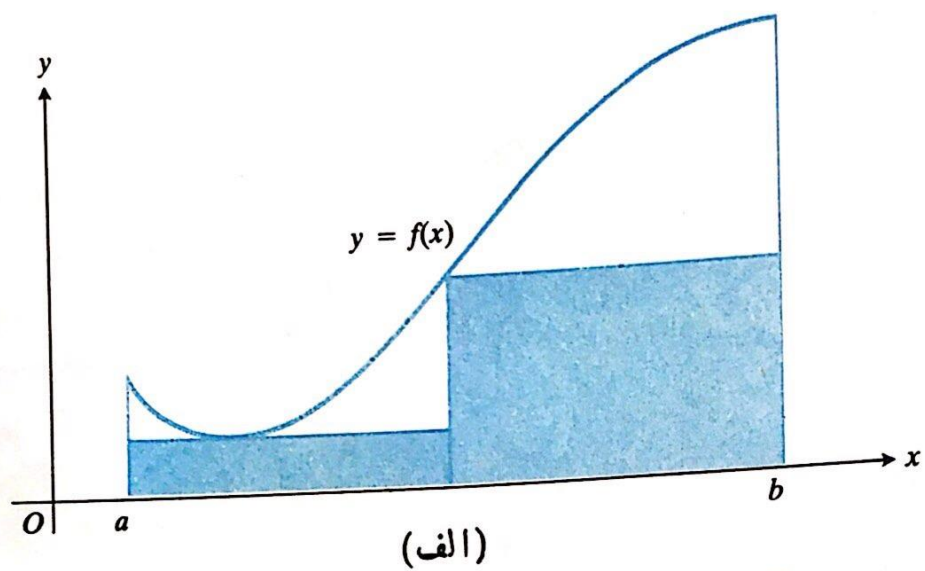
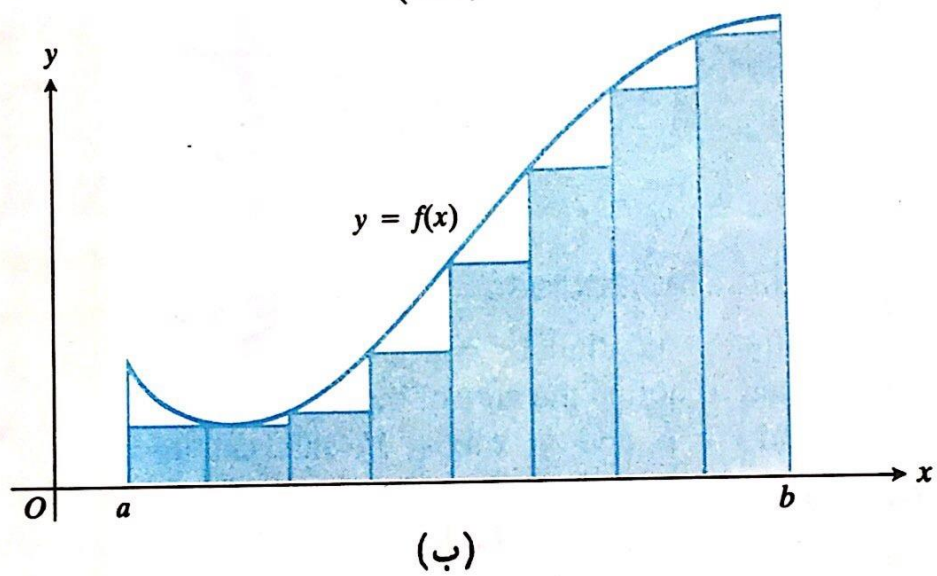


انتگرال معين: مساحت ناحیه زیر يك خم ۲۲۹



نام



ك

م

ن

ع

ه

و

ز

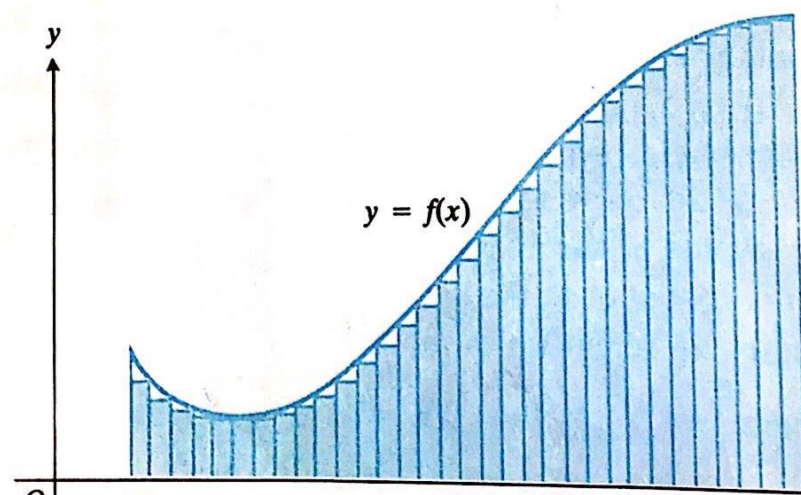
ح

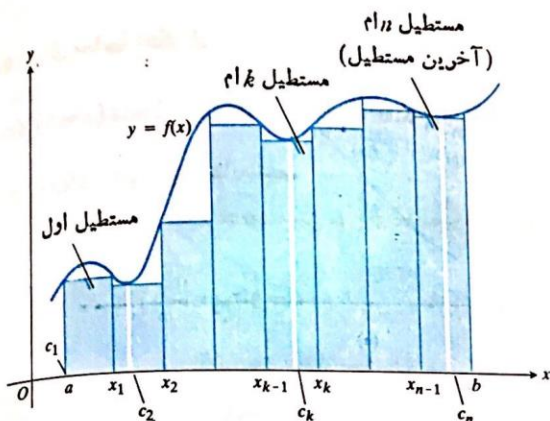
ط

ث

ج

د





۷.۴ رقتی برای پرآورد کردن مساحت ناحیه زیر نمودار يك تابع نامنفی پیوسته مستطیلهای محاطی را به کار می‌بریم، ارتفاع هر مستطیل مقدار مینیمم f بر قاعده آن مستطیل است.

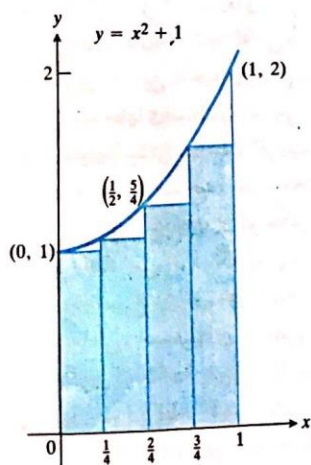
بنابراین، در شکل ۷.۴ مساحت اولین مستطیل محاطی $f(c_1)\Delta x$ ، مساحت مستطیل دوم $f(c_2)\Delta x$ و به همین ترتیب، مساحت مستطیل n ام یا آخر $f(c_n)\Delta x$ است. مجموع این مساحتها یعنی

$$S_n = f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + \dots + f(c_n)\Delta x \quad (2)$$

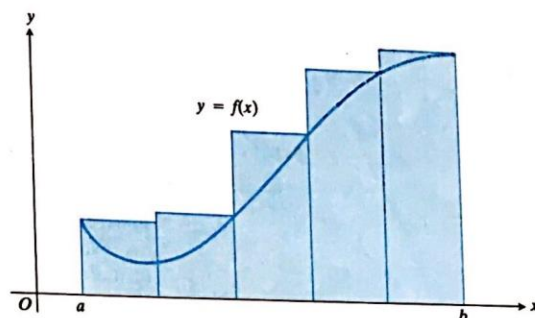
مقدار تقریبی مساحت ناحیه زیر خم $y = f(x)$ از $x = a$ تا $x = b$ را به دست می‌دهد.

مثال ۱ مساحت ناحیه زیر خم $y = x^2 + 1$ از $a = 0$ تا $b = 1$ را با $n = 4$ مستطیل محاطی پرآورد کنید.

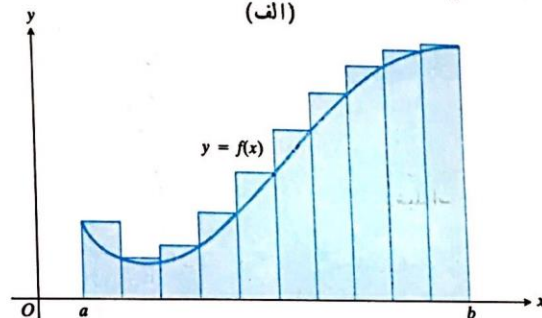
حل: خم را در بازه $0 \leq x \leq 1$ رسم می‌کنیم (شکل ۸.۴).



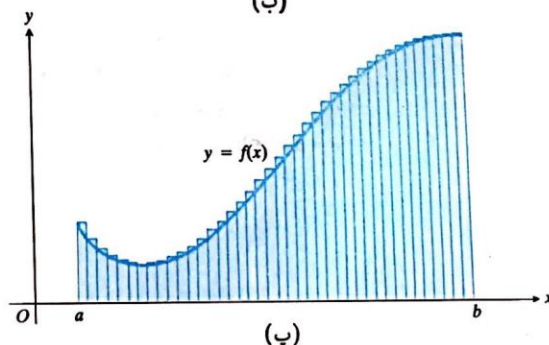
۸.۴ مستطیلهای پرآورد کننده مساحت



(الف)



(ب)



(پ)

۶.۴ مستطیلهای محاطی هم، نظیر مستطیلهایی که در این شکل دیده می‌شود، می‌توانند مانند مستطیلهای محاطی شکل ۵.۴ در تقریب زدن مساحت ناحیه زیر یک خم به کار روند.

$x = a$ و $x = b$ و نقاط میانی بسیاری که آنها را با $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ نشان می‌دهیم می‌گذراند (شکل ۷.۴). هر نوار را با مستطیلی محاطی تقریب می‌زنیم که از قاعده پایینی نوار که بر محور x واقع است تا پایینترین نقطه خم که در بالای این قاعده قرار دارد امتداد می‌یابد. اگر c_k نقطه‌ای باشد که در آن مقدار تابع f در بازه x_{k-1} تا x_k مینیمم باشد (چنین نقطه‌ای وجود دارد زیرا f پیوسته است)، ارتفاع این مستطیل $f(c_k)$ است. مساحت این مستطیل، حاصل ضرب ارتفاع در طول قاعده آن است

$$f(c_k)(x_k - x_{k-1}) = f(c_k)\Delta x. \quad (1)$$

سپس بازه را به کمک نقاط زیر به چهار بخش تقسیم می‌کنیم

$$x_3 = \frac{3}{4} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{1}{2} \quad , \quad x_1 = \frac{1}{4}$$

طول هر زیر بازه برابر است با $\Delta x = 1/4$. مستطیل محاطی مربوط به هر زیر بازه را رسم می‌کنیم. در اینجا ارتفاع هر مستطیل برابر با طول لبه چپ آن است. بنابراین مجموع مساحت‌های مستطیلها این است

$$\begin{aligned} S_4 &= f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + f(c_3)\Delta x + f(c_4)\Delta x \\ &= f(0)\Delta x + f\left(\frac{1}{4}\right)\Delta x + f\left(\frac{1}{2}\right)\Delta x + f\left(\frac{3}{4}\right)\Delta x \\ &= ((0)^2 + 1)\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1\right)\left(\frac{1}{4}\right) \\ &\quad + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right)\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1\right)\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{16}{64} + \frac{17}{64} + \frac{20}{64} + \frac{25}{64} = \frac{78}{64} = 1.21875. \end{aligned}$$

حاصل جمع $S_4 = 1.21875$ مقدار تقریبی مساحت ناحیه زیر خم $y = x^2 + 1$ از $x = 0$ تا $x = 1$ است. چون مستطیلها همه ناحیه زیر خم را نمی‌پوشانند، مقدار 1.21875 تقریبی نقصانی از مساحت است. چنانکه در مثال ۷ بخش ۷.۴ خواهیم دید مساحت

حد مجموع مساحت‌های مستطیل‌های محاطی با قاعده مساوی است وقتی که تعداد مستطیلهای n ، به‌سوی بینهایت میل کند. با استفاده از نمادها

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(c_1) \Delta x + f(c_2) \Delta x + \dots + f(c_n) \Delta x) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x \quad (5)$$

که در آن $f(c_k)$ کمترین مقدار f روی بازه $[x_{k-1}, x_k]$ است.

چنانکه به اختصار شرح خواهیم داد حد در معادله (5) همواره وجود دارد. بعداً در این فصل روشهایی برای محاسبه این حد عرضه خواهیم کرد.

انتگرال ریمان

وجود حد در معادله (5) نتیجه قضیه کلیتری است که در مورد هر تابع پیوسته روی بازه $[a, b]$ به کار می‌رود. در این قضیه کلیتر، تابع می‌تواند منفی هم باشد. نخست قضیه را بیان می‌کنیم، و سپس به علت درستی آن، البته نه با دقت یک اثبات کامل، می‌پردازیم. برای سهولت بررسی، از تصاویر توابع مثبت کمک می‌گیریم ولی مطالب کلی که به کمک این تصاویر تشریح می‌شوند برای هر تابع پیوسته دلخواهی صادق‌اند.

تابع مفروض f را که روی $[a, b]$ پیوسته است در نظر می‌گیریم. مطابق شکل ۹.۴ نقاط زیر را بین a و b درج می‌کنیم

$$x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots, x_{n-1}, x_n$$

این نقاط $[a, b]$ را به n زیر بازه با طولهای زیر که ضرورتی ندارد مساوی باشند، تقسیم می‌کنند

$$\Delta x_1 = x_1 - a, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots, \Delta x_n = b - x_{n-1}.$$

چون f پیوسته است در هر زیر بازه یک مقدار مینیمم، $\min_k$ و یک مقدار ماکسیمم، $\max_k$ دارد. مجموع مساحت‌های مستطیلهای سایه‌دار، در شکل ۹.۴ (الف) را مجموع پایینی می‌نامیم. این مجموع چنین است

$$L = \min_1 \Delta x_1 + \min_2 \Delta x_2 + \dots + \min_n \Delta x_n. \quad (6)$$

مجموع مساحت‌های مستطیلهای سایه‌دار در شکل ۹.۴ (ب) را مجموع بالایی می‌نامیم. این مجموع چنین است

$$U = \max_1 \Delta x_1 + \max_2 \Delta x_2 + \dots + \max_n \Delta x_n. \quad (7)$$

تفاضل مجموعهای بالایی و پایینی یعنی $U - L$ برابر مجموع مساحت‌های بلوکهای سایه‌دار در شکل ۹.۴ (ب) است.

اندیس در نخستین جمله $k=1$ ، در دومین جمله $k=2$ ، به همین ترتیب، ... در آخرین جمله یا n امین جمله $k=n$ است. این مطلب را با نوشتن $k=1$ در زیر Σ مشخص کردیم تا روشن شود که مجموع با جمله‌ای آغاز می‌شود که از سراردادن ۱ به جای k در رابطه بعد از علامت سیگما به دست می‌آید. حرف n در بالای سیگما جای توقف را به ما نشان می‌دهد. مثلاً اگر $n=2$ داریم

$$\sum_{k=1}^2 f(c_k) \Delta x = f(c_1) \Delta x + f(c_2) \Delta x + f(c_2) \Delta x$$

تنها تفاوت هر جمله با جمله بعدی‌اش مقدار k است. به جای k ؛ اول ۱، بعد ۲، بعد ۳، و بعد ۴ را قرار می‌دهیم. سپس آنها را با هم جمع می‌کنیم.

مثال ۲

$$\sum_{k=1}^5 k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 \quad (\text{الف})$$

(ب)

$$\sum_{k=1}^5 \frac{k}{k+1} = \frac{1}{1+1} + \frac{2}{2+1} + \frac{3}{3+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$$

(پ)

$$\sum_{j=0}^2 \frac{j+1}{j+2} = \frac{0+1}{0+2} + \frac{1+1}{1+2} + \frac{2+1}{2+2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$$

$$\sum_{i=1}^4 x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \quad (\text{ت})$$

$$\sum_{k=1}^4 x^k = x + x^2 + x^3 + x^4 \quad (\text{ث})$$

مساحت ناحیه زیر یک خم

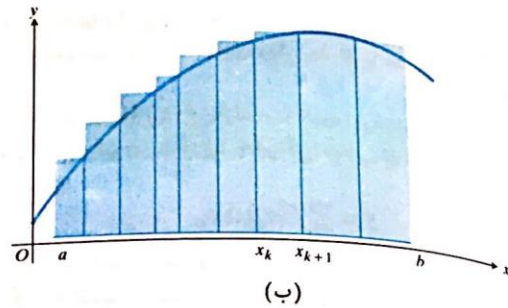
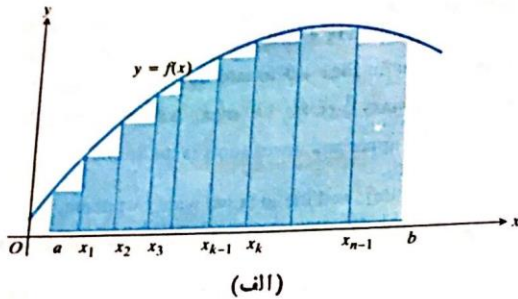
بار دیگر توجه خود را به مساحت ناحیه زیر یک خم معطوف می‌کنیم. فرمولهای کلی مساحت مثلث، دوزنقه، و دایره را که همگی شکلهایی در هندسه کلاسیک یونانی هستند می‌دانیم. اما از دوران قبل از پیدایش حساب دیفرانسیل و انتگرال هیچ فرمول کلی برای مساحت ناحیه‌های دلخواه زیر نمودار توابع نامنفی پیوسته در دست نیست. اکنون باید این مساحتها را تعریف کنیم، البته درباره روش انجام این کار قبلاً بحث کردیم. این مساحتها را به صورت حد مجموع مساحت‌های مستطیلهای محاطی تعریف می‌کنیم. بر مبنای قضیه‌ای که بعداً در این بخش بیان می‌کنیم این حدها همواره وجود دارند.

تعریف

مساحت ناحیه زیر یک خم

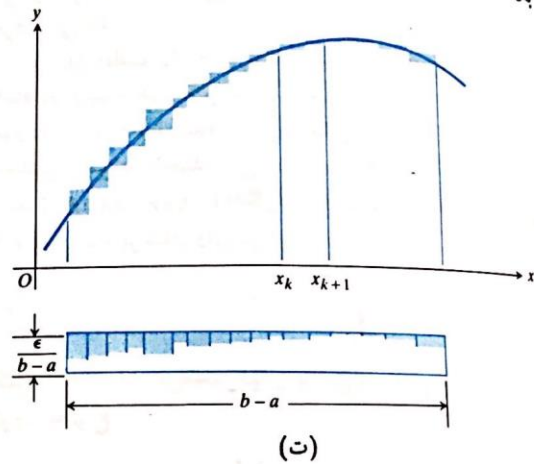
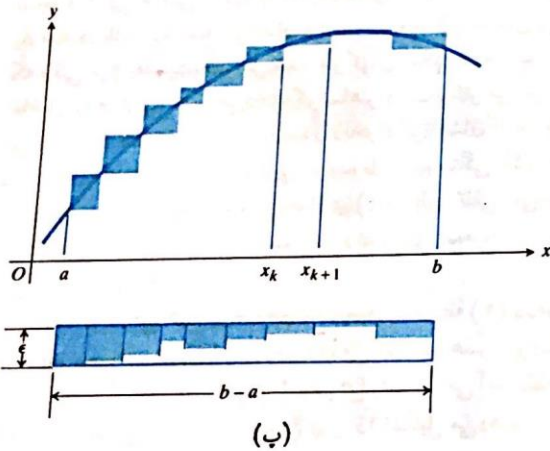
مساحت ناحیه زیر نمودار تابع پیوسته نامنفی f در بازه $[a, b]$

انتگرال معین: مساحت ناحیه زیر یک خم ۲۳۳



مجموع مساحت‌های مستطیل‌های محاطی، مجموع پائینی L را به دست می‌دهد که کمتر است از ...

... مجموع بالایی U که از جمع کردن مساحت‌های مستطیل‌های محیطی به دست می‌آید.



تفاضل مجموع بالایی و پائینی را می‌توان خیلی کم یعنی کمتر کرد. $\epsilon \cdot (b-a)$

با تقسیم ظرفیت $[a, b]$ ، تفاضل $U-L$ را می‌توان باز هم کوچکتر کرد و اگر این تقسیم به اندازه کافی ظریف باشد تفاضل از هر ϵ داده شده‌ای کمتر می‌شود.

۹.۴ به ازای هر $\epsilon > 0$ ، یک $\delta > 0$ نظیر وجود دارد به طوری که اگر پهنای ما کسبیم بلوک‌های قسمت (ت) شکل کمتر از δ باشد از آنها کمتر از $\epsilon/(b-a)$ است. پس می‌توان نوشت

$$0 \leq U-L = \text{مجموع مساحت بلوکها} < [\epsilon/(b-a)] \cdot (b-a) = \epsilon.$$

آن می نامند.

قضیه ۱

قضیه وجود انتگرال

وجود انتگرال دیمان

اگر f روی $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum f(c_k) \Delta x_k$$

وجود دارد و مقدار آن بد از ای هر انتخابی از اعداد c_k یکی است

اثبات کامل این قضیه را می توان در اکثر کتابهای آنالیز ریاضی یافت.

قضیه ۲

نخستین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

اگر f روی بازه $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

در هر نقطه x در $[a, b]$ مشتقپذیر است و داریم

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x). \quad (۶)$$

نتیجه

وجود پاد مشتق تابعهای پیوسته

اگر $y = f(x)$ روی بازه $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه یک تابع $F(x)$ وجود دارد که مشتقش روی $[a, b]$ ، f است.

اثبات نتیجه فرض می کنیم $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ بنا به قضیه

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \int_x^0 \cos t \, dt \\ &= -\frac{d}{dx} \int_0^x \cos t \, dt = -\cos x.\end{aligned}$$

قضیه تعیین مقدار انتگرال

اکنون به قضیه مهمی می‌پردازیم که چگونگی استفاده از پادمشتق در تعیین مقدار انتگرال معین را مشخص می‌سازد. با در اختیار داشتن این قضیه دیگر مجبور نخواهیم بود انتگرالهای معین را به صورت حد حساب کنیم. سودمندی این قضیه به اندازه‌ای است که اغلب آن را دومین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌نامند.

قضیه ۲

قضیه تعیین مقدار انتگرال (دومین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال)

اگر f در هر نقطه‌ای از $[a, b]$ پیوسته باشد، و F هر پادمشتقی از f روی $[a, b]$ باشد، آنگاه

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a). \quad (13)$$

قضیه تعیین مقدار انتگرال حاکی است که برای محاسبه انتگرال f روی $[a, b]$ کافی است چنین کنیم:

۱. پادمشتقی چون F از f را به دست آوریم، و
 ۲. مقدار $F(b) - F(a)$ را حساب کنیم.
- این مقدار برابر با $\int_a^b f(x) \, dx$ خواهد بود. بنا به نخستین قضیه اساسی، وجود پادمشتق F حتمی است. برای انجام محاسبه، کافی است F را بیابیم و مقدار آن را تعیین کنیم.

اثبات برای اثبات این قضیه از نتیجه ۳ قضیه مقدار میانگین که در بخش ۷.۳ آمد استفاده می‌کنیم. این نتیجه حاکی است هر دو تابعی که روی بازه $[a, b]$ دارای مشتق f باشند تفاوتشان روی این بازه مقداری ثابت است. فعلاً یکی از توابعی را که مشتقش f است می‌شناسیم. این تابع چنین است

$$G(x) = \int_a^x f(t) \, dt.$$

بنابراین اگر F تابع دیگری از این گونه باشد، دوسرaser $[a, b]$ به ازای مقدار ثابتی مانند C داریم

$$F(x) = G(x) + C. \quad (14)$$

اگر برای محاسبه $F(b) - F(a)$ معادله (۱۴) را به کار ببریم، درمی‌یابیم

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) \, dt}{\Delta x} = f(x). \quad (11)$$

معادلات (۱۰) و (۱۱) همراه با هم چنین نتیجه می‌دهند که در هر نقطه x از $[a, b]$ داریم

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) \, dt = f(x). \quad (12)$$

به این ترتیب نخستین قضیه اساسی اثبات می‌شود.

مثال ۱

$$\frac{d}{dx} \int_{-\pi}^x \cos t \, dt = \cos x$$

$$\frac{d}{dt} \int_{t^2+1}^x \sin t \, dt = \frac{\sin x}{x^2+1}.$$

مثال ۲ اگر $y = \int_0^x \cos t \, dt$ ، dy/dx را بیابید.

حل: کلید حل این مسأله قاعده زنجیری است. y را به صورت ترکیب زیر در نظر می‌گیریم

$$u = x^2 \quad \text{و} \quad f(u) = \int_0^u \cos t \, dt$$

با استفاده از قاعده زنجیری به صورت

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{du} \frac{du}{dx}$$

داریم

$$\frac{dy}{dx} = \cos u \cdot \frac{d}{dx}(x^2) = \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cos x^2.$$

بنابراین

$$\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \cos t \, dt = 2x \cos x^2.$$

مثال ۳ اگر $y = \int_{x^2}^0 \cos t \, dt$ ، dy/dx را بیابید.

حل: در این مسأله حد متغیر انتگرالگیری حد پایینی است و نه حد بالایی، بنابراین قبل از به کار بردن نخستین قضیه اساسی باید حدود انتگرالگیری را عوض کنیم

$$y = \int_{x^2}^0 \cos t \, dt = - \int_0^{x^2} \cos t \, dt.$$

حال می‌توان نتیجه مثال ۲ را به کار برد:

مثال ۷ در این مثال از چند ویژگی جبری انتگرال‌های معین که در جدول ۱۰۴ بخش ۵.۲ آمده است استفاده می‌شود.

$$\int_0^{\pi} 5 \sin x \, dx \quad (\text{الف}) \quad (\text{با استفاده از نتیجه مثال ۶})$$

$$= 5 \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 5 \times 2 = 10$$

$$\int_0^1 (x^2 + 1) \, dx = \int_0^1 x^2 \, dx + \int_0^1 1 \, dx \quad (\text{ب})$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[x \right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{3} - 0 \right) + (1 - 0) = \frac{4}{3}$$

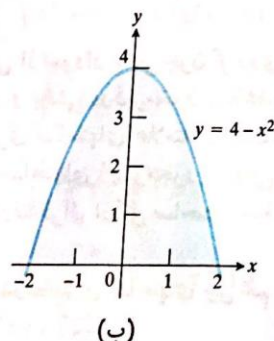
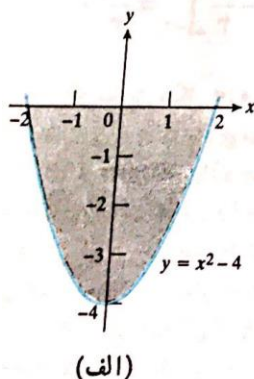
$$\int_1^2 \left(3 - \frac{6}{x^2} \right) \, dx = \int_1^2 3 \, dx - \int_1^2 \frac{6}{x^2} \, dx \quad (\text{پ})$$

$$= \left[3x \right]_1^2 - \left[-\frac{6}{x} \right]_1^2 = 6 - 3 + 3 - 6 = 0$$

انتگرال (ب) مقدار دقیق مساحتی را که در مثال ۱ بخش ۵.۲ مقدار تقریبی آن را تعیین کردیم به دست می‌دهد.

اگر تابع پیوسته $f(x)$ روی بازه $[a, b]$ مقدار منفی نداشته باشد، انتگرال آن از a تا b برابر مساحت بین نمودارش و محور x است. اگر f روی این بازه منفی یا نامثبت باشد، چنانکه در مثال بعد می‌بینیم، انتگرال آن برابر با قرینه این مساحت است.

مثال ۸ با توجه به شکل ۱۸.۴ مطلوب است تعیین
(الف) مساحت ناحیه بین خم $y = x^2 - 4$ و محور x از $x = -2$ تا $x = 2$



۱۸.۴ مساحت‌های نواحی بین نمودارهای (الف) و (ب) و محور y برابرند، اما انتگرال‌های معین توابع مربوطه از -2 تا 2 قرینه‌اند.

$$F(b) - F(a) = [G(b) + C] - [G(a) + C]$$

$$= G(b) - G(a)$$

$$= \int_a^b f(t) \, dt - \int_a^a f(t) \, dt$$

$$= \int_a^b f(t) \, dt - 0$$

$$= \int_a^b f(t) \, dt$$

که همان معادله (۱۳) است.

مرسوم است که برای مقدار $F(b) - F(a)$ نماد $F(x)$ را به کار ببرند؛ ما نیز در مثال‌های زیر از این نماد استفاده می‌کنیم.

مثال ۴ مساحت ناحیه زیر خط $y = mx$ در مثال ۱ بخش ۶.۲ چنین است

$$\int_a^b mx \, dx = \left[\frac{mx^2}{2} \right]_a^b = \frac{mb^2}{2} - \frac{ma^2}{2}$$

مثال ۵ مساحت ناحیه زیر خم $y = x^2$ در مثال ۲ بخش ۶.۲ چنین است

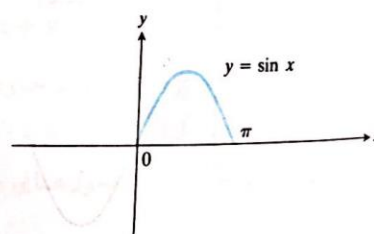
$$\int_0^b x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^b = \frac{b^3}{3} - 0 = \frac{b^3}{3}$$

مثال ۶ مساحت ناحیه محصور بین محور x و یکی از قوسهای $y = \sin x$ را بیابید.

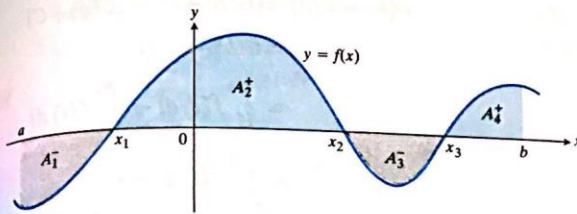
حل: قوس بین $x = 0$ تا $x = \pi$ را برمی‌گزینیم (شکل ۱۷.۴). مساحت محصور بین این قوس و محور x چنین است

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi}$$

$$= -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 2$$



۱۷.۴ در مثال ۶ مساحت ناحیه سایه‌دار این شکل حساب می‌شود.



۱۹.۴ انتگرال f از a تا b جمع جبری مساحت‌های علامتدار است.

مساحت کل، نقاط x_1 ، x_2 ، و x_3 یعنی محل تقاطع خم با محور x را تعیین می‌کنیم و انتگرال هر قسمت را جداگانه به دست می‌آوریم

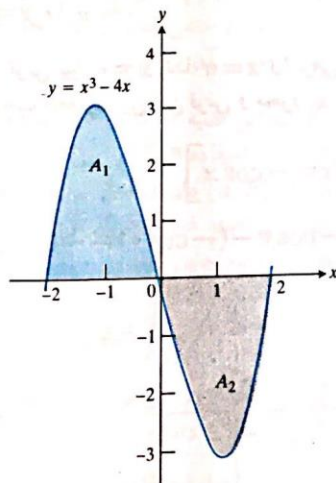
$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = -A_1, \quad \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx = A_2$$

$$\int_{x_3}^b f(x) dx = -A_3, \quad \int_a^{x_1} f(x) dx = A_4$$

سپس قدرمطلق‌های این انتگرال‌ها را باهم جمع می‌کنیم.

مثال ۹ مساحت ناحیه بین خم $y = x^2 - 4x$ و محور x را بیابید.

حل: برای تعیین شکل و حدود انتگرال‌گیری نمودار $y = x^2 - 4x = x(x-4)$ را رسم می‌کنیم (شکل ۲۰.۴). خم از $x = -2$ تا $x = 0$ بالای محور x و از $x = 0$ تا $x = 4$ زیرمحور x قرار دارد. انتگرال‌های زیر را حساب می‌کنیم:



۲۰.۴ نمودار $y = x^3 - 4x$ از $x = -2$ تا $x = 2$

(ب) مساحت ناحیه بین خم $y = 4 - x^2$ و محور x از $x = -2$ تا $x = 2$

حل:

الف) انتگرال $f(x) = 4 - x^2$ روی بازه از -2 تا 2 چنین است

$$\int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 8 \right) - \left(-\frac{8}{3} + 8 \right) = -\frac{32}{3}$$

مساحت بین خم و محور x از $x = -2$ تا $x = 2$ برابر با $\frac{32}{3}$ واحد مساحت است.

(ب) نمودار

$$y = g(x) = -f(x) = 4 - x^2, \quad -2 \leq x \leq 2$$

که در شکل ۱۸.۴ (ب) دیده می‌شود تصویر آینه‌ای نمودار f نسبت به محور x است. مساحت بین نمودار g و محور x چنین است

$$\int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = 4x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^2 = \frac{32}{3}$$

اگر مطابق شکل ۱۹.۴ بخشی از نمودار تابعی چون f روی بازه $a \leq x \leq b$ در بالای محور x و بخشی در زیرمحور x باشد، انتگرال f روی این بازه جمع جبری مساحت‌های علامتدار است. مساحت‌های بالای محور را مثبت و مساحت‌های زیرمحور را منفی در نظر می‌گیریم. در چنین حالتی مقدار انتگرال از کل مساحت ناحیه بین خم و محور x کمتر است.

مثلاً اگر در شکل ۱۹.۴، قدرمطلق‌های مساحت‌های بین خم و محور x ، A_1 ، A_2 ، A_3 ، و A_4 باشند، آنگاه

$$\int_a^b f(x) dx = -A_1 + A_2 - A_3 + A_4$$

که کمتر از مساحت کل $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ است. برای محاسبه

۱۵. مساحت بین خم
(دانه‌مایی: نسبت به y از

۱۶. نشان دهید که مساحت
 $x = \sin ax$ برابر با a

۱۷. مساحت بین محور
را بیابید.

۱۸. الف) مساحت

$$-3 \leq x \leq 2$$

ب) ارتفاع طا

پ) نشان دهید

۱۹. الف) مساحت

$$\int_{-2}^0 (x^3 - 2x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_{-2}^0$$

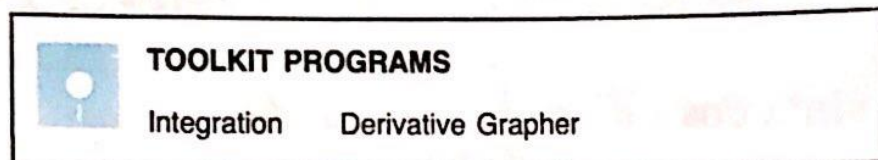
$$= 0 - (2 - 8) = +6 = A_1$$

$$\int_0^2 (x^3 - 2x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_0^2$$

$$= (2 - 8) - 0 = -6 = -A_2$$

مساحت ناحیه برابر است با $A = 6 + |-6| = 12$

Scanned with CamScanner



۸.۴ جانشانی در انتگرالهای معین

وقتی که يك انتگرال معین را به کمک جانشانی محاسبه می‌کنیم می‌توانیم انتگرال تبدیل‌شده را با حدود تبدیل‌شده، یا انتگرال اصلی را با حدود اصلی حساب کنیم. مثالهای این بخش چگونگی انجام چنین کاری را نشان می‌دهند.

فرمولی که برای محاسبه انتگرالهای معین به کمک جانشانی به کار می‌بریم نخستین بار در کتابی که آیزک بارو (۱۶۳۰-۱۶۷۷) نوشت آمده است. او معلم نیوتن و از استادان دانشگاه کمبریج بود. فرمول او شبیه فرمول زیر است.

فرمول جانشانی برای انتگرالهای معین

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du. \quad (1)$$

$$\left(\begin{array}{l} u = g(x), \\ du = g'(x) dx \end{array} \right)$$

اگر g' روی بازه از a تا b و f روی مجموعه مقادیری که g اختیار می‌کند پیوسته باشند، فرمول بالا برقرار است. برای اثبات رابطه (۱)، فرض می‌کنیم F پادمشتقی از f باشد. بنابراین $F' = f$. پس

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_a^b F'(g(x))g'(x) dx$$

کدام يك از این روشها بهتر است: محاسبه انتگرال تبدیل شده با حدود تبدیل شده یا محاسبه انتگرال اصلی با حدود اصلی؟ در این مثال هر دو روش مناسب اند، اما نگاه يك روش از روش دیگر آسانتر است. به طور کلی، بهتر است با هر دو روش آشنا باشیم، و بر حسب مورد روش بهتر را برگزینیم.

مسئله‌ها

انتگرالهای مسائل ۱-۱۸ را حساب کنید.

۱. الف) $\int_0^2 \sqrt{y+1} dy$

ب) $\int_{-1}^0 \sqrt{y+1} dy$

۲. الف) $\int_0^1 r \sqrt{1-r^2} dr$

ب) $\int_{-1}^1 r \sqrt{1-r^2} dr$

۳. الف) $\int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x dx$

ب) $\int_{-\pi/4}^0 \tan x \sec^2 x dx$

۴. الف) $\int_0^1 x^2(1+x^2)^2 dx$

ب) $\int_{-1}^1 x^2(1+x^2)^2 dx$

۵. الف) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}} dx$

ب) $\int_{-1}^0 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}} dx$

۶. الف) $\int_{-1}^1 \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$

ب) $\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$

۷. الف) $\int_0^{\sqrt{e}} x(x^2+1)^{1/2} dx$

ب) $\int_{-\sqrt{e}}^0 x(x^2+1)^{1/2} dx$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x dx &= \int_{u=g(0)}^{u=g(\pi/2)} u^2 du \\ &= \int_0^1 u^2 du = \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

مثال ۲ انتگرال زیر را حساب کنید

$$\int_0^1 15x^2 \sqrt{5x^2+4} dx.$$

حل: از دوراه می‌توان مسئله را حل کرد

۱۸ اول: انتگرال را تبدیل می‌کنیم و مانند رابطه (۱) انتگرال تبدیل شده را با حدود تبدیل شده محاسبه می‌کنیم. جانشانیهای زیر را انجام می‌دهیم

$$u = g(x) = 5x^2 + 4, \quad du = g'(x) dx = 10x dx.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \int_0^1 15x^2 \sqrt{5x^2+4} dx &= \int_{g(0)}^{g(1)} \sqrt{u} du \\ &= \int_4^9 u^{1/2} du \\ &= \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_4^9 = \frac{2}{3} (27 - 8) = \frac{38}{3}. \end{aligned}$$

۱۹ دوم: مانند قبل انتگرال را تبدیل می‌کنیم، و انتگرال حاصل را محاسبه می‌کنیم. سپس با جانشانی معکوس آن را بر حسب x می‌نویسیم و از حدود اصلی بر حسب x استفاده می‌کنیم. با جانشانیهای زیر

$$u = 5x^2 + 4, \quad du = 10x dx$$

داریم

$$\begin{aligned} \int 15x^2 \sqrt{5x^2+4} dx &= \int \sqrt{u} du = \frac{2}{3} u^{3/2} + C \\ &= \frac{2}{3} (5x^2+4)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \int_0^1 15x^2 \sqrt{5x^2+4} dx &= \left[\frac{2}{3} (5x^2+4)^{3/2} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} (9)^{3/2} - \frac{2}{3} (4)^{3/2} = \frac{2}{3} (27 - 8) = \frac{38}{3}. \end{aligned}$$

۲.۵ مساحت نواحی بین خمها

در این بخش، نشان می‌دهیم که مساحت نواحی بین خمها در صفحه چگونگی محاسبه می‌شود.

فرض می‌کنیم روی $a \leq x \leq b$ ، $y = f_1(x)$ و $y = f_2(x)$ پیوسته‌اند و داریم $f_1(x) \geq f_2(x)$. به این ترتیب مطابق شکل ۳.۵ از a تا b نمودار f_1 بالای نمودار f_2 قرار می‌گیرد. مساحت ناحیه محدود به دو نمودار و خطوط قائم $x = a$ و $x = b$ را به طریق زیر تعریف می‌کنیم.

نخست بازه $a \leq x \leq b$ را به n زیر بازه به طول $\Delta x = (b-a)/n$ تقسیم می‌کنیم. بدین منظور مانند کاری که در تعریف مجموعه‌های ریمان در فصل ۴ کردیم، روی بازه نقاط $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ را مشخص می‌کنیم. سپس ناحیه بین خمها را با مستطیل‌های قائم که از یک خم تا خم دیگر امتداد دارند تقریب می‌زنیم. مطابق شکل ۳.۵ برای هر زیر بازه یک مستطیل در نظر می‌گیریم. مساحت یک مستطیل نمونه چنین است

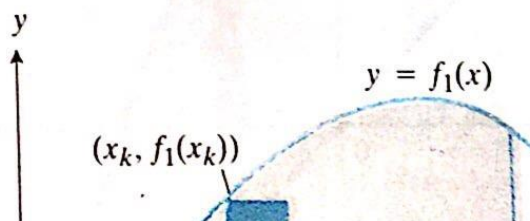
$$(f_1(x_k) - f_2(x_k))\Delta x.$$

مجموع مساحت n مستطیل چنین است

$$S_n = \sum_{k=1}^n (f_1(x_k) - f_2(x_k))\Delta x.$$

وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، مجموع S_n به موجب قضیه وجود انتگرال در بخش ۵.۴ به حد زیر می‌گراید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx.$$



دستگاه معادلات $y = -x$ و $y = 2 - x^2$ نسبت به x به دست می آوریم

$$2 - x^2 = -x$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

$$x = -1, \quad x = 2.$$

حدود انتگرالگیری -1 و 2 هستند.

به ازای همه مقادیر x بین -1 و 2 ، سهمی $y = 2 - x^2$ بالای خط $y = -x$ قرار دارد. بنابراین در تساوی (۱) باید $f_1(x)$ را برابر $2 - x^2$ و $f_2(x)$ را برابر $-x$ اختیار کنیم

$$\begin{aligned} \text{مساحت} &= \int_{-1}^2 ((2 - x^2) - (-x)) dx \\ &= \int_{-1}^2 (2 - x^2 + x) dx \\ &= \left[2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^2 \\ &= \left[2 - \frac{8}{3} + \frac{4}{2} \right] - \left[-2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right] \\ &= 6 - \frac{9}{3} + \frac{3}{2} = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

گاه چنانکه در مثال بعدی خواهیم دید برای یافتن مساحت آسانتر است که به عوض انتگرالگیری از مساحت نوارها قائم روی بازه‌ای واقع بر محور x ، از نوارهای افقی روی بازه واقع بر محور y انتگرال بگیریم.

مثال ۲ مساحت ناحیه‌ای را بیابید که از طرف راست به: $y = x - 2$ ، از طرف چپ به سهمی $y = x^2$ ، و از پایین به x محدود است.

حل: دوش ۱. انتگرالگیری نسبت به y . شکل ناحیه رسم می‌کنیم (شکل ۵.۵). مختصه‌های y نقاط تقاطع سهمی و $y = x - 2$ از حل دستگاه معادلات $y = x^2$ و $y = x - 2$ به دست آورد. با قراردادن معادله $y = x^2$ در $x = y + 2$ چنین به دست می‌آید

$$y = y^2 + 2$$

$$y^2 - y - 2 = 0$$

$$(y-2)(y+1) = 0$$

$$y = 2, \quad y = -1.$$

این حد، مقداری است که ما آن را مساحت ناحیه بین خمها از a تا b تعریف می‌کنیم.

تعریف

مساحت ناحیه بین دو خم

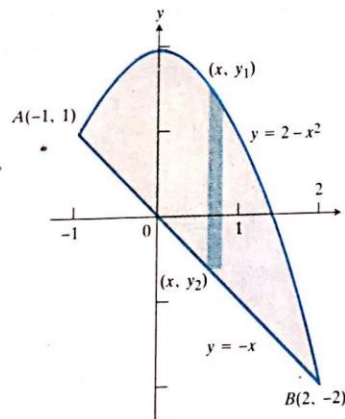
اگر در سراسر بازه $a \leq x \leq b$ داشته باشیم $f_1(x) \geq f_2(x)$ ، مساحت ناحیه بین نمودارهای f_1 و f_2 از a تا b برابر است با انتگرال $(f_1(x) - f_2(x))$ از a تا b .

$$\text{مساحت} = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx. \quad (۱)$$

راهی برای به خاطر سپردن فرمول تساوی (۱) این است که فکر کنیم مساحت نوارهای قائم، $(f_1(x) - f_2(x)) dx$ را در امتداد محور x از $x = a$ تا $x = b$ به کمک انتگرال جمع می‌کنیم. در این نماد، دیفرانسیل dx نقش دوگانه‌ای ایفا می‌کند، یعنی هم پهناي نوار مستطیلی و هم متغیر انتگرالگیری در انتگرال را نشان می‌دهد.

مثال ۱ مساحت ناحیه‌ای را که از بالا به سهمی $y = 2 - x^2$ و از پایین به خط $y = -x$ محدود است بیابید.

حل: برای یافتن مساحت، باید نقاط شروع و پایان ناحیه را تعیین کنیم. بنابراین سهمی و خط را با هم رسم می‌کنیم (شکل ۴.۵). حدود انتگرالگیری انتگرال مساحت در تساوی (۱) مختصه‌های x نقاط تقاطع سهمی و خط اند. این مختصه‌ها را از حل



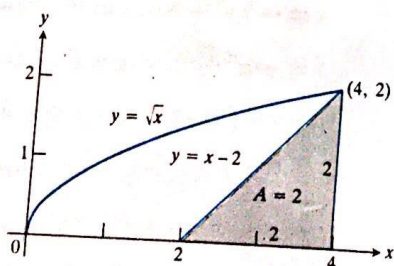
۴.۵ مساحت ناحیه بین $y = 2 - x^2$ و $y = -x$ را می‌توان با انتگرالگیری از مساحت یک نوار قائم روی بازه از $x = -1$ تا $x = 2$ به دست آورد.

برای $x=2$ برابر با $\sqrt{x} - (x-2) = \sqrt{x} - x + 2$ است. برای یافتن مساحت قسمت چپ نقطه $x=2$ ، انتگرال $\sqrt{x}$ را از $x=0$ تا $x=2$ محاسبه می‌کنیم. برای یافتن مساحت سمت راست، انتگرال $(\sqrt{x} - x + 2)$ را از $x=2$ تا $x=4$ حساب می‌کنیم. سپس برای یافتن مساحت کل ناحیه، نتایج را باهم جمع می‌کنیم

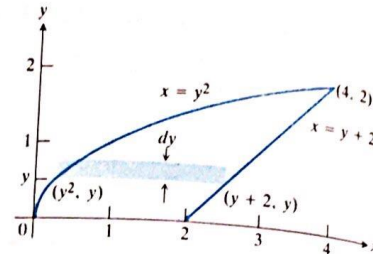
$$\begin{aligned} \text{مساحت} &= \int_0^2 \sqrt{x} dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2) dx \\ &= \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^2 + \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_2^4 \\ &= \frac{2}{3} (2)^{3/2} + \left(\frac{2}{3} (4)^{3/2} - \frac{16}{2} + 8 \right) \\ &\quad - \left(\frac{2}{3} (2)^{3/2} - \frac{2}{2} + 4 \right) \\ &= \frac{2}{3} (8) - 2 \\ &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

دوش ۳. تفویق مساحات (شکل ۷.۵). (این روش به علت شکل هندسی این مسأله خاص سریعترین روش است.) مساحتی که می‌خواهیم حساب کنیم، تفاضل مساحت مثلث با قاعده ۲ و ارتفاع ۲ است از مساحت ناحیه بین محور x و خم $y = \sqrt{x}$ ، روی بازه $0 \leq x \leq 4$

$$\begin{aligned} \text{مساحت} &= \int_0^4 \sqrt{x} dx - \frac{1}{2} (2)(2) = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^4 - 2 \\ &= \frac{2}{3} (8) - 2 = \frac{10}{3} \end{aligned}$$



۷.۵ مساحت ناحیه بدون سایه تفاضل مساحت مثلث از مساحت زیر خم $y = \sqrt{x}$ روی بازه $0 \leq x \leq 4$ نیز هست.

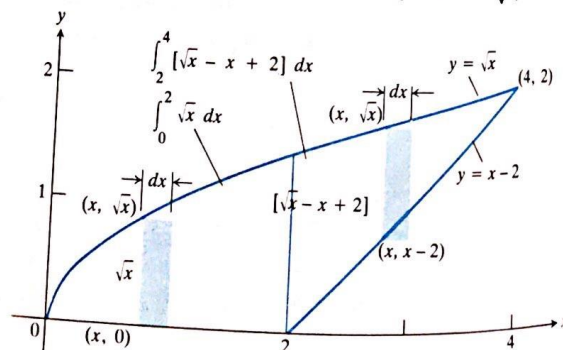


۵.۵ مساحت نوار افقی برا راست با عرض $\times$ طول $(y + 2 - y^2) dy$

از این دو جواب تنها $y=2$ ، یعنی نقطه تقاطع واقع در ربع اول را که ناحیه در آن قرار دارد، به دست می‌دهد. حال یک نوار افقی نازک را در نظر می‌گیریم که از سهمی واقع در طرف چپ ناحیه تا خط واقع در طرف راست آن کشیده شده است. این نوار از نقطه (y^2, y) تا نقطه $(y + 2, y)$ امتداد دارد. طول نوار $y + 2 - y^2$ و عرض آن dy است. بنابراین مساحت نوار برابر است با $(y + 2 - y^2) dy$. مساحت ناحیه بین خمها را با انتگرالگیری از dy از $y=0$ تا $y=2$ به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \text{مساحت} &= \int_0^2 (y + 2 - y^2) dy = \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \right]_0^2 \\ &= 2 + 4 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

روش ۲. انتگرالگیری نسبت به x (شکل ۶.۵). در این مورد انتگرالگیری نسبت به x به آسانی انتگرالگیری نسبت به y نیست زیرا به جای یک انتگرال با دو انتگرال سروکار خواهیم داشت. با حرکت دادن یک نوار قائم در سراسر ناحیه، از $x=0$ تا $x=4$ ، فرمول طول نوار در $x=2$ عوض می‌شود. طول نوار درست چپ $x=2$ برابر با $\sqrt{x} - 0 = \sqrt{x}$ و درست راست



۶.۵ مساحت این ناحیه را می‌توان به صورت مجموع دو انتگرال نشان داده شده بیان کرد.

انتگرال معین: مساحت ناحیه زیر منحنی
تقریب: زردن مساحت به یک مستطیل

تابع $y = f(x)$ ، بازه $[a, b]$ را در n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad x_0 = a, x_n = b, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$$

نقطه‌ای در بازه $[x_{k-1}, x_k]$ را c_k می‌نامیم. $f(c_k)$ ارتفاع مستطیل k ام است.

$$f(c_k) = \text{ارتفاع مستطیل}$$

$$\text{مساحت مستطیل} = f(c_k)(x_k - x_{k-1}) = f(c_k)\Delta x$$

$f(c_1)\Delta x, f(c_2)\Delta x, \dots, f(c_n)\Delta x$
مساحت مستطیل اولی، مساحت دومین مستطیل، ...، مساحت n امین مستطیل

$$S_n = f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + \dots + f(c_n)\Delta x$$

مقدار S_n تقریبی مساحت ناحیه زیر منحنی

$$y = f(x) \text{ از } x=a \text{ تا } x=b$$

1. $y = x^2 + 1, a = 0, b = 1, n = 4$

$$x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{4}$$

$$S_4 = 1 \times \frac{1}{4} + \dots$$



مجموع

$$S_n = f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + \dots + f(c_n)\Delta x$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(c_k)\Delta x$$

2. a) $\sum_{k=1}^5 k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$

b) $\sum_{k=1}^3 \frac{k}{k+1} = \frac{1}{1+1} + \frac{2}{1+2} + \frac{3}{3+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$

c) $\sum_{j=0}^2 \frac{j+1}{j+2} = \frac{0+1}{0+2} + \frac{1+1}{1+2} + \frac{2+1}{2+2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$

d) $\sum_{i=1}^4 x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

e) $\sum_{k=1}^4 x^k = x + x^2 + x^3 + x^4$

مساحت زیر یک خم

تعریف: مساحت ناحیه زیر یک خم
مساحت ناحیه زیر یک نمودار تابع پیوسته نامتناهی f در بازه $[a, b]$ هر مجموع نواحی مستطیلی های
عمودی با فاصله مساوی است وقتی که تعداد مستطیلات n به بی نهایت میل کند. بالاسفاه از نواحی

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \{ f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + \dots + f(c_n)\Delta x \}$$

۲۴

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(c_k)\Delta x \quad (*)$$

که در آن $f(c_k)$ جرمین مقدار f روی بازه $[x_{k-1}, x_k]$ است.
به در زیر شرح خواهیم داد که چرا عدد $(*)$ وجود دارد.
استرال بیان

شکل کشیده شود $a, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots, x_{n-1}, b$ روی f بازه $[a, b]$ پیوسته

$$\Delta x_1 = x_1 - a, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots, \Delta x_n = b - x_{n-1}$$

(طول f روی $[a, b]$ و لذا روی $[x_{k-1}, x_k]$ پیوسته) 

$$L = \min_1 \Delta x_1 + \min_2 \Delta x_2 + \dots + \min_n \Delta x_n$$

مجموع پایین

$$U = \max_1 \Delta x_1 + \max_2 \Delta x_2 + \dots + \max_n \Delta x_n$$

مجموع بالایی

$U - L$

$a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, b$

ترم تقسیم

مابینای پیوسته زیر بازه تقسیم می کنیم

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} (U - L) = 0 \Rightarrow \lim_{\|P\| \rightarrow 0} U = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} L$$

$$S = \sum f(c_k)\Delta x_k, [x_{k-1}, x_k] \ni c_k$$

$$\min_k \leq f(c_k) \leq \max_k \Rightarrow L \leq S \leq U$$

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} L = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} S = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} U$$

$$\int_a^b f(x) dx$$

استرال بیان

$$S = \sum f(c_k)\Delta x_k$$

مجموع تقریب رتبه ای مجموع بیان استرال

a و b را حدود استرال

a و b را حدود استرال

قضیه وجود انتگرال
و وجود انتگرال ریمان

اگر f روی $[a, b]$ پیوسته باشد، آنوقت
هر انتخابی از اعداد c_k می‌باشد.
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum f(c_k) \Delta x_k$$
 وجود دارد و مقدار آن برابر است

مساحت ناحیه زیر خم تابع f روی $[a, b]$ $= \int_a^b f(x) dx$, $f(x) \geq 0$

$\int_a^b f(x) dx$
انتگرال معین

$\begin{cases} \int_a^b f(u) du \\ \int_a^b f(t) dt \end{cases}$

انتگرال بی‌معین -
انتگرال بی‌معین f روی $[a, b]$ می‌باشد
نشان می‌دهد

درجه‌های پیوسته

1. $\int_a^a f(x) dx = 0$

تعریف

2. $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$

تعریف

3. $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ (k هر عددی می‌تواند باشد)

4. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

5. $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$

6. $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ ($f(x) \geq 0$ روی $[a, b]$)

7. $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ ($f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$)

8. $\min f \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \max f \cdot (b-a)$

9. $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$

$$1. \int_1^2 f(x) dx + \int_2^1 g(x) dx = \int_1^2 f(x) dx - \int_1^2 g(x) dx$$

$$= \int_1^2 [f(x) - g(x)] dx$$

3. f, g, h پیوسته ، $h(x) \geq f(x)$ در $[-1, 1]$ #17 P. 237 د. ۱۷

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 5, \int_1^4 f(x) dx = -2, \int_{-1}^1 g(x) dx = 7$$

۲۸

$$1. \int_{-1}^1 3f(x) dx = 3 \int_{-1}^1 f(x) dx = 15$$

$$2. \int_{-1}^1 [2f(x) + 3g(x)] dx = 2(5) + 3(7) = 31$$

$$3. \int_{-1}^1 [f(x) - g(x)] dx = 5 - 7 = -2$$

$$4. \int_{-1}^4 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx = 5 - 2 = 3$$

$$5. \int_{-1}^1 h(x) dx \geq \int_{-1}^1 f(x) dx = 5$$

محاسبهٔ اُسکال‌های معین بزرگ مجموعی
(این بزرگ‌ترین عدد می‌باشد)

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$F(n) = 1 + 2 + \dots + n$$

$$F(n)/n = \frac{n+1}{2} \Rightarrow F(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$Q(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

$$\frac{Q(n)}{F(n)} = \frac{2n+1}{3} \Rightarrow Q(n) = F(n) \frac{2n+1}{3}$$

۱. فرض می‌کنیم a, b, m اعدادی مثبت و $a < b$ و مساحت زیرِ $y = mx$ از $x=a$ تا $x=b$ را بیابید (سؤال ۱۳.۴)

۲. مساحت ناحیه زیرِ $y = x^2$ را از $x=0$ تا $x=b$ بیابید.
 مثال: $\int_0^x \cos t dt = \sin t \Big|_0^x = \sin x - \sin 0 = \sin x$
 قضیه‌های اساسی حساب انتگرال
 نخستین قضیه اساسی حساب: دفرانسیل و انتگرال

- اگر f روی بازه $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ در هر نقطه x در $[a, b]$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

نتیجه: اگر $y = f(x)$ روی بازه $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه می‌توانیم $F(x)$ وجود دارد که مشتقش روی $[a, b]$ ، f است.

برهان. نابرابری قضیه واریانچ $(F(x) = \int_a^x f(t) dt)$

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{\Delta x} = \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x}$$

$$\frac{dF}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x} = f(x) \quad ?$$

i) $\Delta x \rightarrow 0^+$, $a \leq x < b$ $a \leq x, x+\Delta x < b$

$[x, x+\Delta x]$ f پیوسته $\max f, \min f$ (بر این بازه موجود)

$$\therefore (\min f) \Delta x \leq \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \leq (\max f) \Delta x \Rightarrow$$

$$\min f \leq \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x} \leq \max f$$

f پیوسته $\Rightarrow \exists c, c' \in [x, x+\Delta x], \max f = f(c), \min f = f(c')$

$$\Delta x \rightarrow 0^+ \Rightarrow [x, x+\Delta x] \rightarrow x \text{ نقطه}, c, c' \rightarrow x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} f \Rightarrow \lim_{c \rightarrow x} f(c) = \lim_{c' \rightarrow x} f(c') = f(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x} = f(x) \quad \text{بقیه بطور مشابه}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x} = f(x)$$

$$\therefore \frac{dF}{dx} = f(x)$$

$$1. \frac{d}{dx} \int_{-\pi}^x \cos t dt = \cos x, \quad \frac{d}{dt} \int_0^x \frac{\sin t}{t^2+1} dt = \frac{\sin x}{x^2+1}$$

$$2. y = \int_0^{x^2} \cos t dt, \quad \frac{dy}{dx} = ?$$

$$u = x^2, \quad f(u) = \int_0^u \cos t dt, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \cdot 2x = (\cos x^2) 2x$$

$$3. y = \int_{x^2}^0 \cos t dt, \quad \frac{dy}{dx} = ?$$

$$= -\int_0^{x^2} \cos t dt, \quad \frac{dy}{dx} = -2x \cos x^2$$

قضیه یقین مقدار انتگرال (دوین قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال)

اگر f در هر نقطه‌ای از $[a, b]$ پیوسته باشد و F هر یک از مشتق‌های f روی $[a, b]$ باشد،

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{آنها}$$

پنهان.

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad F(x) = G(x) + C$$

$$F(b) - F(a) = (G(b) + C) - (G(a) + C)$$

$$= G(b) - G(a) = \int_a^b f(t) dt - \int_a^a f(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

$$1) \frac{d}{dx} \int_0^x \cos t dt = \frac{d}{dx} \left(\sin t \Big|_0^x \right) = \frac{d}{dx} (\sin x - \sin 0) = \cos x$$

#44
P. 250

#48

$$2) \frac{d}{dx} \int_0^x \cos t dt = \cos x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{t^2}{t^4+1} dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t^2}{t^4+1} dt}{x^3}$$

#56
P. 251

. J. 68

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t^2}{t^4+1} dt}{\frac{d}{dx} (x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{x^4+1}}{\frac{3x^2}{1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(x^4+1)} = \frac{1}{3}$$

$$a) \int_0^x f(t) dt = x \cos \pi x \Rightarrow f(x) = \cos \pi x - \pi x \sin \pi x$$

#59
P. 251

. J. 68

$$f(4) = \cos 4\pi - 4\pi \sin 4\pi = 1$$

$$b) \int_0^{x^2} f(t) dt = x \cos \pi x \Rightarrow \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} f(t) dt = \frac{d}{dx} \cdot \int_0^{x^2} f(t) dt \cdot \frac{dx^2}{dx}$$

$$\Rightarrow 2x f(x^2) = \cos \pi x - \pi x \sin \pi x$$

$$\Rightarrow 4f(4) = \cos 2\pi - 2\pi \sin 2\pi$$

$$\Rightarrow f(4) = \frac{1}{4}$$

$$c) \int_0^{f(x)} t^2 dt = x \cos \pi x \Rightarrow t^3 \Big|_0^{f(x)} = x \cos \pi x$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)^3}{3} = x \cos \pi x$$

$$\Rightarrow \frac{f(4)^3}{3} = 4 \cos(4\pi) = 4$$

$$\Rightarrow f(4) = \sqrt[3]{12}$$

فرمول جابجایی در انتگرال معین

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)du$$

$$u=g(x), du=g'(x)dx$$

توجه: فرض کنیم f دارای مشتق F باشد.

$$\begin{aligned} F' &= f, \quad \int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_a^b F'(g(x))g'(x)dx \\ &= F(g(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} = F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du \end{aligned}$$

مثال: انتگرال $\int_0^1 15x^2 \sqrt{5x^3+4} dx$ را حساب کنید.
راه حل اول:

$$u=g(x)=5x^3+4, \quad du=g'(x)dx=15x^2dx$$

$$\int_0^1 15x^2 \sqrt{5x^3+4} dx = \int_{g(0)}^{g(1)} \sqrt{u} du = \int_4^9 u^{1/2} du = \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_4^9 = \frac{2}{3} (27-8) = \frac{38}{3}$$

$$\begin{aligned} \int 15x^2 \sqrt{5x^3+4} dx &= \int \sqrt{u} du = \frac{2}{3} u^{3/2} + C \\ &= \frac{2}{3} (5x^3+4)^{3/2} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 15x^2 \sqrt{5x^3+4} dx &= \frac{2}{3} (5x^3+4)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} (9)^{3/2} - \frac{2}{3} (4)^{3/2} \\ &= \frac{2}{3} (27-8) = \frac{38}{3} \end{aligned}$$

دانش #23
p. 253

فرض: $h(x)$ زوج
الف) $h(x) \sin x$ فردی، $h(-x) \sin(-x) = h(x)(-\sin x) = -h(x) \sin x$

بنابراین $h(x) \sin x$ فرد است.

$$\therefore \int_{-a}^0 h(x) \sin x dx = - \int_0^a h(x) \sin x dx$$

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 h(x) \sin x dx &= \int_a^0 h(-u) \sin(-u)(-du) = - \int_a^0 h(u) \sin u du \\ &= - \int_0^a h(u) \sin u du \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{-a}^a h(x) \sin x dx = 0$$

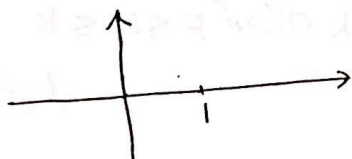
$$\int_{-a}^a // = \int_{-a}^0 // + \int_0^a // = - \int_0^a // + \int_0^a // = 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec x \sin x dx = 0 \quad \text{i.e.,} \quad \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} dx = 0 \quad \text{i.e.,}$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan x dx = 0$$

#27 p. 265. JCU

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [f(1/n) + f(2/n) + \dots + f(n/n)]$$



$$\Delta x = 1/n = \frac{b-a}{n}, \quad a=0, b=1$$

$$x_1 = a + \Delta x = 0 + \Delta x = 1/n$$

$$x_2 = a + 2\Delta x = 0 + 2\Delta x = 2/n$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1} = a + (n-1)\Delta x = 0 + (n-1)\Delta x = \frac{n-1}{n}$$

$$S_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x$$

$$= f(1/n) \cdot 1/n + f(2/n) \cdot 1/n + \dots + f(n/n) \cdot 1/n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (f(1/n) + f(2/n) + \dots + f(n/n)) = \int_0^1 f(x) dx$$

#28 p. 266. JCU

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{3\pi}{n} + \dots + \sin \frac{n\pi}{n} \right] =$$

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 1 + \cos \pi = 2$$