جبر فرالی - نخستین درس در جبر مجرد ترجمهٔ مسعود فرزان

عمل دوتایی

تعریف: فرض کنیم A یک مجموعه باشد. در اینصورت $*$ یک عمل دوتایی روی A است اگر $*$ یک تابع از $A \times A$ به A باشد و در اینصورت می‌نویسیم.

$$* : A \times A \longrightarrow A$$

$$*(x, y) = x * y$$

مثال ۱: عمل $+$ روی $\mathbb{N}$

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$+(m, n) = m + n$$

(2) عمل ضرب $(\cdot)$ روی $\mathbb{N}$ یک عمل دوتایی است.

$$\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$\cdot(m, n) = m \cdot n$$

(3) فرض کنیم E مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج باشد در اینصورت $+$ یک عمل دوتایی روی E است.

$$+ : E \times E \longrightarrow E$$

$$+(2m, 2n) = 2m + 2n = 2(m+n) \in E$$

(4) فرض کنیم O مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد باشد در اینصورت $+$ یک عمل دوتایی روی O نیست

$$(2m+1) + (2n+1) = 2(m+n+1) \notin O$$

(5) عمل $*$ را روی $\mathbb{N}$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$* : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$m * n = mn + 2$$

تعریف: فرض کنیم $*$ یک عمل دوتایی روی مجموعهٔ A باشد.

الف - $*$ شرکت‌پذیر است اگر برای هر $x, y, z \in A$ داشته باشیم: $(x * y) * z = x * (y * z)$

ب - $*$ جابجایی است اگر برای هر $x, y, z \in A$ داشته باشیم: $(x * y) = (y * x)$

مثال: (1) جمع و ضرب معمولی اعداد شرکت‌پذیر و جابجایی اند.

(2) عمل تفاضل معمولی اعداد شرکت‌پذیر و جابجایی نمی‌باشد.

(3) عمل تقسیم معمولی شرکت‌پذیر و جابجایی نمی‌باشد.

(4) عمل $*$ روی مجموعهٔ A را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$* : A \times A \longrightarrow A$$

$$x * y = x$$

در اینصورت داریم: $(x*y)*z = x*z = x$

$x*(y*z) = x*y = x$

پس * شرکت پذیر است. اگر $x,y\in A$ و $x\neq y$ آنگاه * جابجایی نیست زیرا که:

$x*y = x \neq y = y*x$

تمرین: یک عمل دوتایی تعریف کنید که شرکت پذیر نباشد ولی جابجایی باشد.

جدول یک عمل دوتایی روی یک مجموعهٔ متناهی:

فرض کنیم $A=\{a_1,\dots,a_n\}$ یک مجموعهٔ متناهی و * یک عمل دوتایی روی A باشد در این صورت به عمل * می توان جدول زیر را وابسته نمود.

*	a_1	....	a_j	....	a_n
a_1					
⋮					
a_i			a_{ij}		
⋮					
a_n					

مثال (۱): اگر فرض کنیم $A=\{a\}$

*	a
a	a

(۲) اگر $A=\{a,b\}$، ۱۶ عمل دوتایی روی A داریم

(۳) $A=\{a,b\}$

*	a	b
a	a	b
b	b	a

*	a	b
a	a	a
b	a	b

تمرین ۱-۷ ص ۲۱ ۱) غلط ۲) درست ۳) غلط ۴) غلط ۵) غلط ۶) درست
۷) درست ۸) غلط چون تابع نمی باشد.

فصل دوم گروه ها

تعریف گروه: فرض کنیم * یک عمل دوتایی روی مجموعهٔ G باشد در اینصورت $(G,*)$ یک گروه است اگر داشته باشیم:

الف) * شرکت‌پذیر باشد یعنی برای هر $x,y,z\in G$ داریم:

$$(x*y)*z = x*(y*z)$$

ب) عنصر $e\in G$ وجود داشته باشد بطوریکه $x*e=e*x=x$ برای هر $x\in G$

ج) برای هر $x\in G$ عنصر $x'\in G$ وجود داشته باشد بطوریکه $x*x'=x'*x=e$

(x' معکوس x نامیده می‌شود)

علاوه اگر * جابجایی باشد آنگاه G یک گروه آبلی (یا جابجایی) نامیده می‌شود.

مثال: (1) $(\mathbb{N},+)$ یک گروه نیست زیرا که عنصر همانی ندارد.

(2) $(\mathbb{N},\cdot)$ یک گروه نیست زیرا هر عنصر معکوس ندارد.

(3) $(\mathbb{Z},+)$ یک گروه آبلی است.

(4) $(\mathbb{Z},\cdot)$ یک گروه نیست زیرا هر عنصر معکوس ندارد.

(5) $(\mathbb{Q},\cdot)$ یک گروه نیست زیرا که 0 عنصر معکوس ندارد.

(6) $(\mathbb{Q}-\{0\},\cdot)$ یک گروه آبلی است.

(7) فرض کنیم $G=\{a,b\}$ و عمل * روی G را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

آیا $(G,*)$ یک گروه آبلی است؟

*	a	b
a	a	b
b	b	a

اولاً بایستی تمام ترکیبات زیر را تحقیق کنیم:

$(a*a)*b=a*(a*b)$

$(a*b)*a=a*(b*a)$

$\vdots$

یک گروه آبلی است.

(8) فرض کنیم $G=\{-1,1\}$ اولاً نسبت به عمل ضرب بسته است و عمل ضرب را بعنوان یک عمل دوتایی روی G در نظر بگیریم. در اینصورت جدول عمل ضرب بصورت زیر است.

$\cdot$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

قضیه: فرض کنیم $(G,*)$ یک گروه باشد و $a,b,c\in G$. در اینصورت داریم:

الف) قانون حذف از طرف چپ $a*b=a*c \Rightarrow b=c$

ب) 〃 〃 〃 راست $b*a=c*a \Rightarrow b=c$

اثبات: (الف)

$$a*b=a*c \Rightarrow a'*(a*b)=a'*(a*b) \Rightarrow (a'*a)*b=(a'*a)*c$$

$$e*b=e*c \Rightarrow b=c$$

تمرین: نشان دهید که عنصر همانی یک گروه یکتاست. همچنین نشان دهید که عنصر معکوس هر عنصر یکتاست.

از این به بعد اگر a عنصری از گروه باشد معکوس آن را با a^{-1} نشان می‌دهیم.

معادلات خطی در یک گروه همیشه دارای جوابند و جوابشان یکتاست.

قضیه: فرض کنیم $(G, *)$ یک گروه باشد و $a, b \in G$ در این صورت:

(الف) معادله $a*x=b$ در G دارای جواب یکتاست.

(ب) « $y*a=b$ در G دارای جواب یکتاست.

اثبات: (الف) چون $a, b \in G$ پس $a^{-1}*b \in G$ و داریم:

$$a*(a^{-1}*b) = (a*a^{-1})*b = e*b = b$$

پس $a^{-1}*b$ یک جواب معادله $a*x=b$ می‌باشد. فرض کنیم $g \in G$ یک جواب معادله $a*x=b$ باشد در این صورت داریم:

$$a*g=b \Rightarrow a^{-1}*(a*g)=a^{-1}*b$$

$$(a^{-1}*a)*g=a^{-1}*b \Rightarrow e*g=a^{-1}*b \Rightarrow g=a^{-1}*b$$ (پس جواب یکتاست)

مثال:

(1) اگر $G=\{a\}$ آنگاه تنها عمل دوتایی روی G به صورت زیر است، در این صورت $(G,*)$ یک گروه آبلی است.

*	a
a	a

(2) فرض کنیم $G=\{a,e\}$ و عمل * را طوری روی G تعریف می‌کنیم که $(G,*)$ یک گروه باشد.

*	e	a
e	e	a
a	a	e

(این تنها گروه یک مجموعه دو عضوی است)

(3) فرض کنیم $G=\{e,a,b\}$ و عمل * را طوری روی G تعریف می‌کنیم که $(G,*)$ یک گروه باشد.

*	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

تنها گروه سه عضوی

(4) فرض کنیم $G=\{e,a,b,c\}$ و عمل * را روی G طوری تعریف می‌کنیم که $(G,*)$ یک گروه باشد.

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

فصل سوم   زیرگروه

تعریف: فرض کنیم $(G,*)$ یک گروه باشد در اینصورت زیرمجموعهٔ H از G یک زیرگروه G است اگر (الف) H نسبت به $*$ بسته باشد (ب) $(H,*)$ یک گروه باشد و می‌نویسیم

$H \leq G$

مثال:

(1) گروه $(\mathbb{Z},+)$ را درنظر می‌گیریم. فرض کنیم E مجموعهٔ اعداد زوج صحیح باشد ملاحظه می‌شود که $(E,+)$ یک زیرگروه $(\mathbb{Z},+)$ است می‌نویسیم $E=2\mathbb{Z}$. بطور کلی برای هر $n\in\mathbb{Z}$ اگر $n\mathbb{Z}$ مجموعهٔ همهٔ مضارب n باشد آنگاه $n\mathbb{Z}$ یک زیرگروه است.

(2) اگر $(G,*)$ یک گروه باشد آنگاه G دارای دو زیرگروه بدیهی $\{e\}$ و G می‌باشد. اگر G زیرگروه دیگری داشته باشد آنگاه به آن زیرگروه، زیرگروه غیربدیهی گفته می‌شود.

مثال: فرض کنیم $G=\{e,a\}$ و عمل $*$ روی G بصورت زیر باشد.

$*$	e	a
e	e	a
a	a	e

ملاحظه می‌شود که تنها زیرگروههای G زیرگروههای بدیهی هستند.

مثال: $(\mathbb{Q},+)\leq(\mathbb{R},+)$ ، $(\mathbb{Z},+)\leq(\mathbb{Q},+)$ و $(\mathbb{Z},+)\leq(\mathbb{R},+)$ و

$(\mathbb{Q}-\{0\},\cdot)\leq(\mathbb{R}-\{0\},\cdot)$

قضیه: فرض کنیم G یک گروه باشد. اگر K یک زیرگروه G و H یک زیرگروه K باشد آنگاه H زیرگروه G است.

واضح است که: $H\leq K \wedge K\leq G \Rightarrow H\leq G$

مثال: فرض کنیم $\mathbb{Z}_n=\{0,1,\dots,n-1\}$ روی $\mathbb{Z}_n$ عمل $\oplus$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$x\oplus y =$ باقیماندهٔ تقسیم $x+y$ بر n

در اینصورت $(\mathbb{Z}_n,\oplus)$ یک گروه است (چرا؟) و در حقیقت یک گروه آبلی است.

درحالت خاص اگر $n=2$ آنگاه $\mathbb{Z}_2=\{0,1\}$ دارای عمل زیر است.

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

درحالت خاص اگر $n=3$ آنگاه $\mathbb{Z}_3=\{0,1,2\}$ دارای عمل زیر است.

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

ملاحظه می‌شود $\mathbb{Z}_3$ زیرگروه غیربدیهی ندارد.