

تعریف: یک حلقه با جای با عنصرهایی بدون مقسم صفر غیر خنثی را یک دافنه صیغ می نامیم.

مثال: ۱. $\mathbb{Z}$ یک دافنه صیغ است.

۲. اگر p یک عدد اول باشد آنگاه $\mathbb{Z}_p$ یک دافنه صیغ است. (یک دافنه صیغ متناهی نامیده می شود)

قضیه: هر هیات یک دافنه صیغ است (توضیح: عکس این قضیه همراه درست نیست، $\mathbb{Z}$ یک دافنه صیغ است ولی هیات نیست زیرا عناصر آن وارون ضربی ندارد)

اثبات: فرض کنیم F یک هیات باشد، $a, b \in F$ در انضیوت داریم

$$ab = 0, a \neq 0 \Rightarrow \bar{a}(ab) = \bar{a} \cdot 0 = 0 \Rightarrow (\bar{a}a)b = 0 \Rightarrow 1b = 0 \Rightarrow b = 0$$

بنابراین F یک دافنه صیغ است.

قضیه: اگر D یک دافنه صیغ متناهی باشد آنگاه D یک هیات است.

اثبات: فرض کنیم $D = \{0, a_1, \dots, a_n\}$ ، کافی است نشان دهیم که a_i یک عنصر

واحد است برای هر $i \in \{1, \dots, n\}$ ، $a_i D = \{0, a_i a_1, a_i a_2, \dots, a_i a_n\}$ ، $a_i D = D$ نشان می دهیم که عناصر مجزعه $a_i D$ متناهی اند. اگر $a_i a_j = a_i a_k$ آنگاه داریم

$$a_i a_j - a_i a_k = 0 \Rightarrow a_i (a_j - a_k) = 0 \Rightarrow a_j - a_k = 0 \Rightarrow a_j = a_k$$

لذا $k = j$. بنابراین $a_i D$ به تعداد عناصر D عضو دارد (در نتیجه $a_i D = D$)

چون $1 \in D$ پس $1 \in a_i D$ و در نتیجه $1 = a_i a_j$ و $1 = a_i a_j$ برای یک j و در هر حالت a_i یک عنصر واحدی باشد.

نتیجه: اگر p یک عدد اول باشد آنگاه $\mathbb{Z}_p$ یک هیات است. (چون $\mathbb{Z}_p$ متناهی است)

تعریف: فرض کنیم R یک حلقه باشد برای هر $n \in \mathbb{Z}$ تعریف می کنیم

$$na = \begin{cases} \underbrace{a + \dots + a}_{n \text{ مرتبه}} & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ \underbrace{(-a) + (-a) + \dots + (-a)}_{-n \text{ مرتبه}} & n < 0 \end{cases} \quad \forall a \in R$$

در حقیقت یک تابع تعریف می کنیم
 $\mathbb{Z} \times R \rightarrow R$
 $(n, a) \mapsto na$

در انضیوت داریم:

$$(n+m)a = na + ma, (nm)a = n(ma)$$

$$(ma)(nb) = (mn)(ab)$$

$$n(a+b) = na + nb$$

$$(-n)a = n(-a)$$

$$\forall a, b \in R, m, n \in \mathbb{Z}$$

تقریباً فرض کنیم R یک حلقه باشد در انصورت کوچکترین عدد طبیعی n بزرگتر از $na=0$ برای هر $a \in R$ را در صورت وجود سرستهای حلقه R می نامیم و می نویسیم $\text{char } R = n$ اگر چنین عددی وجود نداشته باشد آنگاه می گوئیم R از سرستهای صفر است و می نویسیم $\text{char } R = 0$.

مثال ۱. حلقه $\mathbb{Z}$ از سرستهای صفر است

۲. $\mathbb{Z}_2$ ، ، ، ، $\mathbb{Z}_2$ است.

۳. بطور کلی حلقه $\mathbb{Z}_n$ از سرستهای n است.

قضیه: فرض کنیم R یک حلقه با عنصرهای باشد. در انصورت n سرستهای R است اگر و فقط اگر n کوچکترین عدد طبیعی ای باشد که $n \cdot 1 = 0$.

اثبات: فرض کنیم n (عدد طبیعی) سرستهای R باشد. چون $na=0$ برای هر $a \in R$ پس $n \cdot 1 = 0$. فرض کنیم $0 < m < n$ بطوریکه $m \cdot 1 = 0$ در انصورت برای هر

$$a \in R \text{ داریم: } (m \cdot 1)a = 0 \Rightarrow m(1a) = 0 \Rightarrow ma = 0$$

که یک تناقض است زیرا n کوچکترین عدد طبیعی است که $na=0$ برای هر $a \in R$ برعکس اگر n کوچکترین عدد طبیعی ای باشد که $n \cdot 1 = 0$ آنگاه نباید استدلال فوق $na=0$ برای هر $a \in R$ (کوچکترین عدد طبیعی است که $na=0$ برای هر $a \in R$)

پس نتیجه می شود که $n = \text{char } R$

قضیه: سرستهای یک دامنه صمیمی، صفر یا یک عدد اول است.

اثبات: فرض کنیم D یک دامنه صمیمی باشد و $\text{char } D = n > 0$. اگر n اول نباشد آنگاه

$n = n_1 n_2$ برای هر دو عدد طبیعی n_1 و n_2 بطوریکه $n_1 < n$ و $n_2 < n$ در انصورت داریم:

$$(n_1)(n_2) = (n_1 n_2)(1) = (n_1) = 0 \Rightarrow n_1 = 0 \text{ یا } n_2 = 0$$

که هر دو حالت یک تناقض تبدیل می دهد زیرا n کوچکترین عددی است که $n \cdot 1 = 0$ باشد. بنابراین n عدد اول است.

نتیجه: سرستهای هر هیات نیز صفر یا یک عدد اول است.

فصل ۲۴ - تمرین ۶ (الف) $n\mathbb{Z}$ دارای یکم های صفر است اگر n یک عدد اول نباشد

غیر ممکن $n\mathbb{Z}$ در $\mathbb{Z}$ است زیرا هر زیر حلقه یک دامنه صمیمی یک حلقه جایابی بدون

یکم صفر غیر صفر است.

(ب) درستی (ج) سرستهای $n\mathbb{Z}$ ، n ، $n\mathbb{Z}$ (د) $\text{char } n\mathbb{Z} = n$

قضیه: اگر D یک زیر دایره صیغ، دایره صیغ D باشد، آنگاه $D = D'$ (عنصر همان است)

$$(1_D)(1_D) = 1_D, (1_D)(1_D) = 1_D$$

$$(1_D)(1_D) = (1_D)(1_D) \Rightarrow (1_D)(1_D - 1_D) = 0 \Rightarrow 1_D - 1_D = 0$$

$$\Rightarrow 1_D = 1_D'$$

نتیجه: عنصرهای هر زیر هیات یک هیات با عنصرهای هیات مساوی است.

تعریف: فرض کنیم R و S دو حلقه باشند. در این صورت تابع $f: R \rightarrow S$ یک همگرایی است

$$(a+b)f = af + bf, (ab)f = (af)(bf) \quad \forall a, b \in R$$

تلاوه اگر f دوسوی نیز باشد آنگاه f یک یکگرایی نامیده می شود و در این صورت می گوئیم R با

$$S \text{ یکگرایی است و می نویسیم } R \cong S$$

تمرین: ثابت کنید برای حلقه های R و S و T داریم: (رابطه های همگرایی)

$$R \cong R, R \cong S \Rightarrow S \cong R, R \cong S, S \cong T \Rightarrow R \cong T$$

می توان کرد که در یک حلقه در یک حلقه با عنصرهای (تمرین 16 فصل 24 در همین زمینه است)

فرض کنیم R یک حلقه باشد و فرض کنیم $R \times \mathbb{Z} = \{(r, n) | r \in R, n \in \mathbb{Z}\}$ دو عمل جمع و ضرب را

$$(r, m) + (s, n) = (r+s, m+n) \quad \text{روی } R \times \mathbb{Z} \text{ صورت زیر تعریف می کنیم}$$

$$(r, m)(s, n) = (rs + ms + nr, mn)$$

در انصورت $R \times \mathbb{Z}$ همراه در عمل جمع و ضرب فوقین مطلقه با عنصرهای آن. زیرا که $(0,1)$ عنصرها

$$(r,m)(0,1) = (r_0 + m_0 + r_1 + m_1) = (r,m)$$

(جابجایی و ترتیب پذیری جمع و توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع تحقق شود)

تعریف می کنیم $R \rightarrow R \times \mathbb{Z}$ $f, R \rightarrow R \times \mathbb{Z}$ بطوریکه $rf = (r,0)$ در انصورت f یک هم نگاشتی بین R و $R \times \mathbb{Z}$ است زیرا:

$$(r+s)f = (r+s,0) = (r,0) + (s,0) = rf + sf$$

$$(rs)f = (rs,0) = (r,0)(s,0) = (rf)(sf)$$

$$rf = sf \Rightarrow (r,0) = (s,0) \Rightarrow r = s, \quad Rf = \{(r,0) \mid r \in R\} \cong R$$

$$\text{اگر } \text{char } R = n \Rightarrow \text{char } R \times \mathbb{Z} = n$$

هیا ن سرهای بین دافده می

فرض کنیم D یک دافده می باشد و $S = D \times (D - \{0\})$ روی S رابطه $\sim$ را تعریف

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$$

برای هر $(a,b), (c,d) \in S$ در انصورت $\sim$ یک رابطه هم ارزی روی S است زیرا که:

$$\forall (a,b) \in S \quad ab = ba \Rightarrow (a,b) \sim (a,b) \quad (1) \text{ خاصیت انعکاسی}$$

$$(a,b) \sim (c,d) \Rightarrow ad = bc \Rightarrow cb = da \Rightarrow (c,d) \sim (a,b) \quad (2) \text{ تناظر}$$

$$(a,b) \sim (c,d), (c,d) \sim (e,f) \Rightarrow ad = bc, cf = de \quad (3) \text{ خاصیت قسری}$$

$$afd = bcdf \quad bcf = dbce$$

$$\Rightarrow afd = bed \quad d \neq 0 \Rightarrow af = be \Rightarrow (a,b) \sim (e,f) \quad \square$$

$$F = S/\sim = \{[a,b] \mid (a,b) \in S\} \quad \text{فرض کنیم}$$

$$[a,b] = \{(x,y) \in S \mid (x,y) \sim (a,b)\}$$

در عمل جمع و ضرب را روی F تعریف می کنیم:

$$[a,b] + [c,d] = [ad+bc, bd]$$

$$[a,b][c,d] = [ac, bd]$$

نکته مهم که اعمال جمع و ضرب فوقین مؤثر تعریف است.

فرض کنیم $[a,b] = [a',b']$ و $[c,d] = [c',d']$ در انصورت داریم

$$(a,b) \sim (a',b') \rightarrow ab' = ba' \quad (1)$$

$$(c,d) \sim (c',d') \Rightarrow cd' = dc' \quad (2)$$

$$[a, b] + [c, d] = [a', b'] + [c', d'] \quad \text{می خواهیم نشان دهیم}$$

$$\Leftrightarrow [ad + bc, bd] = [ad' + bc', bd'] \Leftrightarrow (ad + bc)bd' = bd(ad' + bc')$$

با ضرب کردن و (۱) در dd' و (۲) در bb' خواهیم داشت:

$$adb'd' = bda'd', \quad bcb'd' = bdb'c'$$

$$(ad + bc)bd' = bd(ad' + bc')$$

طرفین آن روی فوق را با هم جمع می کنیم

با این جمع خواستیم ثابت کردیم.

$$[a, b][c, d] = [a', b'][c', d'] \quad \text{برای اثبات خواستیم ثابت کردیم}$$

$$\Leftrightarrow [ac, bd] = [a'c', b'd'] \Leftrightarrow (ac, bd) \sim (a'c', b'd') \Leftrightarrow$$

$$acb'd' = bda'c'$$

$$aeb'd' = bca'd', \quad \text{با ضرب کردن و برای (۱) و (۲) در ed' و ba' خواهیم داشت}$$

$$bea'd' = bda'c'$$

پس ضرب هم خواستیم ثابت کردیم.