

gamma function : $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \cdot e^{-t} dt, \quad x > 0$

$\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $x > 0$: د ورتگی سے تابع گاما :

$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$ ، با اسکرال کری

$$\Gamma(x+1) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T t^x e^{-t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ [-t^x e^{-t}]_0^T + x \int_0^T t^{x-1} e^{-t} dt \right\}$$

$$= x \Gamma(x)$$

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2 \cdot 1$$

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}, \quad x > 0$$

تقریباً $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ کے لئے

تعريف تابع Π كيان متغير مفتوح x :

Define : $\Gamma(x) := \frac{\Gamma(x+1)}{x}$, $(-1 < x < 0$

$$\Gamma(x+1) = \frac{\Gamma(x+2)}{x+1}, \quad -2 < x < -1$$

$$\therefore \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)}, \quad -1 < x, \quad x$$

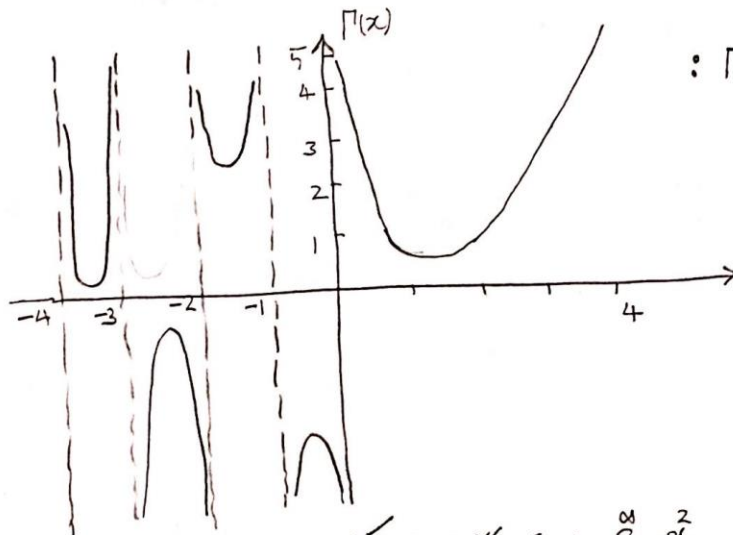
CS Scanned with CamScanner

به همین روش، به ازای هر عدد صحیح k و $x > 0$ داریم

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+k)}{x(x+1)(x+2)\dots(x+k-1)}$$

با به کار بردن این دستور، می توان $\Gamma(x)$ را برای هر $-k < x < 0$ و $-k+1, -k, \dots, -2, -1, 0 \neq x$ تقریب کرد. پس فرمول $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ به ازای هر مقدار x به از $0, -1, -2, \dots$ به $x=0$ برقرار است. سرانجام $\Gamma(x)$ وقتی که x به صفر یا به یک عدد صحیح منفی میل می کند، به بی نهایت می رسد.

نمودار $\Gamma(x)$:



تمرین ۱۰. $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ را با تابع گاما بیان کنید.

(2) $\Gamma(-\frac{1}{2})$ ، $\Gamma(-\frac{3}{2})$ و $\Gamma(\frac{3}{2})$ را بدست آورید. سپس نتایج برای $!(-\frac{1}{2})$ ، $!(-\frac{3}{2})$ و $!(\frac{3}{2})$ ارائه دهید.

1-394 (خ) ، $t \leq 2$ کم دارد.

1-394 (ج) : مبدل لاپلاس تابع زیر را پیدا کنید

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

حل:

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^1 e^{-st} dt + \int_1^{\infty} e^{-st} \cdot 0 \cdot dt = \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^1$$

$$= \frac{e^{-s}}{-s} + \frac{1}{s}$$

-5

$$\mathcal{L}[t^{-1/2}] = \int_0^{\infty} e^{-st} t^{-1/2} dt = \int_0^{\infty} e^{-u} \frac{u^{-1/2}}{s^{-1/2}} \cdot \frac{du}{s}$$

$s > 0, st = u \Rightarrow s dt = du \Rightarrow dt = \frac{du}{s}$

$$= \frac{1}{\sqrt{s}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{-1/2} du \quad u = v^2, du = 2v dv$$

$$= \frac{1}{\sqrt{s}} \int_0^{\infty} e^{-v^2} u^{-1/2} \cdot 2u^{1/2} dv = \frac{2}{\sqrt{s}} \int_0^{\infty} e^{-v^2} dv$$

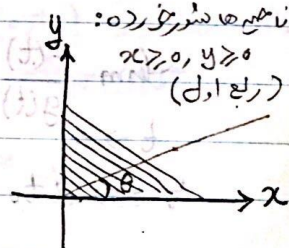
$$= \frac{2}{\sqrt{s}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx, \quad I^2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{\pi/2} r e^{-r^2} d\theta dr = \frac{\pi}{4} \quad I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

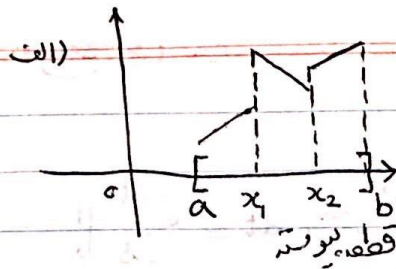


شرط وجودی تبدیلی لاپلاس:

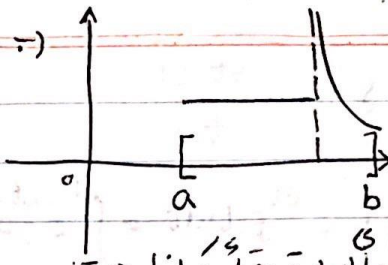
تربیتی: تابع f را بر $[a, b]$ قطعه ای پیوسته می گوئیم اگر تابع f بر $[a, b]$ به استثنای یک مقدار متناهی نقاط مثل $x_1, \dots, x_N$ پیوسته باشد و در نقاطی که تابع پیوسته نیست محدود و محدود باشد.

تابع وجود داشته باشد. یعنی $\lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x)$ موجودند.

الف)



قطعه ییوسته



شکل: قطعه ییوسته
بسته

نتیجه: توابع قطعه ییوسته همگرا هستند.

قضیه: گیریم $|f(t)| \leq g(t)$ و $\int_a^b g(t) dt$ همگرا باشد، آنگاه $\int_a^b f(t) dt$ مطلقاً همگراست.

تعریف: $f(t) = o[g(t)]$ می گویند $f(t)$ از مرتبه تابع $g(t)$ است اگر اعداد $M > 0$ و t_0 وجود داشته باشند بطوریکه $|f(t)| \leq M g(t)$ $t > t_0$ (سوال: $M > 0$ و قدر مطلق هم داریم پس چرا $g(t)$ مثبت است؟)

1) $\sin t = o[1]$ $|\sin t| \leq 1$ $M=1$ و t_0 را بگیریم
برای هر t این رابطه برقرار است، $M=1$

2) $e^t \sin t$ $|e^t \sin t| \leq e^t$ $M=1$

3) $e^t \sin t$ $M=5$

1- ص 398: تمرین

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = L \Rightarrow f(t) = o[g(t)]$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists t_0 \quad t > t_0 \Rightarrow \left| \frac{f(t)}{g(t)} - L \right| < \epsilon$$

$$\left| \frac{f(t)}{g(t)} - L \right| \leq \left| \frac{f(t)}{g(t)} - 1 \right| \leq \left| \frac{f(t)}{g(t)} - L \right| < \epsilon$$

$$(|a| - |b|) \leq |a - b|$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(t)}{g(t)} \right| < \epsilon + |L| \Rightarrow |f(t)| < (\epsilon + |L|)(|g(t)|) \quad t > t_0$$

$$\therefore f(t) = o[g(t)]$$

تعریف: تابع $f(t) = o[e^{at}]$ است اگر اعداد $M > 0$, t_0 وجود داشته باشند بطوریکه
 $|f(t)| \leq M e^{at}$

مسئله: نشان دهید که تابع $t^n = o[e^{at}]$ برای هر $a > 0$.
 حل: طبق تعریف باید ثابت کنیم: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^n}{e^{at}} = 0$.
 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^n}{e^{at}} \xrightarrow{\text{Hop}} - \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \dots}{e^{at}} = 0$ (برای هر n عدد صحیح مثبت)

مثال: $e^{at} \ln bt = o(e^{at})$, $e^{at} \sin bt = o(e^{at})$.
 از $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$ می‌تواند از تعریف معنی $|e^{at} \ln bt| \leq e^{at}$, $|e^{at} \sin bt| \leq e^{at}$ را بدست آورد.
 $t^n e^{at} \ln bt = o(e^{(a+\epsilon)t})$ مثال: $t \rightarrow \infty$
 $t^n e^{at} \sin bt = o(e^{(a+\epsilon)t})$

قضیه: فرض می‌کنیم تابع f بر هر بازه‌ای بصورت $[0, T]$ قطعی پیوسته باشند، $f(t) = o[e^{at}]$ در اینصورت ادعا می‌کنیم که f وجود دارد.

نشان: از $f(t) = o[e^{at}]$ نتیجه می‌گیریم که $M_1 > 0$, t_0 وجود دارد بطوریکه

$$|f(t)| \leq M_1 e^{at} \quad t \geq t_0$$

از طرفی بنابر فرض قضیه میدانیم که تابع f بر $[0, t_0]$ قطعی پیوسته است. بنابراین $M_2 > 0$

$$|f(t)| \leq M_2 \quad \forall t \in [0, t_0] \quad \text{وجود دارد بطوریکه}$$

$$\left| \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \right| \leq \int_0^\infty e^{-st} |f(t)| dt = \int_0^{t_0} e^{-st} |f(t)| dt + \int_{t_0}^\infty e^{-st} |f(t)| dt$$

$$+ \int_{t_0}^\infty e^{-st} |f(t)| dt \leq M_2 \int_0^{t_0} e^{-st} dt + M_1 \int_{t_0}^\infty e^{-st} e^{at} dt$$

$$= \frac{M_2}{-s} e^{-st} \Big|_0^{t_0} + M_1 \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{t_0}^T e^{-(s-a)t} dt$$

$$= \frac{M_2}{-s} e^{-st_0} + \frac{M_2}{s} + M_1 \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right]_{t_0}^T$$

$$= \frac{M_2}{-s} e^{-st_0} + \frac{M_2}{s} + M_1 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{-(s-a)T}}{-(s-a)} + M_1 \frac{e^{-(s-a)t_0}}{s-a}$$

- در صورتی که $s > a$

$$= -y(0) + s^{-1} \{0\} - s^{-1} \{0\}$$

$$\boxed{L\{y'\} = -y(0) + sL\{y\}}$$

$$L\{y''\} = -y'(0) + sL\{y'\} = -y'(0) - sy(0) + s^2L\{y\}$$

یوں کر عمل را الیہ (هم طریقہ):

$$L\{y^{(n)}\} = -y^{(n-1)}(0) - sy^{(n-2)}(0) - \dots - s^{n-1}y(0) + s^n L\{y\}$$

از این مطلب استفاده می کنیم و معادله (نیز انسیل خطی را عمل می کنیم):

$$\begin{cases} y' + y = e^{-\nu x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$L\{y' + y\} = L\{e^{-\nu x}\} = L\{y'\} + L\{y\}$$

$$\Rightarrow -y(0) + sL(y) + L(y) = \frac{1}{s+\nu}$$

$$(s+1)L(y) = \frac{1}{s+\nu} + 1 \Rightarrow L(y) = \frac{1}{(s+\nu)(s+1)} + \frac{1}{s+1}$$

$$\frac{1}{(s+\nu)(s+1)} = \frac{A}{s+\nu} + \frac{B}{s+1} \Rightarrow A=1, B=-1$$

$$L\{y\} = \frac{-1}{s+\nu} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+1} = \frac{\nu}{s+1} - \frac{1}{s+\nu}$$

$$y = \nu L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{s+\nu}\right) = \nu e^{-x} - e^{-\nu x}$$

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow L(y'') + L(y) = 0$$

$$\Rightarrow -y'(0) - sy(0) + s^2 L(y) + L(y) = 0$$

$$-s + (s^2+1)L(y) = 0 \Rightarrow L(y) = \frac{s}{s^2+1} \Rightarrow y = L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{y = \cos x}$$

$$\begin{cases} y'' + y = e^{\nu x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow L(y'') + L(y) = \frac{1}{s-\nu}$$

$$\Rightarrow -y'(0) - sy(0) + s^2 L(y) + L(y) = \frac{1}{s-\nu}$$

$$\Rightarrow (s^2+1)L(y) = \frac{1}{s-\nu} + s \Rightarrow L(y) = \frac{1}{(s-\nu)(s^2+1)} + \frac{s}{s^2+1}$$

$$\frac{1}{(s^2+1)(s-\nu)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s-\nu} \Rightarrow A = -\frac{1}{\omega}, B = -\frac{\nu}{\omega}, C = \frac{1}{\omega}$$

$$L(y) = \frac{s}{s^2+1} - \frac{s+\nu}{\omega(s^2+1)} + \frac{1}{\omega(s-\nu)}$$

$$= \frac{k}{\omega} \cdot \frac{s}{s^p+1} + \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{s-p} - \frac{p}{\omega} \cdot \frac{1}{s^p+1}$$

$$y = \frac{k}{\omega} \cos \alpha + \frac{1}{\omega} e^{p\alpha} - \frac{p}{\omega} \sin \alpha$$

مثال: مطلوب است حل معادله دیفرانسیل $y'' + y' + \omega y = 0$ با شرایط اولیه $y(0)=1$ و $y'(0)=0$

$$L(y'') + L(y') + \omega L(y) = 0$$

$$\Rightarrow -y'(0) - sy(0) + s^2 L(y) - y(0) + sL(y) + \omega L(y) = 0$$

$$L(y) = \frac{s+1}{s^2+s+\omega} = \frac{1+s}{(s+\frac{1}{2})^2 + \frac{11}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2 + \frac{11}{4}} + \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2 + \frac{11}{4}}$$

$\underbrace{\frac{1}{2}}_{e^{-\frac{1}{2}\alpha}} \cos \frac{\sqrt{11}}{2} \alpha$

$$\frac{\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2 + \frac{11}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{\sqrt{11}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2 + \frac{11}{4}} \times \frac{2}{\sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{11}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2 + \frac{11}{4}}$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}\alpha} \cos \frac{\sqrt{11}}{2} \alpha + \frac{1}{\sqrt{11}} e^{-\frac{1}{2}\alpha} \sin \frac{\sqrt{11}}{2} \alpha$$

Scanned with CamScanner

خاص تبدیل لاپلاس

$$\checkmark 1. \mathcal{L}[c_1 f + c_2 g] = c_1 \mathcal{L}[f] + c_2 \mathcal{L}[g] = c_1 F(s) + c_2 G(s)$$

$$\checkmark 2. h(t) = e^{ct} f(t) \Rightarrow H(s) = F(s-c)$$

$$\checkmark \mathcal{L}[e^{ct} \sinh 3t] = \frac{3}{(s+1)^2 - 9}$$

مثال: لاپلاس تابع معکوس را بیابید

$$\mathcal{L}[1] = \mathcal{L}[e^{ct} \cdot \tilde{f}(t)] = F(s-c) = \frac{1}{(s-1)+1} = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[\sinh 3t] = \frac{3}{s^2 - 9}$$

فرد و از مرتبه نامی و فعلی پیوسته در انصورت $\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[g]$ در نقطه که هر دو تابع پیوسته هستند و نیز فقط در n نقطه غیر n خواهند بود n متناهی است.

مثال: معکوس تابع زیر را بیابید

$$F(s) = \frac{s-1}{s^2 - 2s + 10} \Rightarrow F(s) = \frac{s-1}{(s-1)^2 + 9}$$

حل: لاپلاس داریم:

$$f(t) = e^{ct} \cos 3t$$

با توجه به (2) را اثبات می کنیم.

$$\checkmark H(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{ct} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(s-c)t} f(t) dt = F(s-c)$$

$$s-c > a \Rightarrow s > c+a$$

$$\checkmark 3. k(t) = \int_0^t f(u) du$$

(از مرتبه نامی است طبق قضیه ای که در سیستم پس لاپلاس وجود دارد و مشتق می گیریم)

$$k'(t) = f(t)$$

$$\mathcal{L}[k'(t)] = F(s) \Rightarrow$$

$$s k(s) - k(0) = F(s)$$

$$k(0) = 0 \Rightarrow k(s) = \frac{F(s)}{s} \quad s > \max(a, 0)$$

$$m(t) = \int_0^t e^{u^2} du$$

$$M(s) = \frac{\mathcal{L}[e^{u^2}]}{s} = \frac{\mathcal{L}\left(\frac{1+e^{u^2}}{2}\right)}{s} = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}(1+e^{u^2})}{s}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{L}[1] + \mathcal{L}[e^{u^2}]}{s} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + 4} \right)$$

$$4. \mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} \quad (*) \quad \checkmark$$

$$\mathcal{L}[t^{-1/2}] = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}, \quad \mathcal{L}[t^{1/2}] = ?$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^{1/2}] &= \mathcal{L}[t t^{-1/2}] = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} s^{-3/2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2s\sqrt{s}} \end{aligned}$$

$$- \mathcal{L}[t^n] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \left(\frac{1}{s} \right) \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s} \right) = -\frac{1}{s^2} \quad : \text{مثال}$$

$$\frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{s} \right) = \frac{d}{ds} \left(-\frac{1}{s^2} \right) = \frac{2}{s^3}, \quad \frac{d^3}{ds^3} \left(\frac{1}{s} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{2}{s^3} \right) = -\frac{2 \cdot 3}{s^4}$$

$$\frac{d^n}{ds^n} \left(\frac{1}{s} \right) = (-1)^n \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \therefore \mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

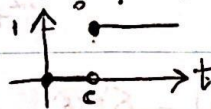
$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad \frac{dF(s)}{ds} = -\int_0^{\infty} e^{-st} \cdot t \cdot f(t) dt = -P_1(s) \quad : \text{مثال (*)}$$

$$\frac{d^2 F(s)}{ds^2} = -\int_0^{\infty} e^{-st} \cdot t^2 f(t) dt = P_2(s)$$

$$\frac{d^n F(s)}{ds^n} = (-1)^n P_n(s)$$

نمونه برای تابع غیر لیپس: تابع لیپس واحد را در نظر بگیرید:

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < c \\ 1 & t \geq c \end{cases}$$



$$\mathcal{L}[u_c(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} u_c(t) dt = \int_0^c e^{-st} \cdot 0 dt + \int_c^{\infty} e^{-st} \cdot 1 dt$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_c^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-sT}}{-s} + \frac{e^{-cs}}{s} \right] = \frac{e^{-cs}}{s} \quad s > 0$$