مسئله ۳-۱۶

$S \subseteq G \quad H_S = \{x \in G \mid \forall s \in S \ (xs = sx)\}$

ثابت کنید $H_S \leq G$

$\forall s \in S \ (se = es) \Rightarrow e \in H_S$

برای بسته بودن نشان میدهیم

$x, y \in H_S \Rightarrow x, y \in G, \ \forall s \in S \ (xs = sx \ \& \ ys = sy)$

نشان میدهیم $(xy)s = s(xy)$

$\forall s \in S \quad (xy)s = x(ys) = x(sy) = (xs)y = (sx)y$

$= s(xy) \Rightarrow (xy)s = s(xy) \quad \forall s \in S \Rightarrow xy \in H_S$

برای نشان دادن وارون:

$x \in H_S \overset{?}{\Rightarrow} x^{-1} \in H_S$

$x \in H_S \Rightarrow xs = sx \quad \forall s \in S$

$x^{-1}(xs) = x^{-1}(sx) \Rightarrow (x^{-1}x)s = (x^{-1}s)x$

$s = x^{-1}sx \overset{\text{تعویض}}{\Rightarrow} sx^{-1} = x^{-1}s \quad x^{-1} \in H_S \quad \therefore H_S \leq G$

$G = S$

$G \subseteq G \quad H_G = \{x \in G \mid \forall g \in G \ (gx = xg)\}$

حکم $H_G \leq G$ و آبلی هم هست

طبق قسمت اول زیرگروه هست. برای اثبات آبلی بودن

$x, y \in H_G$

$xy = yx$

$x, y \in H_G \quad xg = gx, \ yg = gy$

$\forall g \in G$

۵-۷) یا همه جایگشتها زوج‌اند یا دقیقاً نصف آن زوج‌اند $H \le S_n ,\ n \geq 2 \Rightarrow$

اثبات: اگر همه جایگشتهای H زوج باشند که مسئله حل است. در صورتیکه همه جایگشتها،
H زوج نباشند جایگشتی مثل $\sigma \in H$ موجود است که فرد است. فرض کنیم B
مجموعه جایگشتهای فرد H باشد، A مجموعه جایگشتهای زوج H باشد، در اینصورت
$\theta : A \to B$ تعریف می‌کنیم $\theta(\alpha) = \alpha\sigma$ ، در اینصورت:

پس θ یک به یک است $\Leftarrow$ $\theta(\alpha) = \theta(\beta) \Rightarrow \alpha\sigma = \beta\sigma \Rightarrow \alpha = \beta$

فرض کنیم $\beta \in B$ در اینصورت β جایگشت فرد است. همچنین σ^{-1} هم فرد است لذا $\beta\sigma^{-1}$
یک جایگشت زوج است. حال داریم:

$$\forall \beta \in B \Rightarrow \beta\sigma^{-1} \in A, \quad (\beta\sigma^{-1})\sigma = \beta$$

پس $|A| = |B|$.

۵-۹) A ناقص ... $xG \neq G$ [illegible]

تمرین ـ ۸۷ ـ فصل ۳

$G = \langle a \rangle \qquad G' \cong G \qquad \varphi : G \to G'$

۴-۷- ادعا می‌کنیم $G' = \langle a\varphi \rangle$

$\forall x' \in G' \Rightarrow \exists x \in G : x\varphi = x'$

$x \in G \Rightarrow x = a^m ,\ m \in \mathbb{Z}$

$x' = x\varphi = a^m\varphi = (a\varphi)^m \Rightarrow x' = (a\varphi)^m \Rightarrow x' \in \langle a\varphi \rangle$

$\therefore G' \subseteq \langle a\varphi \rangle$ [illegible] $\langle a\varphi \rangle \subseteq G'$ $\quad G' = \langle a\varphi \rangle$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_4 \qquad (0,0,0)$ $\qquad$ 1-4

$(0,0,0)$

$2(1,0,0) = (1,0,0) + (1,0,0) = (2,0,0) = (0,0,0)$

$4(1,0,1) = (1,0,1) + (1,0,1) + (1,0,1) + (1,0,1)$
$= (0,0,2) + (0,0,2)$
$= (0,0,4) = (0,0,0)$

[illegible] $(1,0,1) = (0,$ [illegible] $)$