

## فصل ۴

# حل معادلات دیفرانسیل به کمک سریها

۱ چنانچه جواب یک معادله دیفرانسیل به صورت صریح، ضمنی و یا پارامتری برحسب توابع مقدماتی ممکن نباشد، نظیر معادله آیرس  $y'' + xy = 0$  در روشهای در پیش گفته شده به کار نمی آیند. دو روش کلی برای این وضعیت وجود دارد: روش عددی و روش سریها. در روش عددی، جواب مساله به طور تقریبی با تقریب مناسب به دست می آید. موضوع این فصل، روش دوم یعنی روش سریها است. برای پرداختن به این بحث نیاز به آشنایی با سریهای تیلور می باشد.

### بخش ۱.۴ سری توان

۱.۱.۴. تعریف سری توان عبارتی است به شکل:

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots,$$

که  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  اعداد ثابتند و ضرایب سری نامیده می شوند. معنی دقیق سری بالا چنین است:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n\}.$$

سری توان بالا را به صورت خلاصه با نماد  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x - x_0)^i$  نیز نشان می دهند.

که صورتی می گوئیم سری توان همگرا در  $x = x_1$  است که اگر در آن به جای  $x$  از  $x_1$  استفاده شود، حد دنباله حاصل موجود باشد.

۲.۱.۴. قضیه فرض  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  یک سری توان است. عدد  $R \in [0, +\infty]$  با تعریف:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad \text{یا} \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \equiv \sqrt[n]{|s_{n+1}|}, \quad (1.4)$$

را شعاع همگرایی سری می نامیم. در این صورت

۱ — آخرین بروز رسانی: ۱۴ فروردین ۱۳۹۱ — تالیف: مهدی نجفی خواه، دانشیار ریاضی دانشگاه علم و صنعت ایران. هرگونه انتقاد و یا پیشنهادی را با نویسنده به آدرس [m\\_nadjafikhah@iust.ac.ir](mailto:m_nadjafikhah@iust.ac.ir) در میان بگذارید. این کتاب در دست تهیه است و احتمالاً در حال تغییر. لطفاً آخرین نسخه آن را تهیه کنید: [http://webpages.iust.ac.ir/m\\_nadjafikhah/Courses/ODE/Fa4.pdf](http://webpages.iust.ac.ir/m_nadjafikhah/Courses/ODE/Fa4.pdf)

الف) اگر  $|x_1 - x_0| < R$ ، آنگاه سری به ازای  $x = x_1$  همگرای مطلق است. به این معنی که سری عددی  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x_1 - x_0)|$  همگرا است.

ب) اگر  $|x_1 - x_0| > R$ ، آنگاه سری به ازای  $x = x_0$  واگرا است.

**۳.۱.۴. تعریف** مجموعه همه  $x$  هایی که سری  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  به ازای آن همگرا است را دامنه همگرایی سری می نامند و با نماد  $DC$  نشان می دهند. بنا به قضیه ۲-۱-۴ داریم:

$$\boxed{(-R, R) \subseteq DC \subseteq [-R, R].} \quad (۲.۴)$$

توجه شود که ممکن است  $R = 0$  یا  $R = \infty$  شود!

**۴.۱.۴. مثال** دامنه همگرایی سری  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$  را تعیین کنید.

**حل:** با توجه به ۲-۱-۴ داریم:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1/n}{1/(n+1)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

بنابراین  $DC \subseteq [-1, 1]$ ، باید نقاط  $x = 1$  و  $x = -1$  را جداگانه تحلیل کنیم:

$$x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{واگرا} \quad x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \ln 2$$

بنابراین  $DC = [-1, 1]$ .

**۵.۱.۴. مثال** دامنه همگرایی سری توان  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$  را تعیین کنید.

**حل:** با توجه به ۲-۱-۴ داریم:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1/n!}{1/(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

بنابراین  $DC = (-\infty, +\infty) = R$  و سری به ازای کلیه مقادیر همگرا است.

**۶.۱.۴. مثال** دامنه همگرایی سری توان  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (x-1)^n$  را تعیین کنید.

**حل:** با توجه به ۲-۱-۴ داریم:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \equiv \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \equiv \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n}{2^n} \right|} = 3.$$

بنابراین  $DC \subseteq [-1, 3]$ ، نقاط  $x = 3$ ،  $x = -1$  را جداگانه بررسی می کنیم:

$$x = -1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \quad \text{واگرا}$$

$$x = 3 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \quad \text{واگرا}$$

پس  $DC = (-1, 3)$ .

۷.۱.۴. قضیه فرض کنیم  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  به ازای  $x \in DC$  در این صورت

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

۸.۱.۴. تعریف فرض کنید  $y = f(x)$  در  $n = x_0$  بینهایت بار مشتق پذیر است. سری تیلور  $f$  در  $x_0$  را به صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

را سری تیلور  $f$  در  $x_0$  می‌نامیم. اگر  $x_0 = 0$ ، سری را مک لورن می‌نامیم. اگر این سری در یک همسایگی از  $x_0$  با خود تابع  $y = f(x)$  برابر باشد، می‌گوییم تابع  $y = f(x)$  در نقطه  $x = x_0$  تحلیلی است. بنابه ۵-۱-۴ حد مجموع یک سری توان در نقطه مرکزش تحلیلی است.

۹.۱.۴. مثال سریهای مک لورن زیر در ادامه به کار می‌آیند:

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, & DC &= \mathbb{R}, \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, & DC &= \mathbb{R}, \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, & DC &= \mathbb{R}, \\ \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4} + \cdots, & DC &= (-1, 1], \\ \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots, & DC &= (-1, 1). \end{aligned} \quad (۳.۴)$$

۱۰.۱.۴. مثال این طور نیست که هر تابع بینهایت بار مشتق پذیر، تحلیلی باشد. مثلاً:

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{اگر } x > 0 \\ 0 & \text{اگر } x \leq 0 \end{cases}$$

در نقطه  $x = 0$  بینهایت بار مشتق پذیر بوده و تمام مشتقات آن در  $x = 0$  صفر است. در حالی که  $f$  در حوالی  $x = 0$  صفر نیست، پس  $f$  در  $x = 0$  تحلیلی نیست.

۱۱.۱.۴. قضیه فرض کنید  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  یک سری توان با شعاع همگرایی  $R$  است. در این صورت

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d}{dx} (x-x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}, \\ 2) \quad \int_a^b \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \right) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b (x-x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1} \Big|_a^b. \end{aligned}$$

شعاع همگرایی هر دو سری حاصل بزرگتر یا مساوی شعاع همگرایی سری  $R$  است. به علاوه لازم است که  $[a, b] \subseteq DC$ .

**۱۲.۱.۴. قضیه.** شرط لازم و کافی برای اینکه  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$  این است که به ازای هر  $n$  ای  $a_n = b_n$ .

**۱۳.۱.۴. مثال.** معادله  $y' = y$  را به روشهای سریها حل کنید.

**حل:** فرض کنیم  $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  یک جواب معادله است. در این صورت  $y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$  و لذا:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

$$(a_1 - a_0) + (2a_2 - a_1)x + (3a_3 - a_2)x^2 + \dots = 0.$$

بنابراین، باید کلیه ضرایب صفر باشند:

$$a_1 - a_0 = 0, \implies a_1 = a_0,$$

$$2a_2 - a_1 = 0, \implies a_2 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2}a_0,$$

$$3a_3 - a_2 = 0, \implies a_3 = \frac{1}{3}a_2 = \frac{1}{6}a_1 = \frac{1}{6}a_0,$$

$$n a_n - a_{n-1} = 0, \implies a_n = \frac{1}{n} a_{n-1} = \frac{1}{n} \frac{1}{n-1} \dots \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{n!} a_0,$$

و در مجموع داریم:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0}{n!} x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = a_0 e^x,$$

که  $a_0 = y(0)$ . این جواب با جوابی که از حل معادله تفکیک پذیر  $y' = y$  نتیجه می‌گردد، یکی است.

**۱۴.۱.۴. مثال.** معادله  $y'' + y = 0$  را به روشهای سریها حل کنید.

**حل:** فرض کنیم  $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  جواب مساله است، در این صورت

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad y'' = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2},$$

و در نتیجه:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

$$(2a_2 + a_0) + (6a_3 + a_1)x + (12a_4 + a_2)x^2 + \dots \\ \dots + (n(n-1)a_n - a_{n-2})x^{n-2} + \dots = 0.$$

پس باید همه ضرایب صفر باشند:

$$2a_2 + a_0 = 0, \implies a_2 = -\frac{1}{2}a_0,$$

$$6a_3 + a_1 = 0, \implies a_3 = -\frac{1}{6}a_1,$$

⋮

$$n(n-1)a_n + a_{n-2} = 0, \implies a_n = -\frac{1}{n(n-1)} a_{n-2}.$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} y &= (a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \dots) + (a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \dots) \\ &= a_0\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \dots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \dots\right). \end{aligned}$$

پس جواب این معادله عبارتست از:

$$y = a_0 \cos t + a_1 \sin t.$$

**مثال ۱۵.۱.۴.** معادله  $y'' + xy' + y = 0$  را به روش سریها حل کنید.**حل:** فرض کنیم  $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$  یک جواب معادله است. در این صورت

$$y = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + xy = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

پس باید ضریب همه توانهای  $x$  صفر باشد.

$$2a_2 + a_0 = 0, \implies a_2 = -\frac{1}{2}a_0,$$

$$6a_3 + a_1 + a_1 = 0, \implies a_3 = -\frac{1}{3}a_1,$$

$$12a_4 + 2a_2 + a_2 = 0, \implies a_4 = -\frac{1}{3}a_2,$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n = 0, \implies a_{n+2} = -\frac{1}{n+2}a_n.$$

بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \dots + a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \dots \\ &= a_0\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \dots + \left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1}{4}\right)\dots\left(\frac{-1}{2n}\right)2x^{2n} + \dots\right) \\ &\quad + a_1\left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{15}x^5 - \dots + \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)\dots\left(-\frac{1}{2k+1}\right)x^{2k} + \dots\right) \\ &= a_0\left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{15}x^4 - \dots + \left(\frac{-1}{3}\right)\left(\frac{-1}{5}\right)\dots\left(\frac{-1}{2k+1}\right)x^{2k} + \dots\right) \\ &= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2 \times 4 \times \dots \times (2k)} x^{2k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3 \times 5 \times \dots \times (2k+1)} x^{2k+1}. \end{aligned}$$

**مثال ۱۶.۱.۴.** معادله  $(1-x^2)y'' - 6xy' - 4y = 0$  را بر بازه  $(-1, 1)$  حل کنید.**حل:** فرض کنیم  $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  یک جواب مساله است. در این صورت

$$(1-x^2) \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - 6x \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 6 \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n - 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

پس باید ضریب همه توانهای  $x$  صفر باشد:

$$\begin{aligned} 2a_2 - 4a_0 = 0, & \implies a_2 = 2a_0, \\ 6a_3 - 6a_1 - 4a_1 = 0, & \implies a_3 = \frac{5}{3}a_1, \\ 12a_4 - 2a_2 - 4a_2 = 0, & \implies a_4 = \frac{3}{2}a_2, \\ 20a_5 - 2a_3 - 18a_3 = 0, & \implies a_5 = \frac{7}{5}a_3, \\ & \vdots \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 6na_n - 4a_n = 0, & \implies a_{n+2} = \frac{n+4}{n+2}a_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{2k+2}{2k} a_{2(k-1)} = \frac{2k+2}{2k} \cdot \frac{2k}{2k-2} \cdots \frac{6}{4} \cdot \frac{4}{2} a_0 = (k+1)a_0, \\ a_{2k+1} &= \frac{2k+3}{2k+1} a_{2k-1} = \frac{2k+3}{2k+1} \cdot \frac{2k+1}{2k-1} \cdots \frac{7}{5} \cdot \frac{5}{3} a_1 = \frac{2k+3}{3} a_1. \end{aligned}$$

پس در مجموع:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} \\ &= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^{2k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+3}{3} x^{2k+1} \\ &= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} k(x^2)^k + a_0 \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} + \frac{2}{3} x a_1 \sum_{k=0}^{\infty} k(x^2)^k + a_1 x \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} \\ &= a_0 \left( \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k \right)' \Big|_{\theta=x^2} + a_0 \frac{1}{1-x^2} + \frac{2}{3} x a_1 \left( \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k \right)' \Big|_{\theta=x^2} + a_1 x \frac{1}{1-x^2} \\ &= a_0 \frac{2x}{1-x^2} + \frac{a_0}{1-x} + \frac{2}{3} x a_1 \frac{2x}{1-x^2} + a_1 \frac{x}{1-x^2} \\ &= \frac{1}{1-x^2} \left\{ \frac{4}{3} a_1 x^2 + (3a_0 + a_1)x + a_0 \right\}. \end{aligned}$$

۱۷.۱.۴ مثال مساله زیر را حل کنید:

$$y'' - (x+1)y' + x^2y = x, \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

**حل:** فرض کنیم  $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y_n x^n$  جواب مساله است که  $y_n = f^{(n)}(0)$ . بنا به فرض مساله  $y_0 = y_1 = 1$ . بعلاوه

$$y_1 = y''(0) = (0+1)y(0) - (0)^2y(0) + (0) = 1.$$

اگر از طرفین معادله داده شده نسبت به  $x$  مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$y''' - (x+1)y'' + (x^2-1)y' + 2xy = 1.$$

در نتیجه:

$$y_3 = y'''(0) = ((0) + 1)y_2 - ((0)^2 - 1)y_1 - 2(0)y_0 + 1 = 3.$$

به طور مشابه:

$$y_4 = y^{(4)}(0) = \{(x+1)y''' + (2-x^2)y'' - 4xy' - 2y\}_{x=0} = 3$$

و ...

پس در مجموع داریم:

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} + \dots$$

۱۸.۱.۴. مثال مساله زیر را حل کنید:

$$(1-x^2)y'' + xy' - y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

حل: فرض کنیم  $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  جواب مساله است. در این صورت

$$\begin{aligned} (1-x^2)(2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \dots) + x(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots) \\ - (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) = 0, \\ (2a_2 - a_0) + 6a_3x + (12a_4 - a_2)x^2 + (20a_5 - 4a_3)x^3 + \dots \\ \dots + ((n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n + na_n - a_n)x^n + \dots = 0. \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} 2a_2 - a_0, & \implies a_2 = \frac{1}{2}a_0, \\ 6a_3 = 0, & \implies a_3 = 0, \\ 12a_4 - a_2 = 0, & \implies a_4 = \frac{1}{12}a_2 \implies a_4 = \frac{1}{24}a_0, \\ & \vdots \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - (n-1)^2a_n = 0, & \implies a_{n+2} = \frac{n^2 - 2n + 1}{n^2 + 3n + 2}a_n. \end{aligned}$$

نتیجه اینکه همه ضرایب فرد صفرند و بعلاوه

$$a_{2k} = \frac{a_0}{(2k-1)(2k)(2k-2)\dots(4)(2)} = \frac{a_0}{(2k-1)2^k k!}.$$

اما مطابق فرض  $y(0) = 1$ ، پس  $a_0 = 1$ . از طرفی  $y'(0) = 1$  پس  $a_1 = 1$ . بنابراین:

$$y = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k-1)2^k k!}.$$

۱۹.۱.۴. مثال مساله زیر را حل کنید:

$$xy''' + y' = y, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0, \quad y''(1) = 1.$$

**حل:** چون دامنه این معادله  $R - \{0\}$  است  $(y''' = (y - y')/x)$  پس تنها در یک همسایگی به شعاع حداکثر یک از نقطه  $x = 1$  می توان دنبال جواب گشت. فرض کنیم  $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$  برای مساله است و  $0 < x < 2$ ، در این صورت

$$\begin{aligned} & x(6a_3 + 24a_4(x-1) + 60a_5(x-1)^2 + \dots + n(n-1)(n-2)a_n(x-1)^{n-3} + \dots) \\ & + (a_1 + 2a_2(x-1) + 3a_3(x-1)^2 + \dots + na_n(x-1)^{n-1} + \dots) \\ & = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \dots + a_n(x-1)^n + \dots \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} & (6a_3 + a_1 - a_0) + (24a_4 + 12a_3 + 2a_2)(x-1) + (60a_5 + 48a_4 + 9a_3 + a_2)(x-1)^2 + \dots \\ & + ((n+3)(n+2)(n+1)a_{n+3} + (n+2)(n+1)a_{n+2} \end{aligned}$$

پس با صفر قرار دادن همه ضرایب داریم:

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1}{6}(a_0 - a_1) \\ a_4 &= \frac{1}{24}(-12a_3 - 2a_2) \\ a_5 &= \frac{1}{60}(-48a_4 - 9a_3 - a_2) \dots \\ a_{n+3} &= -\frac{(n+2)(n+1)na_{n+2} + (n+1)a_{n+1} + a_n}{(n+3)(n+2)(n+1)} \end{aligned}$$

اما مطابق فرض  $a_0 = y(1) = 1$ ،  $a_1 = y'(1) = 0$  و  $a_2 = \frac{1}{2}y''(1) = \frac{1}{2}$ . با قرار دادن اینها در فرمولهای بالا داریم:

$$a_3 = \frac{1}{6}, a_4 = -\frac{1}{8}, a_5 = \frac{1}{15}, \dots$$

در نتیجه جواب مساله چنین است:

$$y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 - \frac{1}{8}(x-1)^4 + \frac{1}{15}(x-1)^5 + \dots$$

**مثال ۲۰۰۱.۴.** معادله  $y'' + \sin xy' + e^x y = 0$  را حل کنید.

**حل:** ضرایب این معادله چند جمله ای نیستند، پس آنها را بر حسب سری لورن بسط می دهیم:

$$y'' + \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{125} - \dots\right)y' + \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots\right)y = 0$$

حال فرض کنیم  $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  جواب مساله است در این صورت

$$\begin{aligned} & (2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \dots) + \\ & + (x - x^3/6 + x^5/125 - \dots) \times (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots) + \\ & + (1 + x + x^2/2 + x^3/6 + \dots) \times (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) = 0 \end{aligned}$$

به بیان دیگر داریم:

$$(2a_2 + a_0) + (6a_3 + 2a_1 + a_0)x + (12a_4 + 3a_2 + a_1 + a_0/2)x^2 + (20a_5 + 4a_3 + a_2 + a_1/3 + a_0/6)x^3 + \dots = 0$$



با صفر قرار دادن ضریب توانهای مختلف داریم:

$$a_2 = -\frac{a_0}{2}, a_3 = -\frac{1}{6}(2a_1 + a_0)$$

$$a_4 = -\frac{1}{12}(2a_0 - a_1), a_5 = \frac{1}{20}a_0 + a_1, \dots$$

پس در مجموع داریم:

$$y = a_0 \left( 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \dots \right) + a_1 \left( x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \dots \right)$$

که  $a_0$  و  $a_1$  ضرایب دلخواه هستند.

**۲۱.۱.۴. تمرینات** هر یک از معادلات زیر را به روش سریها حل کنید:

- |                                     |                                   |
|-------------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $y'' + 2y' = 0,$                 | 2) $(1+x)y'' - y = 0,$            |
| 3) $y'' + 2y' + y = 0,$             | 4) $(1-x^2)y'' - 4xy' + 6y = 0,$  |
| 5) $y'' + 4y = 0,$                  | 6) $(x^2-1)y'' + 2xy' - 2y = 0,$  |
| 7) $y'' - 3y' + 2y = 0,$            | 8) $x(x+1)y'' + (x+1)y' - y = 0,$ |
| 9) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0,$        | 10) $xy'' - (x+2)y' + 2y = 0,$    |
| 11) $(1-x^2)y'' - xy' + 4y = 0,$    | 12) $(x^2-1)y'' + 4xy' + 2y = 0,$ |
| 13) $x^2y'' - 2xy' + (2-x^2)y = 0,$ | 14) $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0.$ |

هر یک از مسائل زیر را به روش سریها حل کنید:

- |                                       |                 |                |
|---------------------------------------|-----------------|----------------|
| 15) $y'' + xy' - x^2y = 0,$           | $y(0) = 1,$     | $y'(0) = -1,$  |
| 16) $x(3-2x)y'' - 6(1-x)y' - 6y = 0,$ | $y(1) = 1,$     | $y'(1) = 0,$   |
| 17) $(x^2+1)y'' + 6xy' + 6y = 0,$     | $y(0) = 0,$     | $y'(0) = 1,$   |
| 18) $y' - xy + x^2 = 0,$              | $y(0) = 2,$     |                |
| 19) $x^2y'' = x + 1,$                 | $y(1) = 1,$     | $y'(1) = 0,$   |
| 20) $xy'' + x^2y' - 2y = 0,$          | $y(1) = 0,$     | $y'(1) = -1,$  |
| 21) $y'' + 3xy' + e^x y = 2x,$        | $y(0) = 1,$     | $y'(0) = -1,$  |
| 22) $x^2y'' - 2xy' + (\ln x)y = 0,$   | $y(1) = 0,$     | $y'(1) = 1/2,$ |
| 23) $(1-x)y'' - 2xy' + 3y = 0,$       | $y(0) = 1,$     | $y'(0) = -1,$  |
| 24) $y'' \ln x = (\sin x).y,$         | $y(e) = 1/e,$   | $y'(e) = 0,$   |
| 25) $y''' + x \sin y = 0,$            | $y(0) = \pi/2,$ | $y'(0) = 0,$   |
| 26) $y'' - (1+x^2)y = 0,$             | $y(0) = -2,$    | $y'(0) = 2.$   |

## بخش ۲.۴ سری فروبینیوس

روش سریها به گونه‌ای در بخش قبل گفته شد، در مواردی به موفقیت نمی‌انجامد. به مثال زیر توجه شود:

**۱.۲.۴. مثال** معادله اولر  $x^2y'' - xy' - 3y = 0$  را به روش سریها حل کنید.

**حل:** فرض کنیم  $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  جواب مساله است، در این صورت

$$x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

بنابراین ضریب  $1, x, x^2, x^3, x^n$  به ترتیب برابرند با:

$$-3a_0 = 0 \implies a_0 = 0$$

$$-3a_1 = 0 \implies a_1 = 0$$

$$2a_2 - 2a_2 - 3a_2 = 0 \implies a_2 = 0$$

$$6a_3 - 3a_3 - 3a_3 = 0 \implies 0a_3 = 0 \implies a_3 \text{ دلخواه است}$$

$$n(n-1)a_n - na_n + 3a_n = 0 \implies a_n = 0$$

بنابراین  $y = a_3 x^3$  که  $a_3$  دلخواه است. اما اینها تمام جوابهای معادله نیستند. می دانیم که جواب عمومی این معادله اولر عبارتست از

$$\mathcal{S} : y = Ax^3 + B\frac{1}{x}.$$

این مشکل از آنجا ناشی می شود که ممکن است جواب مساله مورد نظر در حوالی نقطه ای که انتظار داریم حل شود، تحلیلی نباشد! برای حل این مشکل از نوع دیگری از سریهای تابعی به نام سری فروبینیوس استفاده می کنیم.

**۲.۲.۴. تعریف** نقطه  $x = x_0$  را در صورتی یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

است که توابع  $f(x), a_0(x), a_1(x), \dots, a_{n-2}(x), a_{n-1}(x)$  در نقطه  $x = x_0$  تحلیلی باشند. در غیر این صورت نقطه  $x = x_0$  را یک نقطه تکین می نامیم.

**۳.۲.۴. مثال** فرض کنید  $x(x-1)y'' + y' - 2xy = 0$ ، در این صورت

$$y'' + \frac{1}{x(x-1)}y' - \frac{2}{x-1}y = 0.$$

که توابع ضریب  $a_0 = 2/(x-1), a_1 = 1/x(x-1)$  هستند. تابع  $a_1$  در همه جا به جز  $x = 0$  و  $x = 1$  تحلیلی است و  $a_0$  در همه جا به جز  $x = 1$  تحلیلی است. پس کلیه نقاط، عادی این معادله هستند، به جز  $x = 0$  و  $x = 1$ .

**۴.۲.۴. مثال** معادله  $\cos x \cdot y'' + \sin x \cdot y' + y = x$  را در نظر بگیرید. در این صورت

$$a_1 = \tan x, \quad a_0 = \sec x, \quad f = x \sec x.$$

این توابع در همه جا تحلیلی هستند به جز در نقاطی که  $\tan x = 0$  یعنی  $x = k\pi$  که  $k \in \mathbb{Z}$ .

**۵.۲.۴. تعریف** معادله  $y'' + a_0(x)y' + a_1(x)y = 0$  را در نظر بگیرید. نقطه تکین  $x = x_0$  را در صورتی یک نقطه تکین عادی  $\mathcal{E}$  گوئیم که توابع  $(x-x_0)a_1(x)$  و  $(x-x_0)^2 a_0(x)$  در نقطه  $x = x_0$  تحلیلی باشد. در غیر این صورت  $x = x_0$  را نقطه تکین نامنظم می نامند.

**۶.۲.۴. مثال** مثال (۱) از ۳-۲-۴ را در نظر بگیرید. در این صورت نقطه  $x=0$  منظم عادی است. زیرا

$$(x-0)a_1(x) = x \cdot \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1}, \quad (x-0)^2 a_0(x) = x^2 \cdot \frac{2}{x-1}.$$

که هر دو در  $x=0$  تحلیلی هستند. نقطه  $x=1$  نیز تکین عادی است. زیرا

$$(x-1).a_1(x) = (x-1) \cdot \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x}, \quad (x-1)^2 .a_2(x) = 2(x-1).$$

که هر دو در  $x=1$  تحلیلی هستند.

**۷.۲.۴. مثال** معادله  $x^2(x-1)y'' + y' + 2x^2y = 0$  را در نظر بگیرید. در این صورت

$$a_1 = 1/x^2(x-1)^2, \quad a_0 = 2/(x-1)^2.$$

در نتیجه  $x=0$  و  $x=1$  نقاط تکین  $\mathcal{E}$  هستند. به علاوه

$$(x-0).a_1(x) = 1/x(x-1)^2, \quad (x-0)^2 .a_0(x) = 2x^2/(x-1),$$

که تابع اول در  $x=0$  تحلیلی نیست. پس  $x=0$  تکین نامنظم است. به علاوه

$$(x-1).a_1(x) = 1/x^2(x-1), \quad (x-1)^2 .a_0(x) = 2,$$

که تابع اول در  $x=1$  تحلیلی نیست. پس  $x=1$  نیز تکین نامنظم است.

**۸.۲.۴. مثال** معادله  $(x^2-9)y'' + (x-3)y' + 2y = 0$  را در نظر بگیرید. در این صورت

$$a_1(x) = \frac{1}{(x+3)^2(x-3)}, \quad a_0(x) = \frac{2}{(x+3)^2(x-3)^2}.$$

پس نقاط  $x=3$  و  $x=-3$  نقاط تکین معادله  $\mathcal{E}$  هستند. ملاحظه می‌شود که

$$(x+3).a_1(x) = \frac{1}{(x+3)(x-3)}, \quad (x+3)^2 .a_0(x) = \frac{2}{(x-3)^2},$$

که اولی در  $x=-3$  تحلیلی نیست. پس  $x=-3$  یک نقطه تکین نامنظم  $\mathcal{E}$  است. بعلاوه

$$(x-3).a_1 = \frac{1}{(x+3)^2}, \quad (x-3)^2 .a_0(x) = \frac{2}{(x+3)^2},$$

که هر دو در  $x=3$  تحلیلی هستند. پس  $x=3$  یک نقطه تکین منظم  $\mathcal{E}$  است.

**۹.۲.۴. قضیه (قضیه فروبینیوس)** فرض کنید  $x=x_0$  یک نقطه تکین منظم معادله دیفرانسیل:

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

است. در این صورت حداقل یک جواب به شکل:

$$y = (x-x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^{n+r}. \quad (4.4)$$

برای این معادله وجود دارد، که  $r$  عددی حقیقی و ثابت است. این جواب در همسایگی ای سفته به شکل  $0 < |x-x_0| < R$  همگرا است.

۱۰۰.۲.۴. مثال (مثال ادامه مثال ۱.۲.۴)) در معادله اولر آمده در ۴-۲-۱ فرض می‌کنیم  $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$  در این صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r} - 3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0.$$

ضریب اولین جمله (یعنی  $x^r$ ) عبارتست از:

$$r(r-1)a_0 - ra_0 - 3a_0 = 0.$$

با فرض  $a_0 \neq 0$  (زیرا اگر  $a_0 = 0$ ، آنگاه  $r$  تغییر می‌کند)، نتیجه می‌گیریم  $(r-3)(r+1) = 0$ . بنابراین  $r = -1$  یا  $r = 3$  از طرفی ضریب  $x^{n+r}$  عبارتست از

$$(n+r-3)(n+r+1)a_n = 0.$$

چنانچه  $r = -1$  ضریب مذکور  $(n-4)na_n = 0$  می‌شود و لذا اگر  $n \neq 0$  و  $n \neq 4$ . آنگاه الزاما  $a_n = 0$ . پس تنها  $a_0$  و  $a_4$  می‌توانند مخالف صفر باشند. در نتیجه:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-1} = a_0 x^{-1} + a_4 x^3.$$

اما اگر  $r = 3$ ، آنگاه ضریب  $x^{n+r}$  به صورت  $n(n+4)a_n = 0$  می‌شود. پس اگر  $n \neq 0$  آنگاه  $c_n = 0$ . در نتیجه تنها  $c_0$  ممکن است مخالف صفر باشد. در نتیجه:

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 x^{n+3} = a_0 x^3.$$

پس در هر حال جواب عمومی معادله مذکور عبارتست از:

$$\mathcal{S} : y = Ax^{-1} + Bx^3.$$

۱۱۰.۲.۴. قضیه فرض کنید  $\mathcal{E} : y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$  معادله‌ای دیفرانسیل است و  $x = x_0$  یک نقطه تکین عادی آن است. فرض کنید:

$$u := \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)a_1(x), \quad v := \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 a_0(x).$$

فرض کنیم معادله مشخصه

$$\boxed{C_{\mathcal{E}} : r(r-1) + ur + v = 0,} \quad (5.4)$$

دارای دو ریشه حقیقی  $r_1$  و  $r_2$  است که  $r_2 \leq r_1$ . در این صورت

الف) اگر تفاضل  $r_1 - r_2$  با عددی صحیح مثبت و یا صفر برابر نباشد  $(r_1 - r_2 \neq 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots)$ . در این معادله  $\mathcal{E}$  دو جواب به شکل

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad y_2 = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n,$$

است که  $a_0 \neq 0 \neq b_0$ .

ب) اگر  $r_1 - r_2$  عددی صحیح و مثبت باشد ( $r_1 - r_2 = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$ ). در این صورت  $\epsilon$  دارای یک جواب به شکل

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

است که  $a_0 \neq 0$ . جواب دیگر این معادله ممکن است به شکل  $x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  یا

$$y_2 = C y_1 \ln(x - x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n,$$

که  $C$  و  $b_0$  اعداد مخالف صفرند، باشد.

ج) اگر  $r_1 = r_2$ ، در این صورت  $\mathcal{E}$  تنها یک جواب به شکل:

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

که  $a_0 \neq 0$ . جواب دیگر این معادله به شکل

$$y_2 = y_1 \ln(x - x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n,$$

است که  $b_0 \neq 0$  می باشد.

**۱۲.۲.۴. مثال** معادله  $2x^2 y'' + 3xy' - (1+x)y = 0$  را حل کنید.

**حل:** نقطه  $x = 0$  تنها نقطه تکین معادله است و این نقطه، یک نقطه تکین منظم است. در این مساله:

$$u = \lim_{x \rightarrow 0} x a_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{3}{2x} = \frac{3}{2},$$

$$v = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 a_0(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{-1-x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1-x}{2} = -1/2,$$

و معادله مشخصه آن چنین است:

$$C_{\mathcal{E}} : r(r-1) + \frac{3}{2}r - \frac{1}{2} = 0, \Rightarrow 2r^2 + r + 1 = 0.$$

پس  $(2r-1)(r+1) = 0$  و بنابراین  $r_1 = 1/2$  و  $r_2 = -1$ . چون  $r_1 - r_2 = 3/2$  صحیح مثبت و یا صفر نیست، حالت الف از ۸-۲-۴ است.

در معادله داده شده فرض می کنیم  $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ ، در این صورت

$$2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} + 3x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} - (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} \{2(r+1)r+3(r+1)-1\}a_1 - a_0 = 0 &\implies a_1 = \frac{a_0}{(2r+1)(r+2)}, \\ \{2(r+2)(r+1)+3(r+2)-1\}a_2 - a_1 = 0 &\implies a_2 = \frac{a_1}{(2r+3)(r+3)}, \\ &\vdots \\ \{2(r+n)(r+n-1)+3(r+n)-1\}a_n - a_{n-1} = 0 &\implies a_n = \frac{a_{n-1}}{(2r+2n-1)(r+n+1)}. \end{aligned}$$

پس اگر فرض کنیم  $r = r_1 = \frac{1}{2}$ ، آنگاه  $a_n = \frac{a_{n-1}}{n(2n+3)}$  و در نتیجه

$$a_n = \frac{1}{n(2n+3)} \cdot \frac{1}{(n-1)(2n+1)} \cdots \frac{1}{(1)(5)} a_0 = \frac{a_0}{n!.(5).(7)\cdots(3n+3)},$$

و جواب اول عبارتست از

$$y_1 = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}x^n}{n!.5.7\cdots(2n+3)}.$$

به صورت مشابه با فرض  $r = r_1 = -1$  داریم  $b_n = \frac{b_{n-1}}{n(2n-3)}$  و در نتیجه

$$b_n = \frac{1}{n(2n-3)} \cdot \frac{1}{(n-1)(2n-5)} \cdots \frac{1}{(1)(-1)} b_0 = \frac{-b_0}{n!.(3).(5)\cdots(2n-3)},$$

و لذا جواب دیگر معادله داده شده چنین است:

$$y_2 = b_0 \left\{ \frac{1}{x} - 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!.(3).(5)\cdots(2n-3)} \right\}.$$

مثال ۱۳.۲.۴. معادله  $x^2 y'' + x(x + \frac{1}{2})y' = (x^2 + \frac{1}{2})y$  را حول  $x=0$  حل کنید.حل: نقطه  $x=0$  یک نقطه تکین عادی معادله مذکور است. به علاوه

$$u = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot a_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{-1}{x} \left(x + \frac{1}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} -\left(x + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$v = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot a_0(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \left(x^2 + \frac{1}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

در نتیجه

$$C_{\mathcal{E}} : r(r-1) + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0, \implies 2r^2 - r - 1 = 0, \implies r_1 = 1, r_2 = -\frac{1}{2}.$$

در این مساله نیز  $r_1 - r_2 = \frac{3}{2}$  صحیح مثبت و یا صفر نیست. پس از نوع الف در ۸-۲-۴ است. در معادله داده شدهتابع  $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$  را قرار می‌دهیم. در این صورت

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} + x\left(x + \frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} - \left(x^2 + \frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0,$$

که ضریب جمله  $x^{n+r}$  چنین است:

$$(n+r)(n+r-1)a_n + (n+r-1)a_{n-1} + \frac{1}{2}(n+r)a_n (n \geq 0) - a_{n-2} - \frac{1}{2}a_{n-1} = 0.$$

بنابراین داریم:

$$a_n = \frac{-(2n+2r-3)a_{n-1} + 2a_{n-2}}{(2n+2r-1)(n+r)}.$$

به ازای  $n$  هایی که  $2 \leq n$  در حالت  $n=1$  داریم:

$$(r^2 + \frac{3}{2}r)a_1 + ra_0 = 0 \implies a_1 = \frac{-2}{2r+3}a_0.$$

حال فرض کنیم  $r = r_1 = 1$ . در این صورت

$$a_1 = -\frac{2}{5}a_0, \quad \forall n \geq 2 : a_n = \frac{-(2n_1)a_{n-1} + 2a_{n-2}}{(2n+1)(n+1)}.$$

برخی از جملات آن عبارتند از

$$y_1 = a_0 x \left( 1 - \frac{2}{5}x + \frac{9}{35}x^2 - \frac{82}{945}x^3 + \frac{571}{20790}x^4 - \dots \right).$$

به صورت مشابه، با فرض  $r = r_2 = \frac{-1}{2}$  داریم:

$$a_1 = -a_0, \quad \forall n \geq 2 : a_n = \frac{-(2n-4)a_{n-1} + 2a_{n-2}}{(2n-2)(n-1/2)}.$$

برخی جملات آن عبارتند از

$$y_2 = \frac{a_0}{\sqrt{x}} \left( 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{18}x^3 + \frac{119}{360}x^4 - \dots \right).$$

**۱۴.۲.۴. مثال** معادله  $x^2 y'' + x(2+3x)y' - 2y = 0$  را در حوالی نقطه  $x=0$  حل کنید.

**حل:** تنها نقطه تکیین معادله  $\mathcal{E}$  نقطه  $x=0$  است که آن هم منظم است. به علاوه

$$u = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot a_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{2+3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2+3x) = 0,$$

$$v = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot a_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{-2}{x^2} = -2,$$

در نتیجه

$$C_{\mathcal{E}} : r(r-1) + 2r - 2 = 0, \implies r^2 + 2r - 2 = 0, \implies r_1 = 1, r_2 = -2.$$

پس  $r_1 - r_2 = 3$  و حالت ب از قضیه ۸-۲-۴ است. فرض کنیم  $y = x^1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  جواب مساله است. در این صورت

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_n x^{n-1} + x(2+3x) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_n x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0.$$

با صفر قرار دادن ضرایب توانهای مختلف  $x$  داریم:

$$a_1 = -3a_0, \quad a_2 = \frac{-3}{2}a_1, \quad \text{دلخواه } a_3, \quad a_4 = -\frac{3}{4}a_3, \quad \dots$$

و در حالت کلی

$$n(n-3)a_n + 3(n-3)a_{n-1} = 0 \implies a_n = -\frac{3}{n}a_{n-1}.$$

بنابراین

$$a_n = \frac{-3}{n}a_{n-1} = \frac{-3}{n} \frac{-3}{n-1} a_{n-2} = \dots = \frac{-3}{n} \cdot \frac{-3}{n-1} \dots \frac{-3}{4} a_3 = -2 \frac{(-3)^{n-2}}{n!} a_3$$

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} = a_0(x^{-2} - 3x^{-1} + \frac{9}{2}) + a_3 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-2} 3^{n-2}}{n!} x^{n-2}.$$

در نتیجه:

$$y_1 = x^{-2} - 3x^{-1} + \frac{9}{2} = \frac{1}{2x^2}(9x^2 - 6x + 2),$$

$$y_2 = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-3} 3^{n-2}}{n!} x^{n-2} = -\frac{2}{9x^2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-3x)^n}{n!}$$

$$= -\frac{2}{9x^2}(e^{-3x} - 1 + 3x - \frac{9}{6}x^2) = \frac{-1}{9x^2}(2e^{-3x} - 2 + 6x - 3x^2),$$

جوابهای مستقل خطی  $\mathcal{E}$  هستند.

**۱۵.۲.۴. مثال** معادله  $x^2 y'' - x(2-x)y' + (2+x^2)y = 0$  را حول  $x=0$  حل کنید.

**حل:** در این معادله:

$$u = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot a_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{x-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x-2) = -2,$$

$$v = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot a_0(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (2+x^2) = 2.$$

پس  $r_1 - r_2 = 1$  و حالت ب از قضیه ۸-۲-۴ پیش آمده است. فرض کنیم  $y = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  جواب مساله است. در این صورت

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_n x^n - x(2-x) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + (2+x^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

با صفر قرار دادن ضرایب توانهای مختلف، داریم:

$$a_1 = a_0, \quad a_2 = \frac{a_0}{3},$$

$$a_3 = \frac{-a_0}{36}, \dots, \quad a_n = \frac{-1}{n-2} a_{n-1} - \frac{1}{(n-1)(n-2)} a_{n-2}.$$



در نتیجه، یک جواب از  $\mathcal{E}$  عبارتست از

$$y_1 = x^2 - x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{36}x^5 + \dots + a_n x^{n+2} + \dots$$

جواب مستقل خطی دیگر معادله به شکل:

$$y_2 = c y_1 \ln x + x^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

است. به منظور به دست آوردن ضرایب  $y_2$  آنرا در  $\mathcal{E}$  قرار می دهیم:

$$\begin{aligned} 2cxy_1' + c(x-2-x^2)y_1 + 10b_0x^{-2} + 2(2b_1-b_0)x^{-1} - b_1 \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (n-2)(n-3)b_n x^{n-2} - 2 \sum_{n=2}^{\infty} (n-2)n_n x^{n-2} \\ + \sum_{n=3}^{\infty} (n-2)b_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0. \end{aligned}$$

نتیجه اینکه:

$$b_0 = 0, \quad b_1 = \frac{1}{3}b_0 = 0, \quad b_2 = \frac{1}{3}b_0 = 0, \quad b_3 = -c, \quad b_4 = \frac{c}{3}, \quad \dots \quad b_n = c(2n-7)a_{n-2} + n_{n-2}.$$

و یا به اختصار، دومین جواب مستقل خطی  $\mathcal{E}$  عبارتست از:

$$y_2 = \left(x^2 - x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{36}x^5 + \dots + a_n x^{n+2} + \dots\right) \ln x - x + \frac{1}{3}x^2 + \dots + b_n x^{n-2}.$$

**۱۶.۲.۴. مثال** معادله  $x^2 y'' + x(x-1)y' + (1-x)y = 0$  را به روش سریها در حوالی نقطه  $x=0$  حل کنید.

**حل:** در این مساله:

$$\begin{aligned} u &= \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot a_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x-1) = -1, \\ v &= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot a_0(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{1-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (1-x) = 1. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$C_{\mathcal{E}} : r(r-1) - r + 1 = 0, \implies r^2 - 2r + 1 = 0, \implies r_1 = r_2 = 1.$$

پس حالت ج از قضیه ۸-۲-۴ رخ داده است. فرض کنیم  $y = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  جوابی از مساله است. بنابراین، بایستی

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n)(n+1)a_n x^{n-1} + x(x-1) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_n x^n + (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0.$$

یا پس از ساده کردن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n+2} = 0.$$

پس  $a_0$  دلخواه است، و به ازای هر  $n \geq 1$  ای:

$$a_n = -\frac{n-1}{n^2} a_{n-1},$$

و لذا همه  $a_n$  های  $n \geq 1$  صفرند. در نتیجه جواب  $y = a_0 x$  است. پس  $y_1 = x$  یک جواب  $\mathcal{L}$  است. برای به دست آوردن جواب دوم از تغییر تابع  $y_2 = ux$  یا  $y_2 = uy_1$  استفاده می‌کنیم. در این صورت

$$y_2' = u'x + u, \quad y_2'' = u''x + 2u'.$$

اگر نتیجه را در  $\mathcal{L}$  قرار دهیم، داریم:

$$xu'' + (x+1)u' = 0.$$

که یک معادله تفکیک پذیر بر حسب  $x, u'$  است:

$$\frac{du'}{u'} = -\frac{x+1}{x} dx, \implies \ln u' = -x - \ln x + \ln A.$$

پس  $u' = \frac{A}{x} e^{-x}$  و در نتیجه:

$$\begin{aligned} u &= \int u' dx = A \int \frac{1}{x} e^{-x} dx = A \int \frac{1}{x} \left( 1 - x + \frac{x^2}{2} - \dots + \frac{(-x)^n}{n!} + \dots \right) dx \\ &= A \left( \ln x - x + \frac{x^2}{4} - \dots + (-1)^n \frac{x^2}{n.n!} + \dots \right) + B, \\ y_2 &= xu = A \left( x \ln x - x^2 + \frac{x^3}{4} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n.n!} + \dots \right) + Bx. \end{aligned}$$

با فرض  $A = 1$  و  $B = 0$  داریم:

$$y_2 = x \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n.n!} x^{n+1} = y_1 \cdot \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n.n!} x^{n+1}.$$

**مثال ۱۷.۲.۴.** معادله  $xy'' + y' + xy = 0$  را به روش سریها در حوالی نقطه  $x = 0$  حل کنید.

**حل:** در این مساله:

$$\begin{aligned} u &= \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot a_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1}{x} = 1, \\ v &= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot a_0(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$C_{\mathcal{L}} : r(r-1) + r + 0 = 0.$$

بنابراین  $r_1 = r_2 = 0$ . فرض کنیم  $y = x^0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  جواب مساله است. در این صورت باید داشته باشیم:

$$x \cdot \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

پس بایستی ضریب توانهای مختلف  $x$  صفر باشد:

$$a_1 = 0, \quad \forall n \geq 2 : a_n = -\frac{1}{n^2} a_{n-2}.$$

در نتیجه:

$$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = a_{2k+1} = 0, \\ a_{2k} = \frac{-1}{(2k)^2} a_{2(k-1)} = \frac{1}{(2k)^2} \cdot \frac{1}{(2k-2)^2} \cdot \dots \cdot \frac{-1}{2^2} a_0 = \frac{(-1)^k}{2^{2k} \cdot k!^2} a_0.$$

پس یک جواب معادله  $\mathcal{E}$  عبارتست از

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} \cdot (k!^2)} x^{2k}.$$

برای به دست آوردن دومین جواب مستقل خطی معادله  $\mathcal{E}$ ، فرض می‌کنیم:

$$y = y_1 \cdot \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

و آن را در  $\mathcal{E}$  قرار می‌دهیم. بنابراین داریم:

$$2y_1' + x \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0.$$

پس بایستی:

$$b_0, \quad b_1 = 0, \quad b_2, \quad b_3 = 0, \quad \dots, \quad b_n = -\frac{2}{n} a_n - \frac{1}{n^2} b_{n-2}.$$

بنابراین همه  $b_n$  های با اندیس فرد صفرند و بعلاوه

$$b_2 = (-1)^{n+1} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{2^{2n} \cdot n!} b_0.$$

پس دومین جواب مستقل خطی معادله  $\mathcal{E}$  عبارتست از:

$$y_2 = \frac{x^2}{4} - \frac{3}{128} x^4 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{2^{2n} \cdot n!} x^{2n} + \dots.$$

**۱۸.۲.۴. تمرینات** هر یک از معادلات داده شده را به روش فروبینیوس در حوالی نقطه صفر حل کنید:

- |   |   |
|---|---|
| 1) $x^2 y'' - xy' + y = 0,$             | 2) $x^2 y'' + xy' = 0,$                     |
| 3) $x^2 y'' + 3xy' + y = 0,$            | 4) $4x^2 y'' + y = 0,$                      |
| 5) $4xy'' + 2y' + y = 0,$               | 6) $2x^2 y'' + x(2x+1)y' + 2xy = 0,$        |
| 7) $xy'' + (3+2x)y' + 4y = 0,$          | 8) $(2x^2 - x^2)y'' + (6x^2 - 4x)y' = 2y,$  |
| 9) $(x+3x^2)y'' + 2y' = 6xy,$           | 10) $xy'' + 2y' = xy,$                      |
| 11) $2x^2 y'' + 3xy' = (1+x)y,$         | 12) $x(1-x)y'' + 3y' = 2y,$                 |
| 13) $x^2 y'' + x^2 y' = xy,$            | 14) $(2x^3 + 6x^2)y'' + (x^2 + 9x)y' = 3y,$ |
| 15) $x^2 y'' - 2x(x+2)y' + (x+3)y = 0,$ | 16) $4x(x-1)y'' + 2(1-2x)y' + y = 0,$       |
| 17) $xy'' + 2y' + xy = 0,$              | 18) $x^2 y'' - 2xy' + (2+x^2)y = 0,$        |
| 19) $4x^2 y'' - 4x^2 y' + (1+2x)y = 0,$ | 20) $x^2 y'' - 3xy' + 4(x+1)y = 0.$         |

## بخش ۳.۴ توابع بسل

فردریک ویلیام بسل (۱۷۸۴ تا ۱۸۴۶) ریاضیدان آلمانی، در مطالعات خود در خصوص حرکت سماوات به معادلاتی برخورد که امروزه به نام وی شناخته می‌شوند. بعداً این معادلات کاربرهائی در نظریه الکترومغناطیس، انتقال حرکت و آکوستیک پیدا کردند.

۱.۳.۴. تعریف معادله به شکل

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0,$$

که  $n$  عددی صحیح و نامنفی است، معادله بسل با مشخصه  $n$  نامیده می‌شود. موضوع حل این معادله در حوالی نقطه  $x = 0$  است.

۲.۳.۴. روش حل معادله بسل در این معادله:

$$u = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot a_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{1}{x} = 1,$$

$$v = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot a_0(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{x^2 - n^2}{x^2} = -n^2,$$

$$C_{\mathcal{E}} : r(r-1) + r - n^2 = 0, \implies r^2 - n^2 = 0, \implies r = \pm n.$$

پس  $r_1 = n$  و  $r_2 = -n$ . حال فرض کنیم  $y = x \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$  جواب مساله است، در این صورت با قرار دادن در معادله بسل داریم:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \{(m+r)(m+r-1) + (m+r) - n^2\} a_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} m = 0 a_m x^{m+r+2} = 0.$$

بنابراین داریم:

$$(2n+1)a_1 = 0, \implies a_1 = 0,$$

$$((m+r)^2 - n^2)a_m + a_{m-2} = 0, \implies a_m = \frac{-1}{(m+r)^2 - n^2} a_{m-2}.$$

و به استقرا نتیجه می‌گیریم که:

$$a_{2k+1} = a_{2k-1} = \dots = a_3 = a_1 = 0,$$

$$a_{2k} = \frac{-1}{(2k+r)^2 - n^2} \cdot \frac{-1}{(2k-2+r)^2 - n^2} \cdot \dots \cdot \frac{-1}{(r+2)^2 - n^2} a_0.$$

اکنون دو حالت در نظر می‌گیریم: الف)  $n = 0$  ب)  $n > 0$

الف) اگر  $n = 0$ ، در این صورت  $r_1 = r_2 = 0$  و لذا:

$$a_{2k} = \frac{-1}{(2k)^2} \cdot \frac{-1}{(2k-2)^2} \cdot \dots \cdot \frac{-1}{(2)^2} a_0 = \frac{(-1)^k}{(2^k \cdot k!)^2} a_0.$$

و بنابراین

$$J_0(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} \cdot (k!)^2} x^{2k}.$$

یک جواب معادله به ازای  $n = 0$  است.

(ب) فرض کنیم  $n > 0$ . در این صورت با فرض  $r = r_1 = n$  داریم:

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{-1}{(2k)(2k+2n)} \cdot \frac{-1}{(2k-2)(2k+2n-2)} \cdots \frac{-1}{(2+2n)(2)} a_0 \\ &= \frac{(-1)^k}{2 \cdot 4 \cdots (2k)} \cdot \frac{1}{(2k-2)(4+2n) \cdots (2k+2n)} a_0 \\ &= \frac{(-1)^k}{2^{2k} \cdot k! \cdot n! (1+n)(2+n) \cdots (k+n)} = \frac{(-1)^k \cdot 2^n \cdot n!}{2^{n+2k} \cdot k! \cdot (n+k)!} \end{aligned}$$

و بنابراین

$$J_n(x) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{n+2m} \cdot m! \cdot (n+m)!} x^{n+2m}.$$

یک جواب معادله بسل با شاخص  $n$  است. تابع  $J_n(x)$  را  $n$  امین تابع بسل می‌نامیم:

$$\begin{aligned} J_0(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{64} - \cdots, \\ J_1(x) &= \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} - \cdots, \\ &\vdots \\ J_n(x) &= \frac{1}{2^n \cdot n!} x^n - \frac{1}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} x^{n+2} + \cdots. \\ &\vdots \end{aligned}$$

### ۳.۳.۴. قضیه (خواص تابع بسل)

(۱) صفرهای تابع بسل  $J_n(x)$  بین صفرهای تابع بسل  $J_{n+1}(x)$  ظاهر می‌شود و صفرهای  $J_{n+1}(x)$  بین صفرهای  $J_n(x)$ . به علاوه اگر  $m$  امین ریشه  $J_n(x)$  را  $\lambda_{m,n}$  بنامیم، آنگاه به ازای  $m$  های به اندازه کافی بزرگ داریم:

$$\lambda_{m,n} \sim \left(m + \frac{n}{2} - \frac{1}{4}\right).$$

(۲) مشتق:

$$\begin{aligned} a) J_0(x)' &= -J_1(x), & b) J_1(x)' &= J_0(x) - \frac{1}{x} J_1(x), \\ c) (x^n J_n)' &= x^2 J_{n-1}(x) \quad \forall n \geq 1, & d) (x^{-n} J_n(x))' &= -x^{-n} J_{n+1}(x) \quad \forall n \geq 0, \end{aligned}$$

(۳) رابطه‌های بازگشتی: اگر  $n \geq 1$ ، آنگاه:

$$a) J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x), \quad b) J_{n+1}(x) = -2J_n'(x) + J_{n-1}(x),$$

(۴) تعامد توابع بسل: اگر  $r_1, r_2, \dots, r_k, \dots$  صفرهای مثبت و متوالی تابع بسل  $J_n(x)$  باشند، در این صورت

$$\int_0^1 x J_n(r_i x) J_n(r_j x) dx = \begin{cases} 0 & \text{اگر } i \neq j \\ \frac{1}{2} \{J_n'(r_i)\}^2 & \text{اگر } i = j \end{cases}$$

**تعریف ۴.۳.۴.** توابع بسل با شاخص منفی را نیز می‌توان تعریف نمود:

$$J_{-n}(x) := (-1)^n J_n(x).$$

$n$  امین تابع بسل از نوع دوم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Y_n(x) := -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} + J_n(x) \ln x$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-01)^k}{k!(n+k)!} \left( H_n + \sum_{t=1}^{n+k} \frac{1}{t} \right) \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

که در آن:

$$H_n := \begin{cases} 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} & \text{اگر } n \geq 1 \\ 0 & \text{اگر } n = 0 \end{cases}$$

**قضیه ۵.۳.۴.** به ازای هر  $n \geq 0$  ای، جواب عمومی معادله بسل با شاخص  $n$  عبارت از:

$$\mathcal{S} : y = A_n + B Y_n,$$

است که  $A$  و  $B$  اعداد ثابت دلخواهند.

**قضیه ۶.۳.۴.** معادله دیفرانسیل:

$$x^2 u'' + (1 - 2a)xu' + (b^2 c^2 x^{2c} + a^2 - k^2 c^2)u = 0,$$

با تغییر تابع  $u = x^a y$  به معادله:

$$x^2 u'' + xy' + (b^2 x^{2c} - k^2)c^2 y = 0,$$

و در ادامه با تغییر متغیر  $w = bx^c$  به معادله بسل:

$$w^2 \frac{d^2 y}{dw^2} + \frac{dy}{dw} + (w^2 - k^2)y = 0,$$

تبدیل می‌شود. در نتیجه  $u = x^a J_k(bx^c)$  یک جواب آن است.

**مثال ۷.۳.۴.** در معادله  $x^2 u'' + xu' + (x - \frac{k^2}{4})u = 0$  با فرض  $a = 0$  و  $b = 2$  و  $c = 1/2$  و با استفاده از ۴-۳-۶ نتیجه می‌گیریم که  $u = J_k(2\sqrt{x})$  یک جواب مساله است. به علاوه جواب عمومی آن چنین است:

$$\mathcal{S} : y = A J_k(2\sqrt{x}) + B Y_k(2\sqrt{x}).$$

**مثال ۸.۳.۴.** در معادله  $u'' + b_0 x^m u = 0$  با فرض  $a = \frac{1}{2}$ ،  $b = \frac{2}{m}$ ،  $c = \frac{m}{2}$  و  $k = 0$  و با استفاده از ۴-۳-۶ نتیجه می‌گیریم که

$$u = \sqrt{x} J_{1/(m+2)} \left( \frac{2\sqrt{b_0}}{m+2} \sqrt{x^{m+2}} \right),$$

یک جواب معادله است.

**۹.۳.۴. مثال** با توجه به  $u = \sqrt{x}J_k(x)$  تابع  $4-3-6$  یک جواب معادله زیر است:

$$u'' + \left(1 + \frac{1-4k^2}{4x^2}\right)u = 0.$$

**۱۰.۳.۴. قضیه** معادله دیفرانسیل:

$$x^2y'' + x(1 - 2x \tan x)u' = (x \tan x + k^2)u.$$

با تغییر تابع  $u = y / \cos x$  به معادله بسل

$$x^2u'' + xy' + (x^2 - k^2)y = 0,$$

تبدیل می‌گردد. بنابراین، جواب عمومی آن عبارتست از

$$\mathcal{S} : u = \frac{1}{\cos x} (AJ_k(x) + BY_k(x)).$$

**۱۱.۳.۴. تعریف** اگر در معادله بسل  $n$  عدد صحیح نباشد، می‌توان به جواب رسید. این بار، جواب حاصل عبارتست از:

$$J_n(x) := \sum_{k=0}^{\infty} k=0 \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

که قبلاً در ۳-۹-۴ معرفی شد. در مثال ۲ از ۴-۳-۷ نیز از  $J_n$  که  $n$  صحیح نیست. استفاده می‌شود.

**۱۲.۳.۴. مثال** معادله آیری  $y'' + xy = 0$  حالت  $b_0 = 1$  و  $m = 1$  در مثال ۲ از ۴-۳-۷ است. بنابراین:

$$y = \sqrt{x}J_{1/3}\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} k=0 \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+1/3}}{k! \Gamma(k+4/3)}.$$

یک جواب آن است.

**۱۳.۳.۴. قضیه** اگر شاخص معادله بسل صحیح باشد،  $J_n$  و  $Y_n$  جوابهای مستقل خطی آن هستند و اگر شاخص آن صحیح نباشد، توابع  $J_n$  و  $J_{-n}$  جوابهای مستقل خطی آن خواهند بود.

**۱۴.۳.۴. تمرینات** در هر مورد نشان دهید  $y_1$  جواب خصوصی  $\mathcal{E}$  است:

1)  $\mathcal{E} : xy'' - y + xy = 0, \quad y_1 = xJ_1(x),$

2)  $\mathcal{E} : xy'' + y' + 2y = 0, \quad y_1 = J_0(2\sqrt{2x}),$

3)  $\mathcal{E} : xy'' + 3y' + xy = 0, \quad y_1 = x^{-1}J_1(x),$

4)  $\mathcal{E} : xy'' + y' + x^3y = 0, \quad y_1 = J_0\left(\frac{x^2}{2}\right),$

(۵) جوابی از  $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$  بیابید که  $y(1) = 1$ .

(۶) نشان دهید  $y = uJ_0(u)$  که  $u = \sqrt{x}$  در معادله  $4x^2y'' + (x+1)y = 0$  صدق می‌کند.

(۷) نشان دهید تابع  $y = \frac{1}{x}J_1(x)$  در معادله  $xy'' + 3y' + xy = 0$  صدق می‌کند.

۸) با تغییر متغیر  $u = \sqrt{x}$  معادله  $2x^2y'' + 4y' + (x-1)y = 0$  را به معادله‌ای بسل تبدیل کنید. سپس جوابی را بیابید که  $y(4) = 1$ .

۹) نشان دهید که معادله  $xy'' + (1-2p)y' + xy = 0$  دارای جواب خصوصی  $x^p J_p(x)$  است.

$$(10) \quad \int_0^x t J_0(t) dt = x J_1(x) \quad \text{نشان دهید که}$$

$$(11) \quad \int_0^x t^{-1} J_2(t) dt = -x^{-1} J_1(x) + \frac{1}{2} \quad \text{نشان دهید که}$$

هر یک از روابط زیر را نشان دهید:

$$12) (x^k J_k(x))' = x^k J_{k-1}(x), \quad 13) (x^{-k} J_k(x))' = -x^{-k} J_{k+1}(x),$$

$$14) J_{k-1}(x) + J_{k+1}(x) = \frac{2k}{x}, \quad 15) J_{k-1}(x) - J_{k+1}(x) = 2J'_k(x).$$

### بخش ۴.۴ چند جمله‌ایهای لژاندر

۱.۴.۴. تعریف فرض کنید  $k$  عددی حقیقی است. معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + k(k+1)y = 0.$$

را معادله دیفرانسیل لژاندر با شاخص  $k$  می‌نامیم. این معادله به م. لژاندر (۱۷۵۲ تا ۱۸۳۳) ریاضیدان فرانسوی منتسب است.

۲.۴.۴. روش حل نقطه  $x=0$  یک نقطه عادی معادله لژاندر است. به علاوه توابع ضریب:

$$a_1(x) = \frac{-2x}{1-x^2} = -2x(1+x^2+x^4+\dots),$$

$$a_0(x) = \frac{k(k-1)}{1-x^2} = k(k-1)(1+x^2+x^4+\dots).$$

در بازه  $-1 < x < 1$  تحلیلی هستند. بنابراین، می‌توان فرض کرد که معادله دارای یک جواب به شکل سری مک لوران در این بازه است:  $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . بنابراین:

$$(1-x^2) \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + k(k-1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

و در نتیجه:

$$2a_2 + k(k+1)a_0 = 0, \implies a_2 = \frac{-1}{2}k(k+1)a_0,$$

$$6a_3 - 2a_1 + k(k+1)a_1 = 0, \implies a_3 = \frac{-1}{6}(6-1)(k+2)a_1,$$

$$12a_4 - 6a_2 + k(k+1)a_2 = 0, \implies a_4 = \frac{-1}{12}(k-2)(k+3)a_2,$$

⋮

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} - n(n+1)a_n + k(k+1)a_n = 0, \implies a_{n+2} = \frac{n(n+1) - k(k+1)}{(n+1)(n+2)}.$$

⋮



در نتیجه، با تکرار این فرمولها، داریم:

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} k(k+1)(k-2)(k+3)(k-4)(k+5) \cdots (k+2n-1)a_0,$$

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (k-1)(k+2)(k-3)(k+4)(k-5)(k+6) \cdots (k+2n)a_1.$$

بنابراین، جواب عمومی لژاندر عبارتست از:

$$\mathcal{S} : y = AS_k(x) + BT_k(x).$$

که در آن:

$$S_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}k(k+1)x^2 + \frac{1}{24}k(k+1)(k-2)(k+3)x^4 + \cdots$$

$$T_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$$

$$= x - \frac{1}{6}(k-1)(k+2)x^3 + \frac{1}{120}(k-1)(k+2)(k-3)(k+4)x^5 + \cdots$$

- چنانچه  $k$  عدد صحیح مثبت فرد  $(1, 3, 5, \dots)$  و یا عدد صحیح منفی زوج  $(-2, -4, \dots)$  باشد، سری توان  $T_k(x)$  مختوم خواهد بود و عملاً چند جمله‌ای می‌باشد.

- چنانچه  $k$  عدد صحیح مثبت زوج  $(2, 4, 6, \dots)$  و یا عدد صحیح منفی فرد  $(-1, -3, -5, \dots)$  باشد، سری توان  $S_k(x)$  مختوم خواهد بود و عملاً یک چند جمله‌ای می‌گردد.

- چنانچه  $k$  صحیح نباشد، هر دو سری  $S_k$  و  $T_k$  نامتناهی اند. آنها توابعی پیوسته از  $x$  بر بازه  $(-1, 1)$  می‌باشند. در این حالت  $S_k$  و  $T_k$  را توابع لژاندر با شاخص  $k$  می‌نامند.

**۳.۴.۴. تعریف** در صورتی که  $k$  عددی صحیح باشد، معادله لژاندر با شاخص  $k$  دارای لااقل یک جواب به شکل چند جمله‌ای است. آن جواب را چند جمله‌ای لژاندر با شاخص  $k$  می‌نامیم و با نماد  $P_k(x)$  نشان می‌دهیم.

**۴.۴.۴. مثال** چند جمله‌ای لژاندر با شاخص  $0, 1, 2, 3, 4$  به ترتیب عبارتند از:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad P_4(x) = 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4.$$

البته در آنها به ترتیب فرض شده است:

$$a_0 = \frac{3}{8}, \quad a_1 = \frac{-3}{2}, \quad a_0 = \frac{-1}{2}, \quad a_1 = 1, \quad a_0 = 1.$$

**۵.۴.۴. فرمول کلی**  $n$  امین چند جمله‌ای لژاندر عبارتست از:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} k = 0 \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-2k)!(n-k)!} x^{n-2k}.$$

اقتصاددان فرانسوی، الین رودریگز (۱۷۹۴ تا ۱۸۵۱) نیز فرمولی مختصر به شرح ذیل برای محاسبه چند جمله‌ایهای لژاندر دارد:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

۶.۴.۴. مثال با استفاده از دو فرمول بالا داریم:

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(-1)^k (6-2k)!}{k!(3-2k)!(3-k)!} x^{3-2k} = \frac{1}{8} \left( \frac{6!}{0!3!3!} x^3 - \frac{4!}{1!1!2!} x \right) \\ &= \frac{1}{8} (20x^3 - 12x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x), \\ P_4(x) &= \frac{1}{2^3 \cdot 3!} \frac{d^3}{dx^3} (x^2 - 1)^3 = \frac{1}{48} \frac{d^3}{dx^3} (x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1) \\ &= \frac{1}{48} \frac{d^2}{dx^2} (6x^5 - 12x^3 + 6x) = \frac{1}{48} (30x^4 - 36x^2 + 6)' = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x). \end{aligned}$$

۷.۴.۴. قضیه چند جمله‌ایهای لژاندر، خواص به شرح زیر را دارند:

- 1)  $(n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) = (2n+1)xP_n(x)$ ,
- 2)  $P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$ ,
- 3)  $P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x)$ ,
- 4)  $\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0; m \neq n$ ,
- 5)  $\int_{-1}^1 (P_n(x))^2 dx = \frac{2}{2n+1}$ .

#### ۸.۴.۴. تمرینات

(۱) چند جمله‌ایهای  $P_7(x), P_6(x), P_5(x)$  را به دست آورید.

(۲) به کمک ۴-۴-۷ نشان دهید:

$$(n+1) \int_{-1}^1 P_{n+1}^2(x) dx = (2n+1) \int_{-1}^1 xP_n(x)P_{n+1}(x) dx$$

(۳) ثابت کنید که اگر  $|x| \leq 1$  و  $|t| < 1$ ، آنگاه:

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = P_0(x) + P_1(x)t + P_2(x)t^2 + \dots + P_n(x)t^n + \dots$$

(۴) به کمک (۳) ثابت کنید  $P_n(1) = 1$ .

(۵) نشان دهید که اگر  $Q(x)$  یک چند جمله‌ای از درجه کمتر از  $n$  باشد، آنگاه:

$$\int_{-1}^1 Q(x)P_n(x)dx = 0.$$

(۶) ثابت کنید  $P_n^{(n)}(x) = (2n)!/(2^n \cdot n!)$ .

(۷) نشان دهید که اگر  $n \geq 1$  آنگاه  $\int_0^1 P_{2n}(x)dx = 0$ .

(۸) ثابت کنید که اگر  $0 \leq m \leq n$ ، آنگاه  $\int_{-1}^1 P'_n(x)P_m(x)dx = 1 - (-1)^{n+m}$ .

---

## فهرست مطالب

---

### فصل ۴ حل معادلات دیفرانسیل به کمک سریها

۱	.....	سری توان	۱.۴
۹	.....	سری فروبینیوس	۲.۴
۲۰	.....	توابع بسل	۳.۴
۲۴	.....	چند جمله‌ایهای لژاندر	۴.۴