تعریف. انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ یک انتگرال غیرعادی (proper Integral) است اگر

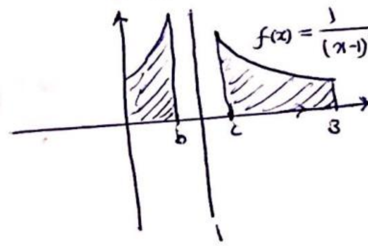
۱. f در یک یا چند نقطه از بازه انتگرال‌گیری بی‌نهایت شود، یا

2. یک یا هر دو حد انتگرال‌گیری بی‌نهایت باشند، یا

3. هم (۱) و هم (2) برقرار باشد.

- انتگرال $= \int_0^1 \frac{dx}{x}$ $= \lim_{b\to 0^+} \int_b^1 \frac{dx}{x} = \infty$ می‌گوییم این انتگرال از $x=0$ تا $x=1$ واگرا است.

- $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$



$$\int_0^3 f(x)dx = \lim_{b\to 1^-}\int_0^b f(x)dx + \lim_{c\to 1^+}\int_c^3 f(x)dx$$

انتگرال $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$

Ex. 1) $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ $\quad \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\Big|_1^b\right) = \lim_{b\to\infty}\left(-1/b+1\right) = 1$$

#43 / p. 439 $\quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \lim_{b\to\infty} \frac{b^{1-p}}{1-p} & , p\neq 1 \\ \lim_{b\to\infty} \ln b & , p=1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & p>1 \\ \infty & p<1 \\ \infty & \text{if } p=1 \end{cases}$

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \int_1^b x^{-p}dx = \begin{cases} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} & \text{اگر } 0<p,\ p\neq 1 \\ \ln|x| & \text{اگر } p=1 \end{cases}$$

پس $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ واگراست اگر $p\le 1$ و همگراست اگر $p>1$.

آزمون تسلط برای همگرایی و واگرایی

اگر به ازای همه xهای بزرگتر از a، $0\le g(x)\le f(x)$، آنگاه

۱. اگر $\int_a^\infty f(x)dx$ همگرا باشد $\int_a^\infty g(x)dx$ نیز همگرا است.

2. اگر $\int_a^\infty g(x)dx$ واگرا باشد $\int_a^\infty f(x)dx$ نیز واگرا است.

EX.1 $\quad \int_1^\infty e^{-x^2}dx \le \int_1^\infty e^{-x}dx \Rightarrow -e^{-x}\Big|_1^\infty = -e^{-\infty}+1 = 1$

$$x^2 \ge x \Rightarrow -x^2 \le -x \Rightarrow e^{-x^2} \le e^{-x}$$

آزمون مقایسه حدی برای انتگرال‌های غیرعادی

اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابع مثبت باشند و $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L$ ، $0<L<\infty$

آنگاه $\int_a^\infty f(x)dx$ و $\int_a^\infty g(x)dx$ هر دو یک رفتار را دارند.

مثال. $\int_3^\infty \frac{1}{e^{2x}-10e^{x}}dx$ همگراست زیرا $\int_3^\infty \frac{1}{e^{2x}}dx$ همگراست.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{e^{2x}}}{1} \cdot \frac{e^{2x}-10e^{x}}{1} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{10}{e^{x}}\right) = 1-0=1$$

پس $\int_3^\infty \frac{1}{e^{2x}-e^{x}}dx$ همگراست.

$\frac{\#27}{p.438}$ $\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx$

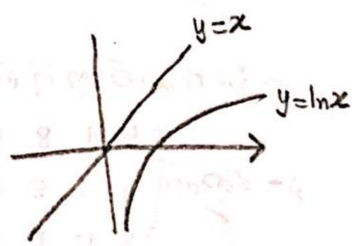
$$x^2e^{-x} \geqslant x^2 e^{-x^3}, \quad \int_0^\infty x^2 e^{-x^3} dx = e^{-x^3}/3 \Big|_0^\infty = 1/3(e^{-\infty}-e^{0}) = -1/3$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2e^{-x}}{x^2} = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0,$$

$$x^2e^{-x} \geqslant x e^{-x}$$

$\frac{\#34}{p.438}$ $\int_1^\infty \frac{1}{e^{\ln x}}dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x}$ انتگرال واگراست

$\frac{\#35}{p.438}$ $\int_2^\infty \frac{1}{\ln x}dx = \int_{\ln 2}^\infty \frac{e^u du}{u}$



$$\ln x \le x \Rightarrow \frac{1}{x} \le \frac{1}{\ln x}, \quad x \geqslant 2$$

$$\int_2^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{A\to+\infty} \ln x \Big|_2^A = \infty \Rightarrow \int_2^\infty \frac{1}{x}dx$$ واگرا

پس $\int_2^\infty \frac{1}{\ln x}dx$ نیز واگراست (آزمون تسلط)

\# 147/p. 451

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x \, dx}{x^2}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{A \to \infty} \int_1^{A} \overbrace{\ln x}^{u} \overbrace{\frac{dx}{x}}^{du} = \lim_{A \to \infty} \left(\frac{1}{2} (\ln x)^2 \Big|_1^A \right)$$

$$= \lim_{A \to \infty} \frac{1}{2} (\ln A)^2 = \infty$$

$$x \leq x^2 \Rightarrow 1/x^2 \leq 1/x \Rightarrow \ln x / x^2 \leq \ln x / x$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x / x^2}{\ln x / x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2} = 0 \to$$

پس نمی‌توان [illegible] حالت
[illegible] باشد
این طوری، پس هر دو واگرایند

حل:

$$\int \overbrace{\ln x}^{u} \overbrace{\frac{dx}{x^2}}^{dv} = -\frac{1}{x} \ln x - \int -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$$

$$\left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right)' = -1/x^2 + \frac{\ln x}{x^2} + 1/x^2 = \frac{\ln x}{x^2} \checkmark$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x \, dx}{x^2} = \lim_{A \to \infty} \int_1^{A} \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$= \lim_{A \to \infty} \left(-1/x (\ln x + 1) \Big|_1^A \right)$$

$$= \lim_{A \to \infty} \left(-1/A (\ln A + 1) + 1 \right)$$

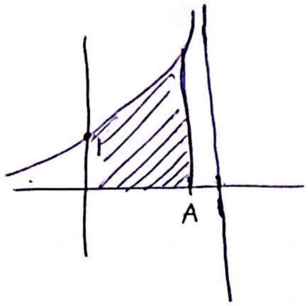
$$\stackrel{H}{=} \left(\lim_{A \to \infty} \frac{-1/A}{1} \right) + 1 = 1$$

همگرا است.

$\int f(x)dx$, $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \lim_{A\to 1^-} \int_0^A \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$

$\searrow$ f(x) مستمرة

x		-1		1	
$1+x$	$-$	0	$+$		$+$
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$
$\frac{1+x}{1-x}$	$-$		$+$		$-$



$\sin^{-1}x = \arcsin x$

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{\overbrace{x\,dx}^{du}}{\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{u}}$$

$$= \sin^{-1}x - \sqrt{1-x^2}$$

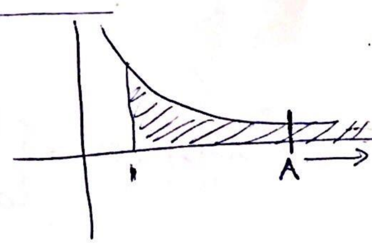
$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \lim_{A\to 1}\left(\sin^{-1}x - \sqrt{1-x^2}\,\Big|_0^A\right) = \lim_{A\to 1} \sin^{-1}A - \sqrt{1-A^2} - (0-1)$$

$$= \pi/2 + 1$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{e^x}\,dx = \int_1^\infty e^{-x}dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^a e^{-x}dx$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left(-e^{-x}\Big|_1^a\right)$$

$$= \lim_{a\to\infty} -e^{-a} + e^{-1} = e^{-1}$$



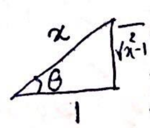
$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}{\cancel{\sec\theta}}\,\cancel{\sec\theta}\tan\theta\,d\theta = \int(\tan^2\theta)\,d\theta = \int(\sec^2\theta - 1)\,d\theta$$

$$= \tan\theta - \theta + C$$

$$= \sqrt{x^2-1} - \sec^{-1}x + C$$

$x = \sec\theta \Rightarrow dx = \sec\theta\tan\theta\,d\theta$

$= \frac{1}{\cos\theta}$



$y^2 + 1 = x^2$

$y^2 = x^2 - 1$

$y = \sqrt{x^2-1}$