

مسائل

۱۱.۳ ثابت کنید اگر G گروهی آبلی با عضوهایی e باشد، آنگاه مجموعه H مشتمل از تمام عضوهایی چون x از G که در معادله $x^2 = e$ صدق می کنند یک زیرگروه G است.
۱۴.۳ فرض کنید زیرمجموعه نامتناهی و متناهی H از گروه G تحت عمل G بسته باشد. ثابت کنید که H یک زیرگروه G است.

۷.۵ نشان دهید که برای هر زیرگروه H از S_n ، $n \geq 2$ ، یا تمام جایگشت های H یا دقیقاً نصف آن ها زوج هستند.

مساله: اگر G گروه باشد و a عضوی از مرتبه m در G باشد. نشان دهید که اگر $a^n = e$ آنگاه $m \mid n$.

۴.۸ همه زیرگروه های واقعی و نامرئی $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ را پیدا کنید.
۱۸.۱۲ (آ) نشان دهید که تمام مؤدرخیتی های یک گروه G با عمل ترکیب توابع یک گروه است.
(ب) نشان دهید که مجموعه تمام مؤدرخیتی های داخلی هر گروه G یک زیرگروه همپار گروه تمام مؤدرخیتی های G تحت ترکیب توابع است. [هشدار: فراموش نکنید نشان دهید که مؤدرخیتی های داخلی همپار یک گروه تشکیل می دهند.]

۳.۱۳ چند مؤدرخیتی از $\mathbb{Z}$ به $\mathbb{Z}$ وجود دارد؟ از $\mathbb{Z}_2$ به $\mathbb{Z}$ ؟ از $\mathbb{Z}$ به $\mathbb{Z}_2$ ؟

۵.۱۵ فرض کنید $\phi: \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_3$ هرختی باشد که $\phi = 2$. آ، هسته K از ϕ را بیابید. (ب) با نشان دادن اعضای هر هسته، هسته های عضو $\mathbb{Z}_{12}/K$ را فهرست کنید. (ج) تناظر بین $\mathbb{Z}_{12}/K$ و $\mathbb{Z}_3$ را به سادگی با نگاشت ψ در قضیه اول هرختی ها را بدست آورید.

(32)

118-12

نکته الف) $H = \{ \varphi / \varphi : G \rightarrow G \}$ φ : آیزومورفیسم

$$I : G \rightarrow G$$

$$\lambda I = \lambda \Rightarrow I \in H \Rightarrow H \neq \emptyset$$

$$\varphi_1 : G \rightarrow G, \varphi_2 : G \rightarrow G$$

$$\varphi_1, \varphi_2 \in H \Rightarrow \varphi_1 \circ \varphi_2 \in H$$

$$\varphi_1 \circ \varphi_2 : G \rightarrow G$$

$$(\lambda y) \varphi_1 \circ \varphi_2 = ((\lambda y) \varphi_1) \varphi_2 = (\lambda (\varphi_1 y)) \varphi_2$$

$$= ((\lambda (\varphi_1 y)) \varphi_2) = ((\lambda y) \varphi_1 \circ \varphi_2) = ((\lambda y) (\varphi_1 \circ \varphi_2))$$

کمیته‌های مورد نیاز در مورد تغییر خواص گروه هم چنین به نظر می‌رسد

$$H = \{ \varphi / \varphi : G \xrightarrow{\text{آیزومورفیسم}} G \}$$

(ب)

$$K = \{ \varphi / \varphi : G \xrightarrow{\text{آیزومورفیسم}} G \}$$

نکته ب) $K \trianglelefteq H$

$$hkh^{-1} \in K \quad \forall k \in K, \forall h \in H$$

$$\lambda g: G \rightarrow G$$

$$\bar{\lambda} g \in G$$

۱۸-۱۲

$$\kappa \lambda g = g \kappa g^{-1}$$

تست ب)

$$H = \{ \lambda g \mid g \in G \} \quad (H, \circ)$$

$$H \neq \emptyset \Rightarrow (\exists \lambda e = \lambda e \in H)$$

$$\lambda g_1, \lambda g_2 \in H \Rightarrow \kappa \lambda g_1 = g_1 \kappa g_1^{-1}$$

$$\cdot \kappa \in G \text{ با هر } \kappa \lambda g_2 = g_2 \kappa g_2^{-1}$$

$$\kappa (\lambda g_1 \circ \lambda g_2) = (\kappa \lambda g_1) \lambda g_2 = (g_1 \kappa g_1^{-1}) \lambda g_2 = g_1 (g_1 \kappa g_1^{-1}) g_1^{-1} \lambda g_2$$

$$= (g_1 g_1) \kappa (g_1 g_1)^{-1} = \kappa (\lambda g_1 g_2)$$

$$\lambda g_1 \circ \lambda g_2 = \lambda g_1 g_2 \in H$$

$$\lambda g \circ \lambda g^{-1} = \lambda g g^{-1} = \lambda e, \lambda g^{-1} \circ \lambda g = \lambda g^{-1} g = \lambda e \quad \Rightarrow (\lambda g)^{-1} = \lambda g^{-1}$$

$$\lambda g \in H \Rightarrow (\lambda g)^{-1} = \lambda g^{-1} \in H$$

(H, o) زیرگروه است.



Scanned with CamScanner

$$\theta: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

از سبب این که
نقطه خنجریم و در هر عدد (بردار) $\mathbb{Z}$

$$\{9\theta \mid 9 \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} \cdot 9 = \mathbb{Z}$$

در سبب این که
نقطه خنجریم (از سبب این که)

$$\{(a\theta)^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

از سبب این که 13-3

اگر θ بیرون باشد

$$\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$$

$$\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 1\theta = 1 \quad \vee \quad 1\theta = -1$$

$$\text{اگر } 1\theta = 1 \Rightarrow \text{مگر } m\theta = (1 + \dots + 1)\theta = 1\theta + 1\theta + \dots + 1\theta = 1 + 1 + \dots + 1 = m$$

$$(-m)\theta = -(m\theta)$$

$$\{(a^{-1})\theta = (a\theta) \quad \text{درین باره}$$

$$(-a)\theta = -(a\theta) \quad \text{در سبب این که}$$

$$0\theta = 0$$

$$\therefore \theta = \mathbb{Z}$$

بنا بر این

$$\text{اگر } 1\theta = -1$$

$$m > 0 \quad m\theta = -m$$

$$(-m)\theta = -(m\theta) = -(-m) = m$$

$$0\theta = 0$$

بنا بر این حالت $m\theta = -m$ برای هر $m \in \mathbb{Z}$

$$\psi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

بنا بر حالت زیر سبب این که

$$1\psi = m$$

$$m \in \mathbb{Z}$$

نقطه خنجریم ψ بیرون نیست

$$\text{اگر } m = 0 \quad 1\psi = 0$$

$$\psi \equiv 0$$

$$0\psi = 0 \quad \text{چون در هر بار}$$

حال فرض کنیم که $m \neq 0$

$$\phi \psi = 0$$

$$(1 + \bar{1}) \psi = 0$$

$$\bar{1} \psi + \bar{1} \psi = 0$$

$$m + m = 0$$

$$2m = 0 \Rightarrow m = 0$$

پس m نمی تواند غیر صفر باشد
تنهایی یک فرضیه دایره

$$\phi: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2$$

$$\forall m \in \mathbb{Z}$$

$$1\phi = \bar{1}$$

$$m\phi = m(1\phi)$$

$$0\phi = \bar{0}$$

$$= m \cdot \bar{1} = \bar{m} = \begin{cases} \bar{0} & m = 2k \\ \bar{1} & m = 2k+1 \end{cases} \quad \begin{matrix} k \in \mathbb{Z} \end{matrix}$$

یک نگاشت دایره دارد

فرض کنید $\phi: \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_3$ همرنگی باشد که $1\phi = 2$ و $2\phi = 1$ باشد. (ب) با نشان داد

15-5 / اعضای هر دسته، هر دسته‌ای عضو $\mathbb{Z}_{12}/K$ را فهرست کنید.
 (ج) تناظر بین $\mathbb{Z}_2$ و $\mathbb{Z}_{12}/K$ ارائه شده، ψ در قضیه اول همرنگی‌ها را بدست آورید.

$$\phi: \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_3$$

$$1\phi = 2, K_\phi = ?$$

$$0\phi = 0$$

$$K_\phi = \{m \in \mathbb{Z}_{12} / m\phi = 0\} = \{0, 3, 6, 9\}$$

$$\begin{matrix} 0\phi = 0 \\ 1\phi = 2 \end{matrix} \\ 2\phi = (1+1)\phi = 1\phi + 1\phi = 2 + 2 = 1$$

$$3\phi = (1+1+1)\phi = 1\phi + 1\phi + 1\phi = 2 + 2 = 0$$

$$4\phi = 2\phi + 2\phi = 1 + 1 = 2$$

$$5\phi = 4\phi + 1\phi = 2 + 2 = 1$$

$$6\phi = 1\phi + 5\phi = 2 + 1 = 0$$

$$7\phi = 1\phi + 6\phi = 2 + 0 = 2$$

$$8\phi = 1\phi + 7\phi = 2 + 2 = 1$$

$$9\phi = 1\phi + 8\phi = 2 + 1 = 0$$

$$10\phi = 1\phi + 9\phi = 2 + 0 = 2$$

$$11\phi = 1\phi + 10\phi = 2 + 2 = 1$$

$$12\phi = 0$$

$$\mathbb{Z}_{12}/K = \{3 + K, 6 + K, 9 + K\}$$

$$= \{K, 1+K, 2+K\}$$

(ج)

$$\mathbb{Z}_{12}/K \rightarrow \mathbb{Z}_3$$

$$\phi: G \rightarrow G'$$

$$K_\phi = K$$

$$\phi$$

$$\pi_K: G \rightarrow G/K$$

$$\psi: G/K \rightarrow G_\phi$$