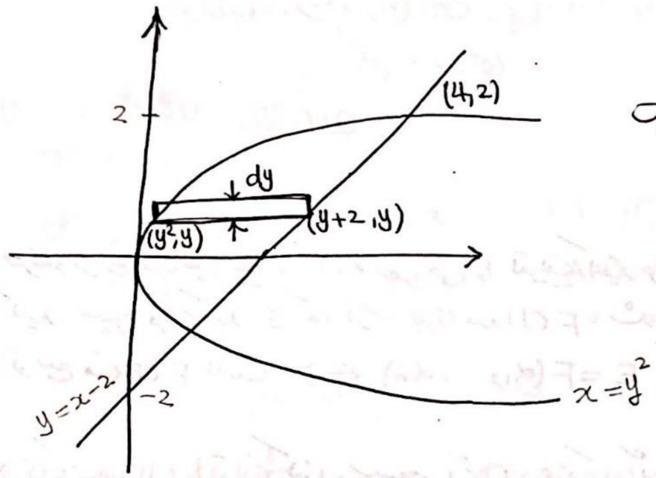
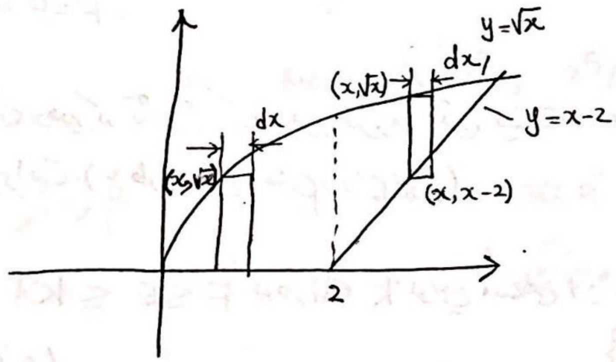
مثال 2. مساحت ناحیه‌ای را بیابید که از طرف راست به خط $y=x-2$، از طرف چپ به سهمی $x=y^2$ و از پایین به محور x محدود است.

روش ۱. انتگرال‌گیری نسبت به y.



$$\text{مساحت} = \int_0^2 (y+2-y^2)\,dy = 10/3$$

روش دوم. انتگرال‌گیری نسبت به x



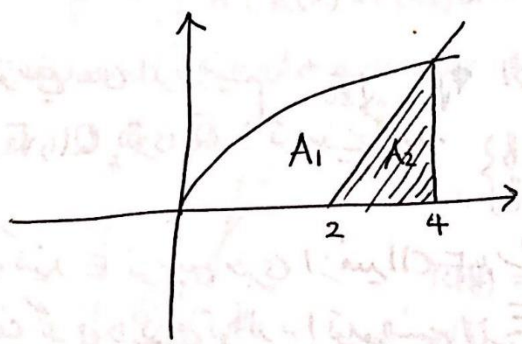
$$\text{مساحت} = \int_0^2 \sqrt{x}\,dx + \int_2^4 (\sqrt{x}-x+2)\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big]_0^2 + \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{x^2}{2} + 2x\Big]_2^4$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3} + \left(\frac{16}{3} - 8 + 8 - \frac{4\sqrt{3}}{2} + 2 - 4\right)$$

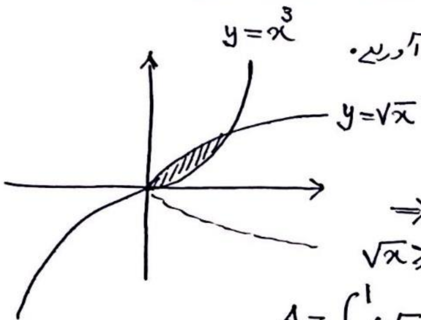
$$= 16/3 - 2 = 10/3$$

روش سوم:



$$\text{مساحت} = A_1 + A_2 - A_2$$

$$= \int_0^4 \sqrt{x}\,dx - \frac{1}{2}\times 2\times 2 = 10/3$$



مثال. مساحت ناحیه محدود به نمودار $y=x^3$ و $y=\sqrt{x}$ را بدست آورید.

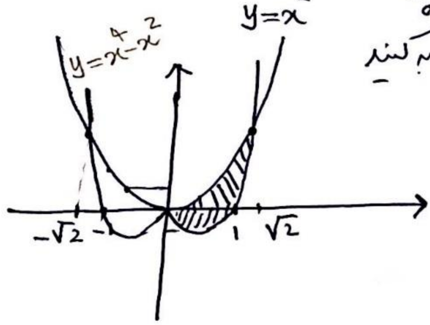
$$\begin{cases} y=x^3 \\ y=\sqrt{x} \end{cases} \qquad x^3=\sqrt{x}$$

$$x^6=x \Rightarrow x(x^5-1)=0$$

$$\Rightarrow x=0\ ,\ x=1$$

بین $[0,1]$: $\sqrt{x}\geq x^3$

$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x^3)dx=\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{x^4}{4}\Big]_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{8-3}{12}=\frac{5}{12}$$



مثال ۲. $y=x^2$ و $y=x^4-x^2$ را رسم کنید

$$y=x^4-x^2=0 \Rightarrow x^2(x^2-1)=0$$

$$\Rightarrow x=0, x=\pm 1$$

$$y'=4x^3-2x=2x(2x^2-1)=0$$

$$\Rightarrow x=0\ ,\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{cases} y=x^4-x^2 \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow x^4-x^2=x^2$$

$$x^2(x^2-2)=0 \Rightarrow x=0, x=\pm\sqrt{2}$$

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

$$A=2\int_0^{\sqrt{2}}[x^2-(x^4-x^2)]dx=2\Big[2\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\Big]_0^{\sqrt{2}}$$

$$=2\left[\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{4\sqrt{2}}{5}\right]$$

$$=2\sqrt{2}\left[\frac{20-12}{15}\right]=\frac{16\sqrt{2}}{15}$$

تعریف. حجم جسمی که مساحت سطح مقطع آن $A(x)$ است از $x=a$ تا $x=b$ مطابق زیر بدست می‌آید

$$V=\int_a^b A(x)\,dx$$

حجم اجسام دوّار

$y=f(x),\quad a\le x\le b\quad ,$

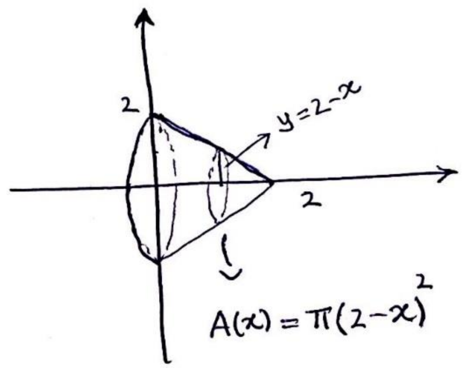
$A(x)=\pi(\text{ش ع})^2=\pi(f(x))^2$

$$\text{حجم}=\int_a^b \pi(\text{ش ع})^2dx=\int_a^b \pi(f(x))^2dx$$

$\frac{\#1}{279}$ $x+y=2,\ x=0,\ y=0$

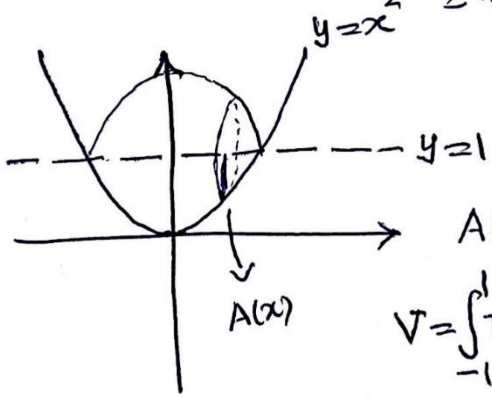
$$V=\int_0^2 A(x)\,dx$$

$$=\int_0^2 \pi(2-x)^2\,dx$$



$A(x)=\pi(2-x)^2$

$\frac{\#21}{p.279}$ حجم جسمی را بیابید که از دوران ناحیهٔ محدود به خم $y=x^2$، خط $y=1$، و محور y حول خط $y=1$ به وجود می‌آید.



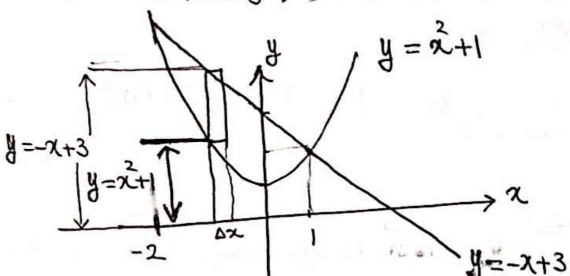
$A(x)=\pi(1-x^2)^2$

$$V=\int_{-1}^{1}\pi(1-x^2)^2\,dx=2\int_0^1\pi(1-x^2)^2\,dx$$

محاسبه حجم به کمک واشرها و پوسته‌های استوانه‌ای (در مواردی کاربرد دارد که انتگرال از حالت‌های قبل بهتر نیست)

واشرها:

مثال ۱. ناحیه محدود به خم $y=x^2+1$ و خط $y=-x+3$ حول محور x دوران می‌کند و جسمی را ایجاد می‌کند که در شکل زیر دیده می‌شود. حجم این جسم را بیابید.



مساحت قرص: $\pi(\text{شعاع خارجی})^2=\pi(-x+3)^2$

مساحت سوراخ: $\pi(\text{شعاع داخلی})^2=\pi(x^2+1)^2$

مساحت واشر:
$$A(x)=\pi(-x+3)^2-\pi(x^2+1)^2$$
$$=\pi(8-6x-x^2-x^4)$$

حجم واشر:
$$\text{ضخامت}\times\text{مساحت رویه}=A(x)\times\Delta x$$

$$\text{حجم}=\lim\sum_{-2}^{1}\pi(8-6x-x^2-x^4)\Delta x=\int_{-2}^{1}\pi(8-6x-x^2-x^4)\,dx$$
$$=\pi\left(8x-3x^2-x^3/3-x^5/5\right)\Big|_{-2}^{1}=\frac{117\pi}{5}$$

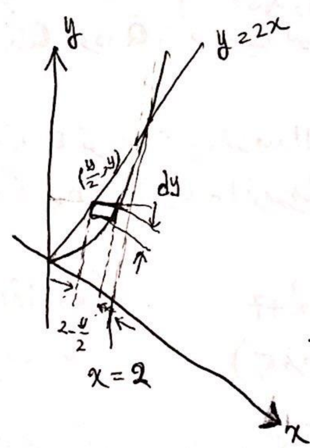
در حالت کلی:

$$\text{حجم واشر}=\pi R^2dx-\pi r^2dx=\pi(R^2-r^2)dx$$

$R=$ شعاع قرص بزرگ ، $r=$ شعاع قرص کوچک

$$\text{حجم}=\int_a^b\pi\left(R^2(x)-r^2(x)\right)dx$$
، $R=$ شعاع خارجی ، $r=$ شعاع داخلی

مثال ۳. حجم جسمی را بیابید که از دوران ناحیه بین سهمی $y=x^2$ و خط $y=2x$ حول خط $x=2$ ایجاد می‌شود.



$$\begin{cases}y=x^2\\y=2x\end{cases}\qquad x^2=2x\Rightarrow x=0,\ x=2\qquad(2,4)$$

$R(y)=2-y/2$: شعاع خارجی

$r(y)=2-\sqrt{y}$: شعاع داخلی

$$\int_0^4\pi(R^2-r^2)\,dy=\int_0^4\pi\left((2-y/2)^2-(2-\sqrt{y})^2\right)dy$$
$$=\int_0^4\pi\left(y^2/2-3y+4\sqrt{y}\right)dy=8/3\,\pi$$

پوسته‌های استوانه‌ای

اگر نوارهای مستطیلی تقریب زننده ناحیه‌ای که حول یک محور دوران می‌کند با آن محور موازی باشد اجسام حاصل به شکل پوسته‌های استوانه‌ای خواهند بود.

۴.۵ محاسبهٔ حجم بـه‌کمک واشرهـا و پوسته‌هـای استوانه‌ای

در بخش پیش حجم اجسام دورانیی را بـه دست آوردیـم کـه می‌توانستیم آنها را به قرصهای عمود برمحور دوران تقسیم‌کنیم. اما همهٔ اجسام دورانی را نمی‌توان چنین تقسیم کرد؛ ودر مواردی که نتوان این‌کار را انجام داد، از دو روشی که دراین بخش عرضه می‌شود بهره می‌گیریم. دراین روشها ابتدا ناحیه‌ای را کـه قرار است دوران کند با نوارهای مستطیلی باریکی می‌پوشانیم، سپس حجم شکلهای حاصل از دوران این نوارها را جمع می‌کنیم. اگر نوارها برمحور دوران عمود باشند، شکلهای حاصل از دوران بـه شکل واشرند. اگر نوارها بـا محور دوران موازی باشند، اشکال حاصل از دوران به‌شکل پوسته‌های استوانه‌ای‌اند. درهردوحالت، مجموع حجمهای اجسام حاصل از دوران نوارها مجموع ریمانی متناظر با انتگرالی‌است که مقدار آن برابرحجم جسم دورانی‌است. حال فرمول این انتگرالها را می‌یابیم و چگونگی کاربردشان را تشریح می‌کنیم.

واشرها

مطلب را با مثالی آغاز می‌کنیم.

مثال ۱ ناحیهٔ محدود به‌خم $y=x^2+1$ و خط $y=-x+3$ حول محور x دوران می‌کند و جسمی را ایجاد می‌کند که درشکل ۲۱.۵ دیده می‌شود. حجم این جسم را بیابید.

حل: با دوران این ناحیه حول محور x، نوار قائمی کـه پهنای آن Δx است و درشکل ۲۱.۵(الف) دیده می‌شود دوران می‌کند و واشرشکل ۲۱.۵(ب) را به‌وجود می‌آورد. واشر قرص نازکی است‌که سوراخی درمیان دارد. حجم واشر برابراست بـا حاصلضرب مساحت رویهٔ آن، $A(x)$، درضخامتش، Δx.

مساحت قرص: $\pi(\text{شعاع خارجی})^2=\pi(-x+3)^2$

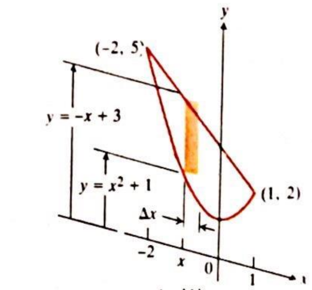
مساحت سوراخ: $\pi(\text{شعاع داخلی})^2=\pi(x^2+1)^2$

مساحت واشر: $A(x)=\pi(-x+3)^2-\pi(x^2+1)^2$

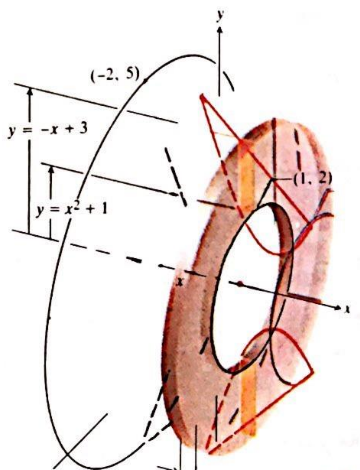
$$=\pi(8-6x-x^2-x^4)$$

حجم واشر: $\text{ضخامت}\times\text{مساحت رویه}=A(x)\Delta x$

حجم جسم حاصل‌از دوران ناحیه رابا جمع‌کردن حجمهای همهٔ واشرها از $x=-2$ تا $x=1$ تقریب می‌زنیم. سپس برای به‌دست‌آوردن حجم جسم، حد مجموع حجمهای واشرها را وقتی



(الف)



(ب)

۲۱.۵ وقتی‌که ناحیهٔ محدود به‌خط $y=-x+3$ وسهمی $y=x^2+1$ درقسمت (الف) دوران‌کند جسم قسمت (ب) به‌وجود می‌آید. از دوران نوار سایه‌دار یك واشر بـه وجود می‌آید کـه شعاع خارجی‌اش $y=-x+3$ وشعاع داخلی‌اش $y=x^2+1$ است.

که Δx به‌سمت صفرمیل کند حساب می‌کنیم

$$\text{حجم}=\lim\sum_{-2}^{1}\pi(8-6x-x^2-x^4)\Delta x$$

$$=\int_{-2}^{1}\pi(8-6x-x^2-x^4)\,dx$$

$$=\pi\left[8x-3x^2-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{1}=\frac{117\pi}{5}. \quad \blacksquare$$

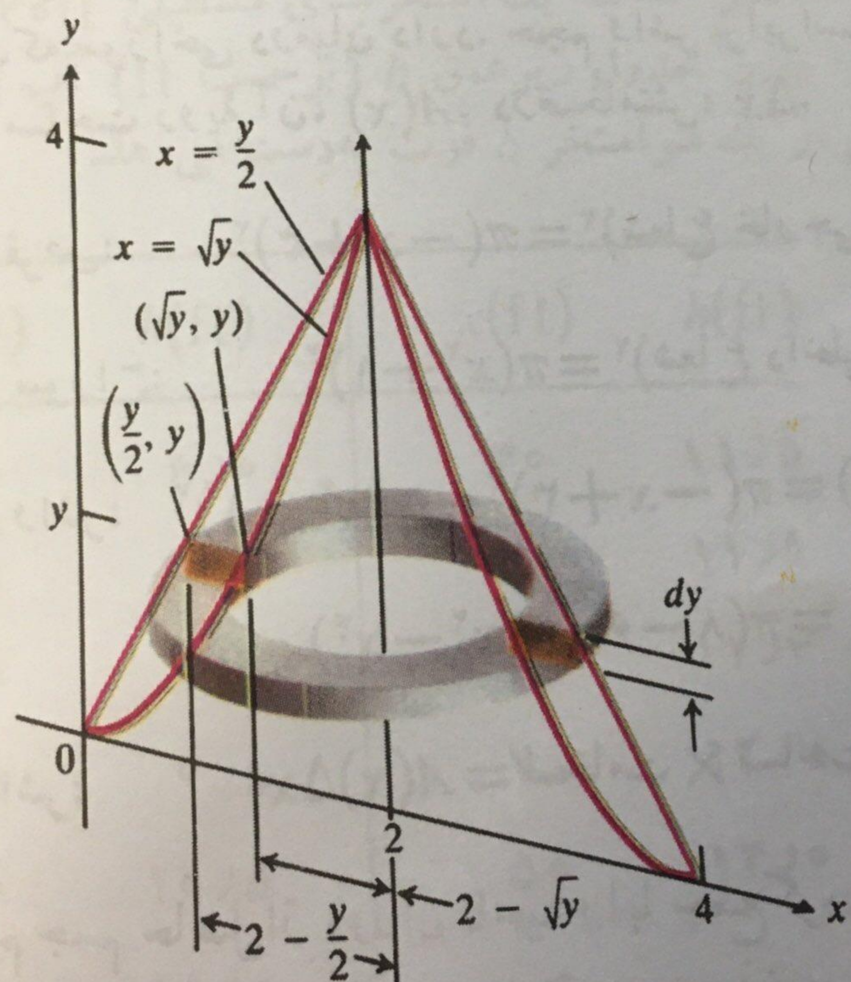
اگـر یك واشرنمونه را تفاضل دو قرص به ضخامت dx،

مثال ۳ حجم جسمی را بیابید که از دوران ناحیهٔ بین سهمی $y=x^{۲}$ و خط $y=۲x$ حول خط $x=۲$ ایجاد می‌شود.

حل: شکلی رسم می‌کنیم تا شعاعهای یك واشر نمونه و حدود انتگرالگیری را تعیین کنیم (شکل ۲۳.۵). داریم

شعاع خارجی: $$R(y)=\left(۲-\frac{y}{۲}\right)$$

شعاع داخلی: $$r(y)=۲-\sqrt{y}$$



۲۳.۵ شعاعهای داخلی وخارجی واشر (همواره)

استوانه‌ای ح
$-(\Delta x/2)$
است.
قاعد
ابعاد و مسا
شعا

حجم جسم:

$$\int_0^4 \pi(R^2 - r^2)\,dy$$

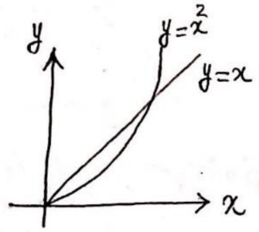
$$= \int_0^4 \pi\left(\left(2-\frac{y}{2}\right)^2 - (2-\sqrt{y})^2\right)dy$$

$$= \int_0^4 \pi\left(\frac{y^2}{4} - 3y + 4\sqrt{y}\right)dy = \frac{8}{3}\pi \,.$$

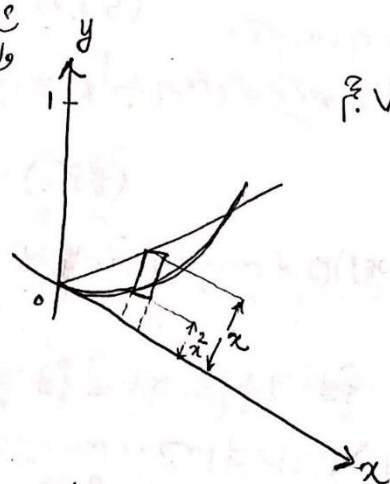
■

مثال. ناحیه محدود به خم $y = x^2$ و $y = x$ در ربع اول را حول محور (الف) x ها (ب) y ها دوران می‌دهیم حجم جسم حاصل را بیابید (به روش واشرها و پوسته‌های استوانه‌ای در هر یک از حالات)

حل:



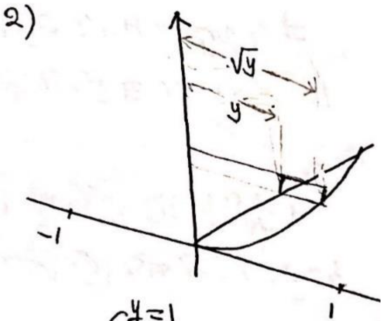
۱) واشرها



دوران حول محور x ها

$$\text{حجم } V = \int_{x=0}^{x=1} \pi\left(x^2 - (x^2)^2\right) dx = \frac{2\pi}{15}$$

۲)

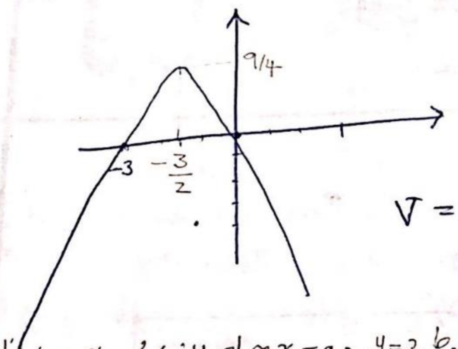


$$\text{حجم } V = \int_{y=0}^{y=1} \pi\left((\sqrt{y})^2 - y^2\right) dy = \pi/6$$

#4
p.279

$y = -3x - x^2, \; y = 0$ حول محور x $\Rightarrow V = ?$

حجم جسمی را تعیین کنید که از دوران ناحیه محدود به خط $y=0$ و خم $y=-3x-x^2$ حول محور x بوجود می‌آید.



$y = -x(3+x)$

$y' = -3-2x = 0 \Rightarrow x = -3/2$

$y = (-3)(-3/2) - (3/2)^2 = -9/4 + 9/2 = 9/4$

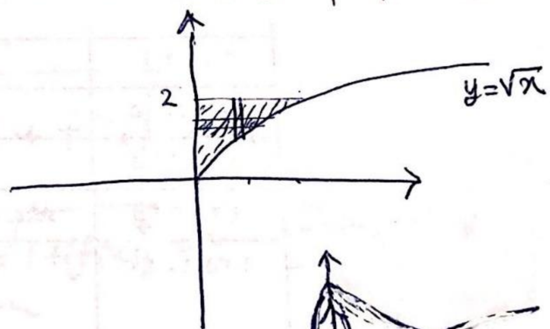
$$V = \int_{-3}^{0} \pi (-3x - x^2)^2 \, dx$$

مطلوب است حجم جسم حاصل از دوران ناحیه محدود به $y=\sqrt{x}$ و خطوط $y=2$ و $x=0$ حول الف) محور x ب) خط $y=2$.

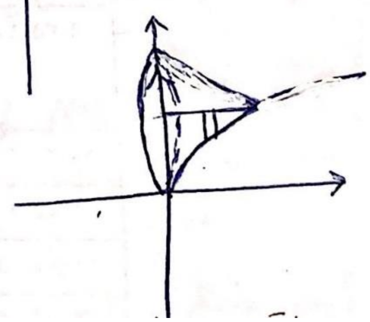
#19
p.279

حول

$y = \sqrt{x}$
$y = 2$
$x = 0$



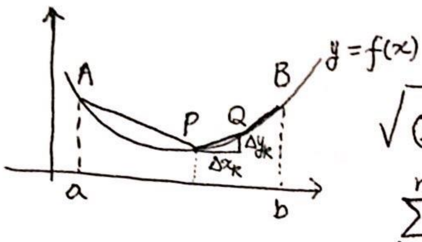
الف) محور x ، ب) خط $y=2$



الف) $V = \int_0^2 \pi \left(2^2 - (\sqrt{x})^2\right) dx$

ب) $V = \int_0^2 \pi (2 - \sqrt{x})^2 \, dx$

طول خم‌های واقع در صفحه



$$\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = |PQ|$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \approx$$ طول خم از $x=a$ تا $x=b$

فرض کنیم f مشتق دارد که در هر نقطهٔ بازهٔ $[a,b]$ پیوسته است. بنا به قضیه مقدار میانگین نقطه‌ای ما شد (c_k, d_k) روی خم و بین P و Q وجود دارد که در آن مماس بر خم موازی وتر PQ است یعنی:

$$\exists (c_k, d_k) \text{ s.t. } \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = f'(c_k) \Rightarrow \Delta y_k = f'(c_k)\Delta x_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(c_k)\Delta x_k)^2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'(c_k)^2}\, \Delta x_k$$

این مجموع انتگرال $\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\cdot dx$ را تقریب می‌زند.

تعریف. طول خم $y=f(x)$ از $x=a$ تا $x=b$ برابر است با

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\, dx$$

با فرض اینکه این انتگرال موجود باشد چون داخل انتگرال تابع پیوسته است پس انتگرال موجود است.

مثال. طول خم $y = \frac{4\sqrt{2}}{3} x^{3/2} - 1$ را از $x=0$ تا $x=1$ بیابید.

فرمول پارامتری طول خم.

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \le t \le b$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x'(t)}{y'(t)} \Rightarrow L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{x'(t)}{y'(t)}\right)^2}\, dt$$

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\cdot dt$$

مثال ۲. کتاب

فرمول دیفرانسیلی ساده:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\cdot dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 (dt)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 (dt)^2} = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int ds$$

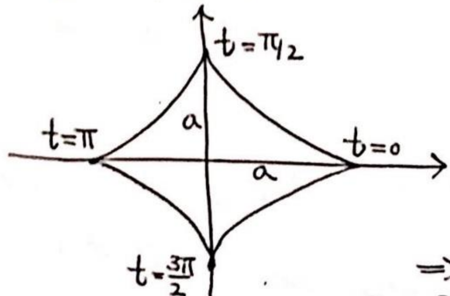
$$L = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int ds$$

مثال ۳. کتاب

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$ دیفرانسیل

IEZ p. 293

مثال. خم $x=a\cos^3 t$ ، $y=a\sin^3 t$ ، $0\le t\le 2\pi$ از چهار قطعه مساوی تشکیل شده است که در نقاط بازگشت روی محورهای مختصات تلاقی می‌کنند. طول کل خم را بیابید.



$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} ,\quad 0\le t\le 2\pi$$

$$x^{2/3} = a^{2/3}\cos^2 t$$

$$y^{2/3} = a^{2/3}\sin^2 t$$

$$\Rightarrow x^{2/3}+y^{2/3} = a^{2/3}(\cos^2 t+\sin^2 t) = a^{2/3}$$

$$x^{2/3}+y^{2/3} = a^{2/3} \Rightarrow (x/a)^{2/3}+(y/a)^{2/3}=1$$

$$L=\int_0^{\pi/2}\sqrt{(dx/dt)^2+(dy/dt)^2}\,dt = \int_0^{\pi/2}\sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2+(3a\cos t\sin^2 t)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{\pi/2}\sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,dt = \int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2 9\sin^2 t\cos^2 t}\,dt$$

$$=a\int_0^{\pi/2} 3\sin t\cos t\,dt = a\,3\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{\pi/2} = 3/2\,a$$

طول کل خم $= 4\cdot 3/2\,a = 6a$

مثال. مطلوب است طول خم $y=\int_0^x\sqrt{\cos 2t}\,dt$ از $x=0$ تا $x=\pi/4$.

حل:

$$L=\int_0^{\pi/4}\sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^{\pi/4}\sqrt{1+\cos 2x}\,dx$$

$$y'=\frac{d}{dx}\int_0^x\sqrt{\cos 2t}\,dt = \sqrt{\cos 2x}$$

$$L=\int_0^{\pi/4}\sqrt{2\cos^2 x}\,dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\cos x\,dx = \sqrt{2}\sin x\Big|_0^{\pi/4}$$

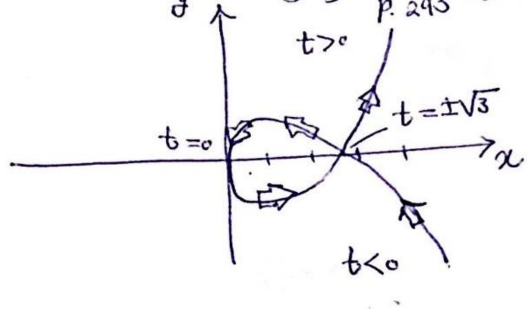
$$=\sqrt{2}(\sqrt{2}/2-0)=1$$

تمرين $\frac{14}{p.\,293}$ دروس

$x = t^2 \Rightarrow \qquad t = \sqrt{x}$

$y = t^3/3 - t = t\left(t^2/3 - 1\right)$

$y = \quad (x/2 - 1) = \sqrt{x}(x/2 - 1)$



$$L = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{(2t)^2 + (t^2 - 1)^2}\, dt$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4t^2 + t^4 - 2t^2 + 1}\, dt$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1}\, dt$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{(t^2 + 1)^2}\, dt$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (t^2 + 1)\, dt = t^3/3 + t \Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{3} + \sqrt{3} - (-\sqrt{3} - \sqrt{3})$$

$$= 4\sqrt{3}$$