

$$y_p' = A_0 e^{ix} + i A_0 x e^{ix} \quad y_p'' = 2i A_0 e^{ix} - A_0 x e^{ix}$$

$$y_p'' + y_p = e^{ix} \Rightarrow 2i A_0 e^{ix} = e^{ix} \Rightarrow A_0 = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$$

فست موهومی این جواب نیست از جواب بدنه اصلی است :

$$y_p = -\frac{i}{2} x (e^{ix} + i \sin x)$$

$$y_p' = -\frac{x}{2} e^{ix} \quad y_p' = -\frac{1}{2} e^{ix} + \frac{x}{2} \sin x$$

$$y_p'' = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \sin x + \frac{x}{2} \cos x$$

exam solution

116 م - 14

$$y'' + 4y' + 4y = 4e^{-2x}$$

$$p(r) = r^2 + 4r + 4 \Rightarrow r_1 = r_2 = -2$$

$$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} \quad y_p = A_0 x^2 e^{-2x} \Rightarrow y_p = A_0 x^2 e^{-2x}$$

$$y_p' = 2A_0 x e^{-2x} - 2A_0 x^2 e^{-2x}$$

$$y_p'' = 2A_0 e^{-2x} - 4A_0 x e^{-2x} - 4A_0 x e^{-2x} + 4A_0 x^2 e^{-2x}$$

$$2A_0 e^{-2x} = 4e^{-2x} \Rightarrow A_0 = 2 \quad y_p = 2x^2 e^{-2x}$$

21 م - 116 م

فست موهومی این جواب نیست از جواب بدنه اصلی است :

$$y_p = \frac{A}{p(c)} e^{cx} \quad p(D)y = A e^{cx}$$

$$p(D)y = A e^{cx} \quad p(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0$$

$$y_p(x) = B e^{cx} \Rightarrow p(D)(B e^{cx}) = A e^{cx}$$

$$\Rightarrow (a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0)(B e^{cx}) = A e^{cx}$$

$$a_n B c^n e^{cx} + a_{n-1} B c^{n-1} e^{cx} + \dots + a_1 B c e^{cx} + a_0 B e^{cx} = A e^{cx}$$

$$B(a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_1 c + a_0) e^{cx} = A e^{cx} \Rightarrow$$

$$B p(c) e^{cx} = A e^{cx} \Rightarrow B p(c) = A \Rightarrow B = \frac{A}{p(c)}$$

$$y_p = \frac{A}{p(c)} e^{cx}$$

22 م - 116 م

$$y'' + y' = 6 \sin 2x \quad y'' + y' = 6e^{2ix}$$

$$y'' + y' = 0 \Rightarrow p(r) = r^2 + r \Rightarrow p(r) = 0 \Rightarrow r = 0, r = -1$$

$$y_h = C_1 + C_2 e^{-x} \quad (r_1, r_2 \text{ موهومی نیست})$$

$$y_p = \frac{6}{x(2i)} e^{2ix} \quad p(2i) = (2i)^2 + 2i = 2i - 4 \Rightarrow y_p = \frac{6}{2i-4} e^{2ix}$$

$$y_p = \frac{6(-2i-4)}{(2i-4)(-2i-4)} e^{2ix} = \frac{-12(i+2)}{20} e^{2ix} = -\frac{3}{5}(i+2)(e^{2ix} + i \sin 2x)$$

$$y_{ip} = -\frac{3}{5} e^{2ix} - \frac{6}{5} \sin 2x \quad y = C_1 + C_2 e^{-x} - \frac{3}{5} e^{2ix} - \frac{6}{5} \sin 2x$$

$$C_1 y_p(x) = \frac{A}{m! Q(c)} x^m e^{cx} \quad \text{که در آن } A = 23 \quad \text{و } m = 1 \quad \text{و } c = i$$

$$p(D) y = A e^{cx}$$

$$p(r) = (r-c)^m Q(r) \quad \text{که در آن } Q(r) \neq 0$$

$$Q(c) \neq 0 \quad y_p(x) = \frac{A}{m! Q(c)} x^m e^{cx}$$

$$Q(D)(D-c)^m \frac{A}{m! Q(c)} x^m e^{cx} = \frac{A}{m! Q(c)} Q(D)(D-c)^m e^{cx}$$

$$= \frac{A}{m! Q(c)} Q(D) e^{cx} D^m x^m$$

$$= \frac{A}{m! Q(c)} Q(D) e^{cx} m!$$

$$= \frac{A}{Q(c)} Q(c) e^{cx}$$

$$= A e^{cx}$$

$$(2) - 116 - 24$$

$$y'' + y = 4 e^{ix} \quad y'' + y = 4 e^{ix}$$

$$p(r) = (r^2 + 1) \quad p(r) = 0 \Rightarrow (r-i)(r+i) = 0 \Rightarrow r_1 = i, r_2 = -i$$

$$y_h = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix} \quad \text{که در آن } C = i$$

$$Q(r) = r+i \quad y_p = \frac{4}{1! Q(i)} x e^{ix}$$

$$y_p = \frac{4}{2i} x e^{ix} \Rightarrow y_p = -2i x (e^{ix} + i \sin x)$$

$$y_{ip} = 2x \sin x \quad y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2x \sin x$$

16 م 30

$$x^2 y'' - xy' + y = 6x \ln x \quad x \in (0, \infty), \quad t = \ln x \quad \text{تغییر متغیر}$$

$$D(D-1)Y - DY + Y = 6te^t$$

$$Y'' - 2Y' + Y = 6te^t \quad p(r) = r^2 - 2r + 1 = 0$$

$$r_1 = r_2 = 1 \quad Y_h = C_1 e^t + C_2 t e^t$$

$$(1) \quad Y_p = t^2 (A_0 + A_1 t) e^t, \quad Y_p = (A_0 t^2 + A_1 t^3) e^t$$

$$Y_p' = (2A_0 t + 3A_1 t^2) e^t + (A_0 t^2 + A_1 t^3) e^t$$

$$(2) \quad Y_p'' = (2A_0 + 6A_1 t) e^t + 2(2A_0 t + 3A_1 t^2) e^t + (A_0 t^2 + A_1 t^3) e^t$$

$$(2) \quad -2Y_p' = -2(2A_0 t + 3A_1 t^2) e^t - 2(A_0 t^2 + A_1 t^3) e^t$$

$$(2A_0 + 6A_1 t) e^t = 6te^t \Rightarrow A_0 = 0, A_1 = 1 \Rightarrow Y_p = t^3 e^t$$

$$Y = C_1 e^t + C_2 t e^t + t^3 e^t$$

$$y(x) = C_1 x + C_2 x \ln x + (\ln x)^3 x$$

2 م 55 هان مستند 25 م 55 هان مستند

روش تغییر متغیرها: معادله خطی غیر همگن زیر را در نظر بگیرید

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = F(x)$$

فرض می‌کنیم که ضرایب $a_0, \dots, a_n$ و F ، بازه‌ای مانند I پوشیده باشند و I هرگز صفر نشود.

اگر فرض کنیم $u_1, \dots, u_{n-1}, u_n$ جواب مستقل معادله همگن $y=0$ باشند، آنگاه

$$C_1 u_1 + \dots + C_n u_n$$

$$y_p(x) = C_1(x) u_1(x) + \dots + C_n(x) u_n(x) \quad \text{معادله غیر همگن را به صورت}$$

$$y_p(x) = C_1'(x) u_1(x) + \dots + C_n'(x) u_n(x) +$$

$$C_1(x) u_1'(x) + \dots + C_n(x) u_n'(x)$$

فرض می‌کنیم C ها در معادله‌ای کمی تو لیم صفر کنند.

$$C_1'(x) u_1 + C_2'(x) u_2 + \dots + C_n'(x) u_n = 0 \quad (1)$$

$$y_p' = C_1 u_1' + \dots + C_n u_n'$$

$$y_p'' = C_1' u_1' + \dots + C_n' u_n' + C_1 u_1'' + \dots + C_n u_n''$$

مسائل دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$y'' + 2y' - 3y = 5e^{2x}, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 2 \quad (1)$$

$$y'' + y' + 2y = 36xe^x \quad (2)$$

$$(D-1)^2(D+1)y = 10 \cos 2x \quad (3)$$

$$y'' - y = 4e^x - 3e^{2x} \quad (4)$$

$$y'' + y' = 3x^2 \quad (5)$$

$$y'' + 4y = 16x \sin 2x \quad (6)$$

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 6 \ln x, \quad x > 0 \quad (7)$$

$$x^2 y'' - xy' = -4 \quad (8)$$

$$x^2 y'' + xy' - y = 9x^2 \ln x \quad (9)$$

$$y'' + y' + y = \sin x \quad (10)$$