

تابع اولیه (یا مستقیم) Antiderivative
 مثال: تعیین مکان یک جسم از روی سرعت آن
 $\int v(t) dt = x(t) + C$
 سرعت مکان

تعریف: F یک تابع اولیه (یا مستقیم) برای f در بازه I است هرگاه
 $F'(x) = f(x)$ برای هر $x \in I$.

توجه: اگر F یک تابع اولیه برای f باشد آنگاه بقیه توابع اولیه f از جمع F با یک

عدد ثابت بدست می آید.
 زیرا اگر G یک تابع اولیه دیگر برای f باشد آنگاه $G'(x) = f(x)$ برای هر $x \in I$ پس

$$1) F'(x) = f(x), \forall x \in I \quad 2) G'(x) = f(x), \forall x \in I$$

$$(G-F)'(x) = 0 \quad \text{پس} \quad F'(x) = G'(x), \forall x \in I$$

برای هر $x \in I$ و در نتیجه $G-F$ تابع ثابت است (نتیجه قضیه مقدار میانی)

$$x \in I \quad \text{پس} \quad G(x) - F(x) = (G-F)(x) = C$$

$$\text{و لذا} \quad x \in I \quad \text{پس} \quad G(x) = F(x) + C$$

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \text{نبا بدین} \quad \text{اگر } F \text{ یک تابع اولیه برای } f \text{ باشد می نویسیم}$$

$$\int f'(x) dx = f(x) dx \quad \text{فرمول ساده تر:}$$

$$1) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1 \quad \text{مقدارهای آسان:} \quad (در: n می تواند هر عدد گویایی باشد)$$

$$2) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad \text{زیرا} \quad (\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

$$3) \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad 4) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$4) \int \sec^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \quad \text{زیرا:}$$

$$5) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{-\sin x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} \Rightarrow (-\cot x)' = \frac{1}{\sin^2 x} = \csc^2 x$$

مثال. فرض کنید $f'(x) = x\sqrt{x}$ و $f(1) = 2$ ، $f(x)$ را پیدا کنید.
حل:

$$\int x\sqrt{x} dx = \int x^{3/2} dx = \frac{x^{3/2+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{5/2}}{5/2} + C = \frac{2}{5} x^{5/2} + C$$

پس $C = \frac{8}{5}$ و $2 = \frac{2}{5} + C$ و $f(1) = 2$ و $f(x) = \frac{2}{5} x^{5/2} + C$

لذا $f(x) = \frac{2}{5} x^{5/2} + \frac{8}{5}$

مثال. فرض کنید $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$ و $f(1) = 1$ ، $f(0) = 4$ ، $f(x)$ را بدست آورید.
حل:

$$\int f''(x) dx = f'(x) + C$$

$$\int (12x^2 + 6x - 4) dx = \int 12x^2 dx + \int 6x dx - \int 4 dx$$

$$= 12 \frac{x^3}{3} + 6 \frac{x^2}{2} - 4x + C$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + C$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = x^4 + x^3 - 2x^2 + Cx + d$$

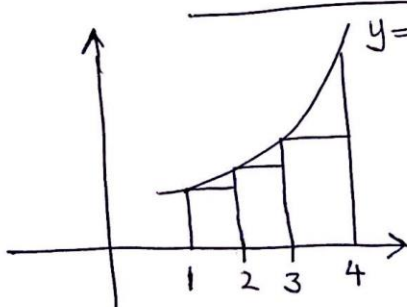
$$f(0) = 4 \Rightarrow d = 4, \quad f(1) = 1 \Rightarrow 4 + C = 1 \Rightarrow C = -3$$

$$f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - x + 4$$

توجه: $\int (c_1 f(x) + c_2 g(x)) dx = c_1 \int f(x) dx + c_2 \int g(x) dx$

$$\int dx = x + C$$

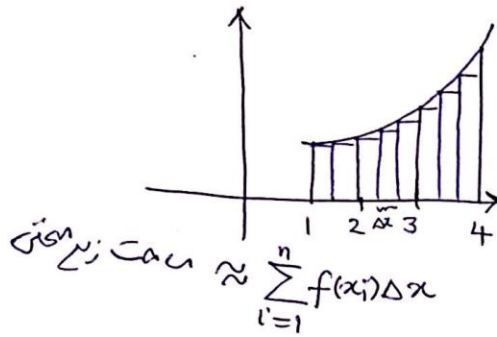
$$\int f(x)g(x) dx \neq \left(\int f(x) dx \right) \left(\int g(x) dx \right)$$



مساحت زیر منحنی $\approx$ مجموع مساحت متعلقات

$$\text{مجموع مساحت متعلقات} = f(1) \times 1 + f(2) \times 1 + f(3) \times 1$$





$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_1^4 f(x) dx$$

المعادلة السابقة:

6) $\int e^x dx = e^x + c$, 7) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ $\frac{a}{a=e} : \ln a$: ترو

$$\begin{aligned} \int (4 \sin x + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}) dx &= 4 \int \sin x dx + \int \frac{2x^5}{x} dx - \int \frac{\sqrt{x}}{x} dx \\ &= -4 \cos x + \frac{2}{7} x^5 - \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} + C \\ &= -4 \cos x + \frac{2}{7} x^5 - 2\sqrt{x} + C \end{aligned}$$

$\int du = u + c$ (ترو u : x)

$$\int f'(t) dt = \int du = u + c = f(t) + c \quad \text{و} \quad \int f'(t) dt = f(t) + c$$

$$u = f(t) \quad du = f'(t) dt$$

$$\begin{aligned} \int f'(v) dv &= f(v) + c \\ \int (2x \sqrt{1+x^2}) dx &= \int \sqrt{u} du = \int u^{1/2} du = \frac{u^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2}{3} (1+x^2)^{3/2} + c \end{aligned}$$

$u = 1+x^2, du = 2x dx$: حل

$$\Rightarrow \int 2x \sqrt{1+x^2} dx = \frac{2}{3} u^{3/2} + c = \frac{2}{3} (1+x^2)^{3/2} + c$$

$$I = \int x^3 \cos(x^4+2) dx$$

دعنا
نحل

$$u = x^4+2, \quad du = 4x^3 dx \Rightarrow x^3 dx = \frac{du}{4}$$

$$I = \int (\cos u) \frac{du}{4} = \frac{1}{4} \int \cos u du = \frac{1}{4} \sin u + c = \frac{1}{4} \sin(x^4+2) + c$$

$$(\text{مثال ٢٠٠}) \int \cos(ax) dx =$$

. جواب
: حل

$$u = ax \Rightarrow du = a dx \Rightarrow dx = \frac{du}{a}$$

$$\int \cos ax dx = \int \cos u \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \int \cos u du = \frac{1}{a} \sin u + C = \frac{1}{a} \sin ax + C$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \int \underbrace{\cos ax}_{du} dx = \frac{1}{a} \int \cos u du = \frac{1}{a} \sin u + C = \frac{1}{a} \sin ax + C$$

. جواب

$$\int \sqrt{2x+1} dx$$

: جواب : حل

$$\int \sqrt{2x+1} dx = \int \sqrt{u} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^{1/2} du = \frac{1}{2} \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{3} u^{3/2} + C = \frac{1}{3} (2x+1)^{3/2} + C$$

$$u = 2x+1, du = 2 dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

: جواب

$$u = \sqrt{2x+1}, du = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} dx = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx \Rightarrow dx = \sqrt{2x+1} du = u du$$

$$\int \sqrt{2x+1} dx = \int u du = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\sqrt{2x+1}^3}{3} + C$$

. جواب

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx = \int \frac{\frac{du}{-8}}{\frac{1}{\sqrt{u}}} = -\frac{1}{8} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{8} \int u^{-1/2} du$$

$$u = 1-4x^2, du = -8x dx, x dx = \frac{du}{-8}$$

$$= -\frac{1}{8} \frac{u^{-1/2+1}}{-1/2+1} + C = -\frac{1}{8} \times 2 u^{1/2} + C = -\frac{1}{4} \sqrt{u} + C$$

$$= -\frac{1}{4} \sqrt{1-4x^2} + C$$

$$u = \sqrt{1-4x^2} \quad du = \frac{-8x}{2\sqrt{1-4x^2}} dx = \frac{-4x dx}{\sqrt{1-4x^2}}$$

: جواب

$$\Rightarrow \frac{x dx}{\sqrt{1-4x^2}} = -\frac{1}{4} du \Rightarrow \int \frac{x dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \int -\frac{1}{4} du = -\frac{1}{4} u + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{x dx}{\sqrt{1-4x^2}} = -\frac{1}{4} \sqrt{1-4x^2} + C$$

$$\int \sqrt{1+x^2} x^5 dx = \int \sqrt{1+x^2} (x^2)^2 x dx$$

. Juso

$$u = 1+x^2, du = 2x dx, x dx = \frac{du}{2}$$

! Juso

$$x^2 = u-1$$

$$\int \sqrt{1+x^2} x^5 dx = \int x^5 \sqrt{1+x^2} dx = \int \sqrt{u} (u-1)^2 \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \int u^{1/2} (u^2 - 2u + 1) du = \frac{1}{2} \int (u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2}) du$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{u^{7/2}}{7/2} - \frac{2u^{5/2}}{5/2} + \frac{u^{3/2}}{3/2} \right) + C$$

$$= \frac{1}{7} (1+x^2)^{7/2} - \frac{2}{5} (1+x^2)^{5/2} + \frac{1}{3} (1+x^2)^{3/2} + C$$

$$I = \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

. Juso

$$\sqrt{x} = u \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 du$$

! Juso

$$I = \int \sin u \times 2 du = 2 \int \sin u du = -2 \cos u + C = -2 \cos \sqrt{x} + C$$