

قضایای زیر را بنویسید

۱. اگر H و K زیرگروه G باشند، ثابت کنید $HK = KH$ اگر و فقط اگر H و K نرمال باشند.

در این صورت

$$H \trianglelefteq G, K \leq G \Rightarrow HK = KH \Rightarrow HK \leq G$$

$$r \in K \xrightarrow{K \leq G} r \in G \xrightarrow{H \trianglelefteq G} r^{-1}hr \in H \Rightarrow (r^{-1}h^{-1}r)h = r^{-1}hr \in H$$

$$(r^{-1}hr)h = r^{-1}h(rh) = r^{-1}h^2r \in H \Rightarrow r^{-1}h^2r \in H$$

$$\Rightarrow HK \leq KH$$

و بالعکس

$$(ab)^f = (af)(bf)$$

$$K_f = \{a \in G / af = e^{-1}\} = \{e^{-1} / f \in G\}$$

این هم هست در آن گروه همگراست.

مثال:

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n \quad af = n \text{ قسم } a \text{ بر } n$$

$$K_f = n\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}$$

$$\Delta r \in K \xrightarrow{K \leq G} r \in G \xrightarrow{H \trianglelefteq G} r^{-1}hr \in H \Rightarrow r^{-1}(r^{-1}hr)r \in KH \Rightarrow r^{-1}(r^{-1}hr)r = (r^{-1}r)h = h \in H$$

$$\therefore KH \leq HK$$

$$\therefore HK \leq KH$$

تخصیه: فرض کنیم ϕ یک گروه، H یک زیرگروه هنجاری باشد، در این صورت تابع $\phi: G \rightarrow G/H$ بطوریکه $a\phi = aH$ برای هر $a \in G$ یک همپیکت پوشش است و علاوه بر $K\phi = H$ (به این همپیکت، همپیکت طبیعی از G به G/H گفته میشود).

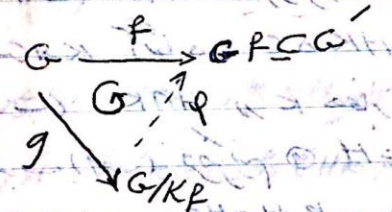
اثبات: $(ab)\phi = (ab)H = (aH)(bH) = (a\phi)(b\phi)$
 پس ϕ یک همپیکت طبیعی است. از تعریف ϕ روشن است که یک تابع پوشش است.

بنا بر ϕ

$$a \in K\phi \iff a\phi = H \iff aH = H \iff a \in H$$

$\therefore K\phi = H$

* همپیکت طبیعی از همپیکت ϕ به همپیکت ψ است. $\psi: G/K \rightarrow G/H$ فرض کنیم ψ را در گروه G/K تعریف کنیم. $\psi(aK) = a\phi = aH$ باشد. در این صورت $\psi: G/K \rightarrow G/H$ یک همپیکت طبیعی است.



اثبات: فرض کنیم $K\phi = K$ تعریف می کنیم $\psi: G/K \rightarrow G/H$ به صورت $\psi(aK) = a\phi$ ، $\forall a \in G$.

بطور طبیعی خواهیم داشت: $\psi(aK) = a\phi$ ، $\forall a \in G$

ابتدا نشان می دهیم که ψ خوشتعریف است:

فرض کنیم $aK = bK \iff a'b'ek \iff (a'b')\phi = e' \iff (a'\phi)(b'\phi) = e' \iff (a\phi)^{-1}(b\phi) = e' \iff a\phi = b\phi$

(عده بر خوشترینی یک به یک از K است)

$\iff (aK)\phi = (bK)\phi$

بنابراین ψ خوشتعریف بوده و علاوه بر یک به یک نیز می باشد.

همین از تعریف ψ روشن است که یک تابع پوشش است.

$$((a_K)(b_K))\varphi = ((ab)_K)\varphi = (ab)_f = (a_f)(b_f)$$

$$= (ca_K) \varphi) (cb_K) \varphi)$$

$$\therefore G/K \cong G/P$$

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$$

$$af =$$

مثال: $9 - 4(3) = 9 - 12 = -3$

$$K_f = n\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n \quad \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = \{n\mathbb{Z}, 1+n\mathbb{Z}, \dots, (n-1)+n\mathbb{Z}\}$$

تخصیص لکھنؤ / فروری ۱۹۵۷ء / کتب زرگریہ ہنگار / کتب زرگریہ سلاطین
دراسمیرات

[illegible]

اثبات (الف) فکرنیم ① $k_1, k_2 \in K, h_1, h_2 \in H$ چون $H \trianglelefteq G$ و

$K_1 \in G$ سے $K_1 H = H K_1$ ، چون $K_1 H_2 \in K_1 H$ سے $K_1 H_2 \in H K_1$ ،
 (دراستہ) $H_2 \in H$ ، اور ہر $H_2 \in H$ کے لئے $K_1 H_2 = H_2 K_1$ ، دراصلیت لازم :

$$(h_r, k_r)(h_l, k_l) = h_l(k_l, h_r)k_r = h_l(h_r, k_l)k_r = (h_l, k_r)(k_l, k_r) \in HK$$

③ فرقہ $KH = HK$ سے KGG ، HAG ، KGK ، KHH

چون $\bar{K}'h^{-1} \in \bar{K}'H$ پس $\bar{K}'h^{-1} \in H\bar{K}'$ و نیز $h_i \in H$
 دارد $\bar{K}'h^{-1} = h_i \bar{K}'$ (از صورت اول):

$$(hK)^{-1} = K^{-1}h^{-1} = h^{-1}K^{-1} \in HK$$

سایران ۴۵۰۰۰۰

جیون HSC پس

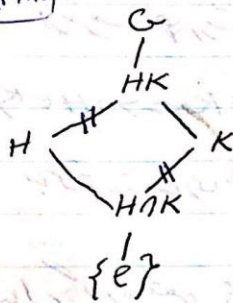
НАНК

$$(g' h g \in H \Rightarrow g' h g \in H) \text{ و } (g' h g \in H) \Rightarrow g' h g \in H \text{ (معمولاً)}$$

اثبات قسمت ب: فرض کنیم $x \in H \cap K$, $x \in K$, $x \in H$. چون H و K هنجار است پس $x' x x \in K$ و $x' x x \in H$ از طرف دیگر چون $x \in K$, $x \in H$ پس $x' x x \in K \cap H$.
 پس $x' x x \in H \cap K$.

قضیه دوم کیرچوفی ها: فرض کنیم G یک گروه هنجار G و K یک زیرگروه G باشد در انصورت $HK/H \cong K/H \cap K$.

$$H, K \leq HK$$



اثبات: تعریف می کنیم $\varphi: K \rightarrow HK/H$

$$k\varphi = kH, \forall k \in K$$

برابر $k_1, k_2 \in K$ داریم:

$$(k_1 k_2)\varphi = (k_1 k_2)H = (k_1 H)(k_2 H) = (k_1 \varphi)(k_2 \varphi)$$

پس φ یک همرفتی است.

ایماریش اینهمه: فرض کنیم $(hK)H \in HK/H$ برابر $K \in H$, $K \in K$ در انصورت داریم

$$(hK)H = h(KH) = h(HK) = (hH)K = HK = KH$$

پس $K\varphi = KH = (hK)H$ در نتیجه φ پوشش است. اثبات سهیم
 $K \cap K\varphi = \{k \in K \mid k\varphi = H\} = \{k \in K \mid kH = H\} = \{k \in K \mid k \in H\} = H \cap K$

$$k \in K\varphi \Leftrightarrow k\varphi = H \Leftrightarrow kH = H \Leftrightarrow k \in H \Leftrightarrow k \in H \cap K$$

پس $K\varphi = HK/H$. بنابراین قضیه بنیادی همرفتی آ داریم:

$$K/H \cap K \cong HK/H$$

قضیه سوم کیرچوفی ها: فرض کنیم G یک گروه هنجار G و K, H زیرگروه هنجار G باشند. حکم دیگر H, K در انصورت

$$G/H/K/H \cong G/K$$

$$\varphi: G/H \longrightarrow G/K$$

تمرین ۱۱: $(aH)\varphi = aK, \forall a \in G$

۱) فرضیه ۴) اثبات نهم که φ خستگرفت است.

$$aH = bH \Rightarrow a^{-1}b \in H \Rightarrow a^{-1}b \in K \Rightarrow aK = bK \Rightarrow (aH)\varphi = (bH)\varphi$$

(نمبر) شماره $a, b \in G$ داریم.

$((a_H)(b_H))^\varphi = (ab)_H^\varphi = (ab)_K = (a_K)(b_K) = ((a_H)^\varphi)((b_H)^\varphi)$
 پس φ یک همرفتی است.

از تعریف ۴ روشن است که یک تابع یونیت می باشد، نشان می دهیم که $K\psi = K/H$

$$aH \in K \varphi \Leftrightarrow (aH)\varphi = K \Leftrightarrow aK = K \Leftrightarrow a \in K \Leftrightarrow aH \in K/H$$

$$G/H/K/H \cong G/K$$

سُبْحَانَكَ يَا مَنْ لَا يَمُوتُ وَلَا يَمُوتُ

مثال: گزیده حصی ۷ راز نظر می گیریم:

$$7\mathbb{Z} \subset 14\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} / \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$$

تعریف: فرض کنیم G یک گروه باشد. در انصیرات زیرگروه H از G یک زیرگروه M ماکسیمال است اگر برابر هر زیرگروه H از G بزرگتر از H نباشد. $H = M$ یا $H = G$ باشد.

$\begin{matrix} G \\ | \\ M \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \text{بنی ررضی جبرئیل} \\ \text{بنی ررضی جبرئیل} \end{matrix}$

توضیح: فرض کنید $M \neq \emptyset$ یک زیرگروه هنجار گروه G باشد. در انصیرت M یک زیرگروه هنجای M کمال است اگر و فقط اگر M/M یک گروه ساده باشد.

اثبات: هر فکتی طبیعی $G/M \rightarrow G/N$ ، $f: G \rightarrow G/M$ ، $a \cdot f = a \cdot M$ ، $a \cdot f = a \cdot M$

نگاریم قرص نیم ۱۲ روزه ماکمل است.

(ارائه آیت)

فرض کنیم $H \trianglelefteq M$ در انصورت $H = H'P^{-1}$ یک زیرگروه هخار
 باشد پس M به H' زیرگروه است. (توجه: M را به H' می‌گویند)

$a \in M \Rightarrow aM = M \in H' \Rightarrow a \in H' \Rightarrow a \in H'P^{-1} = H$
 چون M در H ماکسیمال است پس $H = M$ یا $H = G$. اگر $H = M$ آنگاه $H' = \{M\}$
 و اگر $H = G$ آنگاه $H' = G/M$ پس M یک گروه ساده است.

برعکس فرض کنیم M یک زیرگروه ساده باشد، فرض کنیم $H \trianglelefteq M$
 در انصورت $H/M \trianglelefteq G/M$

چون G/M ساده است پس $H/M = \{M\}$ یا $H/M = G/M$
 اگر $H/M = \{M\}$ آنگاه $H = M$ ، اگر $H/M = G/M$ آنگاه $H = G$
 پس M در G ماکسیمال است.

**** آزمون تشریحی

- تمرین فصل ۱ تا ۷ (۱) هخارات ب (۲) درست (ج) غلط (د) درست
 * تمرین: هر زیرگروه از اندیس ۲ در یک گروه هخار است.
 (ه) غلط است $4 \rightarrow 2$ زیرا تقسیم بندی را از اثر
 (و) غلط است (ز) درست (هرچیز به 2) (ح) درست (مهرجی به 2)
 ط ۱ به درستی است (ب) درست $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$
 در فصل ۱۵ تمرین ۱۱ الی ۱۵ حل شود