

تمرین. تبدیل لاپلاس تابع $t^2 \sin at$ را که در آن a عدد حقیقی است پیدا کنید.

تمرین. تبدیل لاپلاس تابع $t e^{-t} \cos at$ را پیدا کنید.

تمرین. اگر انتگرال زیری هم m هم از یک سری نامتناهی مجاز باشد، تبدیل لاپلاس تابع زیر را به دست آورید.

$$f(t) = 1 - u_1(t) + \dots + u_{2n}(t) - u_{2n+1}(t) + \dots$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k u_k(t)$$

تمرین. لاپلاس معکوس تابع $F(s) = \frac{1 + e^{-2\pi s}}{s^2 + 1}$ را پیدا کنید.

تمرین. نشان دهید $(f * g)(t) = (g * f)(t)$

مسئله 27. به کمک قضیه پارسایی تبدیل ماکلوس هر یک از توابع زیر را به سینوس و کسینوس تبدیل کنید.

a) $\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$

b) $\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$

c) $\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$

154

a) $\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)} = \frac{1}{s^2} \times \frac{1}{s^2+\omega^2}$ ، $\frac{1}{s^2} = \mathcal{L}\{t\}$ ، $\frac{1}{s^2+\omega^2} = \frac{1}{\omega} \mathcal{L}\{\sin \omega t\}$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}\right\} = \frac{1}{\omega} \int_0^t u \sin \omega(t-u) du = -\frac{t}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^3} \sin \omega t$ (تبدیل پارسایی)

b) $\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2} \times \frac{1}{s^2+\omega^2}$ ، $\frac{s}{s^2+\omega^2} = \mathcal{L}\{\cos \omega t\}$ ، $\frac{1}{s^2+\omega^2} = \frac{1}{\omega} \mathcal{L}\{\sin \omega t\}$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}\right\} = \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega u \cos \omega(t-u) du = \frac{1}{2\omega} t + \sin \omega t$ (تبدیل پارسایی)

c) $\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)} = \frac{s}{s^2+a^2} \times \frac{1}{s^2+b^2}$ ، $\frac{s}{s^2+a^2} = \mathcal{L}\{\cos at\}$ ، $\frac{1}{s^2+b^2} = \frac{1}{b} \mathcal{L}\{\sin bt\}$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right\} = \frac{1}{b} \int_0^t \cos au \sin b(t-u) du = \frac{1}{b^2-a^2} (\cos at - \cos bt)$ (تبدیل پارسایی)

مسئله 28. معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$y'' + y = \sin 3t$ ، $y_0 = 0$ ، $y'_0 = 0$

$\mathcal{L}\{y\} = \frac{3}{(s^2+9)(s^2+1)} = \frac{3}{s^2+9} \times \frac{1}{s^2+1}$

$y = \int_0^t \sin 3u \sin(t-u) du = \frac{1}{2} \int_0^t [\cos(4u-t) - \cos(t+2u)] du$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s^2+9)(s^2+1)}\right\} = \frac{3}{8} (\sin 3t - \sin t)$

مثال. باب کاربرد فرمول پیچش. (لاپلاس معکوس تابع $H(s) = \frac{a}{s^2(s^2+a^2)}$ را پیدا کنید.

حل: می دانیم $L[th] = \frac{n!}{s^{n+1}}$ و $L[\sin at] = \frac{a}{s^2+a^2}$

$$H(s) = \frac{1}{s^2} \times \frac{a}{s^2+a^2} = \frac{1}{F(s)} \times \frac{a}{G(s)}$$

پس $f(t) = t, g(t) = \sin at$ در نتیجه

$$h(t) = (f \times g)(t) = \int_0^t (t-u) \sin au \, du$$

$$= (t-u) \left(-\frac{\cos au}{a} \right) \Big|_0^t - \int_0^t \left(-\frac{\cos au}{a} \right) (-du)$$

$$= +\frac{t}{a} - \frac{\sin au}{a^2} \Big|_0^t = \frac{t}{a} - \frac{\sin at}{a^2}$$

تذکره: برخی معادلات انتگرالی را می توان باب کاربرد فرمول پیچش حل کرد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال. تابع $f(t)$ را از معادله انتگرالی $f(t) = 4t - 3 \int_0^t f(u) \sin(t-u) \, du$ بدست آورید.

حل: فرض کنیم $L[f(t)] = F(s)$. از طرفین معادله لاپلاس می گیریم، بدست می آید

$$F(s) = 4/s^2 - 3 F(s)/s^2+1 \Rightarrow$$

$$\left(1 + \frac{3}{s^2+1}\right) F(s) = \frac{4}{s^2} \Rightarrow F(s) = \frac{4(s^2+1)}{s^2(s^2+4)}$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{3}{s^2+4} = \frac{1}{s^2} + \frac{3}{2} \frac{2}{s^2+4}$$

بنابراین $f(t) = t + \frac{3}{2} \sin 2t$

تمرین. معادلات انتگرالی زیر را حل کنید

الف) $y(t) = t + \int_0^t y(u) \sin(t-u) \, du$

ب) $y(t) = \sin t + \int_0^t y(u) \sin(t-u) \, du$

مسئله 32. معادله انتگرالی زیر را حل کنید:

$$y(t) = t + \int_0^t y(u) \sin(t-u) du$$

حل: با تبدیل لاپلاس هر دو طرفین تسا در فوق و به کار بردن قضیه یوحسین می یابیم

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2+1} \mathcal{L}\{y\}$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{s^2+1}{s^4} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}$$

د

$$y(t) = t + \frac{1}{6} t^3$$

در انتها

$$y(t) = \sin t + \int_0^t y(u) \sin(t-u) du$$

مسئله 33. معادله انتگرالی

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} \mathcal{L}\{y\}$$

حل

$$\mathcal{L} = \frac{1/s^2+1}{1-1/(s^2+1)} = \frac{1}{s^2}$$

د

$$y = t$$

در انتها

مسئله 34. معادله انتگرالی

$$y(t) = f(t) + \int_0^t k(t-u) y(u) du$$

را حل کنید. این معادله به معادله انتگرالی ولتر از نوع دوم است. $k(t-u)$ که تابع بعضی از $t-u$ است به

کرنل معادله انتگرالی موسوم است و معادلات انتگرالی شامل چنین کرنهائی را معادلات انتگرالی از نوع یوحسین می نامند.

حل: با تبدیل لاپلاس هر دو طرفین معادله و استفاده از قضیه یوحسین می یابیم

$$Y(u) = F(u) + k(u) Y(u)$$

$$R(u) = \mathcal{L}\{k\}$$

$$F(u) = \mathcal{L}\{f\}$$

$$Y(u) = \mathcal{L}\{y\}$$

پس در آن



Scanned with CamScanner

هر يك از موارد بالا را حل كنيد.

5. $y(t+1) = 1 + \int_0^t y(u) du$; $y = e^t$

8. $y(t) = \sin 2t + \int_0^t y(u) \sin 2(t-u) du$; $y = \sqrt{2} \sin \sqrt{2}t$

9. $y(t+1) = 1 - \sinh t + \int_0^t (1+u) y(t-u) du$; $y = \cosh t$

هر يك از موارد بالا را حل كنيد.

10. $\begin{cases} y_1'' = y_1 + 3y_2, & y_1(0) = 2, y_2(0) = 1, & y_1 = e^t + e^{2t} \\ y_2'' = 4y_1 - 4e^t, & y_1'(0) = 3, y_2'(0) = 2, & y_2 = e^{2t} \end{cases}$

11. $\begin{cases} y_1' + y_2' = 2 \sinh t, & y_1(0) = 1, y_2(0) = 1, y_3(0) = 0 \\ y_2' + y_3' = e^t, & \\ y_3' + y_1' = 2e^t + e^{-t}, & y_1 = e^t, y_2 = e^{-t}, y_3 = e^t - e^{-t} \end{cases}$



$$\begin{cases} (D+3)x + 5y = 2 \\ -x + (D-1)y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x' + 3x + 5y = 2 \\ -x + y' - y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \delta X(\delta) - x(0) + 3X(\delta) + 5Y(\delta) = \frac{2}{\delta} \\ -X(\delta) + \delta Y(\delta) - y(0) - Y(\delta) = \frac{1}{\delta} \end{cases}$$

$x(0)=1, y(0)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\delta+3)X(\delta) + 5Y(\delta) = \frac{2}{\delta} + 1 = \frac{2+\delta}{\delta} \\ -X(\delta) + (\delta-1)Y(\delta) = \frac{1}{\delta} \end{cases}$$

$$\text{ع.} \quad \begin{aligned} Y(\delta) + (\delta+3)(\delta-1)Y(\delta) &= \frac{2+\delta}{\delta} + \frac{\delta+3}{\delta} \\ (\delta^2+2\delta-3+5)Y(\delta) &= \frac{2\delta+5}{\delta} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(\delta) &= \frac{2\delta+5}{\delta(\delta^2+2\delta+2)} = \frac{A}{\delta} + \frac{B\delta+C}{\delta^2+2\delta+2} \\ &= \frac{A\delta^2+2A\delta+2A+B\delta^2+C\delta}{\delta(\delta^2+2\delta+2)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A+B=0, 2A+C=2, 2A=5$$

$$\Rightarrow A=5/2, B=-5/2, C=-3 \Rightarrow Y(\delta) = \frac{5}{2} \frac{1}{\delta} - \frac{5}{2} \frac{\delta}{\delta^2+2\delta+2}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{5}{2} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\delta}\right] - \frac{5}{2} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\delta+1}{(\delta+1)^2+1}\right] - \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(\delta+1)^2+1}\right]$$

$$= \frac{5}{2} \times 1 - \frac{5}{2} e^{-t} \cos t - \frac{1}{2} e^{-t} \sin t$$

آرایه متناهی، در هر دو طرف قرار دهیم 1

$$\begin{aligned} x &= (D-1)y - 1 = y' - y - 1 = \frac{5}{2} e^{-t} \cos t + \frac{5}{2} e^{-t} \sin t + \frac{1}{2} e^{-t} \sin t \\ &\quad + (-\frac{1}{2} e^{-t} \cos t) - \frac{5}{2} + \frac{5}{2} e^{-t} \cos t + \frac{1}{2} e^{-t} \sin t - 1 \\ \Rightarrow x(t) &= \frac{9}{2} e^{-t} \cos t + \frac{7}{2} e^{-t} \sin t - \frac{7}{2} \end{aligned}$$

سوال 41. هکڻ اڙد سٽڪه ۽ مڊل ت زير راصل کڻه.

$$a) \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 5x - 2y = t \\ \frac{dy}{dt} + 2x + y = 0 \\ x(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} D^2x + 3x - 2y = 0 \\ D^2x + D^2y - 3x + 5y = 0 \\ x(0) = y(0) = 0 \\ Dx(0) = 3, Dy(0) = 2 \end{cases}$$

107

ل. ۱۰۰ با تبدیل لاپلاس گرفتن می‌توانیم. $\mathcal{L}\{x\} = X$, $\mathcal{L}\{y\} = Y$ می‌توانیم

$$\begin{cases} sX - x(0) + 5X - 2Y = \frac{1}{s^2} \\ sY - y(0) + 2X + Y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s+5)X - 2Y = \frac{1}{s^2} \\ 2X + (s+1)Y = 0 \end{cases}$$

بگیریم؟ حل آن نسبت به X و Y می‌توانیم

$$X = \frac{s+1}{s^2(s+3)^2}, \quad Y = -\frac{2}{s^2(s+3)^2}$$

و از آنجا

$$X = \frac{1}{27s} + \frac{1}{9s^2} - \frac{1}{27(s+3)} - \frac{2}{9(s+3)^2}$$

$$Y = \frac{4}{27s} - \frac{2}{9s^2} - \frac{4}{27(s+3)} - \frac{2}{9(s+3)^2}$$

با تبدیل لاپلاس گرفتن می‌توانیم

$$x = \frac{1}{27} + \frac{t}{9} - \frac{1}{27}e^{-3t} - \frac{2}{9}te^{-3t}$$

$$y = \frac{4}{27} - \frac{2t}{9} - \frac{4}{27}e^{-3t} - \frac{2}{9}te^{-3t}$$

$$\begin{cases} s^2X - sx(0) - x'(0) + 3X - 2Y = 0 \\ s^2X - sx(0) - x'(0) + s^2Y - sy(0) - y'(0) - 3X + 5Y = 0 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} (s^2+3)X - 2Y = 3 \\ (s^2-3)X + (s^2+5)Y = 5 \end{cases}$$

$$X = \frac{9s^2+25}{(s^2+1)(s^2+9)}, \quad Y = \frac{2s^2+24}{(s^2+1)(s^2+9)}$$

و از آنجا

$$\begin{cases} X = \frac{11}{4} \times \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{s^2+9} \\ Y = \frac{11}{4} \times \frac{1}{s^2+1} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{s^2+9} \end{cases}$$

EXAMPLE I

Solve

$$2x' + y' - y = t$$

$$x' + y' = t^2 \quad (1)$$

subject to $x(0) = 1, y(0) = 0$.

Solution If $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ and $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, then after transforming each equation, we obtain

$$2[sX(s) - x(0)] + sY(s) - y(0) - Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$sX(s) - x(0) + sY(s) - y(0) = \frac{2}{s^3}$$

or

$$2sX(s) + (s-1)Y(s) = 2 + \frac{1}{s^2} \quad (2)$$

$$sX(s) + sY(s) = 1 + \frac{2}{s^3}$$

Multiplying the second equation of (2) by 2 and subtracting yield

$$(-s-1)Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{4}{s^3}$$

$$Y(s) = \frac{4-s}{s^3(s+1)} \quad (3)$$

Now by partial fractions

$$\frac{4-s}{s^3(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s+1}$$

so that

$$4-s = As^2(s+1) + Bs(s+1) + C(s+1) + Ds^3.$$

Setting $s = 0$ and $s = -1$ in the last line gives $C = 4$ and $D = -5$, respectively, whereas equating the coefficients of s^3 and s^2 on each side of the equality yields

$$A + D = 0 \quad \text{and} \quad A + B = 0.$$

It follows that $A = 5$, $B = -5$. Thus (3) becomes

$$Y(s) = \frac{5}{s} - \frac{5}{s^2} + \frac{4}{s^3} - \frac{5}{s+1}$$

and so

$$\begin{aligned} y(t) &= 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\} - 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \\ &= 5 - 5t + 2t^2 - 5e^{-t}. \end{aligned}$$

By the second equation of (2),

$$X(s) = \frac{Y(s)}{s} + \frac{1}{s} + \frac{2}{s^4},$$

from which it follows that

$$\begin{aligned} x(t) &= -\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{2}{3!} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\} \\ &= -4 + 5t - 2t^2 + \frac{1}{3}t^3 + 5e^{-t}. \end{aligned}$$

Hence we conclude that the solution of the given system (1) is

$$x(t) = -4 + 5t - 2t^2 + \frac{1}{3}t^3 + 5e^{-t}$$

$$y(t) = 5 - 5t + 2t^2 - 5e^{-t}.$$

CS Scanned with CamScanner

(4)

Application