دنباله های اعداد

تعریف. دنباله ای از اعداد، تابعی است که دامنه اش مجموعه اعداد صحیح مثبت است.

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \rightsquigarrow a(n)$$

1) $a(n) = n-1$, 2) $a(n) = 1-\frac{1}{n}$, $a(n) = \frac{\ln n}{n^2}$

$a(n)$ را جمله n ام گوییم.

$a_n = a(n)$

$a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2, \dots, a_n = n-1, \dots$

نمادگذاری: دنباله‌ای که جمله n ام آن a_n است را با $\{a_n\}$ نشان می دهیم.

تعریف 2. دنباله $\{a_n\}$ به حد L همگراست (می نویسیم $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$) یعنی اگر به هر عدد مثبت ε یک اندیس N نظیر شود بطوری که به ازای هر $n > N$، $|a_n - L| < \varepsilon$.

اگر چنین حدی وجود نداشته باشد گوییم که $\{a_n\}$ واگراست. L را حد دنباله $\{a_n\}$ گوییم.

مثال. $\{\frac{1}{n}\}$ همگراست.

$\{k\}$ ، $a_n = k$ همگر است. (k عددی است ثابت)

$\{(-1)^n \frac{n-1}{n}\}$ واگراست.

قضیه. اگر دنباله‌ای چون $\{a_n\}$ همگرا باشد حد آن یکتا ست.

اثبات: صفحه بعد

مثال های دیگری از دنباله ها:

$$a_n = \frac{n!}{10^{6n}} , \quad a_n = \frac{1}{n}\int_1^n \frac{1}{x}\,dx , \quad a_n = \sqrt[n]{\frac{x^n}{2n+1}} , \quad x>0$$

$$a_n = (1-1/n^2)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (1-1/n^2)^n = \lim_{n\to\infty} (1-1/n)^n (1+1/n)^n = \lim_{n\to\infty} (1+1/n)^n \lim (1+\tfrac{-1}{n})^n = e \cdot e^{-1} = 1$$

$$a_n = (1-1/n^2)^n \Rightarrow \ln a_n = n\ln(1-1/n^2) \Rightarrow \underset{\ln \lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim \ln a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1-1/n^2)}{1/n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{+2/n^3}{1-1/n^2}}{-1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-2/n}{1-1/n^2} = 0 \Rightarrow \ln \lim a_n = 0 \Rightarrow \lim a_n = e^0 = 1$$

① $\{a_n\}, \{b_n\}$, $\forall n,\ a_n \le b_n \Rightarrow a \le b$

$\downarrow \quad \downarrow$

$a \quad\ b$

<u>Pf.</u> If $a > b \Rightarrow \varepsilon = a-b$

$$\lim(b_n - a_n) = \lim b_n - \lim a_n = b-a$$

$$\Rightarrow \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad |b_n - a_n - (b-a)| < a-b\ (=\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \quad b-a-(a-b) < b_n - a_n < \cancel{a} - \cancel{b} + (\cancel{b} - \cancel{a})$$

$$\Rightarrow \forall n > N \quad b_n - a_n < 0 \quad \text{or} \quad b_n < a_n \ \times$$

<u>EX.</u> $\{(1+1/n)^n\}$ صعودی , $(1+\frac{1}{n})^n \geqslant 2$

اگر $\{(1+1/n)^n\}$ همگرا باشد آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} (1+1/n)^n \geqslant 2$$

<u>Cor.</u> $\{a_n\} ; \{c_n\}$ همگرا , $\lim a_n = \lim c_n = a$,

$a_n \le b_n \le c_n$, $\forall n \Rightarrow \{b_n\}$ همگرا , $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$

<u>EX.</u> $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$\forall n > 1,\ \sqrt[n]{n} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{n} = 1 + a_n \Rightarrow n = (1+a_n)^n$

$$n = 1 + na_n + \frac{n(n-1)}{2}a_n^2 + \cdots + a_n^n > \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 \Rightarrow \cancel{n} > \frac{\cancel{n}(n-1)}{2} a_n^2$$

$\forall n \geqslant 2,\quad \frac{n-1}{2} a_n^2 < 1 \Rightarrow a_n^2 < \frac{2}{n-1}$

$$\Rightarrow a_n < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}},$$

$\forall n \geqslant 2,\ a_n \geqslant 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} = 0 \Rightarrow \lim a_n = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty}(1+a_n) = 1 + \lim a_n = 1$$

راه دیگر: $a_n = n^{1/n} \Rightarrow \ln a_n = 1/n \ln n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n \overset{H}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^0 = 1$

تعریف. هر عبارت به صورت

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \qquad (1)$$

از اعداد را یک سری نامتناهی می‌نامیم. (یا فقط یک سری)

عبارت بالا را به صورت فشرده $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ می‌نویسیم. اعداد a_1، a_2، ...، a_n جملات سری نامیده می‌شود. a_n را جمله nام یا جمله عمومی سری می‌گوییم.

سری‌های همگرا و واگرا (جمع پذیر و جمع ناپذیر)

به هر سری به صورت (1) یک دنباله $\{s_n\}$ تطبیق می‌کنیم که به آن دنباله جمع‌های جزئی سری گفته می‌شود بدین صورت که

$$s_1=a_1$$
$$s_2=a_1+a_2=a_2+s_1$$
$$s_3=a_1+a_2+a_3=a_3+s_2$$
$$\vdots$$
$$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=a_n+s_{n-1}$$

اگر دنباله $\{s_n\}$ همگرا با حد $s=\lim_{n\to\infty} s_n$ باشد در این صورت گوییم سری (1) همگرا است و به آن مجموع s را نسبت می‌دهیم و می‌نویسیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=s$.

اگر دنباله $\{s_n\}$ واگرا باشد یعنی $\lim_{n\to\infty} s_n$ موجود نباشد در این صورت سری (1) را واگرا می‌گوییم و در این حالت می‌نویسیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\infty$.

مثال. درهمگرایی سری هندسی

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^n+\cdots$$

که در آن r و $a\neq 0$ ثابت‌های دلخواهی هستند، بحث کنید.

حل:

$a=$ جمله اول ، $r=$ قدر نسبت

$$s_1=a\ ,\ s_2=a+ar,\ s_3=a+ar+ar^2,\ \ldots,\ s_n=a+ar+\cdots+ar^{n-1},\ldots$$

$$\left.\begin{aligned} s_n&=a+\cancel{ar}+\cancel{\cdots}+\cancel{ar^{n-1}}\\ -\ rs_n&=\cancel{ar}\pm\cancel{ar^2}\pm\cdots\pm ar^n\end{aligned}\right\} \Rightarrow s_n-rs_n=a-ar^n$$

$$\Rightarrow s_n(1-r)=a(1-r^n) \Rightarrow s_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r} \qquad r\neq 1$$

هرگاه $|r|<1$ آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$ پس $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a-a\lim r^n}{1-r} = \dfrac{a}{1-r}$

و سری همگراست با مجموع $\dfrac{a}{1-r}$

هرگاه $|r|>1$ آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=\infty$ و لذا $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ موجود نیست. پس

در این حالت سری واگراست.

هرگاه $r=1$ ، سری به صورت زیر در می‌آید

$$a+a+a+\cdots$$

$\Rightarrow S_n = na \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty \Rightarrow$ سری واگراست

هرگاه $r=-1$ سری به صورت $a-a+a-a+\cdots$ در می‌آید

$$S_1=a\ ,\ S_2=a-a=0\ ,\ S_3=a-a+a=a\ ,\ \cdots$$

$\Rightarrow S_n = \begin{cases} a & \text{اگر } n \text{ فرد باشد،} \\ 0 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد،} \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ موجود نیست.

پس سری واگراست.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

$\{S_n\}$ ، دنباله جمع های جزئی سری

$\sum a_n$ همگرا $\Leftrightarrow$ $\{S_n\}$ همگرا $\Leftrightarrow$ $\{S_n\}$ دنباله کشی $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall m,n>N \Rightarrow |S_m-S_n|<\varepsilon$$

فرض $m=n+p \Rightarrow |S_m-S_n| = |a_1+\dots+a_n+a_{n+1}+\dots+a_{n+p}-(a_1+\dots+a_n)|$

$$= |a_{n+1}+\dots+a_{n+p}|<\varepsilon$$

پس سری $\sum a_n$ همگراست $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n>N,\ \forall p,\ |a_{n+1}+a_{n+2}+\dots+a_{n+p}|<\varepsilon$$

Cor. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ همگرا } \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0}$

Pf. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ کشی $\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N},\ n>N,\ \forall p=1$

$|a_{n+1}|<\varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 0$

Cor $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n \text{ واگراست}}$

EX. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ ولی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ واگراست

Pf. $S_1=1,\ S_2=1+\frac{1}{2},\ \dots,\ S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$

$$S_{2^2}=S_4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1+2\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$S_{2^3}=S_8=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{8}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=1+3\left(\frac{1}{2}\right)$$

لذا $S_{2^n}>1+\frac{n}{2}$, $S_{2^{n+1}}=1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\dots+\frac{1}{2^{n+1}}$

$$=S_{2^n}+\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}\frac{1}{k}$$

$$2^n+1\le k\le 2^{n+1} \Rightarrow \frac{1}{k}\geq\frac{1}{2^{n+1}} \Rightarrow \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}\frac{1}{k}\geq\frac{1}{2^{n+1}}+\dots+\frac{1}{2^{n+1}}=2^n\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}$$

مثال. $\frac{\#8}{p.579}$

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\cos \pi/3\right)^n$ $\quad \cos \pi/3 = 1/2 = r$ $\quad$ سری هندسی: $|r| < 1/2$ همگرا

ب) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\tan \pi/4\right)^n$ $\quad \tan \pi/4 = 1$ ... , $\quad \lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0$ سری واگرا

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+5}$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+5} = \frac{1}{2}$ $\quad$ سری واگرا

د) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5(-1)^n}{4^n}$ $\quad r = -1/4$, $|r| < 1$ $\quad$ سری هندسی. $|r| < 1$ همگرا

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

4'

#22
p. 582

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{A_1}{n} + \frac{A_2}{n^2} + \frac{B_1}{n+1} + \frac{B_2}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{A_1 n(n+1)^2 + A_2(n+1)^2 + B_1(n+1)n^2 + B_2 n^2}{n^2(n+1)^2}$$

$A_1 + B_1 = 0$, $2A_1 + A_2 + B_1 + B_2 = 0$, $A_1 + 2A_2 = 2$, $A_2 = 1$

$\cancel{2}_0 + 1 + B_2 = 0$ $\Downarrow$

$B_2 = -1$ $A_1 = 0 \Rightarrow B_1 = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$S_1 = a_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2^2}$, $S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2^2}} + \cancel{\frac{1}{2^2}} - \frac{1}{3^2}$

$S_3 = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2^2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2^2}} - \cancel{\frac{1}{3^2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3^2}} - \frac{1}{4^2}\right)$

$\vdots$

$S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$ $\lim_{n \to \infty} S_n = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$

1/p.615

4"

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln(1-1/n^2), \quad \ln(1-1/n^2) = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right)$$

$$S_n = a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

$$= \ln\left(\frac{1\cdot 3}{2^2}\right) + \ln\left(\frac{2\cdot 4}{3^2}\right) + \ln\left(\frac{3\cdot 5}{4^2}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{(n-2)n}{(n-1)^2}\right) + \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(1\cdot\cancel{3})(\cancel{2}\cdot\cancel{4})(\cancel{3}\cdot\cancel{5})\cdots((n-2)\cancel{n})(\cancel{n-1})(n+1)}{2^2\ \cancel{3}^2\ 4^2 \cdots \cancel{(n-1)}^2\ n^2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right) = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} \ln(1-1/n^2) = -\ln 2$$

$$S_n = \ln\left(\frac{(1.3)(\cancel{2}.4)(\cancel{3}.5)\cdots(n-2)\cancel{n}(\cancel{n-1})(n+1)}{\cancel{2}^2\ 3^2\ 4^2 \cdots (n-1)^2\ n^2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(1\cdot\cancel{3})(4)(\cancel{5})\cdots(\cancel{n-1})(n+1)}{2\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}\cdots(\cancel{n-1})n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)$$

#26
p.591

$p>0, \quad \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$ $\qquad \int \frac{du}{u^p} = \int u^{-p}\,du = \frac{u^{1-p}}{1-p}$, $p>1 \Rightarrow 1-p<0$

$u = \ln x$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p}\Big|_2^{\infty} = \frac{(\ln 2)^{1-p}}{1-p}$$

پس برای $p>1$ ، همگراست.

الف) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ ، $p=1$ همگرا یا واگرا ؟

ب) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1.01}}$ $\quad p=1.01>1$ همگرا

ج) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{n^{1/2}}{(\ln n)^3}$

د) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n^3)} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{3(\ln n)n}$ مثل الف است

ه) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{(n+1)/n}}$

$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$; $x \geq 2$ $\xRightarrow{\text{آزمون انتگرال}}$ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ واگراست ، زیرا $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x}dx$ واگراست

1) f تابع پیوسته بر $[2,\infty)$

2) $f(x) \geq 0$

3) $f'(x) = \frac{-(1+\ln x)}{x^2(\ln x)^2} < 0$

ب) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1.01}}$ $\qquad 1.01 = p>1$ همگراست

$\sqrt{n}$

آزمون مقایسه‌ای حدی

الف) اگر به ازای $n \geq n_0$ داشته باشیم $a_n \geq 0$ و سری همگرای $\sum c_n$ وجود داشته باشد به قسمی که $c_n > 0$ و $\lim \frac{a_n}{c_n} < \infty$ آنگاه $\sum a_n$ همگراست.

ب) ″ ″ ″ ″ ″ $a_n \geq 0$ و ″ ″ ″ $\sum d_n$ ″ ″ ″ ″ ″ ″ $d_n > 0$ و $\lim \frac{a_n}{d_n} > 0$ آنگاه $\sum a_n$ واگرا است.

مثال.

(الف) $a_n = \dfrac{2n}{n^2 - n + 1}$ $\qquad \dfrac{2n}{n^2} = \dfrac{2}{n}$

(ب) $a_n = \dfrac{2n^3 + 100n^2 + 1000}{1/8\, n^6 - n + 2}$ $\qquad 2n^3 / \tfrac{1}{8}n^6 = 16/n^3$

$$d_n = 1/n \,, \quad \frac{a_n}{d_n} = \frac{\frac{2n}{n^2 - n + 1}}{\frac{1}{n}} = \frac{2}{1 - \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{d_n} = 2 \qquad \forall \varepsilon = 1 \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow \left|\frac{a_n}{d_n} - 2\right| < 1$$

$$\forall n \geq N, \quad 2 - 1 \leq \frac{a_n}{d_n} \leq 2 + 1$$

$$1 \leq \frac{a_n}{d_n} \Rightarrow d_n \leq a_n$$

چون $\sum d_n$ واگرا است $\Longrightarrow$ $\sum a_n$ واگرا است

(ب) $c_n = 1/n^3 \,, \quad \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{c_n} = 16$

$\sum c_n$ p - سری با $p = 3 > 1$ لذا همگرا است پس a_n نیز همگرا است.

صورت ساده شده آزمون مقایسه حدی: اگر جمله‌های دو سری $\sum a_n$ و $\sum b_n$ به ازای $n \geq n_0$ مثبت باشند و حد a_n / b_n متناهی و مثبت باشد، آنگاه یا هر دو سری همگرااند و یا هر دو سری واگرا هستند.

مثال.

(الف) $\dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{9} + \dfrac{7}{16} + \dfrac{9}{25} + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{(n+1)^2}$ $\qquad a_n = \dfrac{2n+1}{(n+1)^2} \,, d_n = 1/n$

$\lim \dfrac{a_n}{d_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n^2 + n}{(n+1)^2} = 2$ سری واگرا است

(ب) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{5} + \dfrac{5}{6} + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+1}$ $\qquad b_n = \dfrac{n}{n+1} \,, \lim\limits_{n \to \infty} b_n = 1$ سری واگرا است

(ج) $\dfrac{101}{3} + \dfrac{102}{10} + \dfrac{103}{29} + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{100+n}{n^3+2}$

(د) $\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{7} + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n - 1}$ $\qquad a_n = \dfrac{100+n}{n^3+2} \,, c_n = \dfrac{1}{n^2}$

$\lim \dfrac{a_n}{c_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^3 + 100n^2}{n^3 + 2} = 1$ سری همگرا است

$a_n = \dfrac{1}{2^n - 1} \,, \quad c_n = \dfrac{1}{2^n} \,, \quad \dfrac{a_n}{c_n} = \dfrac{2^n}{2^n - 1} = \dfrac{1}{1 - (1/2)^n} \to 1 \,, \; n \to \infty$ همگرا است.

۱۵- همگرایی یا واگرایی سری‌هایی را که جمله n ام آن‌ها در زیر آمده است، تحقیق کنید.

آ) $\dfrac{n}{1000n^2+1}$ ب) $\dfrac{n+1}{n!}$

حل: آ) سری $\sum \frac{n}{1000n^2+1}$ را با سری $\sum \frac{1}{n}$ مقایسه می‌کنیم.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{1000n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1000n^2+1} = \frac{1}{1000}$$

بنابر آزمون مقایسه حدی سری $\sum \frac{n}{1000n^2+1}$ واگراست چون سری $\sum \frac{1}{n}$ واگراست

ب)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{(n+1)(n+1)} = 0 < 1$$

بنابر آزمون نسبت سری فوق همگراست.

آزمون نسبت (یا دالامبر)

فرض کنید $\sum a_n$ سری با جملات مثبت باشد و نیز فرض کنید که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$$

در این صورت

الف) سری همگرا است اگر $\rho<1$

ب) سری واگرا است اگر $\rho>1$

ج) سری ممکن است همگرا یا واگرا باشد اگر $\rho=1$.

اثبات. الف) $\rho < r < 1 \Rightarrow \epsilon = r - \rho > 0$ ، فرض $\rho<1$

لذا این رو وقتی n بینهایت می‌شود جملات سری به صفر میل نمی‌کنند یعنی $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ پس سری $\sum a_n$ بنابر آزمون n امین جمله برای واگرایی، واگرا است.

ب) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ ، $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{سری همساز، واگرا}}$ ، $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{p \text{ سری با } p=2>1 \text{ همگرا}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1 \quad \text{II}$$

در هر دو مورد $p=1$ ولی سری اول همگرا و سری دوم واگرا است.

- مثال ۲ ص ۵۹۴ کتاب

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,n!}{(2n)!} \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n\,n!\,n!}{(2n)!} \qquad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n}$$

حل:

$$1)\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!\,(n+1)!}{(2(n+1))!}}{\frac{n!\,n!}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(2n)!}\,\overset{n+1}{\cancel{(n+1)!}}\,\overset{n+1}{\cancel{(n+1)!}}}{\underbrace{\cancel{(2n+2)!}}_{(2n+2)(2n+1)}\,\cancel{n!}\,\cancel{n!}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow \text{سری همگرا است.}$$

$$3)\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}+5}{3^{n+1}}}{\frac{2^n+5}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n(2^{n+1}+5)}{3^{n+1}(2^n+5)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2+5\times 2^{-n}}{1+5\times 2^{-n}}\right) = \frac{1}{3}\times\frac{2}{1} = \frac{2}{3} < 1$$

سری همگرا است.

مثال. سری زیر به ازای چه مقادیری از x همگرا است؟

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$$

حل:

الف) $x>0$ ، $a_n = \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ ، $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{2n+1}/2n+1}{x^{2n-1}/2n-1} = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{x^{2n-1}} = \frac{(2n-1)x^2}{2n+1}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = x^2 \Rightarrow \begin{cases} x^2<1 \Rightarrow x<1 & \text{همگرا} \\ x^2>1 \Rightarrow x>1 & \text{واگرا} \end{cases}$$

ب) در کتاب مطالعه کنید.

آزمون ریشه n ام

فرض کنید $\sum a_n$ سری با جملات $a_n \geq 0$ به ازای $n \geq n_0$ باشد و نیز تصور کنید $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \rho$
در این صورت

الف) سری همگراست اگر $\rho<1$

ب) سری واگراست اگر $\rho>1$

ج) آزمون جواب قطعی نمی دهد

اثبات.

1) $\rho<1 \Rightarrow \exists\, \varepsilon>0 \,;\, \rho+\varepsilon<1$. (in fact $\varepsilon<1-\rho$)

$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \rho \Rightarrow \exists N\in\mathbb{N} \ \forall n\geq N \ |\sqrt[n]{a_n}-\rho|<\varepsilon$

$\Rightarrow \quad \forall n\geq N \ \sqrt[n]{a_n}<\rho+\varepsilon$

$\forall n\geq N \ a_n<(\rho+\varepsilon)^n$

سری $\sum_{n=N}^{\infty}(\rho+\varepsilon)^n$ همگراست چون $\rho+\varepsilon<1$ پس سری زیر نیز همگراست

$$a_1+a_2+\cdots+a_{N-1}+\sum_{n=N}^{\infty}a_n$$

2) $\rho>1 \Rightarrow \exists N\in\mathbb{N} \ \forall n>N \ \sqrt[n]{a_n}>1$ (چون عدد بیشتر از یک را به توان برسانی نه بلکه هم بزرگتر از یک می ماند)

$\Rightarrow n>N \quad a_n>1$

و جملات سری به صفر همگرا نیستند $\Leftarrow$ آزمون واگرایی $\sum a_n$ واگراست. (چون جملات سری به صفر همگرا نیستند)

- مثال های کتاب صفحه ۵۹۶

مثال.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$$

حل:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$$

پس سری همگراست.

EX. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\frac{1}{n}=0<1 \Rightarrow$ سری همگراست

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$ $\quad \lim\sqrt[n]{2^n/n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt[n]{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(\sqrt[n]{n})^2}=\frac{2}{1}>1$ سری واگراست

قضیهٔ لایب نیتس

سری متناوب $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots$ همگراست اگر هر سه شرط زیر برقرار باشد

۱. همهٔ a_n ها مثبت باشند. ۲. به ازای همهٔ n ها، $a_n \geqslant a_{n+1}$ ۳. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

حل: اگر n زوج باشد

$$n=2m$$

$$S_{2m} = (a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2m-1}-a_{2m})$$

$$a_1 \geqslant a_2 \qquad a_3 \geqslant a_4 \qquad a_{2m-1} \geqslant a_{2m}$$

S_{2m} مجموع m جملهٔ نامنفی است.

$$\Rightarrow S_{2m+2} \geqslant S_{2m} \quad , \quad \{S_{2m}\} \text{ غیرنزولی است}$$

بعلاوه،

$$S_{2m} = a_1 \underbrace{-\overset{\geqslant 0}{(a_2-a_3)}-\overset{}{(a_4-a_5)}-\cdots-\overset{\geqslant 0}{(a_{2m-2}-a_{2m-1})}\overset{\geqslant 0}{-a_{2m}}}_{\text{یک عدد منفی}}$$

$$a_2 \geqslant a_3 \qquad a_4 \geqslant a_5 \qquad a_{2m-2} \geqslant a_{2m-1}$$

$$S_{2m} \leqslant a_1$$

هر دنباله غیرنزولی از اعداد حقیقی که کراندار باشد دارای حد است (قضیه ۱۰ کتاب) درنتیجه $\{S_{2m}\}$ دارای حدی مانند L است پس

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = L \quad (1)$$

اگر n فرد باشد مثلاً $n=2m+1$ ، آنگاه

$$S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = 0$$

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = L+0 = L \quad (۲)$$

درنتیجه از (۱) و (۲) داریم: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L$. یعنی سری $\sum a_n$ همگراست. $\square$

مثال. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{12n-\ln n-1}$

$$f(x) = \frac{1}{12x-\ln x-1} \quad , \quad f'(x) = \frac{-12+\frac{1}{x}}{(12x-\ln x-1)^2} = \frac{1-12x}{x(12x-\ln x-1)^2} < 0$$

⇐ تابع نزولی ⇐ ، $a_n \geqslant a_{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{12n-\ln n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{12-\frac{\ln n}{n}-\frac{1}{n}} = \frac{0}{12} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} \overset{H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1} = 0$$

بنابه آزمون لایب نیتس (سری متناوب)
سری فوق همگراست.

EX. 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\cdots$

1) $a_n=\frac{1}{n}>0$, 2) $a_n=\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}=a_{n+1}\quad \forall n$ 3) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

پس طبق قضیه لایب نیتس، سری فوق همگراست.

اما $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ سری واگراست

پس همگرایی سری فوق، مشروط است.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}$

الف) $a_n=\sqrt{n}>0$, ب) $a_{n+1}=\sqrt{n+1}<a_n=\sqrt{n}$ نزولی

پس در شرط دوم صدق نمی کند

پ) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty\neq 0$

لذا آزمون لایب نیتس را نمی توان به کار برد.

3) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \ln n/(n+1)$

$a_n=\frac{\ln n}{n+1}>0$ و $\lim_{n\to\infty}a_n \overset{H}{=} \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1}=0$

$f(x)=\frac{\ln x}{x+1}$, $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(x+1)-\ln x}{(x+1)^2}<0$

به شرطی که $1+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}(x+1)<\ln x$

$\forall x=1,2,3,\cdots \quad 1+\frac{1}{x}\leq 2$

$\ln n>2 \Rightarrow n>e^2\approx 7.4 \Rightarrow a_n$ برای $n\geq 8$ نزولی است

$\Rightarrow \sum_{n=8}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n+1}$ همگراست طبق آزمون لایب نیتس $\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n+1}$ همگراست.

سری توانی: هر سری به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$ و یا به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots$ را یک سری توانی صوری می‌نامیم (در نقطه $x=x_0$ یا حول نقطه x_0). a_n را جمله n ام این سری می‌گوییم.
مساله در اینجا پیدا کردن مقادیری از x است که به ازای آن‌ها سری همگراست که به آن بازه همگرایی می‌گوییم.

مثال.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-5)^n}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(2x-5)^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|2x-5|^n}{n^2}$$

آزمون ریشه: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|2x-5|^n}{n^2}} = \lim \frac{|2x-5|}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{|2x-5|}{1} = |2x-5|$

$$\lim_{n\to\infty} (n^2)^{1/n} = \lim (n^{1/n})^2 = 1$$

$$|2x-5| < 1 \Rightarrow 4 < 2x < 6 \Rightarrow 2 < x < 3$$

اگر $x=2 \Rightarrow \sum (2x-5)^n/n^2 = \sum (-1)^n/n^2$ سری همگراست (آزمون لایب نیتس)

اگر $x=3 \Rightarrow \sum (2x-5)^n/n^2 = \sum (+1)^n/n^2 = \sum 1/n^2$ سری همگراست (p سری، $p=2$)

مثال:
سری زیر به ازای هر مقداری از x همگراست

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^n x}{n!}$$

$\left|\frac{\cos^n x}{n!}\right| \le \frac{1}{n!}$ ، $\sum 1/n!$ همگراست

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} =$$

پس همواره همگراست

#26
P.653

بازه همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} \frac{(x-3)^n}{2^n}$ را بدست آورید.

حل:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+2}{2n+3} \frac{\cancel{(x-3)^{n+1}}^{\,x-3}}{\cancel{2^{n+1}}_{\,2}} \cdot \frac{2n+1}{n+1} \cdot \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{(x-3)^n}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+2)(2n+1)}{2(2n+3)(n+1)}\right| |x-3| = |x-3| \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(2n+1)}{2(2n+3)(n+1)}$$

$= \frac{|x-3|}{2} < 1$ همگرا $\Rightarrow |x-3| < 2 \Rightarrow -2 < x-3 < 2$

$1 < x < 5$

اگر $x=1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} \frac{(x-3)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n+1}$ سری واگراست. $\Leftarrow$ $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n+1}$ وجود ندارد

اگر $x=5 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} (x-3)^n/2^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}$ واگرا زیرا: $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$ آزمون واگرایی

#19
p.653

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]^{1/x^2} = A$$

$$\Rightarrow \ln A = \lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{x} = 1 - x^2/3! + x^4/5! - x^6/7! + \cdots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\frac{x\cos x - \sin x}{\cancel{x^2}}}{\frac{\sin^2 x}{\cancel{x^2}}}}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x\cos x - \sin x)}{2x\sin^2 x}$$

2/6

1/2 - 3/6

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} - x^3/2! + x^5/4! + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n)!} - (\cancel{x} - x^3/3! + x^5/5! + \cdots}{2x(x - x^3/3! + x^5/5! + \cdots)(x - x^3/3! + x^5/5! + \cdots)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(-\frac{2}{6}x^3 + \cdots)}{2x^3 + \cdots}$$

$$= -1/6$$

$$\Rightarrow A = e^{\ln A} = e^{-1/6} \checkmark \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{(\sin x)}{x}\right)^{1/x^2} = e^{-1/6}$$