

حل انتگرال به روش جز به جز :

اگر u و v ترابعی مشتق پذیر از x باشند

$$d(u \cdot v) = (uv)' dx = (uv)' dx = v du + u dv$$

$$\Rightarrow d(u \cdot v) = u dv + v du$$

$$u dv = d(u \cdot v) - v du \Rightarrow \int u dv = \int d(u \cdot v) - \int v du$$

$$\Rightarrow \boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

$$\textcircled{1} \int \ln x dx = \quad u = \ln x \quad dv = dx \quad \int \ln u du$$

$$\begin{cases} dv = dx \\ v = \int dx = x \end{cases} \quad \begin{cases} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c$$

$$\textcircled{2} \int x e^x dx = \quad \begin{matrix} 374 & 371 \\ 1-16 & 374 \end{matrix}$$

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = e^x dx \rightarrow v = e^x$$

$$= x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$$

$$\int x^n \sin^m x dx \quad \text{و} \quad \int x^n \cos^m x dx \quad (3)$$

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx \quad \text{و} \quad \int x \sin x dx = x \cos x + \int \cos x dx$$

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$$

$$\int x^n \ln x dx \quad (4)$$

$$\int \sin^m x e^{nx} dx \quad (5)$$

(6) توابع متفرقة توابع متساوية

$$\int \sin^{-1} x dx, \int \cos^{-1} x dx, \int \tan^{-1} x dx$$

$$\int \cos x e^x dx = \boxed{uv + \int e^x \sin x dx}$$

$$u = \cos x \rightarrow du = -\sin x dx$$

$$dv = e^x dx \rightarrow v = e^x$$

$$u_1 = \sin x \rightarrow du_1 = \cos x dx$$

$$dv_1 = e^x dx \rightarrow v_1 = e^x$$

$$\Rightarrow uv + [u_1 v_1 - \int v_1 du] = uv + u_1 v_1 - \int e^x \cos x dx$$

$$2 \int e^x \cos x dx = uv + u_1 v_1 + c$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} [\cos x e^x + \sin x e^x] + c$$

استرالایری به روش ساده

استرالایری نوع $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ را که درجه صورت کمتر از درجه مخرج باشد و مخرج قابل تجزیه باشد مانند مثالها زیر حل می‌کنیم.

$g(x)$ را به عوامل درجه یک یا درجه دو تجزیه می‌کنیم یعنی $g(x)$ بصورت $(x-r)^n$ یا $(ax^2+bx+c)^m$ تجزیه می‌شود.

اگر درجه ۱ باشد

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x-r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-r)^n}$$

اگر درجه ۲ باشد

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_mx+B_m}{(ax^2+bx+c)^m}$$

یا بصورت ترکیبی از هر دو نوع نوشته می‌شود. (بسته به صورت)

پس از دست راست مخرج مشترک می‌گیریم و صورت آنرا برابر $f(x)$ قرار می‌دهیم. سپس ضرایب x^p را در دو طرف برابر قرار می‌دهیم و مقادیر $A_1, A_2, \dots, A_n$ و $B_1, \dots, B_m$ و بقیه مقادیر ناشناس را بدست می‌آوریم.

مثال ۱ تجزیه کر

$$\frac{3x+4}{(x-2)^3(x^2+4)^4} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{(x-2)^3} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+4} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+4)^2} + \frac{B_3x+C_3}{(x^2+4)^3} + \frac{B_4x+C_4}{(x^2+4)^4}$$

مثال ۲

$$\frac{2x^2+1}{(x-2)^3(x-1)^2(2x+5)^3}$$

توجه: $(ax^2+bx+c)^m$ را به صورت $\frac{C_1x+D_1}{2x^2+5} + \frac{C_2x+D_2}{(2x^2+5)^2} + \frac{C_3x+D_3}{(2x^2+5)^3}$ تجزیه می‌کنیم.

$$= \frac{A_1}{(x-2)} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{(x-2)^3} + \frac{B_1}{(x-1)} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{C_1x+D_1}{2x^2+5} + \frac{C_2x+D_2}{(2x^2+5)^2} + \frac{C_3x+D_3}{(2x^2+5)^3}$$

$$\int \frac{4-2x}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$$

$$\frac{4-2x}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(x-1)^2(Ax+B) + C(x^2+1) + D(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)^2}$$

$$= \frac{(x^2 - 2x + 1)(Ax + B) + (x^2 + c)(x - 1) + Dx^2 + D}{g(x)}$$

$$\frac{(A+C)x^3 + (-2A+B-c+D)x^2 + (A-2B+c)x + (B-c+D)}{g(x)}$$

صورت را ساده $4-2x$ قرار دهیم

$$(A+C)x^3 + (-2A+B-c+D)x^2 + (A-2B+c)x + (B-c+D) = 4-2x$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -2A+B-c+D=0 \\ A-2B+c=-2 \\ B-c+D=4 \end{cases}$$

راه حل را به دست آوریم x عدد صحیح را به دست آوریم

با فرض $x=1$ به دست می آوریم $2D=2 \rightarrow D=1$ اول (تست می کنیم)

$$\begin{aligned} A=2 \\ B=1 \\ C=-2 \\ D=1 \end{aligned} \quad \int \frac{(4-2x)dx}{(x^2+1)(x-1)^2} = \int \frac{\textcircled{1} 2x+1}{x^2+1} dx + \int \frac{\textcircled{2} -2}{x-1} dx + \int \frac{\textcircled{3} dx}{(x-1)^2}$$

$$\textcircled{1} \int \left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \ln |x^2+1| + \tan^{-1} x + C$$

$$\textcircled{2} -2 \ln |x-1| + C$$

$$\textcircled{3} - \frac{1}{x-1} + C$$

نوعی: تا حد ممکن باید مخرج تجزیه شود:

$$\frac{(3x+1)}{(x^2-1)(x+1)^2} = \frac{3x+1}{(x-1)(x+1)(x+1)^2} = \frac{3x+1}{(x-1)(x+1)^3}$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3}$$

Scanned with CamScanner