

مثال: تابعی را پیدا کنید که لاپلاس آن برابر است با

$$F(s) = \frac{e^{-s}}{s}$$

$$c=1 \quad f(t) = u_1(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

6. $\mathcal{L}[u_c(t)f(t-c)] = ? \Rightarrow u_c(t)f(t-c) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < c \\ f(t-c) & t \geq c \end{cases}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u_c(t)f(t-c)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} u_c(t) f(t-c) dt \\ &= \int_0^c e^{-st} \times 0 \times f(t-c) dt + \int_c^{\infty} e^{-st} f(t-c) dt \\ &\quad u = t - c \\ &= \int_0^{\infty} e^{-s(u+c)} f(u) du \\ &= e^{-cs} \int_0^{\infty} e^{-su} f(u) du = e^{-cs} F(s) \end{aligned}$$

مثال: فرض کنید که

$$h(t) = \begin{cases} \sin t & 0 < t < 2\pi \\ e^{\cos t} + \sin t & t \geq 2\pi \end{cases}$$

فرض کنید که $u_{2\pi}(t)$ را استفاده کرده کرد

$$h(t) = \sin t + u_{2\pi}(t) e^{\cos t}$$

دو مورد وجودش که داریم، یکی $\sin t$ که برای $t < 2\pi$ و دیگری $e^{\cos t} + \sin t$ که برای $t \geq 2\pi$

$$h(t) = \begin{cases} \sin t & 0 < t < 2\pi \\ e^{\cos t} + \sin t & t \geq 2\pi \end{cases} \quad h(t) = \sin t + u_{2\pi}(t) (e^{\cos t} - \sin t)$$

$$h(t) = \sin t + u_{2\pi}(t) (e^{\cos(t-2\pi)} - \sin(t-2\pi))$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-2\pi s} \frac{s}{s^2+1} - e^{-2\pi s} \frac{1}{s^2+1}$$

7. $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - \{s^{n-1}f(0) + s^{n-2}f'(0) + \dots + f^{(n-1)}(0)\}$

لبنی با استفاده از استقرای.

تبدیل لاپلاس تابعی را به دست آورید.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 1 \\ t^2 & t \geq 1 \end{cases}$$

حل: $f(t) = t^2 u_1(t)$, $g(t) = t^2$

$$a_0 = g(1) = 1, \quad a_1 = \frac{g'(1)}{1!} \quad g'(t) = 2t \quad a_2 = \frac{2}{2} = 1, \quad a_3 = 0$$

$$t^2 = g(t) = 1 + 2(t-1) + (t-1)^2$$

$$f(t) = [1 + 2(t-1) + (t-1)^2] u_1(t)$$

$$f(t) = u_1(t) + 2(t-1)u_1(t) + (t-1)^2 u_1(t)$$

$$F(s) = \frac{e^{-s}}{s} + \frac{2}{s^2} e^{-s} + \frac{2}{s^3} e^{-s}$$

$$(\mathcal{L}[f(t-c)u_c(t)]) = e^{-cs} F(s) \quad \uparrow$$

(حال مکتوب را بدین آوری

ببین از این رابطه استفاده کنیم

مثال: جوابی از معادله دیفرانسیل داده شده را که در شرایط داده شده صدق می کند، بدین آورید

$$y'' + 4y = h(t)$$

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \pi \leq t < 2\pi \\ 0 & \text{در جاهای دیگر} \end{cases} \quad \begin{matrix} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{matrix}$$

حل:

$h(t)$ پیوسته نیست از روش تغییر متغیر و روش ضرایب نامعین و ... نمی توان حل نمود.

$$\mathcal{L}[y''] + 4\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[h(t)]$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - \{s^{n-1}f(0) + s^{n-2}f'(0) + \dots + f^{(n-1)}(0)\}$$

$$\mathcal{L}[y''] = s^2 Y(s) - \{s y(0) + y'(0)\} = s^2 Y(s) - s$$

$$h(t) = u_{\pi}(t) - u_{2\pi}(t) \quad H(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-2\pi s}}{s}$$

$$s^2 Y(s) - s + 4Y(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-2\pi s}}{s}$$

$$Y(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+4)} - \frac{e^{-2\pi s}}{s(s^2+4)} + \frac{s}{s^2+4}, \quad \frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$$

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{4}, \quad C = 0$$

$$Y(s) = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4} \right] e^{-\pi s} - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4} \right] e^{-2\pi s} + \frac{s}{s^2+4}$$

$$\mathcal{L}[u_c(t)f(t-c)] = F(s)e^{-cs}$$

$$y(t) = \frac{1}{4} u_{\pi}(t) - \frac{1}{4} e_{012}(t-\pi) - u_{\pi}(t) - \frac{1}{4} u_{2\pi}(t) + \frac{1}{4} e_{012}(t-2\pi) u_{2\pi}(t) + e_{012}t$$

$$y(t) = \begin{cases} e_{012}t & 0 < t < \pi \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4} e_{012}t + e_{012}t & \pi < t < 2\pi \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4} e_{012}t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} e_{012}t + e_{012}t & t > 2\pi \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} e_{012}t & 0 < t < \pi \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4} e_{012}t & \pi < t < 2\pi \\ e_{012}t & t > 2\pi \end{cases}$$

تمرین: تبدیل لاپلاس هر يك از توابع زیر را پیدا کنید

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 2 \\ t^2 - 2t + 2, & t \geq 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ (t-2)^2 & t \geq 1 \end{cases}$$

$$F(s) = \frac{3!}{(s-2)^4}$$

$$F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2 + s - 2}, \quad F(s) = \frac{2e^{-2s}}{s^2 - 4}$$

- معادله بسل از رتبه 2 صفر عبارت است از: $x^2 y'' + x y' + x^2 y = 0$ جوابی از این

معادله را که در شرط $y(0) = 1$ صدق می کند را پیدا کنید. داریم $x y'' + y' + x y = 0$

$$\mathcal{L}[x y''] = -\frac{d}{ds} [s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0)], \quad \mathcal{L}[x y'] = -\frac{d}{ds} (s Y(s) - y(0))$$

$$-\frac{d}{ds} (s^2 Y(s) - s) + (s Y(s) - y(0)) - \frac{d}{ds} Y(s) = 0$$

نتیجه: $Y(s) = \frac{-s}{s^2 + 1}$ معادله را حل می کنیم

$$\frac{dY}{Y} = -\frac{s}{s^2 + 1} ds \Rightarrow \ln Y(s) = -\frac{1}{2} \ln(s^2 + 1) + \ln C$$

$$Y(s) = \frac{C}{\sqrt{s^2 + 1}} = C [s^2 + 1]^{-1/2}$$

CS Scanned with CamScanner

$$y = (1+x)^\alpha, \quad y' = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \Rightarrow (1+x)y' = \alpha y, \quad y(0) = 1$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+1)}{m!} x^m$$

فرض کنیم: اگر $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ و تبدیل لا پلاس $\frac{f(t)}{t}$ وجود داشته باشد، باید ثابت کنیم که
 $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u) du$

$G(s) = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \mathcal{L}[g(t)]$, $g(t) = \frac{f(t)}{t} \Rightarrow t g(t) = f(t)$
 حال از طرفین لا پلاس می گیریم داریم:

$$\mathcal{L}[t g(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \Rightarrow -\frac{d}{ds} G(s) = F(s)$$

$$\Rightarrow \int -d G(s) = \int F(s) ds \Rightarrow G(s) = -\int F(s) ds \rightarrow G(s) = -\int_s^\infty F(u) du$$

در اینجا $G(s) \rightarrow 0$ وقتی $s \rightarrow \infty$ بین منظر قرار می دهیم $a = \infty$ از این رو
 $G(s) = -\int_a^s F(u) du \Rightarrow G(s) = \int_s^\infty F(u) du$
 $a \rightarrow \infty$

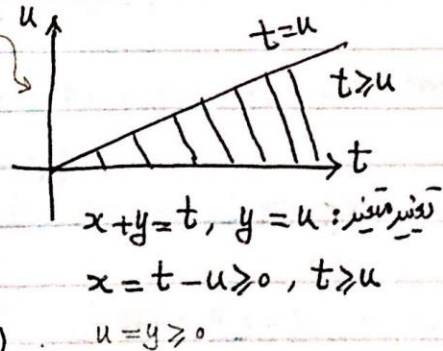
مثال: $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ را پیدا کنید
 تذکر: باید به فرضیه لاپلاس توجه کنید
 $G(s) = \int_s^\infty F(u) du = \int_0^\infty e^{-st} \frac{f(t)}{t} dt \Rightarrow \int_0^\infty F(u) du = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt$
 پس داریم: $g(t) = \frac{f(t)}{t}$
 حل مثال:

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^\infty \frac{ds}{s^2+1} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\tan^{-1} s \right]_0^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \tan^{-1} T - \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$$

نکته: فرض کنیم که:
 $H(s) = F(s) \cdot G(s)$
 $\mathcal{L}^{-1}[F] = f(t)$, $\mathcal{L}^{-1}[G] = g(t)$

$$H(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \cdot \int_0^\infty e^{-sy} g(y) dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(x+y)} f(x) g(y) dx dy$$

$x+y=t$, $y=u$
 $= \int_0^\infty \left[\int_0^t e^{-st} f(t-u) g(u) du \right] dt$
 $= \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t f(t-u) g(u) du \right] dt$



$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u) g(u) du = (g * f)(t)$$

نکته: از این معکوس کرانج

با استفاده از Convolution در صورتیکه از راههای قبل نتوان میسر کرد.
مثال با استفاده از Convolution معکوس $H(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ را بدست آورید.

راه اول:
 $H(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$, $h(t) = 1 - e^{-t}$ $F(s) = \frac{1}{s}$, $G(s) = \frac{1}{s+1}$

راه دوم:
 $f(t) = 1$, $g(t) = e^{-t}$

$h(t) = f * g(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)du = \int_0^t 1 \cdot e^{-u} du = -e^{-u} \Big|_0^t = -e^{-t} + 1$
411.5-6

$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0)$ $\mathcal{L}[f'] = sF(s) - f(0)$

$0 = \lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}[f'] = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) - f(0)$

از این معکوس تابع زیر را بیابید.
 $F(s) = \frac{4-s}{s(s^2+s-2)} = \frac{4-s}{s(s+2)(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s-1}$

$A(s+2)(s-1) + B s(s-1) + C s(s+2) = 4-s$

$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+2C=-1 \\ -2A=4 \end{cases} \quad \begin{matrix} A=-2 \\ C=1 \\ B=1 \end{matrix} \quad f(t) = -2 + e^{-2t} + e^t$

مثال، مساله مقدار اولیه $x''(t) + 4x(t) = 5e^{-t}$, $t \geq 0$, $x(0)=2$, $x'(0)=3$ را حل کنید.

مثال. مساله $\begin{cases} (D+3)x + 5y = 2 \\ -x + (D-1)y = 1 \end{cases}$ را حل کنید. $x(0)=1$, $y(0)=0$