

میدانیم که معادلات دینامیک متغیر است از آنجا که مقدارهای متغیر (از 2) به سمت تعدادی متغیرهای وابسته و متغیر متغیر و مشتقات آن ها
مثال: حرکت یک مرکز ثقل یک جسم

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} = \text{مکان جسم در زمان } t$$

$$m(x''\vec{i} + y''\vec{j} + z''\vec{k}) = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k} \quad \vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$$

$$\begin{cases} F_1 = m x'' \\ F_2 = m y'' \\ F_3 = m z'' \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{در راستای مولدهای} \\ \text{در راستای نیرو، توالی معادلات از} \\ \text{متغیر } x_1, x_2, x_3 \text{ و مشتقات } x_1', x_2', x_3' \end{array} \right\}$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{dx_1}{dt} + x_2 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} + x_2 = 0$$

چون با روشی مرتب بصورت (x_1, x_2) هستند در هر دو معادله صدق می کنند. برای حل:

$$\int \frac{dx_2}{x_2} = \int -dt \Rightarrow \ln |x_2| = -t + C_1'$$

$$|x_2| = e^{C_1' - t} = C_1 e^{-t} \quad C_1 \text{ هر مقداری میتواند باشد بجز صفر}$$

$$\boxed{|x_2| = C_1 e^{-t}}$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{dx_1}{dt} = -C_1 e^{-t}$$

ابتدا جواب عمومی معادله همگن را بدست می آوریم.

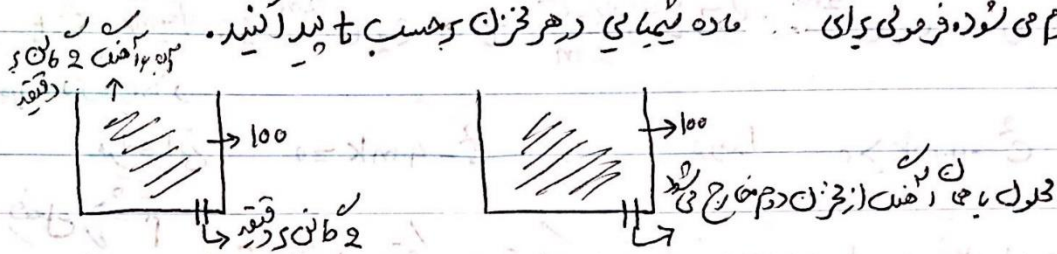
$$x_1'' + x_1' = 0 \quad \phi(r) = r(r+1) = 0 \Rightarrow r=0, r=-1 \Rightarrow y_n(x) = C_2 + C_3 e^{-t}$$

$$x_{ip} = A e^{-t} \Rightarrow x_{ip} = A t e^{-t} \Rightarrow x_{ip}' = A(1-t)e^{-t}$$

$$x_{ip}'' = -2A e^{-t} + A t e^{-t} \Rightarrow -A e^{-t} = -C_1 e^{-t} \Rightarrow A = C_1$$

$$\boxed{x_1 = C_2 + C_3 e^{-t} + C_1 t e^{-t}}$$

مسئله در مخزن که هر یک حاوی ۱۰۰ گالن مخلوط شیمیایی است که در مخزن اول ۲۰ پوند ماده شیمیایی و مخزن دوم ۱۰ پوند از همان ماده شیمیایی است. در لحظه $t=0$ ، آب با نرخ ۲ گالن بر دقیقه به مخزن اول وارد می شود و مخلوط با نرخ ۲ گالن بر دقیقه از مخزن اول وارد مخزن دوم می شود. فرمولی برای ماده شیمیایی در هر مخزن به حساب آورده شود.



مقدار ماده شیمیایی در مخزن دوم: $x_2(t)$ مقدار ماده شیمیایی در مخزن اول: $x_1(t)$

$$x_1(0) = 20, \quad x_2(0) = 10$$

مقدار ماده شیمیایی که از مخزن اول خارج می شود: $\frac{dx_1}{dt}$ مقدار ماده شیمیایی که در مخزن اول وارد می شود: $\frac{dx_2}{dt}$

$$\frac{dx_1}{dt} = 0 - \frac{2x_1}{100} \quad \text{و} \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{2x_1}{100} - \frac{2x_2}{100}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{50}x_1$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{50}x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{50}(x_1 - x_2) \end{cases}$$

$$x_1 = C_1 e^{-\frac{1}{50}t} \quad \leftarrow \quad \frac{dx_1}{x_1} = -\frac{1}{50}dt$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{C_1}{50} e^{-\frac{1}{50}t} - \frac{1}{50}x_2 \Rightarrow \frac{dx_2}{dt} + \frac{1}{50}x_2 = \frac{C_1}{50} e^{-\frac{1}{50}t}$$

$$\mu = e^{\int \frac{1}{50} dt} = e^{\frac{1}{50}t}, \quad e^{\frac{1}{50}t} \frac{dx_2}{dt} + \frac{1}{50} e^{\frac{1}{50}t} x_2 = \frac{C_1}{50}$$

$$\frac{d}{dt} (e^{\frac{1}{50}t} x_2) = \frac{C_1}{50} \Rightarrow e^{\frac{1}{50}t} x_2 = \frac{C_1}{50} t + C_2$$

$$x_2 = \frac{C_1}{50} t e^{-\frac{1}{50}t} + C_2 e^{-\frac{1}{50}t}$$

$$x_1 = 20 e^{-\frac{1}{50}t}, \quad x_2(0) = 10, \quad c_2 = 10 \quad x_2 = \frac{2}{5}t e^{-\frac{1}{50}t} + 10 e^{-\frac{1}{50}t}$$

توضیح: مقدار دستگاه معادلات دیفرانسیل بصورت زیر را یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول می نامیم.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(t_0) = k_1 \\ x_2(t_0) = k_2 \\ \vdots \\ x_n(t_0) = k_n \end{cases}$$

مثال: معادله دیفرانسیل مرتبه n ام $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ را بصورت دستگاه معادلات مرتبه اول با شرایط اولیه بنویسید.
 $y(x_0) = k_1, y'(x_0) = k_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = k_n$
 (دستگاه معادلات دیفرانسیل با شرایط اولیه را به نام دستگاه معادلات مرتبه اول می نامیم)

$$u_1 = y, \quad u_2 = y', \quad \dots, \quad u_n = y^{(n-1)}$$

$$\frac{du_1}{dx} = y' = u_2$$

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dx} = u_2 \\ \frac{du_2}{dx} = u_3 \\ \vdots \\ \frac{du_n}{dx} = f(x, u_1, u_2, \dots, u_n) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{du_n}{dx} = y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ = f(x, u_1, u_2, \dots, u_n) \end{cases}$$

$$u_1(x_0) = k_1, \dots, u_n(x_0) = k_n$$

مثال: معادله دیفرانسیل مرتبه 3 داره زیر را با شرایط اولیه بصورت دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول با شرایط اولیه بنویسید.

$$y''' - 3(\sin x) y'' + (\frac{1}{2}x) y' = \cos x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 2$$

سه مجهول داریم چون مرتبه 3 است.

$$u_1 = y, \quad u_2 = y', \quad u_3 = y''$$

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dx} = u_2 \\ \frac{du_2}{dx} = u_3 \\ \frac{du_3}{dx} = 3(\sin x) u_3 - (\frac{1}{2}x) u_2 + \cos x \end{cases} \quad \begin{cases} u_1(0) = 1, u_2(0) = 0, u_3(0) = 2 \end{cases}$$

$$\frac{du_3}{dx} = 3(\sin x) u_3 - (\frac{1}{2}x) u_2 + \cos x$$

مثال: دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را بصورت یک دستگاه مرتبه اول بازنویس کنید.

$$1) \begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \sin t \frac{dx_2}{dt} + x_2 = 0 \\ \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \cos t \frac{d^2 x_2}{dt^2} - x_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} x_1(t_0) &= k_1, \quad x_2(t_0) = k_3 \\ x'_1(t_0) &= k_2, \quad x'_2(t_0) = k_4 \end{aligned}$$

$$2) \begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \sin t \frac{dx_2}{dt} + x_2 = 0 \\ \cos t \frac{d^2 x_2}{dt^2} - \sin t \frac{dx_2}{dt} + x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} u_1 &= x_1, \quad u_3 = x_2 \\ u_2 &= \frac{dx_1}{dt}, \quad u_4 = \frac{dx_2}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = u_2 & \frac{du_2}{dt} = \frac{d^2 x_1}{dt^2} \\ \frac{du_2}{dt} = (-\sin t) u_4 - u_3 \\ \frac{du_3}{dt} = u_4 \\ \frac{du_4}{dt} = (\cos t) u_4 - \frac{1}{\cos t} u_1 - \frac{1}{\cos t} u_3 \end{cases}$$

مثال: دستگاه زیر را بصورت یک دستگاه مرتبه اول بازنویس کنید.

$$\begin{cases} F(t, x_1, x'_1, \dots, x_1^{(m)}, x_2, x'_2, \dots, x_2^{(n)}) = 0 \\ G(t, x_1, x'_1, \dots, x_1^{(m)}, x_2, x'_2, \dots, x_2^{(n)}) = 0 \\ x_1^{(m)} = f(t, x_1, \dots, x_1^{(m-1)}, x_2, x'_2, \dots, x_2^{(n)}) \\ x_2^{(n)} = g(t, x_1, \dots, x_1^{(m)}, x_2, x'_2, \dots, x_2^{(n-1)}) \end{cases}$$

$$u_1 = x_1, \quad u_2 = x'_1, \quad \dots, \quad u_m = x_1^{(m-1)}$$

$$u_{m+1} = x_2, \quad \dots, \quad u_{m+n} = x_2^{(n-1)}$$

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = u_2 \\ \vdots \\ \frac{du_m}{dt} = f(t, u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_{m+n}) \\ \frac{du_{m+1}}{dt} = u_{m+2}, \dots, \quad \frac{du_{m+n}}{dt} = g(t, u_1, u_2, \dots, u_{m+n}) \end{cases}$$



Scanned with CamScanner

$$\begin{cases} x_1'' - x_1' - x_2 x_2' = \sin t & x_1(t_0) = k_1, x_1'(t_0) = k_2, x_1''(t_0) = k_3 \\ x_1'' + x_2 x_1' - x_2'' = \cos t & x_2(t_0) = k_4, x_2'(t_0) = k_5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1''' = x_1' + x_1 x_2' + \sin t & u_1 = x_1, u_2 = x_1', u_3 = x_1'' \\ x_2''' = x_1'' - x_2 x_1' - \cos t & u_4 = x_2, u_5 = x_2' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = u_2 & u_1(t_0) = k_1 \\ \frac{du_2}{dt} = u_3 & u_2(t_0) = k_2 \\ \frac{du_3}{dt} = u_2 + u_4 u_5 + \sin t & u_3(t_0) = k_3 \\ \frac{du_4}{dt} = u_5 & u_4(t_0) = k_4 \\ \frac{du_5}{dt} = u_3 - u_4 u_2 - \cos t & u_5(t_0) = k_5 \end{cases}$$

نکته: در معادله اول، با ضرب کردن در $\frac{1}{x_1}$ می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{cases} \quad (*)$$

که می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + b_i(t) \quad (1 \leq i \leq n)$$

صورت کلی دستگاه معادلات خطی مرتبه اول برای درمغیرالته $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + b_1(t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + b_2(t)$$

در هر یکی که در (*)، توابع $a_{ij}(t)$ ، توابع باشند در دستگاه معادلات را با ضرب کردن در $\frac{1}{x_1}$ می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

در این حالت،

2

(*) را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} (D-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n = b_1(t) \\ \vdots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots + (D-a_{nn})x_n = b_n(t) \end{cases}$$

373/3

$$\begin{cases} Dx_1 = -4x_1 - 6x_2 + 9e^{-3t} \\ Dx_2 = x_1 + x_2 - 5e^{-3t} \end{cases} \quad x_1(0) = -9, x_2(0) = 4$$

2)

$$\begin{cases} (D+4)x_1 + 6x_2 = 9e^{-3t} \\ (D+4)(-x_1 + (D-1)x_2) = -5e^{-3t} \end{cases} \quad (2)$$

$$[(D+4)(D-1) + 6]x_2 = 9e^{-3t} - 5(D+4)e^{-3t}$$

$$x_2'' + 3x_2' + 2x_2 = 9e^{-3t} + 15e^{-3t} - 20e^{-3t}$$

$$x_2'' + 3x_2' + 2x_2 = 4e^{-3t} \quad (1)$$

$$x_2'' + 3x_2' + 2x_2 = 0 \quad (r+2)(r+1) = 0 \Rightarrow r = -2, r = -1$$

$$x_{2h} = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \quad x_{2p} = A e^{-3t} \Rightarrow x_{2p}' = -3A e^{-3t}$$

$$x_{2p}' = 9A e^{-3t} \Rightarrow (9A - 9A + 2A) e^{-3t} = 4e^{-3t} \quad (در معادله (1) قرار می دهیم)$$

$$2A = 4 \Rightarrow A = 2 \quad x_{2p} = 2e^{-3t}$$

3)

$$x_2 = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + 2e^{-3t} \quad (1) \text{ جواب عمومی معادله (1)}$$

$$x_1 = (D-1)[c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + 2e^{-3t}] + 5e^{-3t} \quad (در معادله (2) قرار می دهیم)$$

$$x_1 = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t} - 6e^{-3t} - c_1 e^{-t} - c_2 e^{-2t} - 2e^{-3t} + 5e^{-3t}$$

$$x_1 = -2c_1 e^{-t} - 3c_2 e^{-2t} - 3e^{-3t}$$

$$x_1(0) = -9 \Rightarrow \begin{cases} -2c_1 - 3c_2 = -6 \\ c_1 + c_2 + 2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c_1 + 3c_2 = 6 \\ c_1 + c_2 = 2 \end{cases}$$

$$x_2(0) = 4 \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + 2 = 4 \\ c_1 + c_2 = 2 \end{cases}$$

$$c_2 = 2, c_1 = 0 \quad x_1 = -6e^{-2t} - 3e^{-3t}, x_2 = 2e^{-2t} + 2e^{-3t}$$

373/8-8: جواب عمومی دستگاه زیر را بدست آورید:

4)

$$\begin{cases} (D+2)x_1 + (D^2+2D)x_2 = 5e^{-t} \\ (D+1)x_1 - (D+2)x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + (D^2+3D+2)x_2 = 5e^{-t} \\ (D+1)x_1 - (D+2)x_2 = 0 \end{cases}$$

ابتدا معادله دوم را از معادله اول کم می کنیم

- دستگاه معادلات در فرایندهای زیر را حل کنید:

$$-(D+1) \begin{cases} x_1 + (D^2 + 3D + 2)x_2 = 7e^t \\ (D+1)x_1 - (D+2)x_2 = 0 \end{cases}$$

$$-[(D+1)(D+2)(D+1) - (D+2)]x_2 = -7(D+1)e^t$$

$$(D+2)((D+1)^2 + 1)x_2 = -7(-e^{-t} + e^{-t}) \rightarrow 0$$

$$(D+2)(D^2 + 2D + 2)x_2 = 0 \Rightarrow p(r) = (r+2)(r^2 + 2r + 2) = 0$$

$$x_2(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t} \cos t + c_3 e^{-t} \sin t$$

$$x_1 = -[D^2 + 3D + 2](c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t} \cos t + c_3 e^{-t} \sin t) + 7e^t$$

3730-16 دستگاه معادلات در فرایندهای زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} Dx_1 = -x_1 + x_3 \\ Dx_2 = 2x_3 \\ Dx_3 = x_1 - 2x_2 - 3x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (D+1)x_1 - x_3 = 0 \\ Dx_2 - 2x_3 = 0 \\ -(D+1)x_1 - 2x_2 - (D+3)x_3 = 0 \end{cases}$$

(معادله اول را به معادله دوم می‌کنیم)

$$\begin{cases} (D+1)x_1 - x_3 = 0 \\ Dx_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (D+1)x_1 - x_3 = 0 \\ Dx_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{این سطر را هم در } (D^2 + 4D + 2) \text{ ضرب می‌کنیم}$$

$$(2) \quad 2(D+1)x_2 + [(D+1)(D+3) - 1]x_3 = 0$$

$$\begin{matrix} D^2 + 4D + 2 & D^2 + 4D + 2 \end{matrix}$$

$$[D(D^2 + 4D + 2) + 4(D+1)]x_2 = 0 \quad p(r) = r^3 + 4r^2 + 6r + 4 = 0$$

$$r = -2, \quad r_2, r_3 = -1 \pm i \quad x_2 = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t} \cos t + c_3 e^{-t} \sin t$$

(در معادله دوم قرار دهیم و حاصل می‌شود و مقادیر x_1 و x_3 را از معادله اول و معادله دوم می‌گیریم)

361-5

dx

1. ...

در ادامه ...