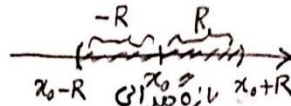


40



مثل معادلات دیگر را نیز به وسیلهٔ سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

اگر $|x-x_0| < \infty \leq R = \infty$

$$|x-x_0| < R \Rightarrow -R < x-x_0 < R \Rightarrow -R+x_0 < x < x_0+R$$

بازه همگرائی را در نظر بگیرید $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ مثال: سری توانی

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = \infty$$

$$|x-x_0| < R_1, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad \text{فرض:}$$

$$|x-x_0| < R_2, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$$

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) (x-x_0)^n \quad \text{در انصورت}$$

$$R = \min(R_1, R_2) \quad |x-x_0| < R$$

$$c f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c a_n (x-x_0)^n, \quad |x-x_0| < R_1$$

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n, \quad c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

$$= \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x-x_0)^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x-x_0)^n \quad \text{مثال: فرض کنیم}$$

$$|x-x_0| < 1$$

$$|x-x_0| < 1$$

$$f(x) \cdot g(x) = ? \quad f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$$

$$c_n = \sum_{k=0}^n (k+1) = \frac{n(n+1)}{2} \quad f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} (x-x_0)^n$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \quad |x-x_0| < R \quad \text{فرض کنیم}$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} \quad |x-x_0| < R$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-x_0)^{n-2}$$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x-x_0)^k = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-x_0)^n \quad n-1=k$$

$$f''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} (x-x_0)^k \quad n-2=k$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-x_0)^n \quad |x-x_0| < R$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (x-x_0)^n$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad \text{قضيه: فرضي في } |x-x_0| < R$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b (x-x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} \right]_a^b \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{(b-x_0)^{n+1}}{n+1} - \frac{(a-x_0)^{n+1}}{n+1} \right] \end{aligned}$$

$$a_n = 0 \quad \forall n \quad \text{فقط } \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

بسط سري تيلور، فقط: x_0

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

$x_0 = 0$ سري مك لور، بسط في 0

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad |x| < \infty$$

$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x$$

$$f(0) = 1$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad a_0 = f(0) = e^0 = 1, \quad a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{1}{1!}$$

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{1}{2!}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$|x| < \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1) x^{2n}}{(2n+1)!} \Rightarrow \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, |x| < \infty$$

$$1 + x + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, |x| < 1$$

مقدار با یک سری مرتبه ربع را بداند.

$$\frac{1}{2-3x} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{3}{2}x} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}x\right)^n, \left|\frac{3}{2}x\right| < 1$$

$$\frac{3}{2}|x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{2}{3} \quad \& \quad \frac{1}{2-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n+1}} x^n$$

مقدار با یک سری مرتبه ربع $\ln(1+x)$ را بداند.

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt$$

$$\left(\frac{1}{1+t} = \frac{1}{1-(-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_0^x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

تمرین: با یک سری مرتبه ربع $\text{Arc tg } x$ را بداند.

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, |x| < 1$$

$$(1+s^2)^{-1/2} = \left(s^2 \left(1 + \frac{1}{s^2}\right)\right)^{-1/2} = \frac{1}{s} \left(1 + \frac{1}{s^2}\right)^{-1/2}$$

حال با $\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)^{-1/2}$ را بداند.

- تعریف: معادله دیفرانسیل $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$ را در نظر بگیرید.
نقطه $x = x_0$ را یک نقطه معمولی یا عادی برای معادله (۱) می‌گوییم اگر تمام ضرایب $a_0, \dots, a_{n-1}$ در نقطه $x = x_0$ کلیه باشند. (در نقطه x_0 دارای یک سری تیلور باشند) و در غیر این صورت نقطه x_0 را یک نقطه غیر عادی و منفرد می‌گوییم.

مثال: معادله دیفرانسیل $x^2 y'' + x y' + (x^2 - \alpha^2) y = 0$ را در نظر بگیرید.

نقطه متغیر را پیدا کنید.

فقط کافی است نقطه متغیر را پیدا کنیم. بقیه نقاط معمولی خواهد بود.

$$y'' + \frac{1}{x} y' + (1 - \frac{\alpha^2}{x^2}) y = 0$$

فقط در $x=0$ تفریق نده و تنها نقطه متغیر این معادله دینفرانس است.

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$$

در نقاطی که خارج صفر می شود در واقع متوقف نمی باشد $x = \pm 1$.

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2} y' + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2} y = 0$$

$$x(x^2-1)(x+2)y'' + 3xy' + y = 0$$

$$y'' + \frac{3}{(x^2-1)(x+2)} y' + \frac{1}{x(x^2-1)(x+2)} y = 0$$

$x = 0, -2, \pm 1$

قضیه: فرض کنید تمام ضرایب معادله دینفرانس (۱) در نقطه $x=x_0$ تجزیه باشند و هر کدام از این توابع توسط بسط سری تیلور خود در نقطه x_0 نمایش داده شوند. هر سری $|x-x_0| < R$ همگرا باشند. در این صورت هر جواب معادله دینفرانس (۱) به صورت I دارای بسط سری تیلور در نقطه x_0 است $I = (-R+x_0, R+x_0)$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

معادله دینفرانس برسد سری.

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0 \quad x=x_0 \text{ تجزیه باشند}$$

$$a_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x-x_0)^n \quad |x-x_0| < R$$

حال جواب را به شکل $y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x-x_0)^n$ $|x-x_0| < R$ در بعضی جاها تابع $n=0$ و در بعضی جاها n ختم می باشد.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(x-x_0)^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n = \sin x$$

معادله $-y'' + y' + 2y = 0$ را در نقطه $x=0$ حل کنید

$$x-2=t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dt}{dx} = 1$$

اگر تغییر متغیر خطی باشد در متغیر تغییر می کند.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$\Rightarrow [2(t+2)+1] y'' + y' + 2y = 0 \quad t=0$$

اگر $x=0$ نباشد برای حل معادله دیفرانسیل از تغییر متغیر $t=x$ استفاده خواهیم کرد.

۱- ضرایب در نقطه $x=0$ تحلیلی می باشد.

$$y'' + \frac{1}{2x+1} y' + \frac{2}{2x+1} y = 0$$

$$\frac{1}{1+2x} = \frac{1}{1-(-2x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n \quad |2x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n$$

در نقطه $x = -\frac{1}{2}$ نمی توانیم زیرا تحلیلی نمی باشد.

$$\frac{2}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{n+1} x^n, \quad |x| < \frac{1}{2}$$

$$\text{اگر جواب معادله را بصورت } y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \text{ برای } |x| < \frac{1}{2}$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n, \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) A_n x^{n-2}$$

مشتقات را در معادله دیفرانسیلی که خارج قرار می دهیم

$$(1+2x) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) A_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n A_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2 A_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) A_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} 2n(n-1) A_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n A_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2 A_n x^n = 0$$

همه سرها باید با یک توان x درجه هم ای که در آن سرها وجود دارد نوشته شوند.

$$2A_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1) A_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} 2n(n-1) A_n x^{n-1} + A_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n A_n x^{n-1} +$$

$$2A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2A_n x^n = 0$$

$$T = (2A_2 + A_1 + 2A_0) + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)A_n x^{n-2} + \sum_{n=3}^{\infty} 2n(n-1)A_{n-1} x^{n-2} + \sum_{n=3}^{\infty} (n-1)A_{n-1} x^{n-2} + \sum_{n=3}^{\infty} 2A_{n-2} x^{n-2} = 0$$

$$(2A_2 + A_1 + 2A_0) + \sum_{n=3}^{\infty} [n(n-1)A_n + (n-1)(2n-3)A_{n-1} + 2A_{n-2}] x^{n-2} = 0$$

$$2A_2 + A_1 + 2A_0 = 0 \quad \text{و وقتی که سری صفری شود که تمام ضرایب صفر باشند}$$

$$n(n-1)A_n + (n-1)(2n-3)A_{n-1} + 2A_{n-2} = 0 \quad n \geq 3 \quad \text{رابطه بازگشتی}$$

(یعنی از روی آن که می توان A_n ها را بدست آورد)

از معادله اول A_2 را بر حسب A_1 و A_0 بدست آورده و در رابطه دوم هم $n=3$ قرار داده و A_3

$$A_2 = -\frac{1}{2}A_1 - A_0 \quad \text{بر حسب } A_1 \text{ و } A_0 \text{ بدست می آوریم}$$

$$n=3, \quad (3)(2)A_3 + (2)(3)A_2 + 2A_1 = 0$$

$$6A_3 = 3A_1 + 6A_0 - 2A_1 \Rightarrow A_3 = \frac{1}{6}A_1 + A_0$$

$$n=4, \quad 12A_4 + 15A_3 + 2A_2 = 0$$

$$12A_4 = -\frac{15}{6}A_1 - 15A_0 + A_1 + 2A_0 \Rightarrow 12A_4 = -\frac{3}{2}A_1 - 13A_0$$

$$A_4 = -\frac{1}{8}A_1 - \frac{13}{12}A_0 \quad y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots$$

$$y = A_0 + A_1 x + \left(-\frac{1}{2}A_1 - A_0\right)x^2 + \left(\frac{1}{6}A_1 + A_0\right)x^3 + \left(-\frac{1}{8}A_1 - \frac{13}{12}A_0\right)x^4 + \dots$$

$$y = A_0 \left(1 - x^2 + x^3 - \frac{13}{12}x^4 + \dots\right) + A_1 \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{8} + \dots\right)$$

$$A_0 = 0, A_1 = 1 \quad y_1 = 1 - x^2 + x^3 - \frac{13}{12}x^4 + \dots$$

$$A_0 = 1, A_1 = 0 \quad y_2 = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{8} + \dots$$

برای $|x| < \frac{1}{2}$ ، x ها متقارب هستند y_1 و y_2 مستقل خطی هستند

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0$$

$$x=0 \quad y_1=1, y_2=0 \quad C_1=0 \Rightarrow C_2 y_2=0 \Rightarrow C_2=0$$

مثال 12-167: جواب عمومی معادله دیفرانسیل را بر حسب سری توان حول نقطه داده شده

به بیان کنید.

در نقطه $x=1$ باید محلی باشد $y'' + (x-1)y' + y = 0, x_0 = 1$

برای هر x $|x| < \infty$ اگر نقطه منفرد باشد باید محلی است. اگر در خارج صفر باشد باید بسط را بنویسیم
 اگر $\frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{(x-1)+1} = 1 - \frac{1}{1 - (-(x-1))} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$
 $|x-1| < 1$

$x-1=t \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2Y}{dt^2} \quad Y'' + tY' + Y = 0$

$Y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n, \quad Y' = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n t^{n-1}, \quad Y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) A_n t^{n-2}$

$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) A_n t^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n A_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n = 0$

$2A_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1) A_n t^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n A_n t^{n-1} + A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n t^n = 0$

$(2A_2 + A_0) + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1) A_n t^{n-2} + \sum_{n=3}^{\infty} (n-2) A_{n-2} t^{n-2} + \sum_{n=3}^{\infty} A_{n-2} t^{n-2} = 0$

$(2A_2 + A_0) + \sum_{n=3}^{\infty} [n(n-1) A_n + (n-1) A_{n-2}] t^{n-2} = 0$

$2A_2 + A_0 = 0 \Rightarrow A_2 = -\frac{A_0}{2} \quad n(n-1) A_n + (n-1) A_{n-2} = 0, n \geq 3$

$A_n = -\frac{A_{n-2}}{n}, \quad A_3 = -\frac{A_1}{3}, \quad A_4 = -\frac{A_2}{4} = \frac{A_0}{2.4}$
 $A_5 = \frac{A_1}{3.5}, \quad A_6 = -\frac{A_0}{2.4.6}, \quad A_7 = -\frac{A_1}{3.5.7}$

$A_{2n} = \frac{(-1)^n A_0}{2.4 \dots (2n)}, \quad A_{2n+1} = \frac{(-1)^n A_1}{3.5 \dots (2n+1)}$

$Y = A_0 + A_1 t + A_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2.4 \dots (2n)} t^{2n} + A_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3.5 \dots (2n+1)} t^{2n+1}$

$y(x) = A_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2.4 \dots (2n)} (x-1)^{2n} \right] + A_1 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3.5 \dots (2n+1)} (x-1)^{2n+1} \right]$

برای هر x متقارب است. $|x| < \infty$ اگر $|x - x_0| < R$ متقارب است و در انضوری برابر هم متقارب می‌شود.

169 - 11

$$y'' - (x^2) y = 0 \quad x_0 = 0$$

$$x^2 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + A_5 x^5 + \dots$$

$$y' = 0 + A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + 4A_4 x^3 + 5A_5 x^4 + \dots$$

$$y'' = 2A_2 + 6A_3 x + 12A_4 x^2 + 20A_5 x^3 + \dots$$

$$2A_2 + 6A_3 x + 12A_4 x^2 + 20A_5 x^3 + \dots - (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots)(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \dots) = 0$$

$$2A_2 = 0 \Rightarrow A_2 = 0$$

$$6A_3 - A_0 = 0 \Rightarrow A_3 = \frac{A_0}{6}, \quad 12A_4 - A_1 = 0 \Rightarrow A_4 = \frac{1}{12} A_1$$

$$20A_5 - A_2 + \frac{A_0}{6} = 0 \Rightarrow A_5 = -\frac{A_0}{120}$$

$$y = A_0 + A_1 x + \frac{1}{6} A_0 x^3 + \frac{1}{12} A_1 x^4 - \frac{1}{120} A_0 x^5 + \dots$$

$$= A_0 \left[1 + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \dots \right] + A_1 \left[x + \frac{x^4}{12} + \dots \right]$$

$$y_1 \quad y_2$$

برای هر x متقارب است. $|x| < \infty$

$$(3 - 4x + x^2) y'' - 6y = 0, \quad x_0 = 2$$

14 - 167

$$t = x - 2, \quad x = t + 2$$

$$[3 - 4(t+2) + (t+2)^2] Y'' - 6Y = 0 \Rightarrow [t^2 - 1] Y'' - 6Y = 0, \quad t = 0$$

$$Y'' - \frac{6}{t^2 - 1} Y = 0, \quad Y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n \quad |t| < 1$$

$$\frac{6}{1-t^2} = 6 \sum_{n=1}^{\infty} t^{2n}, \quad |t^2| < 1, \quad |t| < 1$$

$$Y' = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n t^{n-1}, \quad Y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) A_n t^{n-2}$$

$$[t^2 - 1] \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) A_n t^{n-2} - 6 \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n = 0$$

تکرار.

- در مسائل زیر تحقیق کنید $x=0$ یک نقطه معمولی معادله دیفرانسیل است و جواب عمومی را بر حسب سری توان حول این نقطه بیان کنید.

الف) $(2+x^2)y'' + 6xy' + 4y = 0$

ب) $y'' + xy = 0$

- در مسائل زیر جواب عمومی دستگاه را پیدا کنید. همچنین هرگاه شرایط اولیه داده شده باشد جوابی را که در این شرایط صدق می کند، پیدا کنید

الف) $Dx_1 = -4x_1 - 6x_2 + 9e^{3t} \quad x_1(0) = -9, x_2(0) = 4$

$Dx_2 = x_1 - x_2$

ب) $(D^3 - 2D^2 + 3D)x_1 + (2D^2 - 8)x_2 = 4 - 6t$

$Dx_1 - (D+2)x_2 = -2t$

ج) $Dx_1 = x_1 - 2x_2 - t^2$

$Dx_2 = x_1 + x_3 - 1 - t^2$

$Dx_3 = -2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2t^2 + 2t$