقعر رو به پایین

چ) به ازای xهای بزرگ $y \approx (x/۲)-۱$ (یا $y \approx x/۲$)، در نزدیک $x=-۲$، $y \approx ۳/(۲x+۴)$



۳۱. الف) ندارد

ب) $(-\sqrt[۳]{۱/۳}, ۰)$

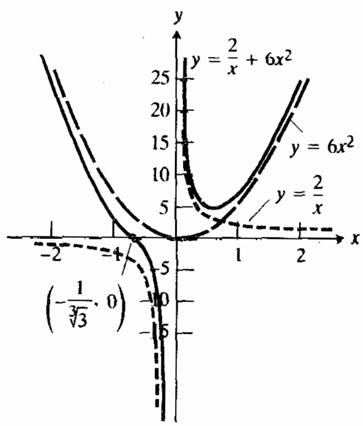
پ) $x=۰$

ت) $-۶\sqrt[۳]{۹}$

ث) بر $(-\infty, ۰) \cup (۰, \sqrt[۳]{۱/۶})$ نزولی، بر $(\sqrt[۳]{۱/۶}, \infty)$ صعودی

ج) بر $(-\infty, -\sqrt[۳]{۱/۳}) \cup (۰, \infty)$ تقعر رو به بالا، بر $(-\sqrt[۳]{۱/۳}, ۰)$ تقعر رو به پایین

چ) $y \approx ۶x^۲$ وقتی $x \to \pm\infty$، $y \approx ۲/x$ وقتی $x \to ۰$



۳۳. الف) نسبت به محور y

ب) $(۰, ۴)$، $(\pm ۲, ۰)$

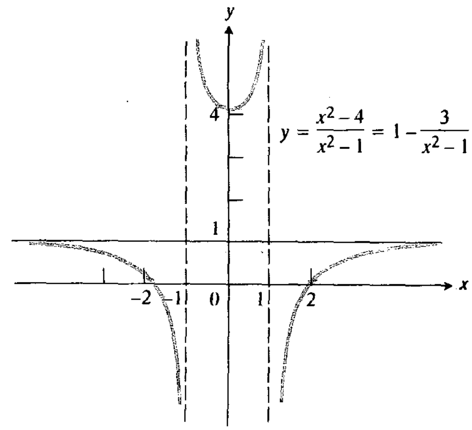
پ) $x=\pm ۱$، $y=۱$

ت) $y'(۰)=۰$، $y'(\pm ۲)=\pm ۴/۳$

ث) بر $(-\infty, ۰)$ نزولی، بر $(۰, \infty)$ صعودی

ج) بر $(-\infty, -۱) \cup (۱, \infty)$ تقعر رو به پایین، بر $(-۱, ۱)$ تقعر رو به بالا

چ) به ازای xهای بزرگ $y \approx ۱$؛ نزدیک $x=۱$، $y \approx -۳/(۲(x-۱))$؛ نزدیک $x=-۱$، $y \approx ۳/(۲(x+۱))$



۳۵. الف) ندارد

ب) $(۰, ۱/۳)$

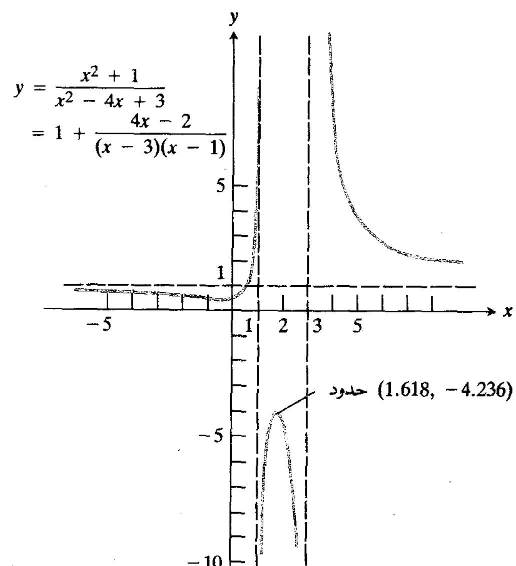
پ) $x=۱$ ، $x=۳$ ، $y=۱$

ت) ۴/۹

ث) بر $((۱-\sqrt{۵})/۲,(۱+\sqrt{۵})/۲)$ صعودی، بر $(-\infty,(۱-\sqrt{۵})/۲)\cup((۱+\sqrt{۵})/۲,\infty)$ نزولی

ج) بر $(-\infty,-۱)\cup(۱,۳)$ تقعر رو به پایین، بر $(-۱,۱)\cup(۳,\infty)$ تقعر رو به بالا

چ) به‌ازای xهای بزرگ، $y\approx ۱$؛ نزدیک $x=۱$ ، $y\approx ۲/((-۲)(x-۱))=۱/(۱-x)$؛ و نزدیک $x=۳$ ، $y\approx ۱۰/(۲(x-۳))=۵/(x-۳)$



۳۷. الف) ندارد

ب) $(۱, ۰)$

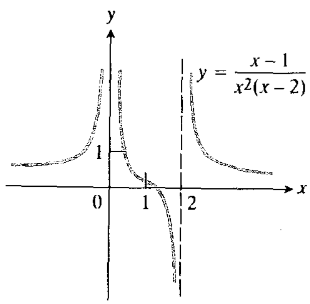
پ) $x=۰$ ، $x=۲$ ، $y=۰$

ت) $y'(۱)=-۱$

ث) بر $(-\infty,۰)$ صعودی، بر $(۰,۲)\cup(۲,\infty)$ نزولی

ج) بر $(-\infty,۰)\cup(۰,۱ر۲۲)$ و $(۲,\infty)$ تقعر رو به بالا، بر $(۱ر۲۲,۲)$ تقعر رو به پایین

چ) نزدیک $x=۰$ ، $y\approx ۱/(۲x^۲)$، نزدیک $x=۲$ ، $y\approx ۱/(۴(x-۲))$



۴۱. فرد

۴۳. زوج

۴۵. فرد

۴۷. فرد

۴۹. زوج

۵۱. فرد

۵۳. زوج

۵۵. نه فرد نه زوج

۵۷. الف) زوج

ب) زوج

۵۹. الف) فرد

ب) فرد

پ) زوج

ت) زوج

۶۱. الف) صعودی

ب) نزولی

پ) تقعر رو به پایین

ت) تقعر رو به پایین

بخش ۴۰۳، صفحه‌های ۱۶۸ تا ۱۶۹

۱. ماکسیمم‌مطلق برابر با ۱/۲ در $x=۱/۲$؛ مینیمم‌مطلق برابر با ۰ در $x=۰, ۱$

۳. ماکسیمم مطلق برابر با $۲\sqrt{۳}/۹$ در $x=۱/\sqrt{۳}$؛ مینیمم مطلق برابر با ۰ در $x=۰, ۱$

۵. ماکسیمم موضعی برابر با ۶۸۶ در $x=-۷$؛ مینیمم موضعی برابر با ۶۸۶− در $x=۷$، اکسترمم مطلق ندارد.

۷. مینیمم مطلق برابر با ۱− در $x=۲$

۹. ماکسیمم مطلق برابر با ۱/۴ در $x=۱/۲$

۱۱. نقطهٔ بحرانی ندارد؛ مینیمم مطلق برابر با ۰ در $x=۰$ و ماکسیمم مطلق برابر با ۶ در $x=۳$

۱۳. مینیمم مطلق برابر با ۳ در $x=۱$

۱۵. مقادیر اکسترمم ندارد.

۱۷. ماکسیمم مطلق برابر با ۱/۴ در $x=۱/۴$؛ مینیمم مطلق ندارد.

۱۹. مینیمم مطلق برابر با ۳− در $x=۱$؛ ماکسیمم مطلق برابر با ۸ در $x=۲$

۲۱. مینیمم مطلق برابر با ۰؛ ماکسیمم ندارد.

۲۳. مینیمم مطلق برابر با ۱ در $x=۰, \pi/۲$؛ ماکسیمم مطلق برابر با ۳/۲ در $x=\pi/۶$

۲۵. ماکسیمم موضعی برابر با ۰ در $x=۰$؛ مینیمم موضعی برابر با ۹۴۷۷− در $x=-۹$؛ مینیمم مطلق برابر با ۴۷۱۲۵− در $x=۱۵$

۲۷. مینیمم مطلق برابر با ۴ در $x=۱/۲$، مقدار ماکسیمم ندارد.

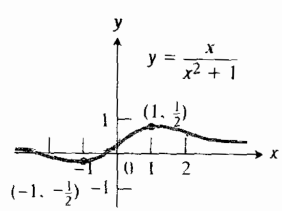
۲۹. ماکسیمم موضعی برابر با ۱ در $x=۱$؛ مینیمم موضعی برابر با ۰ در $x=۰$

۳۱. مقدار اکسترمم ندارد.

۳۳. ماکسیمم مطلق برابر با ۱ در $x=\pm\pi/۲$؛ مینیمم مطلق برابر با ۱− در $x=\pm ۳\pi/۲$

۳۵. ماکسیمم مطلق برابر با ۳ در $x=۲$؛ مینیمم مطلق برابر با ۰ در $x=\pm ۱$

۳۹. نقاط بحرانی: $x=\pm ۱$، نقاط عطف عبارت‌اند از $(۰, ۰)$ و $(\pm\sqrt{۳}, \pm\sqrt{۳}/۴)$؛ $y=۰$ مجانب است.



۴۱. ب

۴۳. ۴

بخش ۳.۵، صفحه‌های ۱۷۵ تا ۱۸۰

۱. الف) ۰ و ۲۰

ب) ۱۲ و ۸

پ) ۱/۴ و $۱۹\frac{۳}{۴}$

۳. ۱۶

۵. $(۱/۲, \sqrt{۳}/۲)$

۷. ۳۲

۹. $۸۰۰۰۰\,\mathrm{m}^۲$

۱۱. $۶\,\mathrm{ft}\times ۶\,\mathrm{ft}\times ۳\,\mathrm{ft}$

۱۳. $a=b=۱۰\sqrt{۲}$

۱۵. الف) $۴, ۸/۵$

ب) $۸/۵<t<۴$

پ) $v(۱۱/۵)=-۲۱۸۷/۱۲۵$

۱۷. $۱۸\,\mathrm{in}\times ۹\,\mathrm{in}$

۱۹. $۱۲\,\mathrm{m}\times ۱۸\,\mathrm{m}$؛ ۷۲

۲۱. $r=h=۱۰/\sqrt[۳]{\pi}\,\mathrm{cm}$

۲۳. حدود ۲۸٫۴۸ دلار

۲۷. $\sqrt{۲/۳}H=$ شعاع، $H/\sqrt{۳}=$ ارتفاع

۲۹. الف) ۱۶

ب) ۵۴−

پ) ۱−

۳۱. الف) برای مربع قطعه‌ای به‌طول $۴L/(۳\sqrt{۳}+۴)$ ببرید.
ب) درصورتی که همهٔ سیم به‌شکل مربع درآید ماکسیممی به‌مقدار $L^۲/۱۶$ به‌دست می‌آید.

۳۳. $۳۲\pi r^۳/۸۱$

۳۷. $(۱/۲)D\times(\sqrt{۳}/۲)D$ (D قطر است)

۳۹. نسبت قطر نیمدایره به‌ارتفاع مستطیل برابر با $۸/(۴+\pi)$ است.

۴۱. $r=h=\sqrt{S/۵\pi}$

۴۳. الف) خیر، تنها یك نقطهٔ بحرانی در $x=۱/۲$ دارد، که دراین نقطه تابع مینیمم مطلقی برابر با ۳/۴ دارد.

ب) خیر، مینیمم مطلق برابر با ۰ در $\pi(۱-۲n)$ است (n عددی صحیح است).

۴۵. ماکسیممی برابر با $\sqrt{۲}$ در $\pi/۴+۲n\pi$؛ مینیممی برابر با $-\sqrt{۲}$ در $۵\pi/۴+۲n\pi$ (n عددی صحیح است).

۴۷. $r=(۳V/۸\pi)^{۱/۳}$، $h=(۳V/\pi)^{۱/۳}$ (r شعاع نیمکره، h ارتفاع استوانه، و V حجم کل است).

۵۳. ب) $d^۲y/dx^۲>d^۲R/dx^۲$

۵۵. ماکسیممی به‌مقدار $ka^۲/۴$ در $x=a/۲$

بخش ۳.۶، صفحه‌های ۱۸۳ تا ۱۸۵

۱. $dA/dt=۲\pi r(dr/dt)$

۳. $dV/dt=۳s^۲(ds/dt)$

۵. الف) ۱

ب) $-۱/۳$

پ) $dR/dt=I^{-۱}(dV/dt)-VI^{-۲}(dI/dt)$

ت) ۳/۲

۷. الف) x فاصله تا پایگاه دوم و برابر ۶۰ ft است، y فاصله تا پایگاه سوم و برابر $۳۰\sqrt{۱۳}$ ft است.

ب) $y^۲=x^۲+۹۰^۲$

پ) $y(dy/dt)=x(dx/dt)$

ت) $-(۳۲/\sqrt{۱۳})$ ft/sec

۹. $(۱۱۹/۳)\,\text{ft}^۲/\text{sec}$؛ $t=(۱۳\sqrt{۲}/۴)\,\text{sec}$

۱۳. $(۲۵/۹\pi)$ ft/min؛ $(۲۰۰/۳)\,\text{ft}^۲/\text{min}$

۱۵. ۳۳٫۷ ft/sec

۱۷. ± ۳ m/sec؛ $dy/dx=\pm ۲$

۱۹. ۱؛ $۰٫۰۰۰۹۴\approx ۱۰/۱۰۶۱۰$

۲۱. ۸ ft/sec، -۳ ft/sec

۲۳. ۲۰ ft/sec

۲۵. ۶۲٫۵ mph

۲۷. الف) ۱۲ گره سرظهر، ۸ گره یك‌ساعت بعد

ب) خیر، کمترین فاصلهٔ بین کشتیها در این روز ۶٫۵ مایل است.

بخش ۳.۷، صفحه‌های ۱۹۱ تا ۱۹۲

۱. $f(-۲)=۱۱$، $f(-۱)=-۱$ و f بر $(-۲,-۱)$، $f'(x)=۴x^۳+۳<۰$

۳. $f(-۱)=۱$، $f(۰)=-۶$، بر بازهٔ $(-۱,۰)$، $f'(x)=۶x^۲-۶x-۱۲<۰$

۵. i) $y(\pm ۲)=۰$، $y'(۰)=۰$

ii) $y(-۵)=y(-۳)=۰$، $y'(-۴)=۰$

iii) $y(-۱)=y(۲)=y(۲)=۰$، $y'(۰)=y'(۲)=۰$

iv) $y(۰)=y(۹)=y(۲۲)=۰$، $y'(۴)=y'(۱۸)=۰$. بین هردو yیی که برابر با صفراست یك y' برابر با صفر قراردارد.

۸. ۱/۲

۹. ۱

۱۵. تناقضی وجود ندارد، شرایط قضیه مقدار میانگین کافی‌اند نه لازم.

۱۷. $y=[x]$ بر $[۰,۱]$ پیوسته نیست.

۲۳. تابع دیگری وجود ندارد.

بخش ۳.۸، صفحه‌های ۱۹۵ تا ۱۹۷

۱. ۱/۴

۳. ۵/۷

۵. ۰

۷. ۵

۹. ۱

۱۱. $\sqrt{۲}$

۱۳. ۱

۱۵. -۱

۱۷. ۱/۲

۱۹. ۳

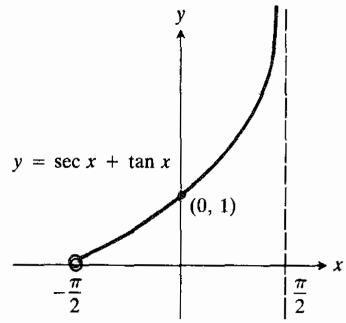
۲۱. na

۲۳. $-۱/۲$

۲۵. $\sqrt{۱۰}$

۲۷. ب) ۰

پ)



۲۹. الف) ۰

ب) ۱

پ) ∞

بخش ۹.۳، صفحه‌های ۲۰۱ تا ۲۰۲

۱. $x^{۲}$

۳. $(۱/۲)-(۱/۲)x$

۵. $(۳/۸)+(۳/۴)x-(۱/۸)x^{۲}$

۷. الف) ۰٫۰۰۱۴۶

ب) ۰٫۰۰۵

۹. الف) x

ب) ۰٫۰۰۰۸۹

۱۱. الف) $۱-(۱/۲)(x-\pi/۲)^{۲}$

ب) ۰٫۰۰۰۱۶۷

۱۳. الف) $(\pi/۲)-x$

ب) ۰٫۰۰۰۱۶۷

۱۵. الف) $|x|<۰٫۲۵$

ب) $|x|<۰٫۰۶$

مساله‌های گوناگون، فصل ۳، صفحه‌های ۲۰۳ تا ۲۰۹

۱. الف) $x<۹/۲$

ب) $x>۹/۲$

پ) به‌ازای هیچ xی

ت) همهٔ xها

۳. الف) $x<۳$

ب) $x>۳$

پ) $۰<x<۲$

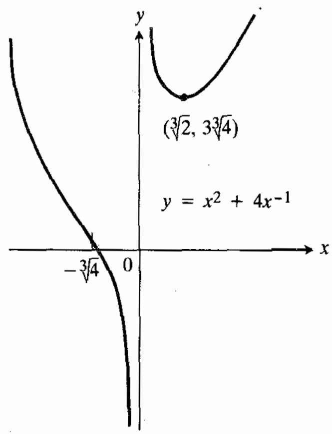
ت) $x<۰$ یا $x>۲$

۵. الف) $x>\sqrt[۳]{۲}$

ب) $x<\sqrt[۳]{۲}$ ، $x\neq ۰$

پ) $x<-\sqrt[۳]{۴}$ یا $x>۰$

ت) $-\sqrt[۳]{۴}<x<۰$

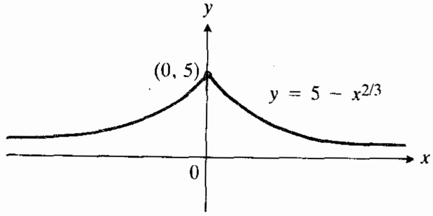


۷. الف) $x<۰$

ب) $x>۰$

پ) $x\neq ۰$

ت) به‌ازای هیچ xی

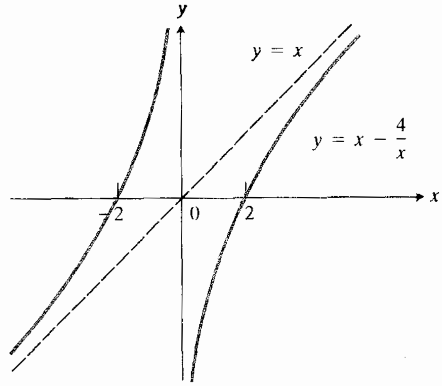


۹. الف) $x\neq ۰$

ب) به‌ازای هیچ xی

پ) $x<۰$

ت) $x>۰$

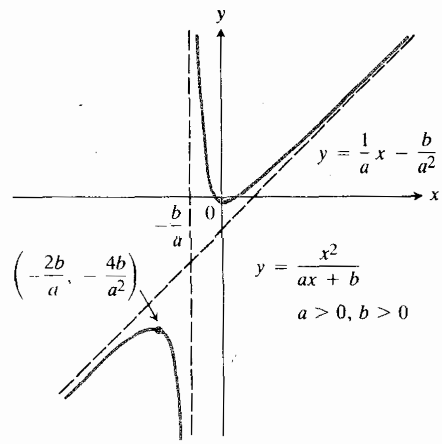


۱۱. الف) $x<-2b/a$ یا $x>0$

ب) $-2b/a<x<0$

پ) $x>-b/a$

ت) $x<-b/a$



۱۳. الف) $x<-1$ یا $x>1/3$

ب) $-1<x<1/3$

پ) $x>-1/3$

ت) $x<-1/3$

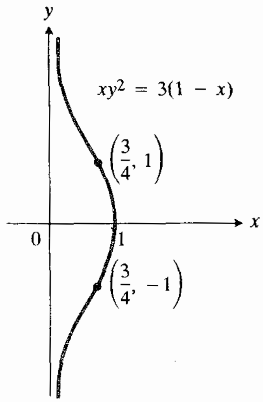
۱۵. الف) $x<1$ یا $x>2$

ب) $1<x<2$

پ) $x>3/2$

ت) $x<3/2$

۱۷. متقارن نسبت به‌محور x، با دامنهٔ $(0,1]$. به‌ازای $y>0$، نمودار نزولی است و به‌ازای $0<x<3/4$ تقعر رو به بالاست، به‌ازای $3/4<x\leqslant 1$ تقعر رو به پایین است. به‌ازای $y<0$، نمودار صعودی است و به‌ازای $0<x<3/4$ تقعر رو به پایین است، به‌ازای $3/4<x\leqslant 1$ تقعر رو به بالاست. نقاط عطف عبارت‌اند از $(3/4, \pm 1)$.



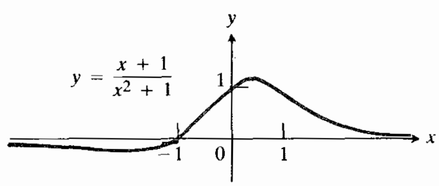
۱۹. الف) دامنهٔ تابع همهٔ xهاست؛ تقارن ندارد؛ نقاط تقاطع با محورها عبارت‌اند از $(0,1)$ و $(-1,0)$؛ $y=0$ مجانب است؛ $y'=(1-2x-x^2)/(x^2+1)^2$؛ $y'(0)=1$، $y'(-1)=1/2$؛ به‌ازای $x<-1-\sqrt{2}$ یا $x>-1+\sqrt{2}$ نزولی و به‌ازای

$$-1-\sqrt{2}<x<-1+\sqrt{2}$$

صعودی است؛

$$y''=(2(x-1)(x^2+4x+1))/(x^2+1)^3$$

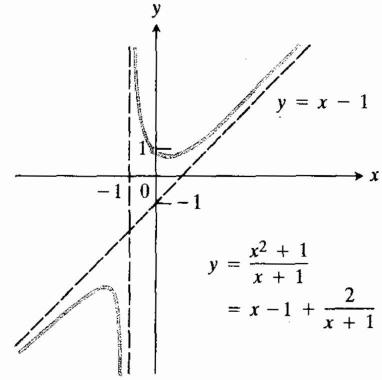
به‌ازای $x<-2-\sqrt{3}$ یا $-2+\sqrt{3}<x<1$ تقعر رو به پایین و به‌ازای $-2-\sqrt{3}<x<-2+\sqrt{3}$ یا $x>1$ تقعر رو به بالاست.



ب) دامنه همهٔ xها جز $x=-1$ است، تقارن‌ندارد، محل تقاطع با محور y عبارت است از $(0,1)$؛ مجانبها عبارت‌اند از $x=-1$ و $y=x-1$؛ $y'=1-2/(x+1)^2$؛ $y'(0)=-1$؛ به‌ازای $x<-1-\sqrt{2}$ یا

$$x>-1+\sqrt{2}$$

صعودی است، به ازای $-1-\sqrt{2}<x<-1+\sqrt{2}$ نزولی است؛ $y''=4/(x+1)^3$، به‌ازای $x<-1$ تقعر رو به پایین، به‌ازای $x>-1$ تقعر رو به بالاست. جملات چیره: به‌ازای xهای بزرگ $y\approx x$ (یا $y\approx x-1$)، درنزدیک $x=-1$، $y\approx 2/(x+1)$.



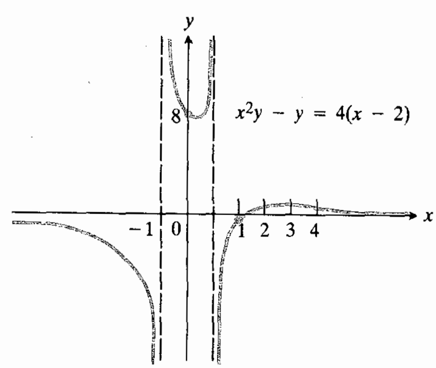
۰۲۱ دامنه همهٔ xهاست؛ تقارن ندارد؛ نقاط تقاطع با محورها عبارت‌اند از $(۰,۰)$، $(-۱,۰)$، و $(۲,۰)$؛ مجانب ندارد؛ $y'=۳x^۲-۲x-۲$؛ $y'(۰)=-۲$، $y'(-۱)=۳$، $y'(۲)=۶$؛ به‌ازای $x<(۱-\sqrt{۷})/۳$ یا $x>(۱+\sqrt{۷})/۳$ صعودی‌است، به‌ازای $(۱-\sqrt{۷})/۳<x<(۱+\sqrt{۷})/۳$ نزولی است؛ به‌ازای $x>۱/۳$ تقعر روبه‌بالاست، به‌ازای $x<۱/۳$ تقعر روبه‌پایین است.

۰۲۳ دامنه همهٔ xها جز $x=\pm۲$ است؛ نسبت به‌محور y متقارن است؛ مجانبها عبارت‌اند از $x=\pm۲$ و $y=۰$؛ محل تقاطع با محور y عبارت است از $(۰,۲)$؛ $y'=۱۶x/(۴-x^۲)^۲$؛ $y'(۰)=۰$؛ به‌ازای $x<۰$، $x\neq-۲$ نزولی است؛ به‌ازای $x>۰$، $x\neq۲$ صعودی است؛

$$y''=(۱۶(۳x^۲+۴))/(۴-x^۲)^۳$$

به‌ازای $-۲<x<۲$ تقعر روبه‌بالاست، به‌ازای $x<-۲$ یا $x>۲$ تقعر روبه‌پایین است. جملات چیره: در نزدیک $x=۲$، $y\approx۲/(۲-x)$، درنزدیک $x=-۲$، $y\approx۲/(۲+x)$.

۰۲۵ دامنه همهٔ xها جز $x=\pm۱$ است؛ تقارن‌ندارد؛ نقاط تقاطع با محورها عبارت‌اند از $(۰,۸)$ و $(۲,۰)$؛ مجانبها عبارت‌انداز $y=۰$، $x=\pm۱$؛ $y'=(-۴(x^۲-۴x+۱))/(x^۲-۱)^۲$؛ $y'(۰)=-۴$، $y'(۲)=۴/۳$؛ به ازای $x<۲-\sqrt{۳}$ یا $x>۲+\sqrt{۳}$ نزولی است. به‌ازای $۲-\sqrt{۳}<x<۲+\sqrt{۳}$ صعودی‌است؛ $y''=(۸(x^۳-۴x^۲-۳x+۴))/(x^۲-۱)^۳$؛ به‌ازای $x<-۱$ یا $۱<x<۴٫۵$ تقعر روبه‌پایین است؛



به‌ازای $-۱<x<۱$ یا $x>۴٫۵$ تقعر روبه‌بالاست. جملات چیره: درنزدیک $x=۱$، $y\approx-۲/(x-۱)$، درنزدیک $x=-۱$، $y\approx۶/(x+۱)$

۰۲۷ $a=b=c=۱$، $d=e=۰$

۰۲۹ الف) $x=۱$ زیرا y' از + تا − تغییرمی‌کند

ب) $x=۳$ زیرا y' از − تا + تغییرمی‌کند

۰۳۱ ۱۰

۰۳۳ $a=۱$، $b=-۳$، $c=-۹$، $d=۵$

۰۳۵ ۲۵

۰۳۷ $r=h=۴\text{ ft}$

۰۳۹ $۴\sqrt{۳}$

۰۴۱ الف) $(۲,\pm\sqrt{۳})$

ب) $(۱,۰)$

پ) $(۱,۰)$

۰۴۳ $x=aw/\sqrt{w^۲-l^۲}$، $y=b-(al/\sqrt{w^۲-l^۲})$

۰۴۵ اگر b اندازهٔ قاعده ثابت مثلث باشد، آنگاه $a=c=s-(b/۲)$.

۰۵۷ $۶\text{ ft}\times۱۸\text{ ft}$

۰۵۹ ۱ واحد

۰۶۱ $r=\sqrt{A}$، $\theta=۲\text{ rad}$

۰۶۳ الف) $-۰٫۰۴\pi\text{ cm}^۲/\text{sec}$

ب) $t=(۳a-۵b)/(b^۲-a^۲)$

۰۶۷ $x=\frac{۱}{n}\sum_{j=۱}^{n}c_j$

۰۷۳ $(۱/۲)\text{ cm/min}$

۰۷۵ $dr/dt=-(۳/۲۰۰)\text{ m/min}$؛ $ds/dt=-(۶\pi/۵)\text{ m}^۲/\text{min}$؛ $-(۳/۲۰۰۰)\text{ m}$؛ $-(۳\pi/۲۵)\text{ m}^۲$

۰۷۷ $\sqrt{۳}/۲$

۰۷۹ آری، به‌ازای $۰\leqslant y\leqslant۱۰$ $(c=(۶٫۵\pi/۳۲)+۰٫۲)$ داریم $dV/dt>۰$

۰۸۳ $۵\sqrt{۱۳}\text{ mi/hr}$

۸۵. خیر، y' در $x=0$ وجود ندارد.

۸۷. $y'=0$، بنابراین y تابعی ثابت است ($y\approx -0.7$).

۸۹. ۱۲

۹۳. الف) ۱

ب) ۲

۹۷. ب) (i) $1/a$

(iii) $0<x_0<2/a$

فصل ۴

بخش ۴.۱، صفحه‌های ۲۱۴ تا ۲۱۶

۱. الف) x^2+C

ب) $3x+C$

پ) x^2+3x+C

۳. الف) x^3+C

ب) $(1/3)x^3+C$

پ) $(1/3)x^3+x^2+C$

۵. الف) $x^{-3}+C$

ب) $-(1/3x^3)+C$

پ) $-(1/3x^3)+x^2+3x+C$

۷. الف) $x^{3/2}+C$

ب) $(8/3)x^{3/2}+C$

پ) $(1/3)x^3-(8/3)x^{3/2}+C$

۹. الف) x^2-x+C

ب) $(1/6)(2x-1)^3+C$

پ) $(1/8)(2x-1)^4+C$

۱۱. الف) $(x^2-3)^2+C$

ب) $(1/4)(x^2-3)^2+C$

۱۳. $y=x^2-7x+C$

۱۵. $y=(1/3)x^3+x+C$

۱۷. $y=5x^{-1}+C$

۱۹. $y=(x-2)^5/5+C$

۲۱. $y=(x^2/2)-(1/x)+C$

۲۳. $y=\sqrt{x^2+C}$

۲۵. $y=1+\sqrt{(x+1)^2+C}$

۲۷. $y=((1/3)x^{3/2}+C)^2$

۲۹. $y=-1/(x^2+C)$

۳۱. $y=x^{-2}+C$

۳۳. $s=t^3+2t^2-6t+C$

۳۵. $y=(4t^3/3)+4t-(1/t)+C$

۳۷. ۲۸ m/sec

بخش ۴.۲، صفحه‌های ۲۱۷ تا ۲۱۹

۱. $s=t^3+4$

۳. $s=(1/3)(t+1)^3-(1/3)$

۵. $s=-(t+1)^{-1}-4$

۷. $v=9.8t+20;\ s=4.9t^2+20t$

۹. $v=t^2+1;\ s=(1/3)t^3+t+1$

۱۱. $v=(t+1)^2;\ s=(1/3)t^3+t^2+t$

۱۳. $y=x^3+x^2+x-3$

۱۵. $y=(x-7)^4+9$

۱۷. $y=((1/4)x^2+1)^2$

۱۹. $y=1/(2-x^2)$

۲۱. $y=-x^3+x^2+4x+1$

۲۳. $y=x^3/16$

۲۵. $f(x)=2x^{3/2}-50$

۲۷. ۲۴٫۲۵ m/sec

۲۹. ت) $y=x^2+C$؛ $y(1)=1$ نتیجه‌می‌دهد $C=0$

بخش ۴.۳، صفحه‌های ۲۲۲ تا ۲۲۳

۱. $(1/244)(x-1)^{244}+C$

۳. $-2\sqrt{1-x}+C$

۵. $(1/6)(2x^2-1)^{3/2}+C$

۷. $-(3/5)(2-t)^{5/3}+C$

۹. $x+(۱/۲)x^{۴}+(۱/۷)x^{۷}+C$

۱۱. $(۱/۲۲)(x^{۲}+۱)^{۱۱}+C$

۱۳. $(۲/۳)(۱+x^{۳})^{۱/۲}+C$

۱۵. $(-۱/۳(۳x+۲))+C$

۱۷. $-۳(۱-r^{۲})^{۱/۲}+C$

۱۹. $-(۱/۲۰)(۷-x^{۵})^{۴}+C$

۲۱. $(-۱/۲(s+۱)^{۲})+C$

۲۳. $-۱/(x+۲)+C$

۲۵. $(۱/۳)(x+۱)^{۳/۲}+C$

۲۷. $(۱/۶)(y+۲)^{۶}+C$

۲۹. $(-۲/(۱+\sqrt{x}))+C$

۳۱. $y=(۱/۳)(۱+x^{۲})^{۳/۲}-(۱/۳)$

۳۳. $r=(۳z^{۲}-۱)^{۴}-۴$

۳۵. $۲(y^{۲}+۱)^{۱/۲}=(x^{۲}+۱)^{۳/۲}+۱$

۳۷. الف و ب

بخش ۴.۴، صفحه‌های ۲۲۶ تا ۲۲۹

۱. $-(۱/۳)\cos ۳x+C$

۳. $\tan(x+۲)+C$

۵. $-\csc(x+\pi/۲)+C$

۷. $-(۱/۴)\cos(۲x^{۲})+C$

۹. $-(۱/۲)\cos ۲t+C$

۱۱. $(۴/۳)\sin ۳y+C$

۱۳. $(\sin^{۳}x)/۳+C$

۱۵. $(۱/۲)\tan ۲\theta+C$

۱۷. $۲\sec(x/۲)+C$

۱۹. $-\cot\theta+C$

۲۱. $(۱/۲)y+(۱/۴)\sin ۲y+C$

۲۳. $(۱/۳)\sin ۳t-(۱/۹)\sin^{۳}۳t+C$

۲۵. $-\csc x+C$

۲۷. $\sqrt{۲-\cos ۲t}+C$

۲۹. $-(۱/۲)\cos^{۳}(۲x/۳)+C$

۳۱. $\tan\theta+\sec\theta+C$

۳۳. $\tan y-\cot y+C$

۳۵. $-(۳/۲)\cos ۲x+(۴/۳)\sin ۳x+C$

۳۷. $(۱/۳)\tan^{۳}x+C$

۳۹. $-(۱/۴)\cot^{۴}x+C$

۴۱. $(۲/۳)\tan^{۳/۲}x+C$

۴۳. $(۲/۵)\sin^{۵/۲}x+C$

۴۵. $\sin x-(۱/۳)\sin^{۳}x+C$

۴۷. $\sin x-(۲/۳)\sin^{۳}x+(۱/۵)\sin^{۵}x+C$

۴۹. $(۱/۶)\cos^{-۳}۲x+C$

۵۱. $۲\tan\sqrt{x}-۲\sqrt{x}+C$

۵۳. $(۱/۳)\sin\sqrt{۳x^{۲}-۶}+C$

۵۵. ت

۵۷. $y^{۲}=(۵/۲)x^{۲}+۳\cos x-۳$ یا

$y=((۵/۲)x^{۲}+۳\cos x-۳)^{۱/۲}$

۵۹. $y=((۳/۲)\sin\pi x-(۱/۲))^{۲/۳}$

۶۱. ۶ m

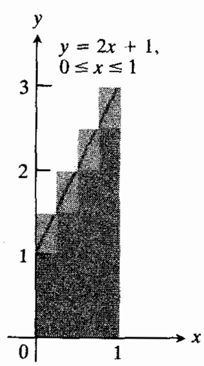
۶۳. هرسه‌روش‌درست‌است؛ تفاوت پادمشتقها مقداری‌ثابت‌است.

۶۵. $(۱/۳)[۱+\sin^{۲}(x-۱)]^{۳/۲}+C$

بخش ۵.۴، صفحه‌های ۲۳۶ تا ۲۳۸

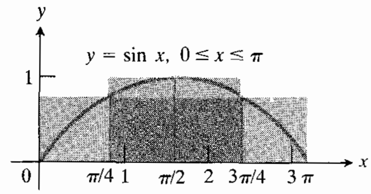
۱. الف) ۷/۴

ب) ۹/۲



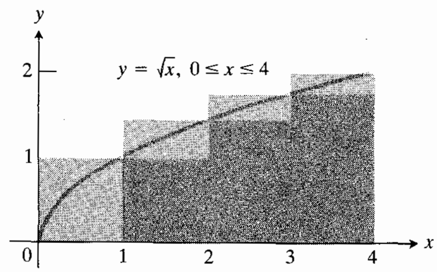
۳. الف) $(\sqrt{۲}\pi)/۴ \approx ۱٫۱۱$

ب) $[\pi(\sqrt{۲}+۲)]/۴ \approx ۲٫۶۸$



۵. الف) $۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳} \approx ۴٫۱۴۶$

ب) $۳+\sqrt{۲}+\sqrt{۳} \approx ۶٫۱۴۶$



۷. $\frac{۱}{۲}+۱+۲+۴+۸$

۹. ۲٫۵

۱۱. ۱

۱۳. ۳۴

۱۵. الف، ب، پ، ت

۱۷. الف) -۸

ب) ۶

پ) -۵

ت) ۰

بخش ۶.۴، صفحه‌های ۲۴۱ تا ۲۴۳

۳. $[m(b^۲-a^۲)]/۲$

۹. ۴/۳

۱۱. ۱/۳

بخش ۷.۴، صفحه‌های ۲۴۹ تا ۲۵۱

۱. ۱۲

۳. ۲۶/۳

۵. ۱/۱۵

۷. ۱۰

۹. ۱

۱۱. ۱/۲

۱۳. ۲/۳

۱۵. ۴/۳

۱۷. $\pi/۶$

۱۹. ۵/۶

۲۱. ۸

۲۳. ۸/۳

۲۵. ۲

۲۷. $\sqrt{۲}-۱$

۲۹. $\pi/۲$

۳۱. ۲/۹

۳۳. ۳۸/۱۵

۳۵. ۰

۳۷. ۳/۲

۳۹. $\sqrt{۳}/۸$

۴۱. ۱۶

۴۵. $\sqrt{۱+x^۲}$

۴۷. $-\sqrt{۱-x^۲}$

۴۹. $۲\cos(۴x^۲)$

۵۱. $(\cos x)/(۲+\sin x)$

۵۳. $\csc x$

۵۵. $\cos x$

۵۷. الف) $۲+۱۰x$

ب) $۲+۱۰x-۵x^۲$

۵۹. الف) ۱

ب) ۱/۴

پ) $(۱۲)^{۱/۳}$

بخش ۸.۴، صفحه‌های ۲۵۲ تا ۲۵۴

۰۱ الف) ۱۲/۳
ب) ۲/۳

۰۳ الف) ۱/۲
ب) ۱/۲−

۰۵ الف) $(1/2)(\sqrt{10}-3)$
ب) $(1/2)(3-\sqrt{10})$

۰۷ الف) ۴۵/۸
ب) ۴۵/۸−

۰۹ الف) ۱/۶
ب) ۱/۲

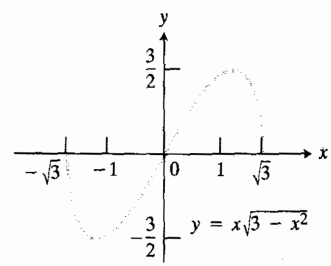
۰۱۱ الف) ۰
ب) ۰

۰۱۳ الف) ۰
ب) $-(1/4)\sin(2\pi^2)$

۰۱۵ $2\sqrt{3}$

۰۱۷ ۰

۰۱۹ الف)



ب) $2\sqrt{3}$

۰۲۱ $F(6)-F(2)$

۰۲۵ $\int_0^1 x^2\,dx=\int_{-1}^0 (x+1)^2\,dx=1/3$

۰۲۷ $\int_4^8 \sqrt{x-4}\,dx=\int_{-1}^3 \sqrt{x+1}\,dx=16/3$

بخش ۹.۴، صفحه‌های ۲۶۱ تا ۲۶۳

۰۱ الف) ۲
ب) ۲
پ) ۲

۰۳ الف) ۱۷/۴
ب) ۴
پ) ۴

۰۵ الف) ۵٫۱۴۶
ب) ۵٫۲۵۲
پ) ۵٫$\overline{3}$

۰۷ الف) ۱/۶۰۰
ب) $1.\overline{3}\times 10^{-5}$
پ) $|E_T|\leqslant 1/96, |E_S|\leqslant 1/1920$

۰۹ الف) هر n
ب) هر n زوج

۰۱۱ الف) $n\geqslant 283$
ب) هر n زوج

۰۱۳ الف) $n\geqslant 75$
ب) $n\geqslant 12$

۰۱۵ $n>6$

۰۱۷ ۱۰٫۶ ft

۰۱۹ الف) ۰٫۰۰۶۶۴
ب) ۲٫۷۴
پ) ٪۰٫۲۴

مسأله‌های گوناگون، فصل ۴، صفحه‌های ۲۶۴ تا ۲۶۷

۰۱ $y=-[2/(C+x^2)]$

۰۳ $y^3+3y=x^3-3x+C$

۰۵ $1/(r+2)=-1/(3-s)+C$

۰۷ الف) $y=(1/3)(x^2-4)^{3/2}+3$
ب) $y=1/\sqrt{1-x^2}$
پ) $y=4/(2-x^4)$
ت) $y=(15/2-3/2x)^{2/3}-1$

۹. $y=x^3+2x-2$

۱۱. الف) $v=(2/3)t^{3/2}-2t^{1/2}+(4/3)$

ب) $s=(4/15)t^{5/2}-(4/3)t^{3/2}+(4/3)t-(4/15)$

۱۳. -8

۱۵. $y=(1/3)(1+x^2)^{3/2}-(7/3)$

۱۷. $y=2((1/3)x^{3/2}+x^{1/2}-(1/3))^{1/2}$

۱۹. $y=((1/6)(9+x^2)^{3/2}+(3/2))^2$

۲۱. $s=-16t^2+96t$; 144 ft

۲۳. الف) 4 ft/sec

ب) $64/3$ ft

۲۵. $1/6$

۲۷. $\int_0^1 f(x)\,dx$

۲۹. πr^2

۳۱. 0

۳۳. $6/5$

۳۵. $1/3$

۳۷. -2

۳۹. $(3/5)(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2})$

۴۱. $\sqrt{3}$

۴۳. $35/2$

۴۵. الف) $1/(x+\sqrt{x^2+1})$

ب) $2f(2)$، با فرض پیوسته بودن f

۴۹. خیر

فصل ۵

بخش ۱.۵، صفحه‌های ۲۷۰ تا ۲۷۱

۱. الف) $v(t)>0\quad 0\leqslant t<1/2,\ 3/2<t\leqslant 2$

$v(t)<0\quad 1/2<t<3/2$

ب) 20

پ) 0

۳. الف) $v(t)>0\quad 0\leqslant t<5,\ v(t)<0\quad 5<t\leqslant 10$

ب) 245

پ) 0

۵. الف) $v(t)>0\quad 0\leqslant t<1,\ v(t)<0\quad 1<t<2$

ب) 6

پ) 4

۷. الف) $v(t)>0\quad 0<t<\pi/3,\ v(t)<0\quad \pi/3<t\leqslant\pi/2$

ب) 6

پ) 2

۹. الف) $s(t)=\sin t$

ب) 4

پ) 0

۱۱. الف) $s(t)=5\sin\pi t+5$

ب) 15

پ) -5

۱۳. 4

۱۵. $2g$

۱۷. الف) خالص = ۲، کل = ۲

ب) خالص = ۰، کل = ۴

پ) خالص = ۴، کل = ۴

ت) خالص = ۲، کل = ۲

بخش ۲.۵، صفحه‌های ۲۷۴ تا ۲۷۵

۱. $32/3$

۳. $1/12$

۵. $32/3$

۷. $4/3$

۹. $9/2$

۱۱. $1/12$

۱۳. $9/2$

۱۵. ۲
۱۷. $۱/۶$
۱۹. $۱۰۴/۱۵$
۲۱. ۲π
۲۳. $۱-(۴/\pi)$
۲۵. $\sqrt{۲}-۱$
۲۷. $۵/۶$
۲۹. $۳۲/۳$
۳۱. $۲\sqrt{۲}$
۳۳. $۳/۴$

بخش ۵.۳، صفحه‌های ۲۷۹ تا ۲۸۰

۱. $۸\pi/۳$
۳. $\pi/۳۰$
۵. $۱۶\pi/۱۵$
۷. $\pi/۹$
۹. ۲π
۱۱. $۳۲\pi/۳$
۱۳. $۱۶\pi/۱۵$
۱۵. $\pi/۲$
۱۷. $\pi^{۲}$
۱۹. الف) ۸π
ب) $۸\pi/۳$
۲۱. $۱۸\pi/۱۵$
۲۳. $۳\pi^{۲}$
۲۵. $۱۴۴\pi/۱۵$
۲۷. $c=۲/\pi$
۲۹. الف) $\pi h^{۲}/۳(۳a-h)$
ب) $۱/۱۲۰\pi\,\mathrm{ft/sec}$
۳۱. ۱۰۲۴۰
۳۳. $۱۶a^{۳}/۳$
۳۵. $۸a^{۳}/۳$
۳۷. $۱۵۹۹۰\,\mathrm{ft}^{۳}$

بخش ۵.۴، صفحه ۲۸۸

۱. $۸\pi/۳$
۳. $۵۶\pi/۱۵$
۵. $۲۵۶\pi/۵$
۷. $۱۱۷\pi/۵$
۹. $\pi/۳$
۱۱. الف) $۵\pi/۳$
ب) $۴\pi/۳$
۱۳. الف) $۱۱\pi/۱۵$
ب) $۹۷\pi/۱۰۵$
پ) $۱۲۱\pi/۲۱۰$
ت) $۲۳\pi/۳۰$
۱۵. الف) $۵۱۲\pi/۲۱$
ب) $۸۳۲\pi/۲۱$
۱۷. الف) $\pi/۶$
ب) $\pi/۶$
۱۹. $\pi/۲$
۲۱. $۳۲\pi/۳$
۲۳. $۲\pi^{۲}$
۲۵. $۲\pi^{۲}a^{۲}b$

بخش ۵.۵، صفحه‌های ۲۹۲ تا ۲۹۴

۱. ۱۲
۳. $۱۴/۳$
۵. $۱۲۳/۳۲$
۷. $۶a$
۹. ۲
۱۱. $a\pi^{۲}/۸$
۱۳. $۲۱/۲$

۱۵. ۱۳۴/۲۷

۱۹. تقریباً ۳۸ ۴۰۰ دلار

بخش ۶.۵، صفحه‌های ۲۹۷ تا ۲۹۸

۱. $(\pi/۲۷)(۱۰\sqrt{۱۰}-۱)$

۳. $۱۸۲۳\pi/۱۸$

۵. $۲۵۳\pi/۲۰$

۷. $۹۹\pi/۲$

۹. $\pi(r_۲+r_۱)l$

۱۱. الف) $۴\pi^۲$

ب) خم، دایرهٔ $x^۲+(y-۱)^۲=۱$ است

۱۳. $۱۲\pi a^۲/۵$

۱۵. $s=۲\pi rh$

بخش ۷.۵، صفحه‌های ۳۰۱ تا ۳۰۲

۱. الف) $۲/\pi$

ب) ۰

۳. ۴۹/۱۲

۵. الف) ۱/۲

ب) ۱/۲

۹. ۳۰۰ = میانگین موجودی روزانه؛ میانگین هزینهٔ روزانهٔ نگهداری ۶۰۰ ریال است.

۱۱. ۲۵

۱۳. ب) ۳۲

پ) ۴۲٫۷

بخش ۸.۵، صفحه‌های ۳۱۰ تا ۳۱۱

۱. ۲ ft

۳. $M_۰=L^۲/۲;\ M=L;\ \bar{x}=L/۲$

۵. $M_۰=(۱۷/۱۲)L^۲;\ M=(۷/۳)L;\ \bar{x}=(۱۷/۲۸)L$

۷. $\bar{y}=۲/۳$

۹. $(۱۶/۱۰۵, ۸/۱۵)$

۱۱. $(۱, -۳/۵)$

۱۳. $(۴a/۳\pi, ۴a/۳\pi)$

۱۵. $(۲a/[۳(۴-\pi)], ۲a/[۳(۴-\pi)])$

۱۷. $(۲/۵, ۱)$

۱۹. $(۱, -۲/۵)$

۲۱. $(۰, ۱)$

۲۳. $(۱, ۱)$

۲۵. ۱۳/۶

۲۷. $(۵/۷)h$

۲۹. $(۳/۵, ۱/۲)$

۳۱. $(۰, \pi a/۴)$

بخش ۹.۵، صفحه‌های ۳۱۵ تا ۳۱۶

۱. ۰٫۳ N-m

۳. الف) ۲۰۰

ب) ۴۰۰ in-lb

پ) ۸ in

۵. ۵/۲ ft-lb; ۱۲ ft

۷. الف) $(۱/۲)k$

ب) $(۱/۳)k$

۹. ۱۹۴۴ ft-lb

۱۱. $۴\pi r^۲h(۴\pi+h)$

۱۳. $۲۰۰۷۰۴۰۰\pi/۳$ N-m

۱۵. $۲۰۰\pi/۳$ ft-tons

۱۷. ۱۱۴۰۰ ft-tons

۱۹. ۳۰ hr، ۵۱ min

۲۱. ۸۵٫۱ ft-lb

بخش ۱۰.۵، صفحه‌های ۳۱۹ تا ۳۲۰

۱. ۳۷۵ lb

۳. $۱۶۶۶\frac{۲}{۳}$ lb

۵. $۴۱\frac{۲}{۳}$ lb

۷. ۱۰۳۳٫۴ $\text{ft}^{۳}$

۹. آری، طرف‌متحرك مخزن وقتی‌مخزن پرمی‌شودتنها ۳٫۳۳ ft به‌طرف حفره جا به‌جا می‌شود.

مساله‌های‌گوناگون، فصل ۵، صفحه‌های ۳۲۰ تا ۳۲۵

۱. $۲۹/۲;\ ۲۷/۲$

۳. $۹/۲$

۵. $(۷-۴\sqrt{۲})/۲$

۷. $۳۲/۳$

۹. $۲۴۳/۸$

۱۱. $\approx ۰٫۱۳۷$

۱۳. ۸

۱۵. $۹/۸$

۱۷. $\pi-۲$

۱۹. ماکسیمم در $(۰,۰)$؛ مینیمم در $(۲,-۴)$؛ $۲۷/۴$

۲۱. $۸\pi/۳$

۲۳. $\pm\sqrt{(۲x-a)/\pi}$

۲۵. $۳۲\pi/۳$

۲۷. $(۴\pi/۳)(۴-۲\sqrt{۲})$

۲۹. $(۱۱۲\pi a^{۳})/۱۵$

۳۱. $\pi^{۲}/۴$

۳۳. $۷۲\pi/۳۵$

۳۵. $\pm\sqrt{(۲x+۱)/\pi}$

۳۷. الف) $۱۰۲۲/۱۸۹$

ب) $۱۹/۳$

پ) $۲۷/۲۰$

۳۹. الف) $۴۲۴\pi/۱۵$

ب) $۱۵۳\pi/۴۰$

۴۳. $\pi a/۲$

۴۵. $۸a^{۲}/۳$

۴۷. الف) ۷۲

ب) $۸۲\frac{۲}{۳}$

۴۹. $(۹/۱۰, ۹/۵)$

۵۱. $(۸/۵, ۱)$

۵۳. $(۳/۴, ۳/۱۰)$

۵۵. الف) $(۵a/۷, ۰)$

ب) $(۲a/۳, ۰)$

۵۷. $(۲a/۵, ۲a/۵)$

۵۹. کار = ۲۲۵۰۰ ft-lb ؛ حدود ۲۵۷ sec

۶۱. $[k(b-a)]/ab$

۶۳. ۳۳۵۱۵۳٫۳ ft-lb

۶۵. ۲۲۰۰ lb

۶۷. $۲۲۳۳\frac{۱}{۳}$ lb

۶۹. الف) $۲h/۳$

ب) $(۶a^{۲}+۸ah+۳h^{۲})/[۲(۳a+۲h)]$

۷۱. الف) ۳۲π

ب) $۳۲\sqrt{۲\pi}$

۷۳. $۴\pi^{۲}$

۷۵. $(۰, ۲a/\pi)$

۷۷. $(۰, ۴a/۳\pi)$

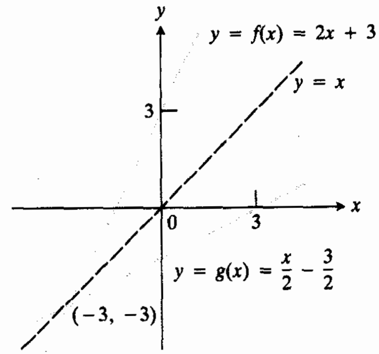
۷۹. $[\pi a^{۳}(۴+۳\pi)]/۳\sqrt{۲}$

فصل ۶

بخش ۶.۱، صفحه‌های ۳۳۱ تا ۳۳۲

۱. الف) $g(x)=(x-۳)/۲$

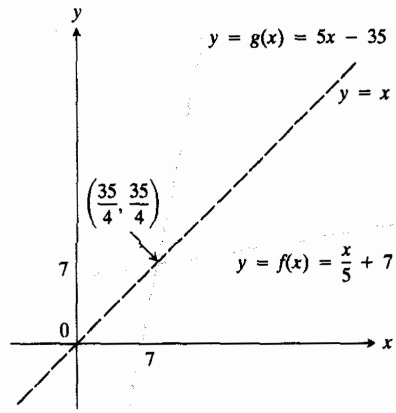
ب)



پ) $f'(x)=2,\ g'(x)=1/2$

۳. الف) $g(x)=5x-35$

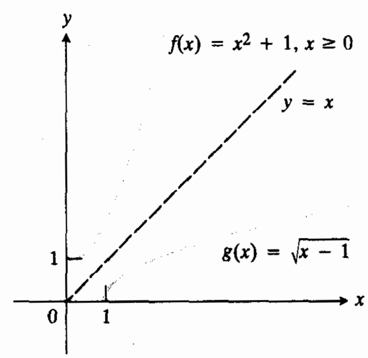
ب)



پ) $f'(x)=1/5,\ g'(x)=5$

۵. الف) $g(x)=\sqrt{x-1}$

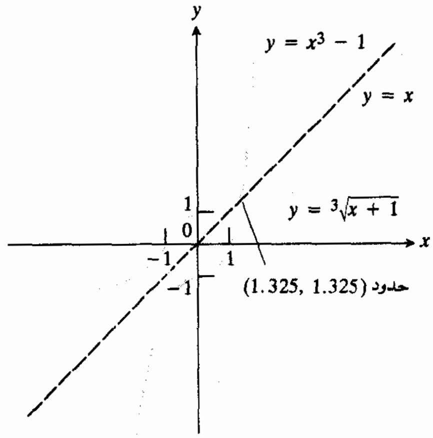
ب)



پ) $f'(5)=10,\ g'(26)=1/10$

۷. الف) $g(x)=\sqrt[3]{x+1}$

ب)



پ) $f'(2)=12,\ g'(7)=1/12$

۹. $x^{1/5}$

۱۱. $x^{3/2}$

۱۳. $\sqrt{x}+1$

۱۵. $x^{-1/2}$

۱۷. ب) $y=\sqrt[3]{x}$ در $x=0$ مشتق ندارد؛ شیب $y=x^3$ در $x=0$ برابر با ۰ است، و در $x=0$ خطهای مماس محورهای x و y هستند.

۱۹. ۱/۶

۲۱. ۲٫۸ min

بخش ۶.۲، صفحه‌های ۳۳۶ تا ۳۳۸

۱. الف) $\pi/4$

ب) $\pi/3$

پ) $\pi/6$

۳. الف) $\pi/6$

ب) $\pi/4$

پ) $\pi/3$

۵. الف) $\pi/3$

ب) $\pi/4$

پ) $\pi/6$

۷. الف) $\pi/۲$
ب) $\pi/۶$
پ) $\pi/۳$

۹. الف) $\pi/۲$
ب) $\pi/۳$
پ) $\pi/۶$

۱۱. الف) $\pi/۴$
ب) $\pi/۶$
پ) $\pi/۳$

۱۳. $\cos\alpha=\sqrt{۳}/۲,\ \tan\alpha=۱/\sqrt{۳},\ \csc\alpha=۲$
$\sec\alpha=۲/\sqrt{۳}$

۱۵. $\sqrt{۲}/۲$

۱۷. ۲

۱۹. $۲/\sqrt{۳}$

۲۱. $\sqrt{۲}/۲$

۲۳. ۰

۲۵. ۰

۲۷. π

۲۹. $-\pi/۳$

۳۱. ۰ر۶

۳۳. $۲\pi/۳$

۳۵. $\pi/۲$

۳۷. $\pi/۲$

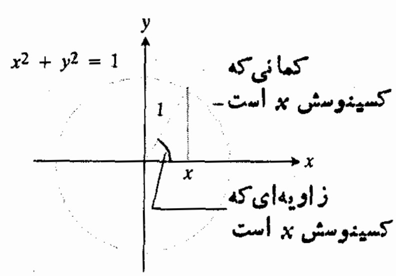
۳۹. $\pi/۲$

۴۱. ۰

۴۳. $۴۲ر۲^\circ$

۴۵. $\alpha=\tan^{-۱}\sqrt{۲}\approx ۵۴ر۷^\circ$

۴۹.



بخش ۶.۳، صفحه‌های ۳۴۲ تا ۳۴۴

۱. $-۲x/\sqrt{۱-x^۴}$

۳. $۱۵/(۱+۹x^۲)$

۵. $۱/\sqrt{۴-x^۲}$

۷. $۱/(|x|\sqrt{۲۵x^۲-۱})$

۹. $-۲x/[(x^۲+۱)\sqrt{x^۴+۲x^۲}]$

۱۱. ۰

۱۳. $-۱/۲x\sqrt{x-۱}$

۱۵. $\sqrt{x^۲-۴}/x$ اگر $x>۲$
$(x^۲+۴)/(x\sqrt{x^۲-۴})$ اگر $x<-۲$

۱۷. $۱/(x^۲+۱)$

۱۹. $(\sin^{-۱}x)^۲$

۲۱. $\pi/۶$

۲۳. $\pi/۱۲$

۲۵. π

۲۷. $\pi/۱۲$

۲۹. $\pi/۶$

۳۱. π

۳۳. $-\pi/۲۴$

۳۵. $\pi/۲$

۳۷. $\pi/۶$

۳۹. $-\pi/۱۲$

۴۱. ۲

۴۳. $۱/۶$

۴۵. $\pi/۲$

۴۷. $(۲/۵)\mathrm{rad/hr}$

۴۹. آری؛ زیرا $\sin^{-۱}x=(\pi/۲)-\cos^{-۱}x$، تفاضل این دوتابع مقدار ثابتی است.

۵۱. $-\sqrt{۱-x^۲}+C$

۵۳. $y=۱/(\tan^{-۱}x+۱)$

۵۵. $\sin^{-۱}y=\sec^{-۱}|x|-(\pi/۲)$

بخش ۶.۴، صفحه‌های ۳۴۸ تا ۳۴۹

۱. $۱/x$

۳. $۱/x$

۵. $-۱/x$

۷. $(۳\ln^۲x)/x$

۹. $\sec x$

۱۱. $x^۲(۱+۳\ln ۲x)$

۱۳. $۱/[x(۱+\ln^۲x)]$

۱۵. $۲x(۱+\ln(x^۲))$

۱۷. $(\tan^{-۱}x)/x^۲$

۱۹. $۲\cos(\ln x)$

۲۱. $\ln|x|+C$

۲۳. $(۱/۲)\ln|x|+C$

۲۵. $\ln ۲$

۲۷. $(۱/۲)\ln ۳$

۲۹. $(۱/۸)\ln ۵$

۳۱. $-(۱/۳)\ln|\cos ۳x|+C$

۳۳. $-(۱/۳)\ln|۴-x^۳|+C$

۳۵. $\ln|\ln x|+C$

۳۷. $(۱/۳)\ln^۳۲$

۳۹. $\ln|\sec x+\tan x|+C$

۴۱. ۰

۴۳. -۲

۴۵. $۲\ln ۲-۱$

۴۷. $((۲\ln ۲)/\pi, ۰)$

۴۹. $\ln ۲$

بخش ۶.۵، صفحه‌های ۳۵۲ تا ۳۵۴

۱. $۴\ln ۲$

۳. $(۳/۲)\ln ۲$

۵. $۲\ln ۲-۲\ln ۳$

۷. $۲\ln ۳-۳\ln ۲$

۹. $۲\ln ۳-\ln ۲$

۱۱. $x/(x^۲+۵)$

۱۳. $-[۱/x+۱/[۲(x+۱)]]$

۱۵. $(۲\cos ۲x+۲\cos^۲x)/\sin ۲x$ یا $\cot x+۲\cot ۲x$

۱۷. $۱/x+۱/[۲(x+۲)]$

۱۹. $۱/x-x^۲/(۱+x^۳)$

۲۱. $۱۰x/(x^۲+۱)+۱/[۲(۱-x)]$

۲۳. $(y/۲)[۱/x+۱/(x+۱)]$

۲۵. $y[۱/[۲(x+۳)]+\cot x-\tan x]$

۲۷. $(y/۳)[۱/x+۱/(x-۲)-۲x/(x^۲+۱)]$

۲۹. $(y/۳)[۱/x+۱/(x+۱)+۱/(x-۲)-۲x/(x^۲+۱)-۲/(۲x+۳)]$

۳۱. $۲y[۱۴/(۳x)+۲/(۳-۲x)+۱/[(۱+x^۲)\tan^{-۱}x]]$

۳۳. $\ln ۲$

۳۵. $\ln\sqrt{۲}$

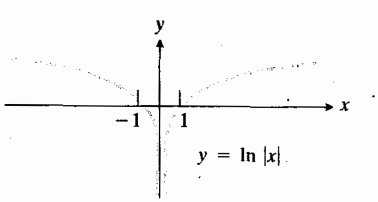
۳۷. $۲-۵\ln ۲$

۳۹. الف) $\ln(۵/۴)$

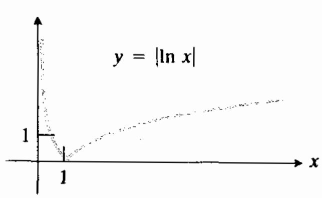
ب) $\sin^{-۱}(۳/۵)$

پ) $۱/۵$

۴۱. الف)



ب)



۴۳. $\ln 2$

۴۵. الف) $4\ln 4-3$

ب) $27\pi/5$

۴۷. ۰٫۰۰۵ (خطی)؛ ۰٫۰۰۰۳ (درجهٔ دوم)

بخش ۶.۶، صفحه‌های ۳۵۸ تا ۳۶۱

۱. x

۳. x^{-2}

۵. x^{-1}

۷. $2x$

۹. $x-x^2$

۱۱. xe^x

۱۳. $4\ln^2 x$

۱۵. x^2+2x+1

۱۷. $e^{-x}\sin x+2$

۱۹. $3e^{3x}$

۲۱. $-7e^{5-7x}$

۲۳. $xe^x(x+2)$

۲۵. $(\cos x)e^{\sin x}$

۲۷. $(1-x)/x$

۲۹. $e^{\sin^{-1}x}/\sqrt{1-x^2}$

۳۱. $27x^2e^{3x}$

۳۳. $2xe^{-x^2}(1-x^2)$

۳۵. $e^x/(1+e^{2x})$

۳۷. $y(3/x-2-5\tan 5x)$

۳۹. $y(\sin x+x\cos x)$

۴۱. $[2e^{2x}-\cos(x+3y)]/[3\cos(x+3y)]$

۴۳. 8

۴۵. 0

۴۷. a

۴۹. $2/3$

۵۱. 7

۵۳. $\ln 3$

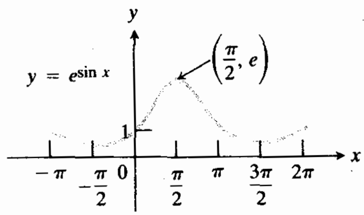
۵۵. $\tan^{-1}2-(\pi/4)$

۵۷. $1/2$

۵۹. 1

۶۱. الف) ماکسیمم برابر e در $x=\pi/2$، مینیمم برابر $1/e$ در $x=-(\pi/2)$ یا $x=3\pi/2$

ب)



۶۳. $1/(2e)$

۶۵. ۰٫۰۰۵ (خطی)؛ ۰٫۰۰۰۱۷ (درجهٔ دوم)

۶۷. الف) 1

ب) $\pi/2$

پ) π

۶۹. ب) $y=3e^{-2t}$

۷۱. $y=-e^{-x}+e^{-4}$

۷۳. $(y+1)^2=2x$

بخش ۶.۷، صفحه‌های ۳۶۵ تا ۳۶۷

۱. $(\ln 2)2^x$

۳. $(\ln 8)8^x$ یا $(3\ln 2)2^{3x}$

۵. $(\ln 9)9^x$ یا $(2\ln 3)3^{2x}$

۷. $(2\ln 2)2^{2x}$ یا $(\ln 4)4^x$

۹. $y(1+\sec^2 x\ln(\sin x))$

۱۱. $[(2\ln x)x^{\ln x}]/x$

۱۳. $(1-x)^x[x/(x-1)+\ln(1-x)]$

۱۵. $2^x[1/x+(\ln 2)(\ln x)]$

۱۷. $4/\ln 5$

۱۹. $1/(2\ln 2)$

۲۱. $4/\ln 3$

۲۳. $(3\ln 2)/\ln 4$

۲۵. $۲۴/\ln ۲۵$

۲۷. $۱/\ln ۲$

۲۹. ب

۳۱. ۰

۳۳. $\ln ۳$

۳۵. $e^{۲}$

۳۷. الف) $۱/۴$

ب) $-۵/۸$

۳۹. $x=-۰٫۷۶۶۶۶۴۶۹۶,\ y=۰٫۵۸۷۷۷۴۷۵۶$

بخش ۶.۸، صفحه‌های ۳۷۲ تا ۳۷۴

۱. ۲

۳. -۲

۵. ۲

۷. $۴/۳$

۹. ۱۲

۱۱. $\ln ۳/\ln ۲$

۱۳. $۱/۲$

۱۵. $۱/(x\ln ۴)$

۱۷. $۱/(\ln ۱۰)$

۱۹. $۱/x$

۲۱. $۱/[۲\ln ۱۰(x+۱)]$

۲۳. $-۱/(x\log_{۲}^{۲} x\ln ۲)$

۲۵. $۲/[(x+۱)\ln ۵]$

۲۷. $\cot x/\ln ۷$

۲۹. $\log_{۲} x$ تندتر تغییر می‌کند.

۳۱. $(\ln ۱۰)/۲$

۳۳. $(\ln^{۲} ۸)/\ln ۴$

۳۵. $۹\ln ۵$

۳۷. $(\ln ۱۰)(\ln ۲)$

۳۹. الف، ب، پ، ث، ج، چ، ح

۴۱. الف، ب، پ، ح

۴۳. $\ln x$ سریعتر رشد می‌کند.

۴۵. اگر $\deg(f)>\deg(g)$، f سریعتر از g رشد می‌کند، و اگر $\deg(f)=\deg(g)$ آهنگ رشد هر دو یکی است.

۴۷. الف) $۱۰^{-۷}$

ب) ۷

پ) ۱

بخش ۶.۹، صفحهٔ ۳۷۸ تا ۳۸۰

۱. $۲٫۸۱\times ۱۰^{۱۴}$

۳. ۲۱٫۹ سال

۵. $Q=Q_{۰}e^{kt}$

۷. ٪۴٫۵

۱۱. الف) $k=(-\ln ۲)/۵۷۰۰$

ب) ۱۸۹۳۵ سال

پ) ۶۶۵۸ سال

۱۳. ۴۶۵ روز

۱۵. -۳۰°

۱۷. $۵۳٫۴^{\circ}$ پس از ۱۵ دقیقه؛ $۲۳٫۸^{\circ}$ پس از ۲ ساعت؛ در ۳٫۹ ساعت.

۱۹. $(V/R)[۱-(۱/e)]A$

۲۱. $(mv_{۰}/k)(۱-e^{-kt/m})$

۲۳. $۵۸۵٫۴\,\mathrm{kg}$

بخش ۶.۱۰، صفحه‌های ۳۸۱ تا ۳۸۷

۱. $۱\pm\sqrt{۲}$

۳. $\pi/۲$

۵. $\pi\sqrt{۳}$

۷. ب) ۶۱°

۱۱. $۱+\ln x$

۱۳. $(۱-\ln x)/x^{۲}$

۱۵. $(\ln x-۱)/\ln^{۲} x$

۱۷. $x^۲(۱+۳\ln x)$

۱۹. $۲/x$

۲۱. $۱/(۱-x^۲)$

۲۳. $۱/[x(x^۲+۱)]$

۲۵. $\sec^{-۱}x$

۲۷. $[x(x-۲)/(x^۲+۱)^{۱/۳}][(۲x-۲)/[x(x-۲)]$
$-۲x/[۳(x^۲+۱)]]$

۲۹. $-(۱/۳)\ln ۳$

۳۱. $\ln\sqrt{۳}$

۳۳. $-\ln ۳۲$

۳۵. $(۱/۴)\ln(x^۴+۱)+C$

۳۷. $(۱/۳)\ln|\sin(۲+x^۳)|+C$

۳۹. $\ln(۳+\sin^{-۱}x)+C$

۴۱. الف) ۰
ب) ۰

۴۵. الف) x
ب) $-(۳/۲)+۲x-(x^۲/۲)$

۴۷. $a\ln|y_۱/a|$

۴۹. $y=xe^{x-y}$

۵۱. $y=(b/a^۲)x^۲$

۵۳. $y^۲=۴x$

۵۵. $-(۱/x^۲)e^{۱/x}$

۵۷. $e^{-x}(۱-x)$

۵۹. $e^{-x}[(۱/x)-\ln x]$

۶۱. $(۱/x)+۲$

۶۳. $(\sin ۲x)e^{\sin^۲ x}$

۶۵. $۱/(۱+e^x)$

۶۷. الف) $۲-e^{۲x}$
ب) $e^{۲x-(۱/۲)e^{۲x}}(۲-e^{۲x})$

۶۹. $۸/(e^{۲x}+e^{-۲x})^۲$

۷۱. $۲x/\sqrt{۱-x^۴}-e^{(x^۲)}-۲x^۲e^{(x^۲)}$

۷۳. $۵e^{۲x}\cos ۳x-e^{۲x}\sin ۳x$

۷۵. e

۷۷. $۳/۸$

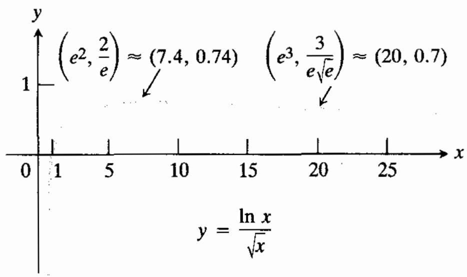
۷۹. ۰

۸۱. ۰

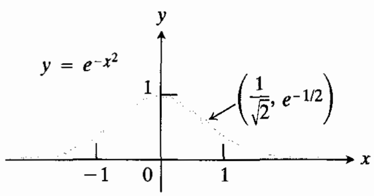
۸۳. ۱

۸۵. $۱+۵x$

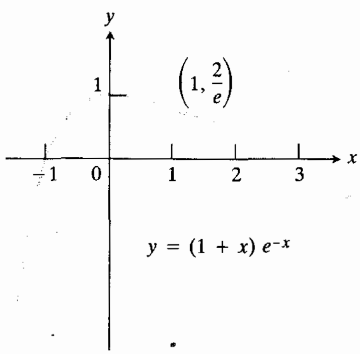
۸۷. الف)



ب)



پ)



۸۹. $y=۱-(۱/۲)(e^x+e^{-x})$

۹۱. $(\pi/۲)((۳/۲)+\ln ۲)$

۹۳. $a^۲[e-(۱/e)]$

۹۵. $\sqrt{e}/۲$

۹۹. $2e^x/(2-e^x)$

۱۰۱. اگر m جرم ذره باشد، $F=m\omega^2 x$

۱۰۷. الف) $x^{\tan 3x}[(\tan 3x+3x\ln x\sec^2 3x)/x]$

ب) $-(y\ln y)/(x\ln x)$

پ)
$(x^2+2)^{1-x}(4x-2x^2-(x^2+2)\ln(x^2+2))$

ت) $x^{1/x}[(1-\ln x)/x^2]$

۱۰۹. الف) $1/(2\ln 4)$

ب) ۱

۱۱۳. ۳۴ر۷ سال

۱۱۵. $2\sqrt{2}$

فصل ۷

بخش ۱.۷، صفحه‌های ۳۹۲ تا ۳۹۵

۱. $(2/3)(3x^2+5)^{3/2}+C$

۳. ۱/۲

۵. ۱/۴

۷. $\tan(e^x)+C$

۹. $(1/6)(3+4e^x)^{3/2}+C$

۱۱. $\ln|\ln x|+C$

۱۳. ۲

۱۵. $(1/2)\tan^2 x+C$ یا $(1/2)\sec^2 x+C$

۱۷. $\sin x-(1/3)\sin^3 x+C$

۱۹. $(1/3)\sec^3 x-\sec x+C$

۲۱. ۱۹/۳

۲۳. $-1/[2(2x-7)]+C$

۲۵. $-\ln 3$

۲۷. $(2/3)(\sin x)^{3/2}+C$

۲۹. $-(1+\sin x)^{-1}+C$

۳۱. ۰

۳۳. $-(1/4)\sqrt{1-4x^2}+C$

۳۵. $\pi/4$

۳۷. $(3/2)\ln 2$

۳۹. $(\pi-2)/4$

۴۱. $\pi/2$

۴۳. $-(1/12)(3x^2+4)^{-2}+C$

۴۵. $(2/3)\sqrt{x^2+5}+C$

۴۷. ۳/۲

۴۹. $-(1/3)e^{-3x}+C$

۵۱. $\tan^{-1}(e^x)+C$

۵۳. $-(1/3)\cos^3 x+C$

۵۵. ۹/۲

۵۷. $(1/2)\ln|e^{2x}-e^{-2x}|+C$

۵۹. ۰

۶۱. $\sec^{-1}|2t|+C$

۶۳. $\ln|\sin x|+C$

۶۵. $(1/3)\sec^3 x+C$

۶۷. $(1/3)e^{\tan 3x}+C$

۶۹. $(\sqrt{3}-1)/2$

۷۱. $-\sqrt{1+\cot 2t}+C$

۷۳. $(1/2)(e^{\pi/4}-1)$

۷۵. $2/\ln 2$

۷۷. $(1/2)\ln^2 x+C$

۷۹. $2\ln 2$

۸۱. $(1/2)e^{(x^2)}+C$

بخش ۲.۷، صفحه‌های ۳۹۹ تا ۴۰۰

۱. $-x\cos x+\sin x+C$

۳. $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$

۵. $2\ln 2-(3/4)$

۷. $(x^4/4)\ln x-(x^4/16)+C$

۹. $x\tan^{-1}x-(1/2)\ln(1+x^2)+C$

۱۱. $x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}+C$

۱۳. $x\tan x+\ln|\cos x|+C$

۱۵. $e^x(x^3-3x^2+6x-6)+C$

۱۷. $e^x(x^2-7x+7)+C$

۱۹. $e^x(x^5-5x^4+20x^3-60x^2+120x-120)+C$

۲۱. $(\pi^2/8)-1/2$

۲۳. $x^4\sin x+4x^3\cos x-12x^2\sin x-24x\cos x+24\sin x+C$

۲۵. $(x^2/a)\sin ax+(2x/a^2)\cos ax-(2/a^3)\sin ax+C$

۲۷. $(2\pi/3)-(\sqrt{3}/2)$

۲۹. $1/2$

۳۱. $(x^2/2)\sin^{-1}(1/x)+(1/2)\sqrt{x^2-1}+C$

۳۳. $(e^x/2)(\sin x-\cos x)+C$

۳۵. $(e^{2x}/13)(3\sin 3x+2\cos 3x)+C$

۳۷. $(x/2)[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C$

۳۹. الف) π
ب) 3π

۴۱. $2\pi[(e-2)/e]$

۴۳. $\bar{x}=(6-2e)/(e-2);\ \bar{y}=(e^2-3)/[8(e-2)]$

۴۵. الف) $\pi^4/6-\pi^2/4$
ب) 8π

۴۷. $\pi^2+\pi-4$

۴۹. $[2\pi\sqrt{2}(e^{\pi}-2)]/5$

۵۱. $[(x^2+1)/2]\tan^{-1}x-(x/2)+C$

بخش ۳.۷، صفحه‌های ۴۰۷ تا ۴۰۹

۱. $-\cos x+(2/3)\cos^3x-(1/5)\cos^5x+C$

۳. $2/3$

۵. $-\cos x+\cos^3x-(3/5)\cos^5x+(1/7)\cos^7x+C$

۷. $-(3/5)\cos^{5/3}x+(6/11)\cos^{11/3}x-(3/17)\cos^{17/3}x+C$

۹. $\ln(2+\sqrt{3})$

۱۱. $\sqrt{3}-(1/2)\ln(2-\sqrt{3})$

۱۳. $(1/2)\sec(e^x)\tan(e^x)+(1/2)\ln|\sec(e^x)+\tan(e^x)|+C$

۱۵. $4/3$

۱۷. $96/35$

۱۹. $(1/2)+\ln(\sqrt{2}/2)$

۲۱. $(\tan^5x)/5-(\tan^3x)/3+\tan x-x+C$

۲۳. $-\ln|\csc x+\cot x|+C$

۲۵. الف) $\ln(\sqrt{2}+1)$
ب) $\ln\sqrt{3}$

۲۷. $-6/5$

۲۹. π

۳۱. 0

۳۳. $-(1/4)\ln|\csc 4x+\cot 4x|+C$

۳۵. $2\sqrt{2}-2\ln(\sqrt{2}+1)$

۳۷. $\ln(\sqrt{2}+1)$

۳۹. الف) ۸٫۳ cm
ب) ۱۰٫۹ cm

بخش ۴.۷، صفحه‌های ۴۱۲ تا ۴۱۳

۱. π

۳. $(1/2)t-(1/8)\sin 4t+C$

۵. $\pi/16$

۷. $3\pi/8a$

۹. $\tan x-(3/2)x+(1/4)\sin 2x+C$

۱۱. $\pi/16$

۱۳. $\tan\theta+(1/2)\sin 2\theta-(1/32)\sin 4\theta-(15/8)\theta+C$

۱۵. ۲

۱۷. $۲/۵$

۱۹. $۴-\pi$

۲۱. $۲\ln(\sqrt{۲}+۱)$

۲۳. ۲

۲۵. $۲\ln(\sqrt{۲}+۱)$

۲۷. ۰

۲۹. $-\cot x-(\cot^{۳}x)/۳+C$

۳۱. $۲-(\pi/۲)$

۳۳. $\ln|\sec t+\tan t|-\sin t+C$

۳۵. $۲\sqrt{۲}$

۳۷. $\pi^{۴}/۶-\pi^{۲}/۴$

بخش ۵.۷، صفحه‌های ۴۱۷ تا ۴۱۹

۱. $\pi/۴$

۳. $(۱/۲)\tan^{-۱}۲x+C$

۵. $\sqrt{۲}/۲$

۷. $\ln|\sqrt{۲۵+y^{۲}}+y|+C$

۹. $(۱/۳)\ln|\sqrt{۲۵+۹y^{۲}}+۳y|+C$

۱۱. $\ln|۳z+\sqrt{۹z^{۲}-۱}|+C$

۱۳. $\pi/۲۴$

۱۵. $\pi/۲۴$

۱۷. $۴\sqrt{۳}-۲\ln(۲+\sqrt{۳})$

۱۹. $-\sqrt{۹-x^{۲}}/۹x+C$

۲۱. $۱/۵$

۲۳. $(۲۵\pi/۴)$

۲۵. $\pi/۶$

۲۷. ۲π

۲۹. $(۲-\sqrt{۲})/۳$

۳۱. $۲\sec^{-۱}۲x+C$

۳۳. $-(\sqrt{۱-x^{۲}}/x)-\sin^{-۱}x+C$

۳۵. $-(۳/۴)+(\sqrt{۷}/۳)$

۳۷. $x/(a^{۲}\sqrt{a^{۲}-x^{۲}})+C$

۳۹. $-\sqrt{۱۶-y^{۲}}+C$

۴۱. $-(۱/\sqrt{x^{۲}-۱})+C$

۴۳. الف) $(۱/a)\tan^{-۱}(u/a)+C$
ب) $\sin^{-۱}(u/a)+C$

۴۵. الف) $u/\sqrt{a^{۲}+u^{۲}}$
ب) a/u

۴۷. $(۸\pi^{۲}+۶\pi\sqrt{۳})/۳\sqrt{۳}$

۴۹. $y=۱/[\sin^{-۱}(x/۲)+\sqrt{۲}-x]$

۵۱. $(\delta/۲)[۲\sqrt{۳}-\sqrt{۲}+\ln(۲+\sqrt{۳})/(۱+\sqrt{۲})]$

بخش ۶.۷، صفحه‌های ۴۲۱ تا ۴۲۳

۱. $\pi/۸$

۳. $\ln\sqrt{۲}+(\pi/۸)$

۵. $\pi/(۶\sqrt{۳})$

۷. $(۱/۳)\ln|\sqrt{۹x^{۲}-۶x+۵}+۳x-۱|+C$

۹. $(۱/۹)\sqrt{۹x^{۲}-۶x+۵}+(۱/۹)\ln|\sqrt{۹x^{۲}-۶x+۵}$
$+۳x-۱|+C$

۱۱. $\ln|\sqrt{x^{۲}+۲x}+x+۱|+C$

۱۳. $۲-\ln ۹$

۱۵. $\ln|\sqrt{x^{۲}-۲x-۳}+x-۱|+C$

۱۷. $-\sqrt{۲x-x^{۲}}+۲\sin^{-۱}(x-۱)+C$

۱۹. $-\sqrt{۵+۴x-x^{۲}}+۲\sin^{-۱}[(x-۲)/۳]+C$

۲۱. $۳-۲\sqrt{۲}$

۲۳. $\ln\sqrt{۲}-(\pi/۲)$

۲۵. $۱۰۰\pi[\tan^{-۱}(۵/۲)-\tan^{-۱}(-۳/۴)]$

۲۷. $\pi\sqrt{۲}[\sqrt{۲}+\ln(۱+\sqrt{۲})]$

۲۹. $\bar{x}=(۴+\ln ۹)/\ln ۹$
$\bar{y}=[۲\tan^{-۱}(۴/۳)]/(۳\ln ۹)$

۳۱. $\pi/۲$

بخش ۷.۷، صفحه‌های ۴۲۸ تا ۴۳۰

۱. $۲/(x-۳)+۳/(x-۲)$

۳. $۱/(x+۱)+۳/[(x+۱)^۲]$

۵. $-۲/x-۱/x^۲+۲/(x-۱)$

۷. $۱-۱۲/(x-۲)+۱۷/(x-۳)$

۹. $۱/۳x^۲-۱/[۳(x^۲+۹)]$

۱۱. $\ln\sqrt{۳}$

۱۳. $۴-\ln ۳$

۱۵. $۲\ln ۳$

۱۷. $(۲/۷)\ln|x+۶|+(۵/۷)\ln|x-۱|+C$

۱۹. $(۹/۲)-۶\ln ۲$

۲۱. $(۵/۶)\ln|x+۵|+(۱/۶)\ln|x-۱|+C$

۲۳. $(۲/۳)\ln|x+۵|+(۱/۳)\ln|x-۱|+C$

۲۵. $\ln(۳/۲)-۱/۴$

۲۷. $-(۳/۸)\ln|x|+(۵/۱۶)\ln|x-۲|$
$+(۱/۱۶)\ln|x+۲|+C$

۲۹. $۵(\sqrt{۳}-\pi/۳)$

۳۱. ۰

۳۳. $۲\ln|x|-(۱/۲)\ln(x^۲+۱)+\tan^{-۱}x+C$

۳۵. $x^۲/۲+(۳/۲)\ln|x+۱|-(۹/۲)\ln|x+۳|+C$

۳۷. $\pi/۴+۱/۲$

۳۹. $۱/۲-\pi/۴$

۴۱. $۲\ln ۳-۳\ln ۲$

۴۳. $۵/۴-۳\pi/۸$

۴۵. $۴\sqrt{x}-x-۴\ln(\sqrt{x}+۱)+C$

۴۷. $۲\sqrt{x}-۳\sqrt[۳]{x}+۶\sqrt[۶]{x}-۶\ln(\sqrt[۶]{x}+۱)+C$

۴۹. $\ln ۲-۲+(\pi/۲)$

۵۱. $۶\pi\ln ۵$

۵۳. $(۸+۸\ln ۲-۳\ln ۳)/(۳\ln ۵-۲\ln ۳)$

۵۵. الف) $x/(۱۰۰۰-x)=e^{۴t}/۴۹۹$
ب) ۱٫۵۵ روز

۵۷. $x/(a-x)=[x_۰/(a-x_۰)]e^{akt}$

بخش ۸.۷، صفحه‌های ۴۳۷ تا ۴۳۹

۱. $\pi/۲$

۳. ۶

۵. ۴

۷. ۱۰۰۰

۹. $\ln ۲$

۱۱. واگرا

۱۳. همگرا

۱۵. همگرا

۱۷. واگرا

۱۹. همگرا

۲۱. واگرا

۲۳. واگرا

۲۵. همگرا

۲۷. همگرا

۲۹. واگرا

۳۱. واگرا

۳۳. همگرا

۳۵. واگرا

۳۷. همگرا

۳۹. همگرا

۴۱. ۰٫۸۸۶۲

۴۵. ۱

۴۷. ۲π

۴۹. $(\bar{x},\bar{y})=(۲/\pi,۰)$

بخش ۷.۹، صفحه‌های ۴۴۱ تا ۴۴۲

۱. $\sqrt{\pi}/۲$

۳. $(۲/\sqrt{۳})[\tan^{-۱}\sqrt{۲}-(\pi/۴)]$

۵. $x/[۱۸(۹-x^{۲})]+(۱/۱۰۸)\ln|(x+۳)/(x-۳)|+C$

۷. $(۴۴-۲۴\sqrt{۲})/۲۳۱$

۹. $\sqrt{۲}(\pi/۴-۱)$

۱۱. $-(۱/۶)\ln|(۵+۴\sin ۲x$
$+۳\cos ۲x)/(۴+۵\sin ۲x)|+C$

۱۳. $[(x+۱)(۲x-۳)^{۳/۲}]/۵$

۱۵. $۱۰!$

۱۷. $\pi/۴$

۱۹. $\pi/۲-۱/۲$

۲۱. $\bar{x}=۴/۳,\ \bar{y}=\ln\sqrt{۲}$

بخش ۱۰.۷، صفحه‌های ۴۴۴ تا ۴۴۶

۱. $۳\pi/۴$

۳. $(۱/۶)\cos^{۵}x\sin x+(۵/۲۴)\cos^{۳}x\sin x$
$+(۵/۱۶)(\cos x\sin x+x)+C$

۵. $۳\pi/۸$

۷. $۸/۱۵$

۹. $(۱/۴)\tan^{۲}۲x+(۱/۲)\ln|\cos ۲x|+C$

۱۱. $(۱/۴)\tan^{۴}x-(۱/۲)\tan^{۲}x+\ln|\cos x|+C$

۱۳. $-(۱/۲)\cot^{۲}x-\ln|\sin x|+C$

۱۵. $\pi/۲-۴/۳$

۱۷. $۴\sqrt{۳}$

۱۹. $(۱/۴)\sec^{۳}x\tan x+(۳/۸)\sec x\tan x$
$+(۳/۸)\ln|\sec x+\tan x|+C$

۲۱. $\sqrt{۲}+\ln(\sqrt{۲}+۱)$

۲۳. $-(۱/۳)\csc^{۲}x\cot x-(۲/۳)\cot x+C$

۲۵. $۱/\sqrt{۲}$

۲۷. $(۷۳۵/۱۰۲۴)+(۳/۸)\ln ۲$

۳۱. ب) $-(x^{n}/a)\cos ax+(n/a)\int x^{n-۱}\cos ax\,dx$

۳۳. $(۸۱(\ln ۳)^{۲}-۲\ln ۳)/۴$

مساله‌های گوناگون، فصل ۷، صفحه‌های ۴۴۶ تا ۴۵۳

۱. $۲\sqrt{۱+\sin x}+C$

۳. $(\tan^{۲}x)/۲+C$

۵. ۱۸

۷. $\ln|\sqrt{x^{۲}+۲x+۲}+x+۱|+C$

۹. $e^{x}(x^{۲}-۲x+۲)+C$

۱۱. $\tan^{-۱}(e^{t})+C$

۱۳. $۲\tan^{-۱}\sqrt{x}+C$

۱۵. $(۹/۲۵)(t^{۵/۳}+۱)^{۵/۳}+C$

۱۷. $\ln|(\sqrt{e^{t}+۱}-۱)/(\sqrt{e^{t}+۱}+۱)|+C$

۱۹. $\pi/۴$

۲۱. $\pi/۴$

۲۳. $\ln\sqrt{۳}$

۲۵. ۲

۲۷. $(۳/۵)(۱+e^{x})^{۵/۳}-(۳/۲)(۱+e^{x})^{۲/۳}+C$

۲۹. $۵/۱۲$

۳۱. $\ln|۲+\ln x|+C$

۳۳. $(۴/۲۱)(۲\sqrt[۴]{۲۷}+\sqrt[۴]{۸})$

۳۵. $۳/۸۰$

۳۷. $-۲\sqrt{x+۱}\cos\sqrt{x+۱}+۲\sin\sqrt{x+۱}+C$

۳۹. $(۱/۴)\ln ۳$

۴۱. $\ln|y|-(۱/۳)\ln|۲y^{۳}+۱|$
$+۱/[۳(۲y^{۳}+۱)]+C$

۴۳. $\ln|x/\sqrt{x^{۲}+۱}|+۱/[۲(x^{۲}+۱)]+C$

۴۵. $\ln|e^{x}-۱|-x+C$

۴۷. $(۳/۲)\ln|x+۳|-(۱/۲)\ln|x+۱|+C$

۴۹. $\ln|x/\sqrt{x^{۲}+۴}|+C$

۵۱. $\sqrt{x^{۲}-۱}-\tan^{-۱}\sqrt{x^{۲}-۱}+C$

۵۳. $\ln|x|-۲\ln|۲\sqrt{x}+۱|+C$

۵۵. $(۱/۲)\ln(۵/۲)$

۵۷. $(۳/۸)(۱+e^{۲t})^{۱/۳}(e^{۲t}-۳)+C$

۵۹. $x^۲/۲+(۴/۳)\ln|x+۲|+(۲/۳)\ln|x-۱|+C$

۶۱. $\ln|x-۱|-۱/(x-۱)+C$

۶۳. $\tan^{-۱}(۲\sqrt{y^۲+y})+C$

۶۵. $(۳/۸)\sin^{-۱}x+(۱/۲)x\sqrt{۱-x^۲}$
$+(۱/۸)x\sqrt{۱-x^۲}(۱-۲x^۲)+C$

۶۷. $x\tan x+\ln|\cos x|-(x^۲/۲)+C$

۶۹. $\pi^۲-۴$

۷۱. $[(۹-۲\sqrt{۳})\pi]/۷۲$

۷۳. $(۱/۲)+\ln ۲$

۷۵. $x\sec^{-۱}x-\ln|x+\sqrt{x^۲-۱}|+C$

۷۷. $(۱/۱۶)\ln|(x^۲-۴)/(x^۲+۴)|+C$

۷۹. $\ln|\cot x|+C$

۸۱. $(۲\sqrt{۳}\pi-۹)/۹$

۸۳. $\sqrt{۲}\tan^{-۱}(\sqrt{۲}\tan t)-t+C$

۸۵. $e^t\sin(e^t)+\cos(e^t)+C$

۸۷.
$(x^۲/۲)\ln(x^۳+x)+(۱/۲)\ln(x^۲+۱)-(۳/۴)x^۲+C$

۸۹. $\ln|\sqrt{۳+\sin^۲x}+\sin x|+C$

۹۱. $(x^۲-۲)\cos(۱-x)+۲x\sin(۱-x)+C$

۹۳. $(\tan^۲x)/۲+\ln|\cos x|+C$

۹۵. $\ln\sqrt{x^۲+۱}+۱/[۲(x^۲+۱)]+C$

۹۷. $۲۹۸/۱۵$

۹۹. $x\ln|x-\sqrt{x^۲-۱}|+\sqrt{x^۲-۱}+C$

۱۰۱. $x\ln|x+\sqrt{x}|-x+\sqrt{x}-\ln(\sqrt{x}+۱)+C$

۱۰۳. $۳\ln ۳-۲$

۱۰۵. ۲

۱۰۷. $(۱/۴)(\sin^{-۱}x)^۲+(۱/۲)x\sqrt{۱-x^۲}\sin^{-۱}x$
$-(x^۲/۴)+C$

۱۰۹. $x-\tan x+\sec x+C$

۱۱۱. $(۱/۲)\ln|\sin x-۱|-(۱/۱۸)\ln|\sin x+۱|$
$-(۴/۹)\ln|\sin x-۲|-۱/[۳(\sin x-۲)]+C$

۱۱۳. $-۲\sin^{-۱}[\cos(x/۲)/\cos(\alpha/۲)]+C$

۱۱۵. $\ln ۶-۲+۲\sqrt{۳}\tan^{-۱}(۱/\sqrt{۳})$

۱۱۷. $\ln|(۱+\sqrt{۱-e^{-t}})/(۱-\sqrt{۱-e^{-t}})|+C$

۱۱۹. $x(\sin^{-۱}x)^۲-۲x+۲\sqrt{۱-x^۲}\sin^{-۱}x+C$

۱۲۱. $(۱/۲)x^۲\sin^{-۱}x-(۱/۴)\sin^{-۱}x$
$+(۱/۴)x\sqrt{۱-x^۲}+C$

۱۲۳. $(۱/۴)\ln|\sec ۲\theta+\tan ۲\theta|+(۱/۲)\theta+C$

۱۲۵. $(۱/۴)\ln|۱-۲t^۲|$
$-(۱/۴)\ln|(۱+۲t\sqrt{۱-t^۲})/(۱-۲t^۲)|$
$-(۱/۲)\sin^{-۱}t+C$

۱۲۷. $(۱/۱۶)\ln[(x^۲+۲x+۲)/(x^۲-۲x+۲)]$
$+(۱/۸)(\tan^{-۱}(x+۱)+\tan^{-۱}(x-۱))+C$

۱۲۹. $\pi/۴$

۱۳۱. $\pi/۲$

۱۳۳. -۱

۱۳۵. $a^۲(\pi-۲)/۴\ ;\ \bar{x}=\bar{y}=۲a/[۳(\pi-۲)]$

۱۳۷. $۲k\pi^۲a^۲$

۱۳۹.
$\sqrt{۱+e^۲}-\ln|(\sqrt{۱+e^۲}+۱)/e|-\sqrt{۲}+\ln(۱+\sqrt{۲})$

۱۴۱. $\pi[e^۲\sqrt{۱+e^۴}+\ln(\sqrt{۱+e^۴}+e^۲)-\sqrt{۲}$
$-\ln(۱+\sqrt{۲})]$

۱۴۳. ۲π

۱۴۵. $(۲\pi a^۳)/۳$

۱۴۷. به ۱ همگراست

۱۴۹. $۱/۲$ ۱۵۱. ۲

۱۵۳. $۲/[۱-\tan(x/۲)]+C$

۱۵۵. $-\cot(x/۲)-x+C$

۱۵۷. $-(\sqrt{۲}/۲)\ln|[\tan(x/۲)+۱+\sqrt{۲}]/[\tan(x/۲)+۱-\sqrt{۲}]|+C$

فصل ۸

بخش ۱.۸، صفحه‌های ۴۵۶ تا ۴۵۷

۱. $x^۲=۸y+۱۶$

۳. $x-y=۱$

۵. $(x^۲+y^۲)^۲+۸(y^۲-x^۲)=۰$

۷. $۳x^۲-۲۰x+۴y^۲+۱۲=۰$

۹. $۵x^۲-۴y^۲=۲۰$

۱۱. $x^۲+y^۲-۴x-۶y+۴=۰$

۱۳. $C(۲,۲)$, $\sqrt{۵}$

بخش ۲.۸، صفحه‌های ۴۵۹ تا ۴۶۰

۱. $x^۲+y^۲-۴y=۰$

۳. $x^۲+y^۲-۶x+۸y=۰$

۵. $x^۲+y^۲+۴x+۲y<۱$

۷. $C(۰,۰)$, $r=۴$

۹. $C(۰,۱)$, $r=۲$

۱۱. $C(-۲,۰)$, $r=۴$

۱۳. $C(-۱,-۱)$, $r=۱$

۱۵. $C\left(-\frac{۱}{۴}, -\frac{۱}{۴}\right)$, $r=\sqrt{۲}/۴$

۱۷. فقط $(-۱,۲)$

۱۹. $x^۲+y^۲-۴x-۴y=۵$

۲۱. $۵x^۲+۵y^۲+۱۰x-۱۰y+۱=۰$

۲۳. $x^۲+y^۲+۲x+۲y-۲۳=۰$

۲۵. $x^۲+y^۲-۶x-۸y=۰$; $C(۳,۴)$, $r=۵$

۲۷. $C(-۲,۴)$, $r=۲\sqrt{۵}$

۲۹. $۳\sqrt{۷}/۲$ و $۷/۲$

بخش ۳.۸، صفحه‌های ۴۶۵ تا ۴۶۷

۱. $x^۲=۸y$, $y=-۲$

۳. $x^۲=-۱۶y$, $y=۴$

۵. $(x+۲)^۲=۴(y-۳)$, $y=۲$

۷. $(y-۱)^۲=۱۲(x+۳)$, $x=-۶$

۹. $y^۲=۸(x-۲)$, $F(۴,۰)$

۱۱. $(y-۱)^۲=-۱۶(x+۳)$, $F(-۷,۱)$

۱۳. $(y-۱)^۲=۴x$, $F(۱,۱)$

۱۵. هادی: $x=-۲$، محور: $y=۰$، $F(۲,۰)$، $V(۰,۰)$

۱۷. هادی: $y=-۲۵$، محور: $x=۰$، $F(۰,۲۵)$، $V(۰,۰)$

۱۹. هادی: $y=۳$، محور: $x=۱$، $F(۱,-۱)$، $V(۱,۱)$

۲۱. هادی: $x=۳$، محور: $y=۰$، $F(۱,۰)$، $V(۲,۰)$

۲۳. محور: $x=-۱$، $F(-۱,۰)$، $V(-۱,-۱)$
هادی: $y=-۲$

۲۵. محور: $y=۲$، $F(۰,۲)$، $V(-۲,۲)$
هادی: $x=-۴$

۲۷. تمام نقاط صفحه بجز آنهایی که در $x=y^۲$ صدق می‌کنند

بخش ۴.۸، صفحه‌های ۴۷۲ تا ۴۷۴

۱. $x^۲/۱۲+y^۲/۱۶=۱$, $e=۱/۲$

۳. $x^۲/۵+(y-۲)^۲/۹=۱$, $e=۲/۳$

۵. $C(۷,۵)$, $V:(۷,۰),\ (۷,۱۰)$, $F(۷,۵\pm\sqrt{۲۱})$

۷. $C(-۱,-۴)$, $V:(-۱,۱),\ (-۱,-۹)$
$F:(-۱,۰),\ (-۱,-۸)$

۹. $C(۳,۱)$, $V:(۳,۶),\ (۳,-۴)$, $F(۳,۱\pm\sqrt{۲۱})$

۱۱. $C(-۵,۰)$, $V:(-۱۰,۰),\ (۰,۰)$
$F(-۵\pm۲\sqrt{۶},۰)$

۱۳. $C(۲,-۱)$, $V:(-۱,-۱),\ (۵,-۱)$
$F(۲\pm۲\sqrt{۲},-۱)$

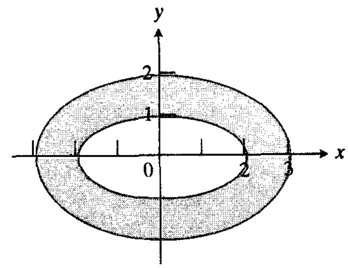
۱۵. $C(۲,-۲)$, $V:(۲,۰),\ (۲,-۴)$
$F(۲,-۲\pm\sqrt{۳})$

۱۷. $C(-۱, ۳)$، $V:(-۵, ۳), (۳, ۳)$
$F(-۱ \pm \sqrt{۷}, ۳)$

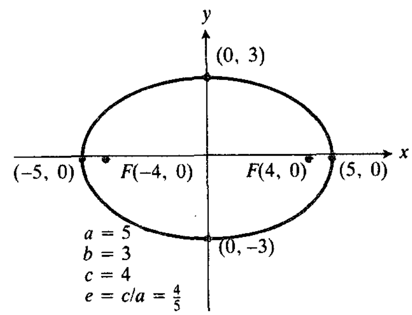
۲۱. $(x-۱)^۲/۴ + (y-۴)^۲/۹ = ۱$; $F(۱, ۴ \pm \sqrt{۵})$

۲۳. بیضی و ناحیهٔ داخلش

۲۵.



۲۷.



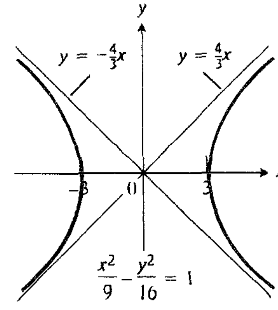
۲۹. الف) $(x-۱۷٫۵)^۲/(۱۸٫۰۹)^۲ + y^۲/(۴٫۵۶)^۲ = ۱$
ب) $۰٫۵۸۴$ AU, $۵٫۴۱ \times ۱۰^۷$ mi
پ) $۳۵٫۶۰$ AU, $۳٫۳۰ \times ۱۰^۹$ mi

۳۱. $(۰, ۱۶/۳\pi)$

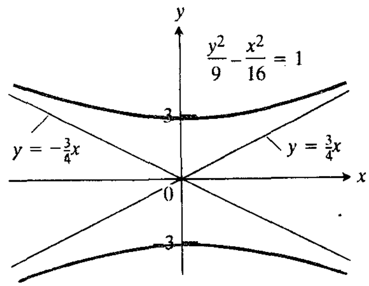
۳۳. $a = ۰$، $b = -۴$، $c = ۰$ یا $۴x^۲ + y^۲ - ۴y = ۰$

بخش ۵٫۸، صفحه‌های ۴۷۹ تا ۴۸۱

۱.



۳.



۵. $C(۲, -۳)$، $V:(۴, -۳), (۰, -۳)$
$F(۲ \pm \sqrt{۱۳}, -۳)$، $e = \sqrt{۱۳}/۲$
$۲(y+۳) = \pm ۳(x-۲)$

۷. $C(۲, -۳)$، $V:(۵, -۳), (-۱, -۳)$
$F(۲ \pm \sqrt{۱۳}, -۳)$، $e = \sqrt{۱۳}/۳$
$۳(y+۳) = \pm ۲(x-۲)$

۹. $C(۴, ۳)$، $V:(۴, ۶), (۴, ۰)$، $F:(۴, ۸), (۴, -۲)$
$e = ۵/۳$، $۴(y-۳) = \pm ۳(x-۴)$

۱۱. $C(-۲, ۱), V:(۰, ۱), (-۴, ۱), F:(-۵, ۱), (۱, ۱)$
$e = ۳/۲$، $۲(y-۱) = \pm \sqrt{۵}(x+۲)$

۱۳. $C(۲, ۰)$، $V:(۰, ۰), (۴, ۰)$، $F(۲ \pm \sqrt{۵}, ۰)$
$e = \sqrt{۵}/۲$، $۲y = \pm (x-۲)$

۱۵. $(y-۲)^۲ - (x^۲/۳) = ۱$

۱۷. بر روی یک هذلولی به کانونهای A و B و با $a = ۱۲۹٫۹$ mi و نزدیکتر به A

۱۸. الف) $۴۴\pi/۳$
ب) $۲۵۶\pi/۳$

۲۰. $۴۲\pi\sqrt{۷}$

۲۲. شعاع دایره‌ها با آهنگ برابر افزایش می‌یابند، بنابراین تفاضلشان ثابت است.

بخش ۶٫۸، صفحه ۴۸۵

۱. $(x')^۲ - (y')^۲ = ۴$

۳. $(x')^۲ = -۴y'$

۵. $y' = \pm ۱$

۷. $(x')^۲ = -۴(y' + ۱/۲)$

۹. $۴(x')^۲+۲(y')^۲=۱۹$

۱۱. $\sin\theta=۱/\sqrt{۵},\ \cos\theta=۲/\sqrt{۵}$

۱۵. $x'=\pm ۱/\sqrt{۲}$

بخش ۷.۸، صفحهٔ ۴۸۷

۱. هذلولی

۳. سهمی

۵. بیضی

۷. هذلولی

۹. بیضی (دایره)

۱۱. سهمی

۱۳. بیضی

۱۵. هذلولی

۱۷. سهمی

بخش ۸.۸، صفحهٔ ۴۸۹

۳. خط L و نقطهٔ D وجود ندارد

بخش ۹.۸، صفحه‌های ۴۹۵ تا ۴۹۷

۱. $x^۲+y^۲=۱$

۳. $x^۲/۱۶+y^۲/۴=۱$

۵. $x=۱-۲y^۲,\ |x|\leqslant ۱,\ |y|\leqslant ۱$

۷. $x^۲-y^۲=۱$، شاخه چپ

۹. $x=\cos^{-۱}(۱-y)-\sqrt{۲y-y^۲}$، یك طاق از چرخزاد

۱۱. $y=x^{۲/۳}$

۱۳. $x=y^۲$

۱۵. $y=(x-۱)^۲+۴,\ x\geqslant ۱$

۱۷. $x=-at/\sqrt{۱+t^۲},\ y=a/\sqrt{۱+t^۲}$

۱۹. $x=a(\cos t+t\sin t),\ y=a(\sin t-t\cos t)$

۲۱. $x=(a-b)\cos\theta+b\cos[(a-b)/b]\theta$
$y=(a-b)\sin\theta-b\sin[(a-b)/b]\theta$

۲۳. ب) $x=tx_۰,\ y=ty_۰$
پ) $x=-۱+t,\ y=t$

۲۵. $(۱,۱)$

۲۷. $۸a$

۲۹. $۵\pi^۲$

۳۱. ۶۷۲۳ ft

مسأله‌های گوناگون، فصل ۸، صفحه‌های ۴۹۸ تا ۵۰۳

۱. $x^۲+xy+y^۲=۳k^۲$

۵. $(-۱۶/۵,۵۳/۱۰)$

۷. $y^۲=۲(x-(۷/۲))$

۱۱. $x=۲\,\mathrm{pm}$

۱۳. $(\pm ۸\sqrt{۳}/۹,۴/۳)$

۱۹. الف) $F_۱P=۵;\ F_۲P=\sqrt{۵}$
ب) بیرون؛ $OF_۲+OF_۱=۵+۳>۵+\sqrt{۵}$

۲۱. $C(۳,۲),\ V:(۱۵,۲),\ (-۹,۲)$
$F(۳\pm ۸\sqrt{۲},۲),\ e=۲\sqrt{۲}/۳$

۲۳. $(x+۳)^۲/۳۶+(y-۱)^۲/۲۰=۱$

۲۵. $x=x'-۲,\ y=y'-۱,\ (۲,۱)$

۲۷. دایره: $\int_۰^a\sqrt{a^۲-x^۲}\,dx$
بیضی: $\int_۰^a(b/a)\sqrt{a^۲-x^۲}\,dx=\pi ab$

۲۹. هواپیما در دستگاه مختصات انتخاب شده در نقطهٔ $(۵,۱۰\sqrt{۱۰}/۳)$ قرار دارد.

۳۱. $C(۱,-۲),\ V:(۱,-۵),\ (۱,۱)$
$F(۱,-۲\pm\sqrt{۱۳}),\ ۲(y+۲)=\pm ۳(x-۱)$

۳۵. به‌ازای $A=(c,۰)$ و $B=(-c,۰)$، مسیر شاخهٔ راست هذلولی $۳x^۲-y^۲+۲cx-c^۲=۰$ است.

۳۷. بر شاخه‌ای از هذلولیی که کانونهایش محل استقرار تفنگ و هدف است.

۳۹. $e=\sqrt{۲}$

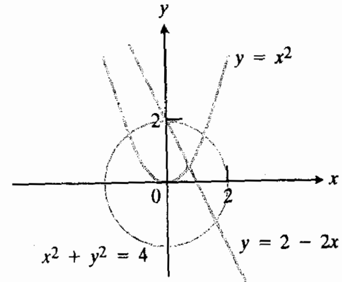
۴۱. $۳y-۲۷x-۵۶=۰,\ ۳y-۲۷x+۱۰۴=۰$

۴۳. $x^۲+۴xy+۵y^۲-۱=۰$

۴۵. $C(۱/۲,-۱/۲),\ V(۱/۲,-۱/۲\pm\sqrt{۲})$
$F(۱/۲,-۱/۲\pm ۲),\ e=\sqrt{۲}$
$y+۱/۲=\pm(x-(۱/۲))$

۴۷. خم، بخشی از سهمی $۲y'^۲=۲a\sqrt{۲}x'-a^۲$ است

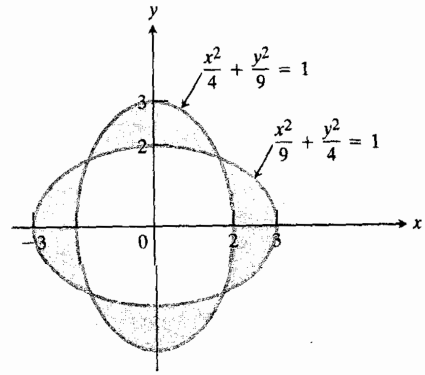
۴۹. هر نقطه‌ای چون (x,y) که در معادلهٔ خط، دایره، یا سهمی صدق کند حاصلضرب را صفر می‌کند.



۵۱. هر نقطه‌ای چون (x,y) به‌قسمی که $x+y=۰$ یا $x^۲+y^۲-۱=۰$

۵۳. نقاط روی یا درون بیضی

۵۵. نقاطی که درون یك بیضی و بیرون از دیگری باشند، زیرا حاصلضرب دوعدد وقتی منفی است که تنها یکی از آنها منفی باشد



۵۷. نقاطی که بر دایرهٔ $x^۲+y^۲=۹$ یا هذلولی $y^۲-x^۲=۹$ واقع‌اند

۵۹. $x=a\sin^{۲}t\tan t,\quad y=a\sin^{۲}t$

۶۱. $x=۸t-۲\sin ۲t,\quad y=۴-۲\cos ۲t$

۶۵. ب) ۵٫۸۶۸

پ) $|E|\leqslant ۰٫۰۰۳$

فصل ۹

بخش ۹.۱، صفحه‌های ۵۰۷ تا ۵۰۹

	sinh	cosh	tanh	coth	sech	csch
۱.	$-\frac{۳}{۴}$	$\frac{۵}{۴}$	$-\frac{۳}{۵}$	$-\frac{۵}{۳}$	$\frac{۴}{۵}$	$-\frac{۴}{۳}$
۳.	$-\frac{۷}{۲۴}$	$\frac{۲۵}{۲۴}$	$-\frac{۷}{۲۵}$	$-\frac{۲۵}{۷}$	$\frac{۲۴}{۲۵}$	$-\frac{۲۴}{۷}$
۵.	$\pm\frac{۴}{۳}$	$\frac{۵}{۳}$	$\pm\frac{۴}{۵}$	$\pm\frac{۵}{۴}$	$\frac{۳}{۵}$	$\pm\frac{۳}{۴}$

۷. $x+(۱/x)$

۹. $(x^{۲}-۱)/(x^{۲}+۱)$

۱۱. $e^{۵x}$

۱۳. $e^{-۳x}$

۱۵. فرد

۱۷. زوج

۱۹. زوج

۲۱. فرد

۲۳. زوج

۲۵. $\ln ۲$

بخش ۹.۲، صفحه‌های ۵۱۱ تا ۵۱۳

۱. $۳\cosh ۳x$

۳. ۰

۵. $-\operatorname{csch}^{۲}(\tan x)\sec^{۲}x$

۷. $-\operatorname{csch}(x/۴)\coth(x/۴)$

۹. ۰

۱۱. $\operatorname{sech} x$

۱۳. $\operatorname{csch} x$

۱۵. $۲x\cosh ۲x$

۱۹. $(۲/۵)\sinh ۵$

۲۱. ۰

۲۳. $\sinh ۱-\cosh ۱+۱=۱-e^{-۱}$

۲۵. $۱/(۴e)$

۲۷. $۲(\cosh ۱-\sinh ۱)=۲e^{-۱}$

۲۹. $(۱/۲)\sinh(۲x+۱)+C$

۳۱. $-(۱/۳)\operatorname{sech}^{۳}x+C$

۳۳. $\ln(\cosh x)+C$

۳۵. $۲\cosh\sqrt{x}+C$

۳۷. $۲\sqrt{۲}\cosh(x/۲)+C$

۳۹. $\cosh^{۲}x+C$

۴۱. $\ln(۱+\cosh x)+C$

۴۳. $x^{۲}\sinh x-۲x\cosh x+۲\sinh x+C$

۴۵. $-(۱/۱۵)\operatorname{sech}^{۳}۵x+C$

۴۷. $(\sinh^{۳}۳x\cosh ۳x)/۱۲-(\sinh ۶x)/۱۶$
$+(۳x)/۸+C$

۴۹. $e^{۵x}/۱۰+e^{x}/۲+C$

۵۱. $-\ln|\operatorname{csch} x+\coth x|+C$

۵۳. ۳π

۵۵. $۱۵\pi/۱۶+\pi\ln ۲$

۵۷. $۲\pi/۳$

۵۹. $(۰,۱/\pi)$

۶۱. π

۶۳. $A=۱,\ B=۱,\ C=-۱,\ D=-۱$

بخش ۹.۳، صفحهٔ ۵۱۸

۱. $a\sinh(x_{۱}/a)$

۵. $\bar{x}=۰,\ \bar{y}=[x_{۱}\operatorname{csch}(x_{۱}/a)]/۲+y_{۱}/۲$

۷. ب) $dx/ds=a/\sqrt{a^{۲}+s^{۲}},\ dy/ds=s/\sqrt{a^{۲}+s^{۲}}$

۹. ب) i) ۱۱۵ ft
ii) ۱۶ lb

بخش ۹.۴، صفحه‌های ۵۲۳ تا ۵۲۵

۱. ۰

۳. $-\ln ۳$

۵. $\ln ۲$

۷. $(۱/۲)\ln ۳$

۹. $(۱/۲)\ln ۳$

۱۱. $-(۱/۲)\ln ۳$

۱۳. $\ln ۳$

۱۵. $\ln ۵$

۱۷. $۲/\sqrt{۱+۴x^{۲}}$

۱۹. $\sec x$

۲۱. $-۲\csc ۲x$

۲۳. $۱/[۲\sqrt{x(x-۱)}]$

۲۵. $-۱/(|x|\sqrt{x^{۲}+۱})$

۲۷. $|\sec x|$

۲۹. $x/\sqrt{۱+x^{۲}}+۱/(|x|\sqrt{x^{۲}+۱})$

۳۱. $x^{۲}/\sqrt{x^{۲}-۴}$

۳۳. $(۱/۲)\ln[(۸+\sqrt{۷۳})/۳]$

۳۵. $(۱/۲)\ln ۳$

۳۷. $-(۱/۲)\ln[(۱+\sqrt{۲})/(۲+\sqrt{۵})]$

۳۹. ۰

۴۱. $(x/۲)\sqrt{x^{۲}+۱}+(۱/۲)\sinh^{-۱}x+C$

۴۳. $۲۴\ln(۳/۲)-۳\ln ۳+۶$

۴۵. $\cosh^{-۱}(x-۲)+C,\ x>۳$

۴۷. $\ln|u+\sqrt{u^{۲}-۱}|+C$

۴۹. $-\ln|(\sqrt{۱+u^{۲}}+۱)/u|+C$

۵۱. $\sqrt{x^{۲}-۲۵}-۵\sec^{-۱}|x/۵|+C$

۵۳. $(۲۵/۲)\cosh^{-۱}(x/۵)+(x/۲)\sqrt{x^{۲}-۲۵}+C$

۵۵. $(x/۲)\sqrt{x^{۲}-۴}-۲\cosh^{-۱}(x/۲)+C$

۵۷. $\sqrt{۵}/۲+(۱/۴)\ln(۲+\sqrt{۵})$

۵۹. $\sqrt{۲}-(۵/۴)-\ln(۱+\sqrt{۲})+\ln ۳$

۶۱. $y=x^{۲}/۴-(۱/۲)\ln|x|-۱/۴$

مسأله‌های گوناگون، فصل ۹، صفحه‌های ۵۲۶ تا ۵۲۷

۳. ۰

۵. $\cosh x=۴۱/۹,\ \tanh x=-۴۰/۴۱$

۹. $y=۱$

۱۳. $۶\sinh ۳x\cosh ۳x$

۱۵. $-۱/[\sqrt{۱-x^{۲}}\sin^{-۱}x\sqrt{۱-(\sin^{-۱}x)^{۲}}]$

۱۷. $[\sec^{۲}(\tanh^{-۱}x)]/(۱-x^{۲})$

۱۹. $e^{\cosh^{-۱}x}/\sqrt{x^{۲}-۱}$

۲۱. $|\sec x|$

۲۳. ۱

۲۵. $(۱۸-۱۰\sqrt{۳})/۲۷$

۲۷. $\ln|\cosh\sqrt{۲}-\cosh ۱|$

۲۹. واگراست

۳۱. $\ln\sqrt{۳}$

۳۳. $\ln ۲$

فصل ۱۰

بخش ۱.۱۰، صفحه‌های ۵۳۲ تا ۵۳۴

۱. این دسته‌ها عبارت‌اند از: الف، پ؛ ب، ت؛ ث، د، ذ؛ ج، خ، ر؛ ز، س؛ ژ، ش.

۳. الف) $(۲,\pi/۲+۲k\pi)$ یا $(-۲,-\pi/۲+۲k\pi)$، k عدد صحیح

ب) $(۲,۲k\pi)$ یا $(-۲,(۲k+۱)\pi)$، k عدد صحیح

پ) $(۲,۳\pi/۲+۲k\pi)$ یا $(-۲,\pi/۲+۲k\pi)$، k عدد صحیح

ت) $(-۲,۲k\pi)$ یا $(۲,(۲k+۱)\pi)$، k عدد صحیح

۵. الف) $(۱,۱)$

ب) $(۱,۰)$

پ) $(۰,۰)$

ت) $(-۱,-۱)$

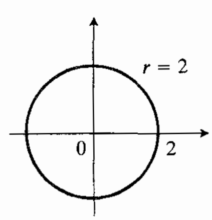
ث) $(۳\sqrt{۳}/۲,-۳/۲)$

ج) $(۳,۴)$

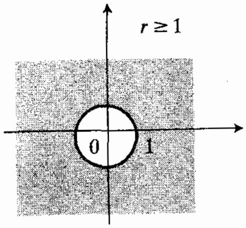
چ) $(۱,۰)$

ح) $(-\sqrt{۳},۳)$

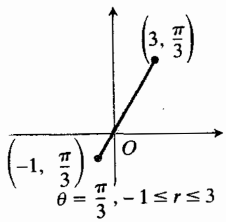
۷.



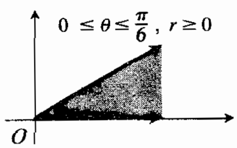
۹.



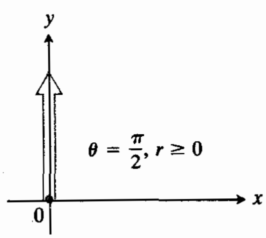
۱۱.



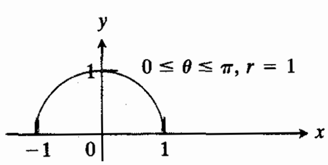
۱۳.



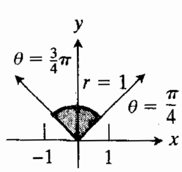
۱۵.



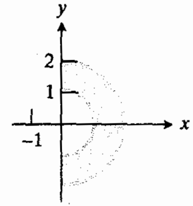
۱۷.



۱۹.



۲۱.



۲۳. $x=۲$

۲۵. $y=۴$

۲۷. $y=۰$

۲۹. $x+y=۱$

۳۱. $x^۲+y^۲=۱$

۳۳. $y=e^x$

۳۵. $y-۲x=۵$

۳۷. $x^۲+(y-۲)^۲=۴$

۳۹. $x^۲=۴y$

۴۱. $r\cos\theta=۷$

۴۳. $\theta=\pi/۴$

۴۵. $r=۲$

۴۷. $(r^۲\cos^۲\theta)/۹+(r^۲\sin^۲\theta)/۴=۱$

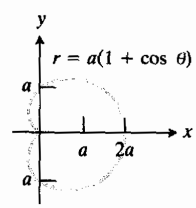
۴۹. $r=۴\cot\theta\csc\theta$

۵۱. $x+\sqrt{۳}y=۶$

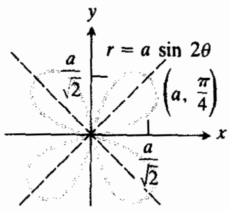
۱۳. $x-y=۲$

بخش ۲.۱۰، صفحه‌های ۵۳۹ تا ۵۴۰

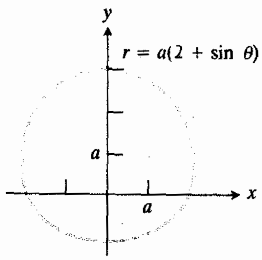
۱. تقارن نسبت به‌محور x



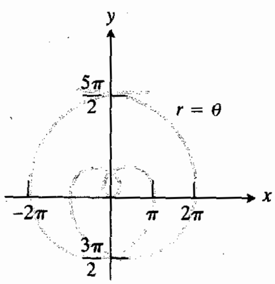
۳. تقارن نسبت به‌محور x، محور y، ومبدأ



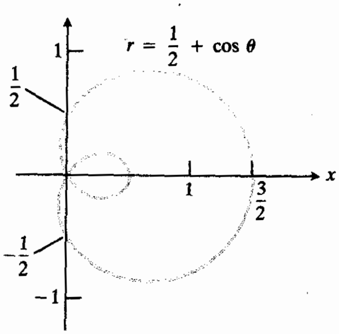
۵. تقارن نسبت به‌محور y



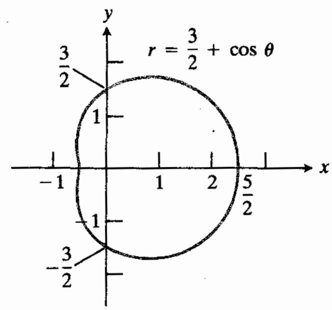
۷. تقارن نسبت به‌محور y



۹. الف)



۱۱. الف)



۱۷. $(a(1-\sqrt{2}/2),\ (3\pi)/4)$

$(a(1+\sqrt{2}/2),\ (7\pi)/4),\ (0,0)$

۱۹. $((-1+\sqrt{5})/2,\ \cos^{-1}[(3-\sqrt{5})/2])$

$((-1+\sqrt{5})/2,\ 2\pi-\cos^{-1}[(3-\sqrt{5})/2]$

۲۱. $(1, \pm\pi/12), (1, \pm 5\pi/12), (1, \pm 13\pi/12)$

$(1, \pm 17\pi/12)$

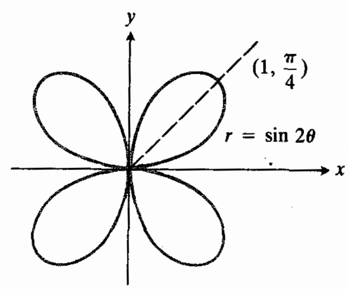
۲۳. $(1\pm\sqrt{2}/2, 3\pi/2), (1\pm\sqrt{2}/2, \pi/2), (0,0)$

بخش ۱۰.۳، صفحه‌های ۵۴۴ تا ۵۴۶

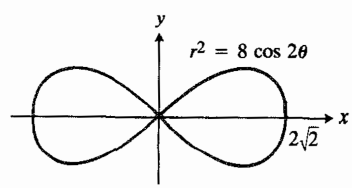
۱. $(x-2)^2+y^2=4$

۳. $(x+1)^2+y^2=1$

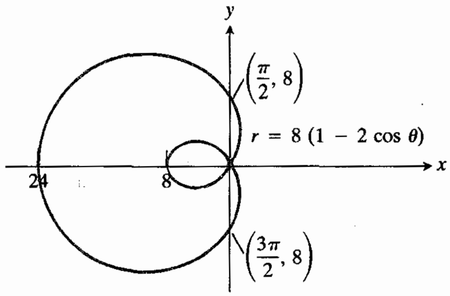
۵. $(x^2+y^2)^3=4x^2y^2$



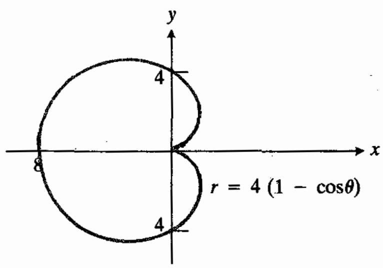
۷. $(x^2+y^2)^2=8(x^2-y^2)$



۹. $(x^2+y^2+16x)^2=64(x^2+y^2)$



۱۱. $(x^2+y^2+4x)^2=16(x^2+y^2)$



۱۳. $3x^2-y^2+16x+16=0$

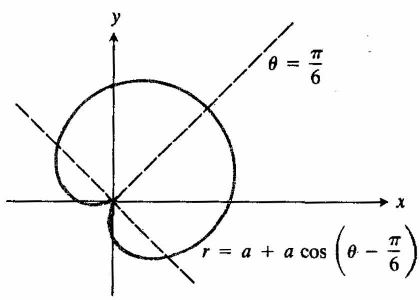
۱۵. $3x^2+4y^2+8x=16$

۱۷. $9y^2=-12x+4$

۱۹. دایره به‌مرکز $(1, -\pi/4)$ و شعاع ۱

۲۱. خط $x+\sqrt{3}y=10$

۲۳.



۲۵. ت

۲۷. ر

۲۹. ذ

۳۱. خ

۳۵. عطارد: $r=۰٫۳۷۰۷/[۱-(۰٫۲۰۵۶)\cos\theta]$

زهره: $r=۰٫۷۲۳۳/[۱-(۰٫۰۰۶۸)\cos\theta]$

زمین: $r=۰٫۹۹۹۷/[۱-(۰٫۰۱۶۷)\cos\theta]$

مریخ: $r=۱٫۵۱۰۷/[۱-(۰٫۰۹۳۴)\cos\theta]$

مشتری: $r=۵٫۱۹۰۸/[۱-(۰٫۰۴۸۴)\cos\theta]$

زحل: $r=۹٫۵۱۰۹/[۱-(۰٫۰۵۴۳)\cos\theta]$

اورانوس: $r=۱۹٫۱۳۹/[۱-(۰٫۰۴۶۰)\cos\theta]$

نپتون: $r=۳۰٫۰۵۸/[۱-(۰٫۰۰۸۲)\cos\theta]$

۳۷. الف) $x^۲+y^۲=۲y$ و $x=۱$

ب) $(۱,۱)$ یا $(\sqrt{۲},\pi/۴)$

۳۹. $r=۴/(۱-\cos\theta)$

۴۱. $(۵۰,۰),\ \ r=-۴۵/(۴-۵\cos\theta)$

بخش ۴.۱۰، صفحهٔ ۵۵۱

۱. $(\pi+۲)/۱۶$

۳. ۱۸π

۵. $\pi a^۲$

۷. $[(۳\sqrt{۳}-\pi)/۳]a^۲$

۹. $(\pi/۲-۱)a^۲$

۱۱. $(۲\pi+۳\sqrt{۳})/۶$

۱۳. $[(۳\pi-۸)/۲]a^۲$

۱۵. ۲

۱۷. $۴a^۲$

۱۹. $۱/۸(۲\pi e^{۲\pi}-e^{۲\pi}+۱)$

۲۱. الف) $۲\pi a$

ب) πa

پ) πa

۲۳. $۲a$

۲۵. $(۳a\pi)/۲$

۲۷. $۴\pi a^۲(۲-\sqrt{۲})$

۲۹. $[۴\pi(۸-\sqrt{۲})]/۵$

مسالههای گوناگون، فصل ۱۰، صفحههای ۵۵۲ تا ۵۵۵

۱. مارپیچ ارشمیدس (نمودار بخش ۲.۱۰، مسأله ۷ را ببینید.)

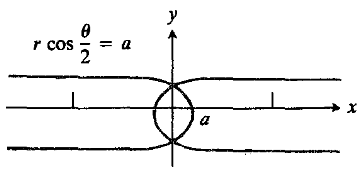
۳. الف) خط قائم $x=a$

ب) خط افقی $y=a$

پ) خم: $y=ax/(x-a)=a+a^۲/(x-a)$؛ هذلولی با مجانبهای $x=a$، $y=a$

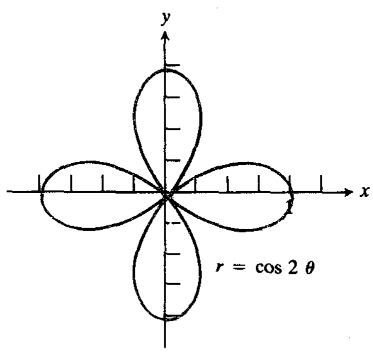
۵. دایرهای بهمرکز $(-۱,-۱)$ و شعاع $r=۳$

۷.



۹. پروانه (نظیرشکل ۱۹.۱۰)

۱۱. الف)



ب) پروانه (متقارن نسبت بهمحورx، محور y، و مبدأ)

۱۳. الف) سهمی

ب) سهمی

۱۵. $((a\sqrt{۲})/۲,\pi/۴),\ (۰,۰)$

۱۷. $(a,\pi),\ (a,۰)$

۱۹. $(۰,۰)$

۲۱. مبدأ و نقاط $(a/۲,\pm\pi/۳)$، $(a/۲,\pm۲\pi/۳)$

۲۳. الف) $y^۲-۲x=۱$

ب) $y^۲+۲x=۱$

۲۵. الف) $۳x^۲-y^۲+۴x+۱=۰$
ب) $۳x^۲-y^۲-۴x+۱=۰$

۲۷. $r=۲/(۱+\cos\theta)$

۲۹. $r=-۲a\cos\theta$

۳۱. $r=۸/(۳-\cos\theta)$

۳۳. $a^۲$

۳۵. $(۳a^۲\pi)/۲$

۳۷. $۴a^۲$

۳۹. $(۵a^۲\pi)/۴$

۴۱. $[a^۲(۳\pi-۸)]/۲$

۴۳. $(۳a\pi)/۲$

۴۵. وقتی $\tan\psi_۲=-۱/\tan\psi_۱$

۴۷. ۰

۵۱. نقاط تقاطع عبارت‌اند از $(۲,\pi/۳)$ و $(۲,-\pi/۳)$؛ در هردونقطه، $\beta=\pi/۲$

۵۵. درهردونقطهٔ تقاطع، $\beta=\pi/۲$

۵۷. $\pi/۴$

۶۱. $(۵a/۶,۰)$

۶۳. $(۴a/۵,۰)$

فصل ۱۱

بخش ۱۰۱۱، صفحه‌های ۵۶۴ تا ۵۶۵

۱. ۲/۳، ۳/۵، ۴/۷، ۵/۹؛ به ۱/۲ همگراست

۳. -۱/۳، -۳/۵، -۵/۷، -۷/۹؛ به -۱ همگراست

۵. ۱/۲، ۱/۲، ۱/۲، ۱/۲؛ به ۱/۲ همگراست

۷. ۱، ۳/۲، ۷/۴، ۱۵/۸، ۳۱/۱۶، ۶۳/۳۲

۹. ۲، ۱، ۱/۲، ۱/۴، ۱/۸، ۱/۱۶

۱۱. ۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸

۱۳. ب) $\sqrt{۲}$

۱۵. $x=$ ۰ر۷۳۹۰۸۵۱۳۳

۱۷. به ۰ر۸۷۶۷۲۶۲۱۶ همگراست؛ $x^۲-\sin x=۰$

۱۹. آری؛ $x=$ ۱ر۱۶۵۵۶۱۱۸۵

بخش ۲۰۱۱، صفحه‌های ۵۶۸ تا ۵۷۰

۱. ۰، -۱/۴، -۲/۹، -۳/۱۶؛ به ۰ همگراست

۳. ۱/۳، ۱/۹، ۱/۲۷، ۱/۸۱؛ به ۰ همگراست

۵. ۱، -۱/۳، ۱/۵، -۱/۷؛ به ۰ همگراست

۷. ۰، -۱، ۰، ۱؛ واگراست

۹. ۱، $-۱/\sqrt{۲}$، $۱/\sqrt{۳}$، $-۱/۲$؛ به ۰ همگراست

۱۱. به ۰ همگراست

۱۳. به ۱ همگراست

۱۵. واگراست

۱۷. به -۲/۳ همگراست

۱۹. به $\sqrt{۲}$ همگراست

۲۱. به ۰ همگراست

۲۳. واگراست

۲۵. به ۱ همگراست

۲۷. به -۵ همگراست

۲۹. به ۱ همگراست

۳۱. به ۱ همگراست

۳۳. به ۵ همگراست

۳۵. به ۰ همگراست

۳۷. به ۰ همگراست

۳۹. به $\sqrt{۲}$ همگراست

۴۱. واگراست

۴۳. به ۰ همگراست

۴۵. واگراست

۴۷. به ۰ همگراست

۴۹. به $\pi/۲$ همگراست

۵۱. به ۱ همگراست

۵۳. به $۱/۲$ همگراست

۵۷. به‌ازای هر $x>۰$ به ۱ همگراست

۶۱. ۱

بخش ۱۱٫۳، صفحه‌های ۵۷۲ تا ۵۷۳

۱. به ۰ همگراست

۳. به ۰ همگراست

۵. به ۰ همگراست

۷. به $e^{۲}$ همگراست

۹. به ۰ همگراست

۱۱. واگراست

۱۳. به ۱ همگراست

۱۵. به ۰ همگراست

۱۷. به $۱/e$ همگراست

۱۹. به ۰ همگراست

۲۱. به x همگراست

۲۳. به ۱ همگراست

۲۵. به ۱ همگراست

۲۷. به $۱/e$ همگراست

۲۹. به ۰ همگراست

۳۱. واگراست

۳۳. به $۱/(p-۱)$ همگراست

۳۵. $n\geqslant ۹۱۲۴$

۳۷. $n>۱۰^{۷۵}$

بخش ۱۱٫۴، صفحه‌های ۵۸۱ تا ۵۸۳

۱. $S_n=۳[۱-(۱/۳)^n]$؛ ۳

۳. $S_n=(۱-e^{-n})/(۱-e^{-۱})$؛ $e/(e-۱)$

۵. $S_n=[۱-(-۲)^n]/۳$؛ واگراست

۷. $S_n=-\ln(n+۱)$؛ واگراست

۹. الف) $\sum_{n=-۲}^{\infty}[۱/(n+۴)(n+۵)]$

ب) $\sum_{n=۰}^{\infty}[۱/(n+۲)(n+۳)]$

پ) $\sum_{n=۵}^{\infty}[۱/(n-۳)(n-۲)]$

۱۱. $۴/۳$

۱۳. $۷/۳$

۱۵. $۲۳/۲$

۱۷. $۵/۳$

۱۹. ۱

۲۱. $۱/۹$

۲۳. الف) $۲۶/۱۱۱$

ب) آری، هرعدداعشاری با جزء تکراری، یك‌سری‌هندسی بـا نسبت ۱۰^{-n} تشکیل می‌دهد که n تعداد ارقام تکراری است.

۲۵. به $۲+\sqrt{۲}$ همگراست

۲۷. به ۱ همگراست

۲۹. واگراست

۳۱. به $e^{۲}/(e^{۲}-۱)$ همگراست

۳۳. واگراست

۳۵. به $۳/۲$ همگراست

۳۷. واگراست

۳۹. $a=۱$، $r=-x$

۴۱. ۸

۴۳. $\sum_{n=۱}^{\infty}n$ و $\sum_{n=۱}^{\infty}(-n)$ را اختیار کنید

۴۵. فرض‌کنید $\sum_{n=۱}^{\infty}a_n=\sum_{n=۱}^{\infty}۱/۲^n$ و $\sum_{n=۱}^{\infty}b_n=\sum_{n=۱}^{\infty}۱/۳^n$

بخش ۱۱٫۵، صفحه‌های ۵۹۰ تا ۵۹۲

توجه: درمسائل ۱-۲۳ جزآزمونهای ذکر شده ممکن است بتوان ازآزمون دیگری نیز بهره‌گرفت.

۱. واگراست؛ سری هندسی، $r=۱/۱۰<۱$

۳. همگراست؛ مقایسه با $\sum ۱/۲^n$

۵. همگراست؛ مقایسه با $\sum ۲/n^{۲}$

۷. واگراست؛ مقایسه با $\sum ۱/n$

۹. همگراست؛ سری هندسی با $r=۲/۳<۱$

۱۱. واگراست؛ مقایسه با $\sum ۱/(n+۱)$

۱۳. واگراست؛ $\lim_{n\to\infty} ۲^n/(n+۱)\neq ۰$

۱۵. همگراست؛ مقایسه با $\sum ۱/n^{۳/۲}$

۱۷. واگراست؛ آزمون انتگرال

۱۹. واگراست؛ $\lim_{n\to\infty}[۱+(۱/n)]^n=e\neq ۰$

۲۱. همگـراست؛ مجمـوع دوسری هـمـگـرا، $\sum ۱/n۲^n$ و $-\sum ۱/۲^n$

۲۳. همگراست؛ مقایسه با $\sum ۱/۲^{n-۱}$

۲۷. $S_n<۴۱٫۵۵۴$

بخش ۱۱.۶، صفحه‌های ۵۹۷ تا ۵۹۸

توجه: جز استدلالهای عرضه شده ممکن است استدلالهای مناسب دیگری نیز وجود داشته‌باشد.

۱. همگراست؛ آزمون نسبت

۳. همگراست؛ آزمون ریشه

۵. واگراست؛ $\lim_{n\to\infty}[(n-۲)/n]^n=e^{-۲}\neq ۰$

۷. واگراست؛ آزمون نسبت

۹. واگراست؛ آزمون ریشهٔ nام

۱۱. واگراست؛ مقایسه با $\sum ۱/n$

۱۳. همگراست؛ آزمون مقایسه‌ای حدی

۱۵. واگراست؛ آزمون مقایسه‌ای حدی

۱۷. واگراست؛ آزمون انتگرال

۱۹. واگراست؛ آزمون مقایسه‌ای حدی

۲۱. همگراست؛ آزمون نسبت

۲۳. همگراست؛ آزمون نسبت

۲۵. همگراست؛ آزمون نسبت

۲۷. به‌ازای $-۲<x<۲$ همگراست

۲۹. به‌ازای $-\sqrt{۲}<x<\sqrt{۲}$ همگراست

۳۱. به‌ازای $-۱\leqslant x\leqslant ۱$ همگراست

۳۳. همگراست؛ آزمون نسبت

۳۵. واگراست؛ آزمون انتگرال

۳۷. همگراست؛ آزمون نسبت

۳۹. همگراست؛ آزمون نسبت

۴۱. همگراست؛ مقایسه با $\sum ۱/n^۴$

بخش ۱۱.۷، صفحه‌های ۶۰۱ تا ۶۰۲

توجه: جز استدلالهای عـرضه شده ممکن است استدلالهای مناسب دیگری نیز وجود داشته باشد.

۱. مطلقاً همگراست؛ p سری به‌ازای $p=۲$

۳. واگراست؛ $\sum ۱/n$ واگراست و
$$\sum[(۱-n)/n^۲]=\sum ۱/n^۲-\sum ۱/n$$

۵. مطلقاً همگراست؛ مقایسهٔ با $\sum ۱/n^۲$.

۷. مطلقاً همگراست؛ مقایسه با p سری به‌ازای $p=۳/۲$

۹. مطلقاً همگراست؛ آزمون نسبت

۱۱. واگراست؛ آزمون جملهٔ nام

۱۳. مطلقاً همگراست؛ سری هندسی با $r=۱/۵<۱$

۱۵. مطلقاً همگراست؛ آزمون نسبت

۱۷. مطلقاًهمگراست؛ مقایسه باpسری$\sum ۱/n^۲-۲\sum ۱/n^۳$

بخش ۱۱.۸، صفحه‌های ۶۰۶ تا ۶۰۸

۱. همگراست

۳. واگراست

۵. همگراست

۷. همگراست

۹. همگراست

۱۱. مطلقاً همگراست

۱۳. مطلقاً همگراست

۱۵. به‌طور مشروط همگراست

۱۷. واگراست

۱۹. به‌طور مشروط همگراست

۲۱. مطلقاً همگراست

۲۳. مطلقاً همگراست

۲۵. واگراست

۲۷. به‌طور مشروط همگراست

۲۹. ۰ر۲

۳۱. ۲×۱۰^{-۱۱}

۳۳. ۰ر۵۴۰۳۰

۳۵. الف) a_n کاهش نمی‌یابد
ب) $-۱/۲$

۳۹. فرض کنید $a_n=b_n=(-۱)^{n+۱}/\sqrt{n}$

بخش ۹.۱۱، صفحه‌های ۶۰۹ تا ۶۱۰

۱. همگراست

۳. همگراست

۵. واگراست

۷. همگراست

۹. همگراست

۱۱. واگراست

۱۳. واگراست

۱۵. واگراست

۱۷. واگراست

۱۹. همگراست

مساله‌های گوناگون، فصل ۱۱، صفحه ۶۱۵

۱. $S_n=\ln[(n+۱)/۲n]$؛ به $\ln ۱/۲$ همگراست

۷. واگراست؛ $\lim_{n\to\infty}\tanh n=۱\neq ۰$

۹. واگراست

۱۱. همگراست

۱۳. واگراست

۱۵. همگراست

۱۷. واگراست

۱۹. همگراست

فصل ۱۲

بخش ۲.۱۲، صفحه‌های ۶۲۳ تا ۶۲۴

۱. $۱-x+x^۲/۲!-x^۳/۳!$
$۱-x+x^۲/۲!-x^۳/۳!+x^۴/۴!$

۳. $۱-x^۲/۲!$؛ $۱-x^۲/۲!+x^۴/۴!$

۵. $x+x^۳/۳!$؛ $x+x^۳/۳!$

۷. $۱-۲x$؛ $۱-۲x+x^۴$

۹. $۱-۲x+x^۲$؛ $۱-۲x+x^۲$

۱۱. $x^۲$

۱۳. $۱+(۳/۲)x+(۱/۲!)(۳/۲)(۱/۲)x^۲$
$+(۱/۳!)(۳/۲)(۱/۲)(-۱/۲)x^۳+\cdots$
$+(۱/n!)[(۳)(۱)(-۱)(-۳)\cdots$
$(۵-۲n)/۲^n]x^n+\cdots$

۱۵. $\sum_{n=۰}^{\infty} e^{۱۰}(x-۱۰)^n/n!$

۱۷. $\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}(x-۱)^n/n$

۱۹. $-\sum_{n=۰}^{\infty}(x+۱)^n$

۲۱. $۱+۲(x-\pi/۴)+۲(x-\pi/۴)^۲$

بخش ۳.۱۲، صفحه‌های ۶۳۰ تا ۶۳۱

۱. $\sum_{n=۰}^{\infty}(x^n/۲^n n!)$

۳. $۵\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n[x^{۲n}/\pi^{۲n}(۲n)!]$

۵. $\sum_{n=۲}^{\infty}(-۱)^n(x^{۲n}/۲n!)$

۹. $۱-x+x^۲+R_۲(x)$

۱۱. $۱+(۱/۲)x-(۱/۸)x^۲+R_۲(x)$

۱۳. $|x|<(۰٫۰۶)^{۱/۵}\approx ۰٫۵۷$

۱۵. $|R_۲|\leqslant ۱۰^{-۹}/۳!<۱٫۶۷\times ۱۰^{-۱۰}$؛ به ازای $-۱۰^{-۳}<x<۰$، $x<\sin x$

۱۷. $|R_۲|\leqslant e^{۰٫۱}/۶۰۰۰<۱٫۸۵\times ۱۰^{-۴}$

۱۹. $|R_۴| \leqslant [(۰٫۵)^۵/۵!]\cosh ۰٫۵ < ۰٫۰۰۰۳$

۲۳. الف) $-۱+۰i$

ب) $\sqrt{۲}/۲+(\sqrt{۲}/۲)i$

پ) $۰-i$

ت) $۰+i$

۲۷. $\int e^{ax}\cos bx\,dx=[e^{ax}/(a^۲+b^۲)](a\cos bx+b\sin bx)+C_۱$؛

$\int e^{ax}\sin bx\,dx=[e^{ax}/(a^۲+b^۲)](a\sin bx-b\cos bx)+C_۲$

بخش ۴.۱۲، صفحه‌های ۶۳۶ تا ۶۳۸

۱. $۰٫۵۴۱۱\ \text{rad}\approx ۳۱^\circ$؛ از رابطهٔ زیر استفاده کنید

$\cos x\approx ۱-x^۲/۲!+x^۴/۴!\approx ۰٫۸۵۷$؛

$|R|\leqslant (۰٫۵۴۱۱)^۶/۶! < ۳٫۵\times ۱۰^{-۵}$

۳. $\sin ۶٫۳ \approx \sin(۲\pi+۰٫۰۱۶۸)=\sin(۰٫۰۱۶۸)$؛

$\sin x\approx x=۰٫۰۱۶۸$ را به‌کار برید؛

$|R|\leqslant(۰٫۰۱۶۸)^۳/۳! < ۷٫۹۱\times ۱۰^{-۷}$

۵. از $\ln(۱+x)\approx x-x^۲/۲+x^۳/۳-x^۴/۴\approx ۰٫۲۲۳$

استفاده کنید؛ $|R|\leqslant (۰٫۲۵)^۵/۵ < ۲\times ۱۰^{-۴}$

۷. $\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n-۱}[(۲^n x^n)/n]$؛ $-۱/۲<x\leqslant ۱/۲$

۹. ۰٫۱۰۰

۱۳. $\ln(۳/۲)$

۱۷. $C_۴\approx ۳٫۱۴۱۶۱۲۷$

۲۱. پ) ۶

ت) $۱/q$

بخش ۵.۱۲، صفحه‌های ۶۴۵ تا ۶۴۸

۱. $|x|<۱$؛ در $x=\pm۱$ واگراست

۳. $|x|<۲$؛ در $x=\pm۲$ واگراست

۵. $-\infty<x<\infty$

۷. $-۴<x<۰$؛ در $x=-۴, ۰$ واگراست

۹. $|x|<۱$؛ در $x=\pm۱$ همگراست

۱۱. $-\infty<x<\infty$

۱۳. $|x|<۱/e$؛ در $x=۱/e$ واگراست؛ در $x=-۱/e$ همگراست

۱۵. $x=۰$

۱۷. $۱/۲<x<۳/۲$؛ در $x=۱/۲, ۳/۲$ واگراست

۱۹. $|x|<\sqrt{۳}$؛ در $x=\pm\sqrt{۳}$ واگراست

۲۱. $e^{۳x+۶}$

۲۵. $\sum_{n=۱}^{\infty}(۲n)x^{۲n-۱}$

۲۷. ۰٫۰۰۲۷

۲۹. ۰٫۰۰۰۳۳

۳۱. ۰٫۳۶۳۶

۳۳. ۰٫۱۰۰

۳۵. الف) $\sinh^{-۱}x=x-(۱/۶)x^۳+(۳/۴۰)x^۵-(۵/۱۱۲)x^۷+\cdots$

ب) $\sinh^{-۱}۰٫۲۵\approx ۰٫۲۴۷$

۳۷. مسألهٔ ۱۵ چنین مثالی است

۴۱. $x+x^۲+x^۳/۳-x^۵/۳۰+\cdots$

۴۳. $x^۲/۲+x^۴/۱۲+x^۶/۴۵+\cdots$

۴۵. پ) آری

بخش ۶.۱۲، صفحهٔ ۶۴۹

۱. ۱

۳. $-۱/۲۴$

۵. -۲

۷. ۰

۹. $-۱/۳$

۱۱. $۱/۱۲۰$

۱۳. $۱/۳$

۱۵. -۱

۱۷. ۳

۱۹. ۰

۲۱. ب) ۱/۲

۲۳. $\sin x \approx ۶x/(۶+x^۲)$ بهتر است

مسأله‌های گوناگون، فصل ۱۲، صفحه‌های ۶۵۲ تا ۶۵۴

۱. الف) $\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n x^{n+۲}$

ب) خیر: سری به‌ازای $|x|<۱$ همگراست

۳. $۱+x+x^۲/۲-x^۴/۸$

۵. الف) $-x^۲/۲-x^۴/۱۲-x^۶/۴۵-\cdots$

ب) $-۰٫۰۰۰۱۷$

۷. $۰٫۷۴۷$

۹. $\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^{n+۱}(x-۲)^n$ ؛ $۱<x<۳$

۱۱. $\cos x=(۱/۲)\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n(x-\pi/۳)^{۲n}/۲n!$

$+(\sqrt{۳}/۲)\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^{n+۱}(x-\pi/۳)^{۲n+۱}/(۲n+۱)!$

۱۳. $f(۱)=۱٫۵۴۳$

۱۵. $e^{(e^x)}=e[۱+x+x^۲+(۵/۶)x^۳+\cdots]$

۱۷. $|E|\leqslant ۰٫۰۰۱۱$

۱۹. $\lim_{x\to ۰}((\sin x)/x)^{۱/x^۲}=e^{-۱/۶}$

۲۱. $-۵\leqslant x<۱$

۲۳. $-\infty<x<\infty$

۲۵. $۱<x<۵$

۲۷. $۰\leqslant x\leqslant ۲$

۲۹. $-\infty<x<\infty$

۳۱. $x\geqslant ۱/۲$

۳۷. $x+x^۲+(۲/۳)x^۳+(۲/۳)x^۴+(۱۳/۱۵)x^۵+\cdots$

پیوستها

پ۱، صفحهٔ ۶۵۸

۱. به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n اگر وقتی که $t\to c$ داشته‌باشیم $F_۱(t)\to L_۱$، $F_۲(t)\to L_۲$، …، $F_n(t)\to L_n$؛ آنگاه وقتی که $t\to c$ داریم

$$F_۱(t)+F_۲(t)+\cdots+F_n(t)\to L_۱+L_۲+\cdots+L_n$$

پ۵، صفحهٔ ۶۶۷

۱. $c=-۱$

۳. $\dfrac{-۱+\sqrt{۳۷}}{۳}$

جدول مختصر انتگرالها

۱. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

۲. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a \neq 1, \quad a > 0$

۳. $\int \cos u\,du = \sin u + C$

۴. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$

۵. $\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, \quad n \neq -1$

۶. $\int (ax+b)^{-1}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

۷. $\int x(ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a^2}\left[\frac{ax+b}{n+2} - \frac{b}{n+1}\right] + C, \quad n \neq -1, -2$

۸. $\int x(ax+b)^{-1}\,dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln|ax+b| + C$

۹. $\int x(ax+b)^{-2}\,dx = \frac{1}{a^2}\left[\ln|ax+b| + \frac{b}{ax+b}\right] + C$

۱۰. $\int \frac{dx}{x(ax+b)} = \frac{1}{b}\ln\left|\frac{x}{ax+b}\right| + C$

۱۱. $\int (\sqrt{ax+b})^n\,dx = \frac{2}{a}\,\frac{(\sqrt{ax+b})^{n+2}}{n+2} + C, \quad n \neq -2$

۱۲. $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}\,dx = 2\sqrt{ax+b} + b\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$

۱۳. الف) $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{\sqrt{-b}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{ax+b}{-b}} + C, \quad b < 0$

ب) $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right| + C, \quad b > 0$

۱۴. $\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C$

۱۵. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C$

۱۶. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$

۱۷. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$

۱۸. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

۱۹. $$\int\frac{dx}{(a^2-x^2)^2}=\frac{x}{2a^2(a^2-x^2)}+\frac{1}{2a^2}\int\frac{dx}{a^2-x^2}$$

۲۰. $$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\sinh^{-1}\frac{x}{a}+C=\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|+C$$

۲۱. $$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\sinh^{-1}\frac{x}{a}+C$$

۲۲. $$\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{x(a^2+2x^2)\sqrt{a^2+x^2}}{8}-\frac{a^4}{8}\sinh^{-1}\frac{x}{a}+C$$

۲۳. $$\int\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}\,dx=\sqrt{a^2+x^2}-a\sinh^{-1}\left|\frac{a}{x}\right|+C$$

۲۴. $$\int\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2}\,dx=\sinh^{-1}\frac{x}{a}-\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}+C$$

۲۵. $$\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx=-\frac{a^2}{2}\sinh^{-1}\frac{x}{a}+\frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2}+C$$

۲۶. $$\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right|+C$$

۲۷. $$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}=-\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x}+C$$

۲۸. $$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\frac{x}{a}+C$$

۲۹. $$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+C$$

۳۰. $$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^4}{8}\sin^{-1}\frac{x}{a}-\frac{1}{8}x\sqrt{a^2-x^2}(a^2-2x^2)+C$$

۳۱. $$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx=\sqrt{a^2-x^2}-a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C$$

۳۲. $$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx=-\sin^{-1}\frac{x}{a}-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}+C$$

۳۳. $$\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}-\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$$

۳۴. $$\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C$$

۳۵. $$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}+C$$

۳۶. $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\cosh^{-1}\frac{x}{a}+C=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$$

۳۷. $$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\frac{x}{a}+C$$

۳۸. $$\int(\sqrt{x^{2}-a^{2}})^{n}\,dx=\frac{x(\sqrt{x^{2}-a^{2}})^{n}}{n+1}-\frac{na^{2}}{n+1}\int(\sqrt{x^{2}-a^{2}})^{n-2}\,dx,\quad n\neq -1$$

۳۹. $$\int\frac{dx}{(\sqrt{x^{2}-a^{2}})^{n}}=\frac{x(\sqrt{x^{2}-a^{2}})^{2-n}}{(2-n)a^{2}}-\frac{n-3}{(n-2)a^{2}}\int\frac{dx}{(\sqrt{x^{2}-a^{2}})^{n-2}},\quad n\neq 2$$

۴۰. $$\int x(\sqrt{x^{2}-a^{2}})^{n}\,dx=\frac{(\sqrt{x^{2}-a^{2}})^{n+2}}{n+2}+C,\quad n\neq -2$$

۴۱. $$\int x^{2}\sqrt{x^{2}-a^{2}}\,dx=\frac{x}{8}(2x^{2}-a^{2})\sqrt{x^{2}-a^{2}}-\frac{a^{4}}{8}\cosh^{-1}\frac{x}{a}+C$$

۴۲. $$\int\frac{\sqrt{x^{2}-a^{2}}}{x}\,dx=\sqrt{x^{2}-a^{2}}-a\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right|+C$$

۴۳. $$\int\frac{\sqrt{x^{2}-a^{2}}}{x^{2}}\,dx=\cosh^{-1}\frac{x}{a}-\frac{\sqrt{x^{2}-a^{2}}}{x}+C$$

۴۴. $$\int\frac{x^{2}}{\sqrt{x^{2}-a^{2}}}\,dx=\frac{a^{2}}{2}\cosh^{-1}\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{x^{2}-a^{2}}+C$$

۴۵. $$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^{2}-a^{2}}}=\frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right|+C=\frac{1}{a}\cos^{-1}\left|\frac{a}{x}\right|+C$$

۴۶. $$\int\frac{dx}{x^{2}\sqrt{x^{2}-a^{2}}}=\frac{\sqrt{x^{2}-a^{2}}}{a^{2}x}+C$$

۴۷. $$\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^{2}}}=\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right)+C$$

۴۸. $$\int\sqrt{2ax-x^{2}}\,dx=\frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^{2}}+\frac{a^{2}}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right)+C$$

۴۹. $$\int(\sqrt{2ax-x^{2}})^{n}\,dx=\frac{(x-a)(\sqrt{2ax-x^{2}})^{n}}{n+1}+\frac{na^{2}}{n+1}\int(\sqrt{2ax-x^{2}})^{n-2}\,dx$$

۵۰. $$\int\frac{dx}{(\sqrt{2ax-x^{2}})^{n}}=\frac{(x-a)(\sqrt{2ax-x^{2}})^{2-n}}{(n-2)a^{2}}+\frac{(n-3)}{(n-2)a^{2}}\int\frac{dx}{(\sqrt{2ax-x^{2}})^{n-2}}$$

۵۱. $$\int x\sqrt{2ax-x^{2}}\,dx=\frac{(x+a)(2x-3a)\sqrt{2ax-x^{2}}}{6}+\frac{a^{3}}{2}\sin^{-1}\frac{x-a}{a}+C$$

۵۲. $$\int\frac{\sqrt{2ax-x^{2}}}{x}\,dx=\sqrt{2ax-x^{2}}+a\sin^{-1}\frac{x-a}{a}+C$$

۵۳. $$\int\frac{\sqrt{2ax-x^{2}}}{x^{2}}\,dx=-2\sqrt{\frac{2a-x}{x}}-\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right)+C$$

۵۴. $$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{2ax-x^{2}}}=a\sin^{-1}\frac{x-a}{a}-\sqrt{2ax-x^{2}}+C$$

۵۵. $$\frac{dx}{x\sqrt{۲ax-x^۲}}=-\frac{۱}{a}\sqrt{\frac{۲a-x}{x}}+C$$

۵۶. $$\int \sin ax\,dx=-\frac{۱}{a}\cos ax+C$$

۵۷. $$\int \cos ax\,dx=\frac{۱}{a}\sin ax+C$$

۵۸. $$\int \sin^۲ ax\,dx=\frac{x}{۲}-\frac{\sin ۲ax}{۴a}+C$$

۵۹. $$\int \cos^۲ ax\,dx=\frac{x}{۲}+\frac{\sin ۲ax}{۴a}+C$$

۶۰. $$\int \sin^n ax\,dx=\frac{-\sin^{n-۱} ax\cos ax}{na}+\frac{n-۱}{n}\int \sin^{n-۲} ax\,dx$$

۶۱. $$\int \cos^n ax\,dx=\frac{\cos^{n-۱} ax\sin ax}{na}+\frac{n-۱}{n}\int \cos^{n-۲} ax\,dx$$

۶۲. الف) $$\int \sin ax\cos bx\,dx=-\frac{\cos(a+b)x}{۲(a+b)}-\frac{\cos(a-b)x}{۲(a-b)}+C,\quad a^۲\neq b^۲$$

ب) $$\int \sin ax\sin bx\,dx=\frac{\sin(a-b)x}{۲(a-b)}-\frac{\sin(a+b)x}{۲(a+b)},\quad a^۲\neq b^۲$$

پ) $$\int \cos ax\cos bx\,dx=\frac{\sin(a-b)x}{۲(a-b)}+\frac{\sin(a+b)x}{۲(a+b)},\quad a^۲\neq b^۲$$

۶۳. $$\int \sin ax\cos ax\,dx=-\frac{\cos ۲ax}{۴a}+C$$

۶۴. $$\int \sin^n ax\cos ax\,dx=\frac{\sin^{n+۱} ax}{(n+۱)a}+C,\quad n\neq -۱$$

۶۵. $$\int \frac{\cos ax}{\sin ax}\,dx=\frac{۱}{a}\ln|\sin ax|+C$$

۶۶. $$\int \cos^n ax\sin ax\,dx=-\frac{\cos^{n+۱} ax}{(n+۱)a}+C,\quad n\neq -۱$$

۶۷. $$\int \frac{\sin ax}{\cos ax}\,dx=-\frac{۱}{a}\ln|\cos ax|+C$$

۶۸. $$\int \sin^n ax\cos^m ax\,dx=-\frac{\sin^{n-۱} ax\cos^{m+۱} ax}{a(m+n)}+\frac{n-۱}{m+n}\int \sin^{n-۲} ax\cos^m ax\,dx$$

$n\neq -m$ (اگر $n=-m$، شمارهٔ ۸۶ را به‌کار ببرید.)

۶۹. $$\int \sin^n ax\cos^m ax\,dx=\frac{\sin^{n+۱} ax\cos^{m-۱} ax}{a(m+n)}+\frac{m-۱}{m+n}\int \sin^n ax\cos^{m-۲} ax\,dx$$

$m\neq -n$ (اگر $m=-n$، شمارهٔ ۸۷ را به‌کار ببرید.)

۷۰. $$\int \frac{dx}{b+c\sin ax}=\frac{-۲}{a\sqrt{b^۲-c^۲}}\tan^{-۱}\left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}}\tan\left(\frac{\pi}{۴}-\frac{ax}{۲}\right)\right]+C,\quad b^۲>c^۲$$

۷۱. $$\int\frac{dx}{b+c\sin ax}=\frac{-1}{a\sqrt{c^2-b^2}}\ln\left|\frac{c+b\sin ax+\sqrt{c^2-b^2}\cos ax}{b+c\sin ax}\right|+C,\quad b^2<c^2$$

۷۲. $$\int\frac{dx}{1+\sin ax}=-\frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right)+C$$

۷۳. $$\int\frac{dx}{1-\sin ax}=\frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right)+C$$

۷۴. $$\int\frac{dx}{b+c\cos ax}=\frac{2}{a\sqrt{b^2-c^2}}\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}}\tan\frac{ax}{2}\right]+C,\quad b^2>c^2$$

۷۵. $$\int\frac{dx}{b+c\cos ax}=\frac{1}{a\sqrt{c^2-b^2}}\ln\left|\frac{c+b\cos ax+\sqrt{c^2-b^2}\sin ax}{b+c\cos ax}\right|+C,\quad b^2<c^2$$

۷۶. $$\int\frac{dx}{1+\cos ax}=\frac{1}{a}\tan\frac{ax}{2}+C$$

۷۷. $$\int\frac{dx}{1-\cos ax}=-\frac{1}{a}\cot\frac{ax}{2}+C$$

۷۸. $$\int x\sin ax\,dx=\frac{1}{a^2}\sin ax-\frac{x}{a}\cos ax+C$$

۷۹. $$\int x\cos ax\,dx=\frac{1}{a^2}\cos ax+\frac{x}{a}\sin ax+C$$

۸۰. $$\int x^n\sin ax\,dx=-\frac{x^n}{a}\cos ax+\frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\,dx$$

۸۱. $$\int x^n\cos ax\,dx=\frac{x^n}{a}\sin ax-\frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin ax\,dx$$

۸۲. $$\int\tan ax\,dx=\frac{1}{a}\ln|\sec ax|+C$$

۸۳. $$\int\cot ax\,dx=\frac{1}{a}\ln|\sin ax|+C$$

۸۴. $$\int\tan^2 ax\,dx=\frac{1}{a}\tan ax-x+C$$

۸۵. $$\int\cot^2 ax\,dx=-\frac{1}{a}\cot ax-x+C$$

۸۶. $$\int\tan^n ax\,dx=\frac{\tan^{n-1}ax}{a(n-1)}-\int\tan^{n-2}ax\,dx,\quad n\neq 1$$

۸۷. $$\int\cot^n ax\,dx=-\frac{\cot^{n-1}ax}{a(n-1)}-\int\cot^{n-2}ax\,dx,\quad n\neq 1$$

۸۸. $$\int\sec ax\,dx=\frac{1}{a}\ln|\sec ax+\tan ax|+C$$

۸۹. $$\int\csc ax\,dx=-\frac{1}{a}\ln|\csc ax+\cot ax|+C$$

۹۰. $$\int\sec^2 ax\,dx=\frac{1}{a}\tan ax+C$$

۹۱. $$\int\csc^2 ax\,dx=-\frac{1}{a}\cot ax+C$$

۹۲. $$\int\sec^n ax\,dx=\frac{\sec^{n-2}ax\tan ax}{a(n-1)}+\frac{n-2}{n-1}\int\sec^{n-2}ax\,dx,\quad n\neq 1$$

۹۳. $$\int\csc^n ax\,dx=-\frac{\csc^{n-2}ax\cot ax}{a(n-1)}+\frac{n-2}{n-1}\int\csc^{n-2}ax\,dx,\quad n\neq 1$$

۹۴. $$\int \sec^n ax \tan ax\, dx = \frac{\sec^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$$

۹۵. $$\int \csc^n ax \cot ax\, dx = -\frac{\csc^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$$

۹۶. $$\int \sin^{-1} ax\, dx = x \sin^{-1} ax + \frac{1}{a}\sqrt{1 - a^2x^2} + C$$

۹۷. $$\int \cos^{-1} ax\, dx = x \cos^{-1} ax - \frac{1}{a}\sqrt{1 - a^2x^2} + C$$

۹۸. $$\int \tan^{-1} ax\, dx = x \tan^{-1} ax - \frac{1}{2a} \ln(1 + a^2x^2) + C$$

۹۹. $$\int x^n \sin^{-1} ax\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \sin^{-1} ax - \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1}\, dx}{\sqrt{1 - a^2x^2}}, \quad n \neq -1$$

۱۰۰. $$\int x^n \cos^{-1} ax\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cos^{-1} ax + \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1}\, dx}{\sqrt{1 - a^2x^2}}, \quad n \neq -1$$

۱۰۱. $$\int x^n \tan^{-1} ax\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \tan^{-1} ax - \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1}\, dx}{1 + a^2x^2}, \quad n \neq -1$$

۱۰۲. $$\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

۱۰۳. $$\int b^{ax}\, dx = \frac{1}{a} \frac{b^{ax}}{\ln b} + C, \quad b > 0, \quad b \neq 1$$

۱۰۴. $$\int x e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1) + C$$

۱۰۵. $$\int x^n e^{ax}\, dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax}\, dx$$

۱۰۶. $$\int x^n b^{ax}\, dx = \frac{x^n b^{ax}}{a \ln b} - \frac{n}{a \ln b} \int x^{n-1} b^{ax}\, dx, \quad b > 0, \quad b \neq 1$$

۱۰۷. $$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \sin bx - b \cos bx) + C$$

۱۰۸. $$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \cos bx + b \sin bx) + C$$

۱۰۹. $$\int \ln ax\, dx = x \ln ax - x + C$$

۱۱۰. $$\int x^n \ln ax\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln ax - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C, \quad n \neq -1$$

۱۱۱. $$\int x^{-1} \ln ax\, dx = \frac{1}{2}(\ln ax)^2 + C$$

۱۱۲. $$\int \frac{dx}{x \ln ax} = \ln|\ln ax| + C$$

۱۱۳. $$\int \sinh ax\, dx = \frac{1}{a} \cosh ax + C$$

۱۱۴. $$\int \cosh ax\, dx = \frac{1}{a} \sinh ax + C$$

۱۱۵. $\int \sinh^2 ax\,dx = \frac{\sinh 2ax}{4a} - \frac{x}{2} + C$

۱۱۶. $\int \cosh^2 ax\,dx = \frac{\sinh 2ax}{4a} + \frac{x}{2} + C$

۱۱۷. $\int \sinh^n ax\,dx = \frac{\sinh^{n-1} ax \cosh ax}{na} - \frac{n-1}{n}\int \sinh^{n-2} ax\,dx, \quad n \neq 0$

۱۱۸. $\int \cosh^n ax\,dx = \frac{\cosh^{n-1} ax \sinh ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cosh^{n-2} ax\,dx, \quad n \neq 0$

۱۱۹. $\int x \sinh ax\,dx = \frac{x}{a}\cosh ax - \frac{1}{a^2}\sinh ax + C$

۱۲۰. $\int x \cosh ax\,dx = \frac{x}{a}\sinh ax - \frac{1}{a^2}\cosh ax + C$

۱۲۱. $\int x^n \sinh ax\,dx = \frac{x^n}{a}\cosh ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cosh ax\,dx$

۱۲۲. $\int x^n \cosh ax\,dx = \frac{x^n}{a}\sinh ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sinh ax\,dx$

۱۲۳. $\int \tanh ax\,dx = \frac{1}{a}\ln(\cosh ax) + C$

۱۲۴. $\int \coth ax\,dx = \frac{1}{a}\ln|\sinh ax| + C$

۱۲۵. $\int \tanh^2 ax\,dx = x - \frac{1}{a}\tanh ax + C$

۱۲۶. $\int \coth^2 ax\,dx = x - \frac{1}{a}\coth ax + C$

۱۲۷. $\int \tanh^n ax\,dx = -\frac{\tanh^{n-1} ax}{(n-1)a} + \int \tanh^{n-2} ax\,dx, \quad n \neq 1$

۱۲۸. $\int \coth^n ax\,dx = -\frac{\coth^{n-1} ax}{(n-1)a} + \int \coth^{n-2} ax\,dx, \quad n \neq 1$

۱۲۹. $\int \operatorname{sech} ax\,dx = \frac{1}{a}\sin^{-1}(\tanh ax) + C$

۱۳۰. $\int \operatorname{csch} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\left|\tanh\frac{ax}{2}\right| + C$

۱۳۱. $\int \operatorname{sech}^2 ax\,dx = \frac{1}{a}\tanh ax + C$

۱۳۲. $\int \operatorname{csch}^2 ax\,dx = -\frac{1}{a}\coth ax + C$

۱۳۳. $\int \operatorname{sech}^n ax\,dx = \frac{\operatorname{sech}^{n-2} ax \tanh ax}{(n-1)a} + \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{sech}^{n-2} ax\,dx, \quad n \neq 1$

۱۳۴. $\int \operatorname{csch}^n ax\,dx = -\frac{\operatorname{csch}^{n-2} ax \coth ax}{(n-1)a} - \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{csch}^{n-2} ax\,dx, \quad n \neq 1$

۱۳۵. $\int \operatorname{sech}^n ax \tanh ax\,dx = -\frac{\operatorname{sech}^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$

۱۳۶. $\int \operatorname{csch}^n ax \coth ax\, dx = -\frac{\operatorname{csch}^n ax}{na} + C, \quad n \neq ۰$

۱۳۷. $\int e^{ax} \sinh bx\, dx = \frac{e^{ax}}{۲}\left[\frac{e^{bx}}{a+b} - \frac{e^{-bx}}{a-b}\right] + C, \quad a^۲ \neq b^۲$

۱۳۸. $\int e^{ax} \cosh bx\, dx = \frac{e^{ax}}{۲}\left[\frac{e^{bx}}{a+b} + \frac{e^{-bx}}{a-b}\right] + C, \quad a^۲ \neq b^۲$

۱۳۹. $\int_۰^\infty x^{n-۱} e^{-x}\, dx = \Gamma(n) = (n-۱)!, \quad n > ۰$

۱۴۰. $\int_۰^\infty e^{-ax^۲}\, dx = \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > ۰$

۱۴۱. $\int_۰^{\pi/۲} \sin^n x\, dx = \int_۰^{\pi/۲} \cos^n x\, dx = \begin{cases} \frac{۱ \cdot ۳ \cdot ۵ \cdots (n-۱)}{۲ \cdot ۴ \cdot ۶ \cdots n} \cdot \frac{\pi}{۲}, & \text{عددی صحیح و زوج و نا کمتر از ۲ } n \\ \frac{۲ \cdot ۴ \cdot ۶ \cdots (n-۱)}{۳ \cdot ۵ \cdot ۷ \cdots n}, & \text{عددی صحیح و فرد و نا کمتر از ۳ } n \end{cases}$