

ریاضی ۱۱

- حدود زیر را بسازید:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+\varepsilon} - \varepsilon}{x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^y - 1}{x^{10} - 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x x^3}{\int_0^x dx}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\varepsilon} \frac{x^r + \omega x + \varepsilon}{x^r + \mu x - \varepsilon}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \sin(65x) \sin x$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^r}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^r + \dots + x^h - n}{x-1}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^r - a^r}}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x+1)(x^r+1)\dots(x^n+1)}{[(nx)^n + 1]^{\frac{n+1}{r}}}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow \omega} \frac{\mu x^r - 11x + \omega}{\nu x^r - 1\varepsilon x - \omega}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt[r]{x}}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^r x}{1 + 65^{\mu} x}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{65 \frac{\pi x}{r}}{1-x}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \int_0^x \frac{\pi x}{r}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x x - \sin x}{x^{\mu}}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{x}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})$$

$$20) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$21) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \sin 2x \dots \sin nx}{x^n}$$

$$22) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$$

$$23) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{-\sqrt{x^2 + 4x}}$$

$$24) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x^2 - 4}}{4x + 3}$$

$$25) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sin x} \right)$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{(x + \sin x)^2}$$

$$27) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$$

۲۸- برابر $x \neq 0$ ، مثال دهید

$$|g(x) - 1| < \frac{1}{2} (x-1)^2$$

۲۹- فرض کنید $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) \text{ را بیابید.}$$

در این صورت

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = 0$$

۳۰- مثال دهید

۳۱- فرض کنید $f(x) = \begin{cases} \varepsilon - x^2 & x < 2 \\ x - 1 & x > 2 \end{cases}$. $f(2) = c$. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ وجود دارد؟

۳۲- c زا: چه مقدار a تابع f را در c می‌گیرد؟
 $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x & x < 2 \\ x^2 - ax & x > 2 \end{cases}$
 بر $(-\infty, +\infty)$ پیوسته است؟

۳۳- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع f در c پیوسته باشد.
 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - \varepsilon}{x - 2} & x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & 2 < x < 3 \\ 2x - a + b & x > 3 \end{cases}$

۳۴- اگر $f(x) = \begin{cases} 7 + x^2 - \varepsilon & x < 4 \\ 6 - x & x > 4 \end{cases}$ ،
 $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ را بدست آورید.

۳۵- اگر $g(x) = \begin{cases} 1 + x^2 - \varepsilon & x < 2 \\ 2x & x > 2 \end{cases}$ ،
 $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ را بیابید.

۳۶- فرض کنید f و g توابعی باشند که بر $[a, b]$ پیوسته‌اند و $f(a) < g(a)$ و

$f(b) > g(b)$. ثابت کنید $c \in [a, b]$ موجود است لطفی که $f(c) = g(c)$.

۳۷- فرض کنید f یک تابع پیوسته بر $[a, b]$ باشد و $f(a) < c$. ثابت کنید $c \in [a, b]$ موجود است لطفی که $f(c) = c$.

۳۸- فرض کنید $[0,1] \rightarrow [0,1]$ پیوسته و $f(0) \neq 0$ و $f(1) \neq 1$.

مثال دهید $c \in (0,1)$ موجود است که $f(c) = c^2$.

۳۹- فرض کنید f بر $[a,b]$ پیوسته باشد و x_1 و x_2 دو نقطه دلخواه دلخواه از این بازه

باشد. مثال دهید $c \in (a,b)$ وجود دارد که $f(x_1) + f(x_2) = 2f(c)$.

۴۰- مثال دهید $f(x) = x^2 + 2x - 1$ دارای حداقل یک ریشه مثبت است.

۴۱- فرض کنید f تابعی با دامنه \mathbb{R} و در نقطه a پیوسته بوده و $a, b \in \mathbb{R}$

راشته باشیم. ثابت کنید $f(a+b) = f(a) + f(b)$. ثابت کنید f در همه جا پیوسته است.

۴۲- فرض کنید f تابعی با دامنه \mathbb{R} و در نقطه a پیوسته بوده و $a, b \in \mathbb{R}$

راشته باشیم. ثابت کنید $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$. ثابت کنید f در همه جا پیوسته است.

۴۳- مثال دهید که معادله $x^5 + 2x^2 + x - 3 = 0$ ریشه‌های حقیقی و ۱ دارد.

۴۴- ریشه‌های چهارم عدد مختلط $-2\sqrt{3} - 2i$ را بدست آورید.

۴۵- معادله $x^4 + 1 + i = 0$ را در میدان اعداد مختلط حل کنید.

۴۶- $(-1+i)^{\frac{1}{3}}$ و $(-2\sqrt{3}-2)^{\frac{1}{4}}$ را بدست آورید.

۴۷- مثال دهید: الف) $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ و ب) $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

۴۸- اگر یک عدد مختلف باشد، مکان های زیر را در صفحه اعداد مختلط تعیین کنید:

الف) $Re(\frac{1}{2} + i) > 2$ ب) $Im(\frac{1}{2} + i) < 2$

۴۹- ریشه های چهارم عدد ۱۶- را بدست آورید. همچنین کسر زیر را ساده کنید:

$$z = \frac{(1+i)^{100}}{(1-i)^{97} - i(1+i)^{98}}$$

۵۰- ریشه های سوم عدد مختلفاً $\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$ را بدست آورید.

الف- مطلوب است محاسبه $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$

۵۲- فرض کنید $f(x) = (x-a)\phi(x)$ که در آن ϕ در a پیوسته است. $f'(a)$ را بیابید.

۵۳- تابع f ، ضابطه $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & ; x < 3 \\ 8-x & ; x \geq 3 \end{cases}$ مفروض است. مشتق پذیری تابع f در $x=3$ را بررسی کنید.

۵۴- فرض کنید دامنه تابع f مجموعه اعداد حقیقی بوده و برای $a, b \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$. همچنین فرض کنید $f(0) = 1$ و $f'(0)$ موجود و

شماره باشد. نشان دهید برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $f'(x)$ موجود بوده و داریم

$$f'(x) = f'(0) f(x)$$

۵۵- فرض کنید f تابع مشتق پذیر باشد طبقاً

$$f'(x) = 1 + (f(x))^2$$

مثال دهید $f(g(x)) = x$. $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

۵۶- برای چه مقادیری از a, b, c تابع f فاصله پذیر است؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2; & x < 1 \\ ax + b; & x > 1 \end{cases}$$

۱ مشتق پذیر است؟

۵۷- فرض کنید $f(x) = \sqrt{1+6x^2}$ مقدار $f'(\frac{\sqrt{\pi}}{2})$ کو را بدست آورید.

۵۸- مثال دهید که معادله $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ یک ریشه حقیقی مغزبوز دارد.

۵۹- مثال دهید که نامساوی $|\sin a - \sin b| < |a - b|$ برای اعداد رگول a و b برقرار است.

۶۰- مثال دهید که نامساوی $|a - b| < |a - c| + |c - b|$ برای اعداد رگول a, b, c و c در بازه $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ برقرار است.

۶۱- فرض کنید تابع f بر بازه $[a, b]$ پیوسته و در بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و

$af(a) = bf(b)$ ثابت کنید $c \in (a, b)$ موجود است طبقاً $f(c) + cf'(c) = 0$.

۶۲- فرض کنید f تابع فریب پذیر باشد که همبند مشتق پذیر است. ثابت کنید که برای هر $b > 0$

$$f'(c) = \frac{f(b)}{b} \quad c \in (-b, b) \text{ موجود است طبقاً}$$

۶۳- فرض کنید $a > 0$ و تابع f بر $[a, b]$ پیوسته و در (a, b) تمیز پذیر باشد و

$$a^2 f(a) = b^2 f(b) \quad \text{شان رسید } c \in (a, b) \text{ موجود است بطوریکه}$$

$$f'(c) = \frac{-2f(c)}{c}$$

۶۴- فرض $a < b$ ثابت کنید:

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

۶۵- ثابت کنید معادله $x^5 + x^3 + 2x - 3 = 0$ یک نقطه یک ریشه حقیقی

در بازه $(0, 1)$ دارد.

۶۶- شان رسید تابع f با مخالفه $f(x) = \frac{1}{x^3 + 3x - 1}$ در یک نقطه

ناپوستگی دارد.

۶۷- شان رسید که تابع f با مخالفه $f(x) = x^3 + x$ در هر اسر رافه f برگشت

مکوست پذیر است و بدون بدیت آوردن مخالفه تابع معلوس، $(f^{-1})'(10)$

رایباید.

۶۸- فرض کنید f یک تابع تمیز پذیر و f^{-1} معلوس آن باشد بطوریکه $f(4) = 5$

$$f'(4) = \frac{2}{3} \quad \text{مقدار } (f^{-1})'(5) \text{ را بدیت آورید.}$$

۶۹- در هر یک از تمرینات زیر $(f^{-1})'(a)$ را بیابید.

الف) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 7x + 6$ ، $a = 6$

ب) $f(x) = x^3 + 3 \sin x + 2 \cos x$ ، $a = 2$

ج) $f(x) = 3 + x^2 + \frac{\pi x}{2}$ ، $-1 < x < 1$ ، $a = 3$

۷۰- تابع f با ضابطه $f(x) = x^2 - 4x + 7$ و دامنه $D_f = [2, +\infty)$

مفروض است $(f^{-1})'(v)$ را بیابید $(v \in D_{f^{-1}})$.

۷۱- نقطه $A|_0$ واقع بر منحنی $y = \sin(x-y)$ ، \sin^3 ، حاصل
بر آن رسم کردن ام. معادله خط مماس را بیابید.

۷۲- در تابع f با ضابطه $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ ، a, b را طوری

ببست آورید که نقطه $A|_2$ نقطه عطف منحنی باشد.

۷۳- استوانه ارتفاع r و ارتفاع h ، داخل کره ارتفاع h است.
 r و h را طوری ببست آورید که حجم استوانه بیشترین مقدار ممکن باشد.