

فصل نهم: تبدیل لاپلاس
 فرض می‌کنیم تابع $f(t)$ برای $t \geq 0$ تعریف شده باشد. لاپلاس تابع f را بدینا $\mathcal{L}[f]$ می‌نامیم. به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s)$$

تغییر s : پارامتر
 t : متغیر

طریقه نامیدن لاپلاس تابع: $\mathcal{L}[g](s) = G(s)$, $\mathcal{L}[h](u) = H(s)$
 برای لاپلاس تابع $\mathcal{L}[e^{at}]$ رابطه زیر را داریم. ($a \in \mathbb{R}$)

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{-t(s-a)} dt$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-(s-a)t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a} \right]_0^T$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{e^{-(s-a)T}}{s-a} + \frac{1}{s-a}$$

با این شرایط و بدین ترتیب داریم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-bt} = \begin{cases} 0 & b < 0 \\ \infty & b \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}, \quad s > 0$$

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}, \quad s > a$$

$$\mathcal{L}[e^{-2t}] = \frac{1}{2+s}$$

دو: $\mathcal{L}[\sin at]$ را بیابیم:

$$\mathcal{L}[\sin at] = \int_0^{\infty} e^{-st} \sin at dt$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} \sin at dt$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ e^{-st} \frac{\sin at}{a} \Big|_0^T + \frac{s}{a} \int_0^T e^{-st} \sin at dt \right\}$$

$$= 0 + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{s}{a} \int_0^T \frac{e^{-st}}{u_1} \frac{\sin at}{dv_1} dt \quad s > 0$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{s}{a} \times \frac{1}{a} (-e^{-st} \cos at) \Big|_0^T - \frac{s^2}{a^2} \int_0^T e^{-st} \cos at dt \right\}$$

$$= \frac{s}{a^2} - \frac{s^2}{a^2} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos at dt$$

$$\frac{s^2 + a^2}{a^2}$$

$$\left(1 + \frac{s^2}{a^2}\right) \int_0^{\infty} e^{-st} \cos at dt = \frac{s}{a^2} \Rightarrow \mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$$

مربع، $\mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2}$ جواب: $\mathcal{L}[\cos at] = ?$

قضیه: فرض می‌کنیم $(s > s_0) \mathcal{L}[f] = F(s)$, $(s > s_1) \mathcal{L}[g] = G(s)$ در

انصورتها $c_1 F(s) + c_2 G(s) = \mathcal{L}[c_1 f + c_2 g] = c_1 \mathcal{L}[f] + c_2 \mathcal{L}[g]$
که همان نام برقراری داریم.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[c_1 f + c_2 g] &= \int_0^{\infty} e^{-st} (c_1 f(t) + c_2 g(t)) dt \\ &= c_1 \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt + c_2 \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt\end{aligned}$$

$$= c_1 F(s) + c_2 G(s) \quad s > \max(s_0, s_1)$$

مثال: $? = \mathcal{L}[\cosh at]$ حل:

$$\mathcal{L}(\cosh at) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{at}] + \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{-at}]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{s-a} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+a} \quad s > \max(a, -a)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2s}{s^2 - a^2} \right) = \frac{s}{s^2 - a^2} \quad s > |a|$$

پس $\mathcal{L}(\sinh at) = \frac{a}{s^2 - a^2}$, $\mathcal{L}(\cosh at) = \frac{s}{s^2 - a^2}$ $s > |a|$

- فرض کنیم f و f' برای $s > s_0$ تبدیل لاپلاس آن‌ها موجود است.
 در این صورت داریم:

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$$

که هان:

$$\mathcal{L}[f'](s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} f'(t) dt$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \underbrace{e^{-st}}_u \underbrace{f'(t)}_{dv} dt &= \left[e^{-st} f(t) \right]_0^T - \int_0^T -s e^{-st} f(t) dt \\ &= e^{-sT} f(T) - f(0) + s \int_0^T e^{-st} f(t) dt \end{aligned}$$

$$(1) \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} f'(t) dt = \left(\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-sT} f(T) \right) - f(0) + s \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

$\parallel$ $\parallel$ $\mathcal{L}[f](s)$

$$\mathcal{L}[f'](s)$$

چون لاپلاس f و f' برای $s > s_0$ موجود است پس
 موجود و مناسب است. فرض کنیم $s_1 > s_0$ دلخواه باشد.

$$\text{let: } s_0 < s_2 < s_1 \Rightarrow e^{-s_1 T} f(T) = e^{-(s_1 - s_2)T} \cdot e^{-s_2 T} f(T)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-s_1 T} f(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-(s_1 - s_2)T} \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-s_2 T} f(T) = 0 \times \text{عدد} = 0$$

$\parallel$ $\parallel$ $\underbrace{\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-s_2 T} f(T)}_{\text{چون } s_2 > s_0 \text{ این حد موجود و مناسب است طبق بالا}}$

$$\therefore \forall s_1 > s_0 \quad \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-s_1 T} f(T) = 0 \Rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-sT} f(T) = 0$$

$$\therefore \mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0) \quad (\because \text{by (1)})$$

2

تمرین -

1) جدول لاپلاس هر یک از کرباع زیر را بیا بید.

الف) $f(t) = t^2$ ب) $f(t) = 2t^2 - 3t + 4$ ج) $f(t) = 2\sin t + 3\cos t$

د) $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t \leq \pi \\ 0, & t > \pi \end{cases}$ (2)

2) تابعی را پیدا کنید که تبدیل لاپلاس آن تابع داده شده F باشد.

الف) $F(s) = \frac{1}{s+3}$ ب) $F(s) = \frac{s}{s^2+4}$ ج) $F(s) = \frac{3}{s+2} - \frac{2s}{s^2+1}$

3) اگر $f(t)$ دارای تبدیل لاپلاس بوده و $f(t+T) = f(t)$ (یعنی f تابعی متناوب با دوره تناوب T است) نشان دهید

$$L[f](s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

سوال: $\mathcal{L}[\sqrt{t}]$ را پیدا کنید. حل: دایره
 راهی: $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$ (از طرفی دیگر)
 $\mathcal{L}[\sqrt{t}] = \int_0^\infty \sqrt{t} e^{-st} dt$

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \cdot \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty r e^{-r^2} dr d\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

8-397: معادله دینفرانسیل را به شرایط اولیه زیر را به یک تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$x'(t) - 2x(t) = 2, \quad x(0) = 3$$

حل:
از طرفین لاپلاس می گیریم.

$$\mathcal{L}[x'(t)] - 2\mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[2]$$

$$sX(s) - x(0) - 2X(s) = \frac{2}{s}$$

$$(s-2)X(s) = \frac{2}{s} + 3 \Rightarrow X(s) = \frac{3s+2}{s(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2}$$

$$\begin{cases} A+B=3 \\ -2A=2 \end{cases} \quad A=-1, B=4$$

$$X(s) = -\frac{1}{s} + 4 \frac{1}{s-2} \xRightarrow{\text{لاپلاس معکوس}} x(t) = -1 + 4e^{+2t}$$

(امکان کنید)

