

انترگرالی مسئله: $\alpha = 9.8$ متر بر ثانیه $v(t)$ تابع سرعت

۱۸

$$\frac{dv}{dt} = 9.8, \quad v(0) = 0$$

مستقیم گرانش در نزدیکی سطح زمین 9.8 m/sec^2 است. $\frac{dv}{dt} = 9.8 \text{ m/sec}^2$ اگر جسم از حال سکون در ارتفاع t از $t=0$ شروع کند. $v(t)$ تابع سرعت.

۱) $\frac{dv}{dt} = 9.8$ ۲) $v(0) = 0$

$$v = 9.8t \quad \text{یا} \quad v = 9.8t + C \quad \therefore v(t) = 9.8t + C$$

$$0 = 9.8(0) + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow v(t) = 9.8t \text{ m/sec}$$

معادلات دیفرانسیل (معادلاتی که در آنها مشتق وجود دارد) $\frac{dy}{dx} = f(x)$ معادله دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2, \quad \frac{d^2y}{dx^2} + 6xy \frac{dy}{dx} + 3x^2y^3 = 0$$

Def. $F(x)$ را یک تابع f میگویند اگر $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$ در I برقرار باشد.

Def. f را یک تابع F میگویند اگر $\frac{d}{dx} F = f$ در I برقرار باشد.

$$\frac{dv}{dt} = 9.8, \quad t \geq 0 \quad v(t) = 9.8t + C$$

$$v(0) = 0 \quad \text{پس} \quad v(t) = 9.8t$$

if $F(x)$ is an antiderivative of $f(x)$ then $F(x) + C$ is also an antiderivative of $f(x)$ $\forall C$

بنابراین،

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \text{پس} \quad F(x) \Rightarrow F(x) + C$$

$$\int f(x) dx = \text{انترگال نامتناهی} = \text{مجموعه همه مشتق‌های تابع} f(x)$$

$$F(x) + C = \int f(x) dx$$

انترگرال نامتناهی $\int f(x) dx$ $\Rightarrow$ $F(x) + C$

$$\int 9.8 dt = 9.8t + C$$

۹.۸ → مقدار
t متغیر است

۱۹
داده‌های فیزیکی را بکار ببرید.

$$1. \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

$$y = \int 3x^2 dx = x^3 + C$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \sqrt{y}$$

$$y = f(x)$$

$$\frac{dy}{dx}, y \text{ و } x \text{ در دو طرف}$$

برای جد کردن متغیرها: هر دو طرف را ضرب در $\frac{1}{\sqrt{y}}$

$$2. \frac{dy}{dx} = x^2 \sqrt{y} \quad y > 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} = x^2 \Rightarrow$$

$$\int (y^{-1/2} \frac{dy}{dx}) dx = \int x^2 dx \Rightarrow 2y^{1/2} + C_1 = \frac{x^3}{3} + C_2$$

$$2y^{1/2} = \frac{x^3}{3} + C$$

$$C = C_2 - C_1$$

فرمول‌ها استاندارد نیستند - به سبب ساده شدن

$$3. \int (5x - x^2 + 2) dx = 5 \int x dx - \int x^2 dx + \int 2 dx$$

$$= \frac{5}{2} x^2 - \frac{x^3}{3} + 2x + C$$

$$\int x^{1/2} dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3} x^{3/2} + C$$

$$\int (x^2 + 5x)^2 dx = \int (x^4 + 10x^3 + 25x^2) dx = \frac{x^5}{5} + \frac{10}{4} x^4 + 25x + C$$

$$\int (x^2 + 5x)^2 2x dx = \frac{(x^2 + 5x)^3}{3} + C \quad \left(\int u^n \frac{du}{dx} dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \right)$$

$n \neq -1$

$$4. \int x^3 dx$$

$$\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$$

$$\int 4x^3 dx = x^4 + C$$

$$x^3 = \frac{1}{4} 4x^3 \quad \int x^3 dx = \int \frac{1}{4} 4x^3 dx = \frac{1}{4} \int 4x^3 dx = \frac{1}{4} (x^4 + C) = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\int \sqrt{2x+1} dx = \left[\frac{2}{3} (2x+1)^{3/2} \right]' = \frac{3}{2} (2x+1)^{1/2} \cdot 2 = 3(2x+1)^{1/2}$$

$$\therefore \int \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{3} (2x+1)^{3/2} + C$$

روش جایگزینی در انتگرالگیری

$$1. \int (x^4-1)^2 \cdot 4x^3 dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{(x^4-1)^3}{3} + C$$

$$u = x^4 - 1, \quad du = 4x^3 dx$$

۲. این روش مخصوص است زیرا

$$4x^3 = \frac{d}{dx} (x^4 - 1) = \frac{du}{dx}$$

تغییر می‌دهی

$$\int (x^4-1)^2 4x^3 dx = \int (x^4-1)^2 \frac{d}{dx} (x^4-1) dx = \int \frac{d}{dx} \left(\frac{(x^4-1)^3}{3} \right) dx = \frac{(x^4-1)^3}{3} + C$$

$$2. \int \sqrt{1+x^2} \cdot 2x dx = \int \sqrt{u} du = \frac{2}{3} u^{3/2} + C = \frac{2}{3} (1+x^2)^{3/2} + C$$

$$u = 1+x^2, \quad du = 2x dx$$

$$2x = \frac{d}{dx} (1+x^2), \quad \int \sqrt{1+x^2} \cdot 2x dx = \int \sqrt{1+x^2} \frac{d}{dx} (1+x^2) dx$$

$$= \int \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{3} (1+x^2)^{3/2} \right) dx = \frac{2}{3} (1+x^2)^{3/2} + C$$

روش جایگزینی یا تغییر متغیر:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

$$u = g(x), \quad du = g'(x) dx$$

هر مشتقی از (u)

* روش جایگزینی در انتگرالگیری

برای حل انتگرال $\int f(g(x))g'(x)dx$ که در آن f و g توابع پیوسته باشند مراحل زیر را طی کنید

۱. جایگزینی $u = g(x)$ را انجام دهید تا انتگرال زیر بدست آید

$$\int f(u) du$$

۲. تابع u را انتگرال بگیرید

۳. در نتیجه بدست آمده $g(x)$ را به جای u بگذارید.

$$3. \int \sqrt{4x-1} dx$$

$$u = 4x-1, \quad du = 4 dx, \quad \frac{1}{4} du = dx$$

CS

Scanned with CamScanner

$$\int \sqrt{4x-1} dx = \int \sqrt{u} \cdot \frac{1}{4} du = \frac{1}{4} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} u^{3/2} \right) + C = \frac{1}{6} u^{3/2} + C$$

$$= \frac{1}{6} (4x-1)^{3/2} + C \quad \checkmark$$

$$4. \int \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{(-1/2) du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2} (2u^{1/2}) + C = -u^{1/2} + C = -\sqrt{4-x^2} + C$$

$$u = 4-x^2, \quad du = -2x dx \Rightarrow -\frac{1}{2} du = x dx$$

$$5. \int \frac{(z+1) dz}{\sqrt[3]{3z^2+6z+5}} = \int \frac{(1/6) du}{u^{1/3}} = \frac{1}{6} \int u^{-1/3} du \stackrel{①}{=} \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} u^{2/3} + C$$

$$u = 3z^2 + 6z + 5 \quad du = (6z+6) dz = 6(z+1) dz$$

$$\frac{1}{6} du = (z+1) dz$$

$$\stackrel{①}{=} \frac{1}{4} (3z^2+6z+5)^{2/3} + C$$

$$u = \sqrt[3]{3z^2+6z+5}, \quad 3u^2 du = (6z+6) dz = 6(z+1) dz$$

$$u^3 = 3z^2+6z+5 \quad \frac{1}{2} u^2 du = (z+1) dz$$

$$\Rightarrow \int \frac{(1/2) u^2 du}{u} = \frac{1}{2} \int u du = \frac{1}{2} \left(\frac{u^2}{2} \right) + C = \frac{1}{4} u^2 + C$$

$$= \frac{1}{4} (3z^2+6z+5)^{2/3} + C \quad \checkmark$$

ثابت التكامل : f و F

$$\frac{d}{dx} (F(g(x))) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) g'(x)$$

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int F'(g(x)) g'(x) dx = \int \frac{d}{dx} (F(g(x))) dx$$

$$= F(g(x)) + C$$

$$u = g(x), \quad du = g'(x) dx$$

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

فرمول انتگرال با استفاده از عباردهای دفرانسیبل

$$\int \frac{du}{dx} dx = u + C \rightarrow \int du = u + C$$

$$\int u^n \frac{du}{dx} dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1 \Rightarrow \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{d(uv)}{dx} dx = \int \left(u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \right) dx \quad \text{۲۲}$$

$$= \int u \frac{dv}{dx} dx + \int v \frac{du}{dx} dx \rightarrow$$

$$\int d(uv) = \int u dv + \int v du$$

انتگرال تابعی مضرب

$$\cos x = \frac{d}{dx} (\sin x), \quad \sin x = \frac{d}{dx} (-\cos x)$$

$$\boxed{\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C}$$

$$\text{اگر } u \text{ تابعی از } x \text{ باشد, } \frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$\cos u \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} \sin u \quad \text{or} \quad \cos u du = d(\sin u)$$

$$\boxed{\int \cos u du = \sin u + C}$$

$$\frac{d}{dx} (-\cos u) = \sin u \frac{du}{dx}, \quad d(-\cos u) = \sin u du$$

$$\boxed{\int \sin u du = -\cos u + C}$$

$$1. \int \cos 2x dx = \int \cos u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int \cos u du = \frac{1}{2} \sin u + C$$

$$u = 2x, du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du \quad = \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

$$2. \int \sin(7x+5) dx = \int \sin u \cdot \frac{1}{7} du = \frac{1}{7} \int \sin u du = \frac{1}{7} (-\cos u) + C$$

$$u = 7x+5, du = 7dx \Rightarrow dx = \frac{1}{7} du \quad = -\frac{1}{7} \cos(7x+5) + C$$

$$3. \int \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x} dx = \int \frac{(1/2) du}{u^3} = \frac{1}{2} \int u^{-3} du = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} u^{-2} \right) + C = -\frac{1}{4} u^{-2} + C$$

$$u = \sin 2x, du = 2 \cos 2x dx, \frac{1}{2} du = \cos 2x dx \quad = -\frac{1}{4} (\sin 2x)^{-2} + C$$

CS

Scanned with CamScanner

$$4. \int 16x \sin^3(2x^2+1) \cos(2x^2+1) dx = \int 4 \sin^3 u \cos u du$$

$$= \sin^4 u + C = \sin^4(2x^2+1) + C$$

د) $u = 2x^2 + 1, du = 4x dx$

پ) $u = \sin(2x^2+1), du = \cos(2x^2+1) \cdot 4x dx$

$$4 du = 16x \cos(2x^2+1) dx$$

$$= \int 4 u^3 du = u^4 + C = \sin^4(2x^2+1) + C$$

$$5. \int \sin^n x \cos x dx, n \neq -1$$

$$u = \sin x, du = \cos x dx$$

$$= \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C$$

$$6. \int \cos^n x \sin x dx, n \neq -1$$

$$u = \cos x, du = -\sin x dx$$

$$= \int u^n du = -\frac{u^{n+1}}{n+1} + C = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C$$

$$n = -1 \Rightarrow \int (\sin x)^{-1} \cos x dx = \int \cot x dx = \ln |\sin x| + C$$

$$\int (\cos x)^{-1} \sin x dx = \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$$

انتگرال تابعی مثلثی دیگر

$$\int \sec^2 u du = \tan u + C$$

$$\int \sec u \tan u du = \sec u + C$$

$$\int \csc^2 u du = -\cot u + C$$

$$\int \csc u \cot u du = -\csc u + C$$

$$7. a) \int \frac{1}{\cos^2 2x} dx = \int \sec^2 2x dx = \frac{1}{2} \int \sec^2 2x d(2x) = \frac{1}{2} \tan 2x + C$$

$$b) \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

$$c) \int \sec^2 x \tan x dx = \int \sec x (\sec x \tan x) dx = \int \sec x d(\sec x)$$

$$= \frac{1}{2} \sec^2 x + C$$

$$8. \int \tan^3 x \sec^2 x dx = \int u^3 du = \frac{1}{4} u^4 + C = \frac{1}{4} \tan^4 x + C$$

$$u = \tan x, du = \sec^2 x dx$$

۲۴

السلامة والرفاهية

$$9. \int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \int \sec^2 x dx - \int dx = \tan x - x + C$$

$$10. \int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx + \int \frac{\cos 2x}{2} dx$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin 2x}{2} + C = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

$$11. \int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{\cos 2x}{2} dx$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

$$12. \int \sin^3 x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \int \sin x dx - \int \cos^2 x \sin x dx$$

$$= -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C$$