

مهمترین

(1) در یک گروه ثابت کنید $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. مثالی ارائه دهید تا نشان دهید $(ab)^{-2} \neq b^{-2}a^{-2}$.
دو عضو غیرهانی a و b از یک گروه آبی مثال بزنید که $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

(2) فرض کنید $(\mathbb{Q}, +)$ گروه جمعی اعداد گویا و $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ گروه ضربی اعداد گویا باشند.
عناصر زیر گروه $\langle \frac{1}{2} \rangle$ را در $\mathbb{Q}^*$ و $\mathbb{Q}$ بدست آورید. مرتبه هر عضو $\mathbb{Q}^*$ و $\mathbb{Q}$ را پیدا کنید.

(3) فرض کنید $x \in G$. اگر $x^2 \neq e$ و $x^6 = e$ ثابت کنید $x^4 \neq e$ و $x^5 \neq e$. در مورد مرتبه x چیزی توان گفت؟

(3) گروه $\mathbb{Q}$ را به عنوان $\{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 0\}$ با ضرب اعداد مختلط در نظر بگیرید. آیا $\{i, -i\}$ یک زیر گروه $\mathbb{Q}$ است؟ چرا؟ آیا $\{i, 1\}$ یک زیر گروه $\mathbb{Q}$ است؟ چرا؟

(4) نشان دهید گروه اعداد گویا مثبت تحت عمل ضرب معمولی اعداد گویا، دوری نیست.

(5) فرض کنید $m, n \in \mathbb{Z}$ (گروه جمعی $\mathbb{Z}$). یک مولد برای گروه $\langle m \rangle \cap \langle n \rangle$ بیابید.

(6) فرض کنید $\varphi: G \rightarrow G'$ یک همومورفیسم گروهی باشد. ثابت کنید φ یک بیک است اگر و تنها اگر برای هر $x \in G$ ، $\varphi(x) = e_{G'}$ باشد.

(7) اگر $k \leq G$ و $|k| = 2$ آنگاه نشان دهید $k \leq Z(G)$ (مرکز G است).

(8) فرض کنید $H, K \leq G$. ثابت کنید $HK \leq G \iff HK = KH$.

(9) ثابت کنید: (الف) $(\mathbb{Q}^*, \cdot) \cong (\mathbb{Q}, +)$ (ب) $(\mathbb{R}^*, \cdot) \cong (\mathbb{R}, +)$ (ج) $(\mathbb{R}^*, \cdot) \cong (\mathbb{R}, +)$ (د) $(\mathbb{R}^*, \cdot) \cong (\mathbb{R}, +)$

(10) فرض کنید $N \leq G$ و $H \leq G$. اگر $N \leq H$ ثابت کنید $\frac{H}{N} \leq \frac{G}{N}$ اگر و تنها اگر $H \leq G$.

(11) اگر G آبی و n عددی طبیعی و $G_n = \{g \in G \mid g^n = e\}$ و $G^n = \{g^n \mid g \in G\}$ ثابت کنید $G/G_n \cong G^n$.



Scanned with CamScanner

s/a.m

$$Q(\mathbb{Z}_n, T)$$

عناصر آر این حلقه محسوس زیر حلقه نور

اجزای آلفا حلقه خارج قسمت :

فرم کنیم R یک حلقه، R یک زیرگروه جمعی R باشد. چون $(R, +)$ یک گروه آبدی است پس R یک زیرگروه هنجار در گروه جمعی R می باشد. پس $R/I = \{a+I \mid a \in R\}$ یک گروه آبدی می باشد. ضرب در همدسته در R/I را بصورت زیر تعریف می کنیم.

$$(a+I)(b+I) = ab+I$$

ضرب فوق در حالت عمومی خوشتعریف نمی باشد (مثال زیر این مطلب را نشان می دهد).
مثال: هيات R را با جمع و ضرب معمولی در نظر می گیریم. می دانیم که Q یک زیرگروه جمعی R است.

$$R/Q = \{a+Q \mid a \in R\}$$

$$\text{داریم: } 0+Q = Q = 1+Q$$

$$(0+Q)(\sqrt{2}+Q) = (0)\sqrt{2} + Q = 0+Q = Q$$

$$(1+Q)(\sqrt{2}+Q) = (1)\sqrt{2} + Q = \sqrt{2}+Q$$

چون $\sqrt{2} \notin Q$ پس $\sqrt{2}+Q \neq Q$ در نتیجه ضرب فوق در R/Q خوشتعریف نمی باشد.

فرضیه: فرم کنیم R یک حلقه، R یک زیرگروه جمعی R باشد. در این صورت ضرب همدسته ها در گروه آبدی R/I خوشتعریف است اگر فقط اگر $aI, rI \in I$ برای هر $r \in R$ و $a \in I$.

اثبات: فرض کنیم عمل ضرب اول R/I خوشتعریف باشد. فرض کنیم $a \in I$ و $r \in R$. در این صورت $a+I = I = 0+I$. چون ضرب خوشتعریف است پس:

$$(a+I)(r+I) = (0+I)(r+I) \Rightarrow ar+I = 0+I = I \Rightarrow ar \in I$$

$$(r+I)(a+I) = (r+I)(0+I) \Rightarrow ra+I = 0+I = I \Rightarrow ra \in I$$

(۱) اگر R یک حلقه جبری باشد

(۲) $ra \in I$, ar برای هر $a \in I$, $r \in R$

نتیجه: اگر I یک ایده‌آل حلقه R باشد آنگاه R/I یک حلقه است.

تعریف: اگر I یک ایده‌آل حلقه R باشد آنگاه حلقه R/I را حلقه خارج قسمت R روی I می‌نامیم.

مثال: (الف) حلقه $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ را در نظریه کسری می‌نامیم.

تنها زیرگروه غیر بدیهی حلقه $\mathbb{Z}$ مساوی $\{0, 2, 4, \dots\}$ است.

سبب آن می‌توان تحقیق کرد که I یک ایده‌آل $\mathbb{Z}$ می‌باشد.

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0+2\mathbb{Z}, 1+2\mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}_2$$

مثال ب: حلقه $\mathbb{Z}$ را در نظریه کسری می‌نامیم هر زیرگروه حلقه $\mathbb{Z}$ بصورت $n\mathbb{Z}$

برای یک عدد صحیح غیر منفی n می‌باشد.

سبب آن اینست که $\mathbb{Z}$ یک ایده‌آل $\mathbb{Z}$ است.

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0+n\mathbb{Z}, 1+n\mathbb{Z}, 2+n\mathbb{Z}, \dots, (n-1)+n\mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}_n$$

مثال ج: هر حلقه R دارای (ایده‌آل بدیهی) $\{0\}$ ، R می‌باشد. اگر R بجز

از ایده‌آل‌های بدیهی ایده‌آل دیگری داشته باشد آنگاه آن ایده‌آل ایده‌آل غیر بدیهی می‌گردد.

*** تمرین: نشان دهید که اگر R حلقه $\mathbb{Z}_n$ یک ایده‌آل $\mathbb{Z}_n$ است.

$\langle n \rangle$

قضیہ: فرض کریں R ایک حلقہ باغیر صفر کا ایک ایسا آل ہے کہ R آئسڈ ہے۔ در اس صورت $I = R$ اگر فقط اگر I اس میں ایک عنصر واحد R آئسڈ ہے۔

اثبات: اگر $I = R$ آئسڈ $1 \in I$ ، در نتیجہ I اس میں ایک عنصر واحد آتے۔ فرض کریں u ایک عنصر واحد R آئسڈ ہے۔ بطریقہ $u \in I$ ۔ در اس صورت $u' \in R$ آئسڈ، جو در بارہ بطریقہ $1 = u u' = u' u$ آئسڈ $u' \in I$ آئسڈ

$$u \in I, u' \in R \xrightarrow{I \subseteq R} u u' \in I \Rightarrow 1 \in I$$

فرض کریں I ایک عنصر واحد R آئسڈ ہے۔ در اس صورت در اس:

$$1 \in I, r \in R \xrightarrow{I \subseteq R} 1r \in I \Rightarrow r \in I$$

پس $R \subseteq I$ ، چون $I \subseteq R$ پس $I = R$

قضیہ: اگر D ایک حلقہ تقسیم آئسڈ آئسڈ D ایسا آل غیر صفری نڈار۔

اثبات: فرض کریں I ایک ایسا آل D آئسڈ، $I \neq \{0\}$ ۔ پس $a \in D, a \neq 0$ جو در بارہ بطریقہ $a \in I$ ، چون D ایک حلقہ تقسیم آتے $a \neq 0$ پس a ایک عنصر واحد D آئسڈ ہے۔ چون $a \in I$ پس I ایک حلقہ تقسیم آتے $I = D$ ، نہ بر اس آتے ایسا آل D ، ایسا آل ہر D آئسڈ ہے۔

نتیجہ: ایک حیات ایسا آل غیر صفری نڈار۔

تقریب: حلقہ R ایک حلقہ سارہ آتے اگر R ایسا آل غیر صفری نڈا آتے۔

تمرین: نشان دہی کریں $M_2(F)$ (ماتریس 2×2 ری ایک حیات) ایک حلقہ سارہ آتے۔

فصل سیم و نهم: هم‌ارزی و هم‌سازي دو حلقه
تعریف: فرض کنیم R و S دو حلقه باشند. در این صورت تابع $f: R \rightarrow S$ یک هم‌ارزی نامیده می‌شود اگر برای هر $a, b \in R$ داشته باشیم که:

$$(a+b)f = af + bf, \quad (ab)f = (af)(bf)$$

علامه اگر f دوسوی باشد آنگاه f یک هم‌ارزی نامیده می‌شود و در این صورت می‌گوییم S با R هم‌ارزی است و می‌نویسیم $R \cong S$.

تقریباً: برای هر دو حلقه R و S داریم:

$$R \cong R \quad (\text{الف}) \quad R \cong R \Rightarrow S \cong R \quad (\text{ب})$$

$$R \cong S, S \cong T \Rightarrow R \cong T \quad (\text{ج})$$

تعریف: فرض کنیم R و S دو حلقه و $f: R \rightarrow S$ یک هم‌ارزی باشد. تعریف می‌کنیم:

$$K_f = \{a \in R \mid af = 0\}$$

قضیه: اگر R و S دو حلقه و $f: R \rightarrow S$ یک هم‌ارزی باشد آنگاه $K_f \triangleleft R$.

$$\text{اثبات: چون } 0f = 0 \text{ پس } 0 \in K_f \text{ و } K_f \neq \emptyset$$

$$a, b \in K_f \Rightarrow af = bf = 0 \Rightarrow (a-b)f = af - bf = 0 \Rightarrow a-b \in K_f$$

$$a \in K_f, r \in R \Rightarrow af = 0, r \in R \Rightarrow (ar)f = (af)(rf) = 0(rf) = 0$$

$$(ra)f = (rf)(af) = (rf)0 = 0$$

$$\text{پس } ar, ra \in K_f \text{ بنابراین } K_f \triangleleft R$$

قضیه: فرض کنیم R و S دو حلقه و $f: R \rightarrow S$ یک هم‌ارزی باشد. در این صورت داریم:

$$(\text{الف}) \quad 0f = 0 \text{ و } (-a)f = -(af) \text{ برای هر } a \in R$$

$$(\text{ب}) \quad \text{اگر } R' \text{ یک زیرحلقه از } R \text{ باشد آنگاه } f|_{R'} \text{ یک هم‌ارزی از } R' \text{ به } S \text{ است.}$$

$$(\text{ج}) \quad \text{اگر } I \text{ یک ایده‌آل از } R \text{ باشد آنگاه } f|_I \text{ یک هم‌ارزی از } I \text{ به } S \text{ است.}$$

$$(\text{د}) \quad \text{اگر } S' \text{ یک زیرحلقه از } S \text{ باشد آنگاه } f^{-1}(S') \text{ یک زیرحلقه از } R \text{ است.}$$

$$(\text{ه}) \quad \text{اگر } J \text{ یک ایده‌آل از } S \text{ باشد آنگاه } f^{-1}(J) \text{ یک ایده‌آل از } R \text{ است.}$$

$$(\text{و}) \quad \text{اگر } I \text{ یک عضو هم‌ارزی از } R \text{ باشد آنگاه } f(I) \text{ یک عضو هم‌ارزی از } S \text{ است.}$$

اثبات: (الف) چون $(0, +)$ و $(S, +)$ هر دو گروه آبدی هستند پس نابریک

$$\text{در قسمت گروهها داریم } 0f = 0 \text{ و } (-a)f = -(af) \text{ برای هر } a \in R$$

(ب)

$$c', d' \in R_f' \Rightarrow \exists a', b' \in R' \text{ s.t. } c' = a'_f, d' = b'_f \\ \Rightarrow c' - d' = a'_f - b'_f = (a' - b')_f \in R_f'$$

$$c'd' = (a'_f)(b'_f) = (a'b')_f \in R_f'$$

هم چنین نتیجه می شود.

(ج)

$$b \in I_f, w \in R_f \Rightarrow \exists a \in I, r \in R \text{ (} b = a_f, w = r_f \text{)}$$

$$bw = (a_f)(r_f) = (ar)_f \in I_f$$

و بالعکس داریم:

$$wb = (r_f)(a_f) = (ra)_f \in I_f$$

پس $I_f \trianglelefteq R_f$

$$a, b \in S_f' \Rightarrow a_f, b_f \in S' \Rightarrow a_f - b_f \in S' \Rightarrow (a - b)_f \in S'$$

$$\Rightarrow a - b \in S_f'$$

و همچنین داریم:

$$(a_f)(b_f) \in S' \Rightarrow (ab)_f \in S' \Rightarrow ab \in S_f'$$

پس $S_f' \leq R$

(د)

$$a \in J_f^{-1}, r \in R \Rightarrow a_f \in J, r_f \in S \Rightarrow (a_f)(r_f) = (ar)_f \in J$$

$$\Rightarrow ar \in J_f^{-1}$$

چون J یک ایده‌آل است.بنابراین ما به $J_f^{-1} \trianglelefteq R$ پس $na \in J_f^{-1}$

(ه)

$$w \in R_f \Rightarrow \exists a \in R \text{ (} w = a_f \text{)}$$

و بالعکس داریم:

$$(w)(1_f) = (r_f)(1_f) = (r1)_f = r_f = w$$

$$(1_f)w = (1_f)(r_f) = (1r)_f = r_f = w$$

پس I_f عنقریبانی R_f است.قضیه بنیادی مگرکنی ها برای حلقه ها: اگر R و S دو حلقه و $f: R \rightarrow S$ یک مگرکنی باشد.

آنگاه داریم: $R_f \cong R/k_f$
 اثبات: فرض کنیم $k = k_f$

$$\varphi: R/k \rightarrow R_f$$

$$(r+k)\varphi = r_f$$

نشان می‌دهیم که φ خوش‌تعریف است.

$$r+k = r'+k' \Rightarrow r-r' \in k \Rightarrow (r-r')f = 0 \Rightarrow r_f - r'_f = 0$$

$$\therefore r_f = r'_f \Rightarrow (r+k)\varphi = (r'+k)\varphi$$

نشان می‌دهیم که φ یک همگرایی است.

$$((r+k) + (r'+k))\varphi = ((r+r') + k)\varphi$$

$$= (r+r')f$$

$$= r_f + r'_f$$

$$= (r+k)\varphi + (r'+k)\varphi$$

$$((r+k)(r'+k))\varphi = (rr' + k)\varphi$$

$$= (rr')f - ((r)f)(r'_f)$$

$$= (r+k)\varphi \cdot (r'+k)\varphi$$

نشان می‌دهیم که φ دوسوی است.

$$(r+k)\varphi = (r'+k)\varphi \Rightarrow r_f = r'_f \Rightarrow (r-r')f = 0$$

$$r-r' \in k \Rightarrow r+k = r'+k$$

اگر $w \in R_f$ آنگاه $r \in R$ وجود دارد بطوریکه $w = r_f$ و در نتیجه

$$(r+k)\varphi = r_f = w$$

بنابراین φ یک همگرایی می‌باشد و در نتیجه $R/k \cong R_f$.

قضیه: فرض کنیم R و S دو حلقه و $f: R \rightarrow S$ یک همگرایی باشد. در این صورت k_f یک ایده‌آل است.

اگر فقط اگر $k_f = \{0\}$.

اثبات: فرض کنیم k_f یک ایده‌آل باشد.

$$a \in k_f \Rightarrow af = 0 = 0f \Rightarrow a = 0$$

پس $k_f = \{0\}$. برعکس فرض کنیم $k_f = \{0\}$.

$$af = bf \Rightarrow af - bf = 0 \Rightarrow (a-b)f = 0 \Rightarrow a-b \in k_f \Rightarrow a-b = 0$$

$\therefore a = b$ پس k_f یک ایده‌آل است.

مثال:

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$$

$$af = n \text{ به } a \text{ تقسیم}$$

(نشان دهید که f یک همگرایی برش است)

در این صورت f یک همگرایی برش است. همچنین بدیهی است که $kg = n\mathbb{Z}$. با هر قضیه دیگری
همگرایی ها برای حلقه ها. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$.

مثال. فرض کنیم f یک همگرایی و R یک حلقه باشد. اگر $f: F \rightarrow R$ یک همگرایی باشد
که $\varphi = 0$ یا φ یک یک است. زیرا که $k\varphi$ یک ایده آل F است پس $k\varphi = F$
یا $k\varphi = (0)$. اگر $k\varphi = F$ که $\varphi = 0$ و اگر $k\varphi = (0)$ که φ یک یک است.
قضیه دوم همگرایی ها برای حلقه ها:

تذکره: فرض کنیم R یک حلقه و I یک ایده آل R باشد. در این صورت R/I یک حلقه
است. نشان دهید که f یک ایده آل R است اگر و فقط اگر ایده آل J از R باشد
و وجود داشته باشد بطوریکه $I = J/I$.

قضیه دوم: فرض کنیم I و J دو ایده آل حلقه R باشند. در این صورت
$$\frac{I+J}{I} \cong \frac{J}{I \cap J}$$

تذکره: اگر I و J دو ایده آل حلقه R باشند آنگاه

$$I+J = \{a+b \mid a \in I, b \in J\}$$

در این صورت $I+J \triangleleft R$ هم چنین $I+J$ هم I و هم J را در خود دارد.

اثبات قضیه:

$$f: J \rightarrow \frac{I+J}{I}$$

$$xf = x + I$$

نشان دهید هم که f یک همگرایی برش است.

$$\begin{aligned} (x+y)f &= (x+y) + I = (x+I) + (y+I) \\ &= xf + yf \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (xy)f &= xy + I = (x+I)(y+I) \\ &= (xf)(yf) \end{aligned}$$

پس f یک همگرایی برش است.

فرض کنیم $x+I$ یک عنصر دلخواه در R/I باشد. در این صورت $x \in I+J$.

درستی: $a \in I$, $b \in J$ و هر دو دارند بطوریکه

$$x = a + b$$

$$x + I = (a + b) + I = b + (a + I) = b + I$$

پس داریم،

$$b + I = x + I \quad \text{شاید این . پس فرضیاست .}$$

$$k_f = I \cap J \quad \text{حال آنکه می بینیم}$$

$$a \in k_f \Leftrightarrow a f = 0 \Leftrightarrow a + I = 0 \Leftrightarrow a \in I \Leftrightarrow a \in I \cap J$$

پس بنابر قضیه بنیادی هم‌بخشی‌ها داریم،

$$\frac{J}{I \cap J} \cong \frac{I + J}{I}$$

قضیه سوم هم‌بخشی‌ها در حلقه‌ها: فرض کنیم R یک حلقه و I و J دو ایده‌آل باشند بطوریکه

$$I \subseteq J \quad \text{در انصورت}$$

$$\frac{R/I}{J/I} \cong R/J$$

$$f: \frac{R}{I} \rightarrow R/J$$

$$(a + I)f = a + J$$

اثبات: تعریف می‌کنیم

در انصورت فوق‌تر تعریف است.

$$a + I = b + I \Rightarrow a - b \in I \Rightarrow a - b \in J \Rightarrow a + J = b + J$$

$$\therefore (a + I)f = (b + I)f$$

نشان می‌دهیم که f یک هم‌بخشی پوشا است.

$$((a + I) + (b + I))f = ((a + b) + I)f$$

$$= (a + b) + J$$

$$= (a + J) + (b + J)$$

$$= (a + I)f + (b + I)f$$

$$((a + I)(b + I))f = (ab + I)f$$

$$= ab + J$$

$$= (a + J)(b + J)$$

$$= (a + I)f (b + I)f$$

در شانزدهم فصل بررسی است.

حال نشان می‌دهیم $I \cap K_f = \mathfrak{f}/I$

$$(a+I) \in K_f \Leftrightarrow (a+I)f = 0 \Leftrightarrow a + \mathfrak{f} = 0$$

$$\Leftrightarrow a \in \mathfrak{f} \Leftrightarrow a + I \in \mathfrak{f}/I$$

بنابراین قضیه بسیار خوبی داریم.

$$\frac{R/I}{\mathfrak{f}/I} \cong R/\mathfrak{f}$$

$$\frac{\mathfrak{f}+I}{I} = \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{f} \cap I}$$

الانتهائات

برعکس: فرض کنیم R/M یک حلقه ساده است. فرض کنیم $I \subseteq R$ یک ایده‌آل $M \subseteq I$.

در این صورت I/M یک ایده‌آل حلقه R/M می‌باشد. چون R/M یک حلقه

ساده است پس $I/M = \{M\}$ یا $I/M = R/M$. اگر $I/M = \{M\}$

آنگاه $I = M$. اگر $I/M = R/M$ آنگاه $I = R$. پس M یک

ایده‌آل ماکسیمال R است. $\square$

ایده‌آل ماکسیمال

مثال) اگر D یک حلقه تقسیم باشد آنگاه D یک حلقه ساده است.

$$I = D \Rightarrow I \neq \{0\}$$

پس اگر I یک هیأت باشد آنگاه I یک حلقه ساده است.

قضیه: فرض کنیم R یک حلقه جابجایی با عنصر 1 باشد. در این صورت R ساده است

اگر فقط اگر R یک هیأت باشد. چون R یک حلقه تقسیم است و R یک حلقه تقسیم است پس R یک حلقه تقسیم است.

اثبات: به فرض R یک هیأت باشد آنگاه ساده است.

برعکس: فرض کنیم R یک حلقه ساده باشد. فرض کنیم $a \in R$ و $a \neq 0$. فرض کنیم aR یک هیأت باشد.

$$aR = \{ar \mid r \in R\}$$

در این صورت aR یک ایده‌آل R می‌باشد. پس $aR = R$ یا $aR = \{0\}$. زیرا که

$$ar, as \in aR \Rightarrow ar + as = a(r+s) \in aR$$

$$0 = a \cdot 0 \in aR$$

$$ar \in aR \Rightarrow -(ar) = a(-r) \in aR$$

$$ar \in aR, s \in R \Rightarrow (ar)s = a(rs) \in aR$$

پس $aR = R$ یا $aR = \{0\}$. چون $a \neq 0$ پس $aR = R$. پس $a \in R$ و $a \neq 0$ پس $aR = R$.

چون R سادہات میں $aR = R$ درجہ 1 میں $r \in R$ درجہ دار ہوگا۔
 نیز $a = ar = 1$ میں ایک عنصر خاص ہے۔
 نیز R ایک ہنات ہے۔

نتیجہ: فرم $\mathbb{R}$ ایک حلقہ حجابی ہے، $\mathbb{M}$ ایک افعال $\mathbb{R}$ ماٹریس ہے، $\mathbb{R} \oplus \mathbb{M}$ رائیضرت $\mathbb{M}$ ایک افعال $\mathbb{M}$ کیل $\mathbb{R}$ ات اگر فقط اگر $\mathbb{R}/\mathbb{M}$ ایک حیات ہے۔

اثبات: سب سے پہلے M کی اندرونی مکسویل R ہے۔ آگاہ R/M کی
حلقہ سار دات۔ چون R کی حلقہ جابجائی، بعض عناصر M پر

[illegible]

ش:

$$\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$$

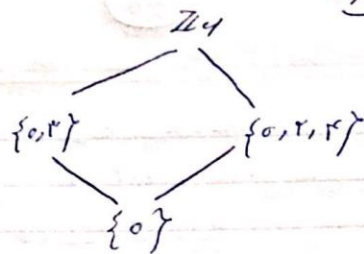
$$\{0\} \subsetneq \{0, r\} \subsetneq \mathbb{Z}_r \quad \boxed{\mathbb{Z}_r / \{0, r\} =}$$

$$\mathbb{Z}_r / \{0, 1\} = \{0 + \{0, r\}, 1 + \{0, r\}\} \subseteq \mathbb{Z}_r$$

$$\mathbb{Z}_9 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\{0, \tau, \kappa\} \subset \mathbb{Z}_4$$

۷۵ (۳، ۵) تنہا کیلئے مخصوص



$$\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

۵ عدد اول نهایی $\mathbb{Z}_5$ که هیأت
نیست، هیأت آنجا از غیرهیهی ندارد

تمرین: نشان دهید که اگر F یک هیأت باشد آنگاه ماتریس $M_2(F)$ ماتریس 2×2 که حلقه سازه است.

فرض کنیم R یک حلقه سازه، S یک حلقه و f یک همرفتی باشد در مورد f چه می‌توانیم بگوییم؟
$$f: R \rightarrow S$$

این همرفتی یا یک یک به یک است یا همرفتی بهی منفرجه بود

۸ نتیجه: یک همرفتی اگر یک هیأت به یک حلقه داشته باشیم همیشه این همرفتی نهمی بهی است.

تمرین: حلقه $\mathbb{Z}$ را در نظر بگیرید نشان دهید که نبرد زیر معارلند. $\mathbb{Z}$ به حلقه $\mathbb{Q}$ است و $\mathbb{Q}$ به $\mathbb{R}$

الف - $\mathbb{Z}$ یک زیرگروه جمعی $\mathbb{Z}$ است. (در حلقه $\mathbb{Q}$ معینیت) $\mathbb{Z}$ نیست

ب - $\mathbb{Z}$ یک زیرحلقه $\mathbb{Z}$ است. نشان دهید که اگر f یک همرفتی باشد $\mathbb{Z}$ است.

پ - $\mathbb{Z}$ یک ایده‌آل $\mathbb{Z}$ است. (حلقه $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{Z}$ یک ایده‌آل است. زیرا اگر $a \in \mathbb{Z}$ و $r \in \mathbb{Q}$ یا $\mathbb{R}$ ، $ra \in \mathbb{Z}$ است.)

تمرین: تمرین بالا را در مورد حلقه $\mathbb{Z}_n$ حل کنید.

اپرہ کر ہی اول

تعریف: فرض کنیم R یک حلقہ جابجائی باشد. ایده آل P از R یک ایده آل اول است اگر بار هر $a, b \in R$ داشته باشیم.

$$ab \in P \Rightarrow a \in P \text{ یا } b \in P$$

مثال: اگر R یک حلقه صفری باشد، آنگاه $\{0\}$ یک ایده آل اول است.
 زیرا اگر داریم: $ab \in \{0\} \Rightarrow ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ یا } b = 0$
 $a \in \{0\} \text{ یا } b \in \{0\}$

قضیه: فرض کنیم R یک حلقه جابجائی با صفری، P یک ایده آل اول R باشد. در این صورت P یک ایده آل اول R/P است اگر و فقط R/P یک حلقه صفری باشد.

اثبات: فرض کنیم P یک ایده آل اول R باشد. چون R یک حلقه جابجائی با صفری است پس R/P یک حلقه جابجائی با صفری خواهد بود.
 فرض کنیم $a+P, b+P \in R/P$ ، در این صورت داریم:

$$(a+P)(b+P) = P \Rightarrow ab+P = P \Rightarrow ab \in P$$

$$\xrightarrow{P \text{ ایده آل اول}} a \in P \text{ یا } b \in P \Rightarrow a+P = P \text{ یا } b+P = P$$

پس R/P یک حلقه صفری است.

برعکس: فرض کنیم R/P یک حلقه صفری باشد (برعکس میسر بود).

$$a, b \in R, ab \in P \Rightarrow a+P = P \Rightarrow (a+P)(b+P) = P$$

$$\Rightarrow a+P = P \text{ یا } b+P = P \Rightarrow a \in P \text{ یا } b \in P$$

پس P یک ایده آل اول است.

(۶۶)

مثال: $\mathbb{Z}$ یک ایده‌آل اول $\mathbb{Z}$ زیرا اگر $\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2$ یک

حیات، در نتیجه یک رانده صحیح است.

مطرح می: اگر P یک عدد اول باشد آنگاه $\mathbb{Z}/P$ یک ایده‌آل اول $\mathbb{Z}$ است.

زیرا $\mathbb{Z}/P \cong \mathbb{Z}_P$ یک رانده صحیح است.

قضیه: فرض کنیم R یک حلقه جابجایی با یکرانه باشد. رانده‌ی هر ایده‌آل ماکسیمال R یک ایده‌آل اول است.

اثبات: فرض کنیم M یک ایده‌آل ماکسیمال R باشد. رانده‌ی R/M

یک حیات در نتیجه یک رانده صحیح است. پس بنا به قضیه بالا M یک ایده‌آل اول R است.

مترین: بطور مستقیم نشان دهید که هر ایده‌آل ماکسیمال R یک ایده‌آل اول است.

مثال زیرت نشان می‌دهد که عکس قضیه بالا درست نمی‌باشد.

مثال: حلقه جابجایی با یکرانه $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ را در نظر بگیرید. فرض کنیم

$$P = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{Z}\}$$

رانده‌ی P یک ایده‌آل $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ نبی $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / P \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \mathbb{Z} \times \{0\} \cong \mathbb{Z}$

و بعد از آن $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / P \cong \mathbb{Z}$ در نتیجه P یک ایده‌آل اول است و می‌توانیم

نیت. $\leftarrow$ اگر $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / P \cong \mathbb{Z}$ حیات می‌گردد حیات نیست.

(ایده‌آل $\{0\}$ در $\mathbb{Z}$ یک ایده‌آل اول است و می‌توانیم نیت)

$$\rightarrow (a, b), (c, d) \in P \Rightarrow (ac, bd) \in P \Rightarrow bd = 0$$

$$\Rightarrow b = 0 \text{ یا } d = 0 \Rightarrow (a, b) \in P \text{ یا } (c, d) \in P$$