

تعریف: فرض کنیم R یک مجموعه و $+$ و $\cdot$ دو عمل دوتایی روی R باشند. R را انصورت همراه این دو عمل یک حلقه است اگر:

- (1) $(R, +)$ یک گروه آبلی باشد. در اینجا عنصر خنثی این گروه را با "0" نمایش می‌دهیم.
- (2) ضرب تبادلی باشد یعنی $(ab)c = a(bc)$ برای هر $a, b, c \in R$.
- (3) ضرب به جمع پخش باشد یعنی $(a+b)c = ac+bc$, $a(b+c) = ab+ac$ برای هر $a, b, c \in R$.

مثال (الف) $\mathbb{Z}$ با جمع و ضرب معمولی اعداد یک حلقه است.

(ب) فرض کنیم $M_2(\mathbb{Z})$ مجموعه همه ماتریسهای 2×2 روی $\mathbb{Z}$ باشد.

$$M_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

عنصر خنثی نسبت به جمع $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، عنصر قرینه ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$ است.

ضرب ماتریس را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

در انصورت $M_2(\mathbb{Z})$ با دو عمل فوق یک حلقه است.

(ج) فرض کنیم $(G, +)$ یک گروه آبلی باشد و $H(G)$ مجموعه همه همرفتی‌ها از گروه G به خودش باشد.

$$H(G) = \{ f: G \rightarrow G \mid f \text{ یک همرفتی است} \}$$

دو عمل جمع و ضرب روی $H(G)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f+g: G \rightarrow G \quad a(f+g) = af+ag$$

$$fg: G \rightarrow G \quad a(fg) = (af)g \quad \text{برای هر } a \in G$$

در انصورت $H(G)$ ، $fg \in H(G)$ ، زیرا که برای هر $a, b \in G$ داریم:

$$\begin{aligned} (a+b)(f+g) &= (a+b)f + (a+b)g = (af+bf) + (ag+bg) \\ &= (af+ag) + (bf+bg) = a(f+g) + b(f+g) \end{aligned}$$

پس $f+g \in H(G)$.

$$(a+b)(fg) = ((a+b)f)g = (af+bf)g = (af)g + (bf)g = a(fg) + b(fg)$$

در انصورت $H(G)$ همراه این دو عمل یک حلقه می‌باشد. فرض کنیم $a, b, f, g \in H(G)$.

برای هر $a \in G$ داریم:

$$\begin{aligned} a((f+g)+h) &= a(f+g) + ah = (af+ag) + ah = af + (ag+ah) \\ &= af + a(g+h) = a(f+(g+h)) \end{aligned}$$

$$(f+g)+h = f+(g+h) \quad \text{پس}$$

$$a(f+g) = af+ag = ag+af = a(g+f)$$

برای آسانی بردن

$$f+g = g+f$$

پس جابجایی هم هست.

تعریف می کنیم $0: G \rightarrow G$ به طوری که $0 \in H(G)$ در انصورت $a \in G$ برای هر $a \in G$ $a0 = 0$ و $0a = 0$ و $f \in H(G)$ و $a \in G$ داریم:

$$a(f+0) = af + a0 = af + 0 = af \Rightarrow f+0 = 0+f = f$$

پس 0 عنصر حقیقی $H(G)$ است.

$$-f: G \longrightarrow G$$

برای هر $f \in H(G)$ تعریف می کنیم:

$$a(-f) = -(af), \quad \forall a \in G$$

در انصورت $-f \in H(G)$ و $a \in G$ داریم:

$$a(f+(-f)) = af + a(-f) = af + (-(af)) = 0 = a0$$

$$\therefore f+(-f) = 0 = (-f)+f$$

پس $(H(G), +)$ یک گروه آبدی است.

چون ترکیب توافقی ضرب نیز است پس ضرب $H(G)$ شرکت پذیری دارد.

فرض کنیم $a \in G$ و $f, g, h \in H(G)$

$$a(f(g+h)) = (af)(g+h) = (af)g + (af)h = a(fg) + a(fh)$$

$$= a(fg+fh) \quad \therefore f(g+h) = fg+fh$$

$$a((f+g)h) = (a(f+g))h = (af+ag)h = (af)h + (ag)h = a(fh) + a(gh)$$

$$= a(fh+gh) \quad \therefore (f+g)h = fh+gh$$

پس $H(G)$ یک حلقه می باشد.

تمرین (۱) فرض کنیم E مجموعه اعداد صحیح و زوج باشد $(E=2\mathbb{Z})$ در انصورت E به عمل جمع و ضرب معمولی اعداد صحیح حلقه است.

تمرین (۲) گروه آبدی $(\mathbb{Z}_n, +)$ را در نظر می گیریم. عمل ضرب روی $\mathbb{Z}_n$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$ab = \text{باقی مانده تقسیم حاصل ضرب معمولی } a \text{ و } b \text{ بر } n$$

در این صورت این ضرب ترکیبی است و نسبت به جمع بخشیه و نسبت به ضرب در $\mathbb{Z}_n$ همراه دو عمل جمع و ضرب یک حلقه است.

تعریف: فرض کنیم R یک حلقه باشد در این صورت:

(الف) اگر ضرب R جایگذاشته باشد آنگاه R را یک حلقه جایگذاشته می نامیم.

(ب) اگر R نسبت به عمل ضرب دارای عنصر همنی باشد آنگاه R را یک حلقه با عنصر همنی می نامیم، عنصر همنی نسبت به عمل ضرب را 1 می نامیم.

(ج) R یک حلقه جایگذاشته با عنصر همنی است اگر R جایگذاشته باشد و علاوه بر عنصر همنی نیز داشته باشد.

مثال (الف) $\mathbb{Z}$ یک حلقه جایگذاشته با عنصر همنی است.

(ب) $\mathbb{Z}_n$ یک حلقه جایگذاشته با عنصر همنی است.

$$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\} \quad a \in \mathbb{Z}_n \Rightarrow 0 \leq a < n \quad 1a = a \text{ عنصر همنی}$$

(ج) اگر $E = 2\mathbb{Z}$ نباشد آنگاه E یک حلقه جایگذاشته است ولی عنصر همنی ندارد.

(د) $M_2(\mathbb{Z})$ یک حلقه با عنصر همنی است ولی جایگذاشته نیست.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ولی ضرب جایگذاشته نیست.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ولی

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(ه) فرض کنیم $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ که یک گروه اَبَلی همی باشد، حال حلقه $H(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ را در نظر

می گیریم.

$$f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad g: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$(m, n)f = (m+n, 0) \quad (m, n)g = (0, n)$$

برای هر $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ، در این صورت $f, g \in H(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ و علاوه بر این هر $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$(m, n)(fg) = ((m, n)f)g = (m+n, 0)g = (0, 0) \quad \text{داریم:}$$

$$(m, n)(gf) = ((m, n)g)f = (0, n)f = (n, 0)$$

پس $H(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ یک حلقه جایگذاشته نیست ولی $H(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ عنصر همنی دارد که 1 می باشد.

$$1: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$(m, n)1 = (m, n)$$

(9) $M_2(E)$ کی حلقہ ضربی جگانی بدولت عنصر ہائی ہوتا ہے۔
 قضیہ: فرض کنیم R کی حلقہ ہوتا ہے اور $a, b \in R$ درانصورت داریم:

$$a0 = 0a = 0 \quad (\text{الف})$$

$$a(-b) = (-a)b = -(ab) \quad (\text{ب})$$

$$(-a)(-b) = ab \quad (\text{ج})$$

$$a0 = a(0+0) = a0 + a0 \Rightarrow a0 = 0 \quad (\text{اثبات (الف)})$$

$$0a = (0+0)a = 0a + 0a \Rightarrow 0 = 0a$$

$$ab + a(-b) = a(b + (-b)) = a0 = 0 \Rightarrow a(-b) = -(ab) \quad (\text{ب})$$

$$(-a)(-b) = -((-a)b) = -(-(ab)) = ab \quad (\text{ج})$$

قضیہ: عنصر هائی کی حلقہ در صورت وجود ہوتا ہے۔ (عنصر هائی ہمہ برای عمل ضرب حلقہ مطرح است)

اثبات: فرض کنیم 1 و $1'$ در عنصر هائی حلقہ R باشند۔ چون 1 عنصر هائی است و $1' \in R$ پس $11' = 1'$

چون $1'$ عنصر هائی است و $1 \in R$ پس $11' = 1$ ، بنابراین $1 = 1'$ ۔
 تقریب: فرض کنیم R کی حلقہ با عنصر هائی 1 ہوتا ہے، درانصورت $a \in R$ کی عنصر واحد R است اگر $b \in R$ وجود داشته باشد بطوریکہ $ab = ba = 1$ ۔
 قضیہ: فرض کنیم R کی حلقہ با عنصر هائی ہوتا ہے و $a \in R$ درانصورت معکوس ضربی a در صورت وجود ہوتا ہے۔

اثبات: فرض کنیم a' و a'' معکوس ضربی a باشند درانصورت داریم:
 $aa' = a'a = 1$, $aa'' = a''a = 1$
 $a' = a'1 = a'(aa'') = (a'a)a'' = 1 \cdot a'' = a''$
 حال داریم:

پس معکوس a در صورت وجود ہوتا ہے۔
 معکوس ضربی a را با نماد a^{-1} نمایش میدہیم۔
 تقریب: کی هیات کی حلقہ جایگانی با عنصر هائی است بطوریکہ ہر عنصر غیر آن واحد ہوتا ہے۔

نما: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ هیات هستند۔
 $R \text{ هیات است} \Leftrightarrow \begin{cases} (R, +) \text{ کی گروہ آبدی ہوتا ہے} \\ (R, \cdot) \text{ کی گروہ آبدی ہوتا ہے} \end{cases}$
 ضرب لکچر مرجع کنیم ہوتا ہے۔

زیر حلقه ها

تقریباً فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت زیر مجموعه S از R یک زیر حلقه R است اگر اکثر S تحت اعمال جمع و ضرب R بسته باشد و با اعمال الفاده R یک حلقه تشکیل دهد.

قضیه ۱: فرض کنیم R یک حلقه، S یک زیر مجموعه R باشد. در این صورت S یک زیر حلقه R است اگر:

(الف) S یک زیر گروه جمعی R باشد و

(ب) $a, b \in S \Rightarrow ab \in S$

اثبات: شرکت پذیری و بخش بودن بررسی می شود.

مثال: (الف) اگر R یک حلقه باشد آنگاه $\{0\}$ و R زیر حلقه های بدیهی R هستند. اگر R بدیهه

این زیر حلقه ها، زیر حلقه دیگری درسته باشد آنگاه آن زیر حلقه یک زیر حلقه غیر بدیهی می گیریم.

(ب) حلقه $\mathbb{Z}$ را در نظر می گیریم. میدانیم که هر زیر گروه جمعی $n\mathbb{Z}$ بصورت $n\mathbb{Z}$ برای یک n

صحیح و غیر منفی n می باشد.

$$nx, ny \in n\mathbb{Z} : \Rightarrow (nx)(ny) = n(xny) \in n\mathbb{Z}$$

پس $n\mathbb{Z}$ یک زیر حلقه $\mathbb{Z}$ است برای هر عدد صحیح و غیر منفی n .

تمرین: نشان دهید که هر زیر گروه جمعی $\mathbb{Z}_n$ یک زیر حلقه می باشد.

(ج) حلقه $M_2(\mathbb{Z})$ را در نظر می گیریم. فرض کنیم $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$

علامه S یک زیر گروه جمعی $M_2(\mathbb{Z})$ می باشد (حال قسمت ب قضیه بالا می بینیم)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin S$$

بنابراین S یک زیر حلقه $M_2(\mathbb{Z})$ نیست.

- نزدیکی ندارد که هر زیر حلقه عضوهای (نسبت به ضرب) را در بر داشته باشد مثلاً $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ ولی اگر در نظر بگیریم $M_2(\mathbb{Z})$ را در نظر می گیریم:

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R$$

پس R یک زیر حلقه $M_2(\mathbb{Z})$ است. عضوهای $M_2(\mathbb{Z})$ مادی $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ است. زیر حلقه R نیز دارای عضوهای $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ می باشد. ملاحظه می شود که عضوهای در حلقه R و $M_2(\mathbb{Z})$ متفاوتند.

تعریف: اگر R یک حلقه با عضوهای باشد بطوریکه هر عضو غیر صفر R یک عضو واحد باشد آنرا R را یک حلقه تقسیم (هیئت کج) می نامیم. پس یک حلقه تقسیم جای پای یک هیئت می باشد. (مانند چرخه ها حاصلیون)

مثال: مجموعه $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ را در نظر می گیریم

$$V = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R} \}$$

فرض می کنیم $a \in \mathbb{R}$ تعریف می کنیم و برای هر

$$a_1 = (a, 0, 0, 0), a_i = (0, a, 0, 0), a_j = (0, 0, a, 0), a_k = (0, 0, 0, a)$$

تعریف می کنیم: $(a_1, a_2, a_3, a_4) + (b_1, b_2, b_3, b_4) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4)$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_1, 0, 0, 0) + (0, a_2, 0, 0) + (0, 0, a_3, 0) + (0, 0, 0, a_4)$$

$$= a_1 1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k$$

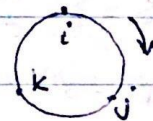
میدانیم که $(V, +)$ با این جمع یک گروه آبدی است.

$$V = \{ a_1 1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k \mid a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R} \}$$

تعریف می کنیم $v \in V$ و $v = 1v = v1 = v$ و

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k, jk = i, ki = j$$

$$ik = -j, kj = -i, ji = -k$$



$$(a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k)(b_1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k) =$$

$$(a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_4 - a_4 b_3) i + (a_1 b_3 - a_2 b_4 + a_3 b_1 + a_4 b_2) j + (a_1 b_4 + a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_4 b_1) k$$

تمرین: نشان دهید ضرب بالا سبک نیست و بخشی است. (عنصر ۱ = (1, 0, 0, 0))

نمودار: $v = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k$ تصویر زیر قفسه مسود. $\bar{v} = a_1 - a_2i - a_3j - a_4k$

در این صورت به سبب آن می توان دید که $v\bar{v} = \bar{v}v = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = |v|^2 \in \mathbb{R}^+$

اگر $v \neq 0$ آنگاه $|v| \neq 0$ و در نتیجه $v(\frac{\bar{v}}{|v|^2}) = (\frac{\bar{v}}{|v|^2})v = 1$

پس هر عنصر غیر صفر در V دارای یک معکوس ضربی می باشد. $v^{-1} = \frac{\bar{v}}{|v|^2}$

قضیه: V یک حلقه تقیم است که بر آن حلقه تقیم ϕ را با $\phi(v) = \bar{v}$ تعریف می شود

- هر حیات یک حلقه ϕ در V در V است.

- هر حلقه یک عنصر حاتی ضربی دارد. ندارد.

تمرین: بط سبب داشتن حلقه ϕ جای این کتاب

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad (a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i \quad \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

تمرین: در $\mathbb{Z}_p$ تابع کتب

$$(a+b)^p = a^p + b^p$$

$$(a+b)^n = a^n + b^n$$

تعریف: عنصر a در حلقه R یک عنصر پوچتران است اگر عدد طبیعی n وجود داشته باشد که $a^n = 0$

از تعریف نتیجه می شود که 0 در حلقه R یک عنصر پوچتران است.

مثال ۱) در $M_2(\mathbb{Z})$ عنصر پوچتران آن $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ است

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال ۲) در $\mathbb{Z}_4$ ، عنصر پوچتران آن 2 است چرا که $2^2 = 2 \times 2 = 0$

سوال: آیا حاصل جمع دو عنصر پوچتران در یک حلقه مجابایی یک عنصر پوچتران است؟ جواب در V است

اگر این توانا را بپذیرد کافی بزرگ فرض کنیم

$$(a+b)^{m+n} = a^{m+n} + a^{m+n-1}b + \dots + a^m b^n + a^{m-1}b^{n+1} + \dots + b^{n+m}$$

ولی در هر دو حلقه های غیر مجابایی این امر صادق نیست چون

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

تمرین: نشان دهید که یک عنصر واحد یک حلقه نمی تواند پوچتران باشد.

تعریف: عنصر a در حلقه R را یک عنصر خودنوال می‌نامیم هرگاه $a^2 = a$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تعریف: حلقه R یک حلقه بولی است اگر هر عنصر R خودنوال باشد.
تمرین: نشان دهید که هر حلقه بولی یک حلقه جابجایی است.

مثال برای یک حلقه بولی: فرض کنیم $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ روی $\mathcal{P}(A)$ دو عمل جمع و ضرب را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$X + Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)$$

$$XY = X \cap Y$$

در این صورت $\mathcal{P}(A)$ با دو عمل جمع و ضرب فوق یک حلقه است.

تمرین: مثال بالا تحقیق شود.

بررسی خواص حلقه $\mathbb{Z}$ (اعداد صحیح)

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$$

تعریف: فرض کنیم R یک حلقه باشد و $a \in R$ در این صورت:

(الف) a یک مقسم صفر است اگر $a \neq 0$ و $b \in R$ وجود داشته باشد بطوریکه $ab = 0$.

(ب) a یک مقسم صفر است اگر $a \neq 0$ و $c \in R$ وجود داشته باشد بطوریکه $ca = 0$.

(ج) a یک مقسم صفر است اگر a یک مقسم صفر است یا صفر باشد.

- در یک حلقه با بیش از یک عنصر، مقسم صفر هیچ وراثتی ندارد.

مثال (الف) حلقه $\mathbb{Z}_4$ را در نظر بگیرید $(2 \cdot 2 = 0)$ پس 2 یک مقسم صفر غیر صفر $\mathbb{Z}_4$ است.

(ب) حلقه ماتریس های 2×2 روی $\mathbb{Z}$ $(M_2(\mathbb{Z}))$ را در نظر بگیرید

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پس $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ مقسم های صفر غیر صفر $M_2(\mathbb{Z})$ هستند.

(ج) حلقه $H(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ را در نظر بگیرید

$$f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$(m, n)f = (m+n, 0)$$

$$g: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad (m, n)fg = ((m, n)f)g = (m+n, 0)g = (0, 0)$$

$$(m, n)g = (0, n)$$

پس f و g مقسم های صفر غیر صفر در $H(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ می باشند
 تعریف: فرض کنیم R یک حلقه باشد و $a \in R, a \neq 0$ در انصورت
 (الف) a از طرف چپ قابل حذف است اگر $ab = ac$ نتیجه بدهد $b = c$ برای هر $b, c \in R$
 (ب) a از طرف راست قابل حذف است اگر $ba = ca$ نتیجه بدهد $b = c$ برای هر $b, c \in R$
 (ج) a قابل حذف است اگر از طرف چپ و راست قابل حذف باشد.
 تعریف: قوانین حذف در حلقه R برقرارند اگر هر عنصر غیر صفر R قابل حذف باشد.
 قضیه: فرض کنیم R یک حلقه باشد و $a \in R, a \neq 0$ در انصورت:
 (الف) a از طرف چپ قابل حذف است اگر و فقط اگر a مقسم صفر چپ نباشد.
 (ب) a از طرف راست قابل حذف است اگر و فقط اگر a مقسم صفر راست نباشد.
 (ج) a قابل حذف است اگر و فقط اگر a مقسم صفر نباشد.
 اثبات (الف): فرض کنیم a از طرف چپ قابل حذف باشد و $ab = 0$ برای $b \in R$ در انصورت
 $ab = 0 = a \cdot 0 \Rightarrow b = 0$

پس a مقسم صفر چپ نیست و برعکس فرض کنیم a مقسم صفر چپ نباشد
 $ab = ac \Rightarrow ab - ac = 0 \Rightarrow a(b - c) = 0 \Rightarrow b - c = 0 \Rightarrow b = c$
 پس a از طرف چپ قابل حذف است.
 مثال: حلقه $\mathbb{Z}_6$ را در نظر می گیریم، در انصورت 2 و 3 مقسم های صفر غیر صفر $\mathbb{Z}_6$ هستند
 $2 \cdot 3 = 0$ و $4 \cdot 3 = 0$ نیز یک مقسم صفر غیر صفر $\mathbb{Z}_6$ هست زیرا $4 \cdot 3 = 0$.
 قضیه: در $\mathbb{Z}_n$ مقسم های صفر غیر صفر (واقعاً) اعدادی هستند که نسبت به n اول نمی باشند.
 اثبات: فرض کنیم $a \in \mathbb{Z}_n$ یک مقسم صفر غیر صفر باشد، در انصورت $b \in \mathbb{Z}_n, b \neq 0$ وجود دارد
 بطوریکه $a \cdot b = 0$ پس $n \mid ab$ ، اگر چه عوامل اول n عدد a را تقسیم نمائند آنگاه
 $n \mid b$ و در نتیجه $b = 0$ که یک تناقض است پس باید عوامل اول p از n و p در a داشته باشد
 بطوریکه pa در نتیجه a و n نسبت به هم اول نمی باشند.
 برعکس فرض کنیم a و n نسبت به هم اول نباشد در انصورت اگر d بزرگترین
 مقوم علیه مشترک a و n باشد آنگاه $d \mid a$ در انصورت $n/d \in \mathbb{Z}_n, n/d \neq 0$ و
 بعلاوه داریم

$$a(n/d) = (a/d)n = 0 \quad (\text{چون } n \text{ مضرب } n \text{ است})$$

نبا بر این a_k یک مقام صفر غیر صفر $\mathbb{Z}_n$ است.
نتیجه: اگر p یک عدد اول باشد آنگاه $\mathbb{Z}_p$ یک صفر غیر صفر ندارد. (زیرا تمام اعداد کوچکتر از p
نسبت به p اول هستند)



Scanned with CamScanner