

تعریف: فرض کنیم H یک زیرگروه G باشد. $a \in G$ برای $a^{-1}Ha$ G بر H هموار است. $H \trianglelefteq G \iff \forall a \in G (a^{-1}Ha \subseteq H)$

* تمرین اگر H مجموعه همه زیرگروه G باشد یعنی $H = \{H \mid H \trianglelefteq G\}$ در این صورت رابطه $\sim$ که تعریف زیر در G تعریف شود یک رابطه هم ارزی می باشد

$$H \sim K \iff \exists a \in G (K = a^{-1}Ha)$$

مثال: گروه متعامد S_3 را در نظر بگیرید. فرض کنید $H = \{P_0, P_1\}$, $K = \{P_0, P_2\}$. در این صورت $P_1^{-1}HP_1 = K$

قضیه: فرض کنیم $\phi: G \rightarrow G'$ یک همرفتی باشد. در این صورت $\phi(K) = \{x \mid x \in G, x\phi = e'\}$ که در آن e' عنصر هویت G' است.

(الف) $K \trianglelefteq G$ اگر $H \trianglelefteq G$ باشد.
(ب) اگر $H \trianglelefteq G$ آنگاه $H\phi \trianglelefteq G'$
(ج) اگر $H \trianglelefteq G$ آنگاه $H\phi^{-1} \trianglelefteq G$

اثبات (الف) $K = \{e'\}\phi^{-1}$ در نتیجه باید قضیه قبل $K \trianglelefteq G$ را

زیرگروه G می باشد. فرض کنیم $a \in G$, $x \in K$

$$(a^{-1}xa)\phi = (a^{-1}\phi)(x\phi)(a\phi) = (a\phi)^{-1}e'(a\phi) = (a\phi)^{-1}(a\phi)$$

$$\therefore a^{-1}xa \in K$$

پس $K \trianglelefteq G$

(ب) فرض کنیم $a\phi \in G'$, $h\phi \in H\phi$ برای $a \in G$, $h \in H$

$$(a\phi)^{-1}(h\phi)(a\phi) = (a^{-1}\phi)(h\phi)(a\phi) = (a^{-1}ha)\phi \in H\phi$$

پس $H\phi \trianglelefteq G'$

ثبات (ج) فرم کریں $a \in G$, $h \in H \cap F^{-1}$ جس میں $hF \in H'$

$$(af)^{-1}(hf)(af) \in H' \Rightarrow (a^{-1}f)(hf)(af) \in H'$$

$$\Rightarrow (\bar{a}'ha) f \in H' \Rightarrow \bar{a}'ha \in H'f^{-1}$$

$$\therefore H'F' \Delta G$$

مثال: گروه $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ را در نظر بگیرید و $H = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{Z}\} \trianglelefteq G$

$$G/H = \{(a, b) + H \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \quad \{aH = Hc \Leftrightarrow a \equiv c \pmod{n}\}$$

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) \Rightarrow (a, b) + H = (0, b) + H$$

$$G/H = \{(a, b) + H \mid b \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z} \rightarrow G/H$$

$$b \mapsto (0, b) + H$$

قضیه: فرض کنیم a, a' اعداد حقیقی و $a \rightarrow a'$ که هر فرضی a را انقضی

$$K_F = \{e\}$$

اشات: فرضیه ۴ یک باشد.

$$a \in K_F \Rightarrow af = e' = ef \Rightarrow a = e$$

$$K_F = \{e\}$$

برهان فرضیه $K_P = \{e\}$. نشان دهیم که P بر K_P است.

$$af = bf \Rightarrow (af)(bf)^{-1} = e' \Rightarrow (af)(b^{-1}f) = e' \Rightarrow$$

$$(ab^{-1})f = e' \Rightarrow ab^{-1} \in K_f$$

$$\Rightarrow ab^{-1} = e \Rightarrow a = b$$

• निरुद्धात्

تعریف: گروه G یک گروه ساده است اگر زیرگروه هنجاری نباشد باشد.

مثال: اگر M یک عدد اول باشد آنگاه M یک گروه ساده است.

قضیه: فرض کنیم G یک گروه آبدی باشد. در این صورت G ساده است اگر فقط اگر $M \cong \mathbb{Z}_p$ یا $M \cong \mathbb{Z}$ باشد.

اثبات: اگر $M \cong \mathbb{Z}_p$ یا $M \cong \mathbb{Z}$ باشد آنگاه G ساده است. فرض کنیم $a \neq e$ در این صورت

$\langle a \rangle$ ، چون $\langle a \rangle$ یک زیرگروه هنجاری است پس $\langle a \rangle = G$

اگر G نباشد آنگاه $M \cong \mathbb{Z}$ و در نتیجه G زیرگروه هنجاری بدانی کند

پس G ساده است. فرض کنیم $|G| = n$. اگر $n_1, n_2 = n$ آنگاه G

دارای زیرگروه از مرتبه n_1, n_2 می شود بنابراین n باید عدد اول باشد.

پس $M \cong \mathbb{Z}_p$ یا $M \cong \mathbb{Z}$.

تعریف: فرض کنیم G یک گروه باشد در این صورت $ab \in G$ برای $a, b \in G$

یک عضو برگردان G نامیده می شود.

** روشن است که اگر G آبدی باشد آنگاه تنها عضو برگردان آن e می باشد.

e می باشد.

فرض کنیم $S = \{ ab \in G \mid a, b \in G \}$

(نیت S داشتن دلتا به معکوس داشتن است. دلتا معکوس دلتا به معنی S است.)

در خطه شود که S دلتا به معنی دلتا به معنی دلتا به معنی S است.

مثال: اگر S دلتا به ضرب G دلتا به معنی باشد. زیرگروه تولید شده توسط S را

زیرگروه برگردان G می نامیم و $\langle S \rangle = G$ می باشد.

فرض کنیم G یک گروه باشد. از اینصورت:
 الف) G در G همگرا است، G/H یک گروه آبه می باشد.
 ب) اگر H یک زیرگروه همگرا G باشد، G/H یک گروه آبه باشد. آنگاه $H \leq G$

اثبات: $\langle S \rangle = \{ a_1^{n_1} \dots a_k^{n_k} \mid k \in \mathbb{N}, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z} \}$
 الف) بنا بر فرض، G حاصل ضرب تمام عناصر S در نتیجه از برگردانی می باشد.

$$x \in \langle S \rangle \Rightarrow \exists a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k \in G \quad (x = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_k b_k a_k^{-1} b_k^{-1})$$

فرض کنیم $g \in G, x \in \langle S \rangle$. نشان می دهیم $g^{-1} x g \in \langle S \rangle$

$$g^{-1} x g = g^{-1} (a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_k b_k a_k^{-1} b_k^{-1}) g$$

$$= g^{-1} (a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} e a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots e a_k b_k a_k^{-1} b_k^{-1}) g$$

$$= g^{-1} (a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} g g^{-1} a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} g g^{-1} \dots g g^{-1} a_k b_k a_k^{-1} b_k^{-1} g g^{-1}) g$$

$$= (g^{-1} (a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}) g) (g^{-1} (a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}) g) \dots (g^{-1} (a_k b_k a_k^{-1} b_k^{-1}) g)$$

پس کافی است نشان دهیم که $g^{-1} (a b a^{-1} b^{-1}) g = (g^{-1} a b a^{-1} b^{-1} g)$ در G قرار دارد برابر هر $a, b \in G, g \in G$.

$$g^{-1} a b a^{-1} b^{-1} g = g^{-1} a b a^{-1} e b^{-1} g = (g^{-1} a b a^{-1} g) (g^{-1} b g^{-1} g b^{-1} g) =$$

$$(g^{-1} a) b (g^{-1} a)^{-1} (g^{-1} b)^{-1} g = (g^{-1} a) b (g^{-1} a)^{-1} (g^{-1} b)^{-1} g \in \langle S \rangle$$

پس G یک زیرگروه همگرا G است. فرض کنیم $a, b \in G$. نشان می دهیم

$$(a b)^{-1} = (b^{-1} a^{-1}) = (a^{-1} b^{-1}) = (a^{-1} b)^{-1} = (b a)^{-1} = (b a)^{-1} = (b a)^{-1}$$

پس G/H یک گروه آبه می باشد.

اثبات (ب) فرض کنیم $a, b \in G$. چون G/H یک گروه آبه است پس داریم

$$(a'H)(b'H) = (b'H)(a'H) \Rightarrow a'b'H = b'a'H \quad [aH = bH \Rightarrow a \in bH]$$

$$\Rightarrow a b a^{-1} b^{-1} H = H \Rightarrow a b a^{-1} b^{-1} \in H$$

بنابراین $H \leq G$.

(46) فرض کنیم $\langle S \rangle = \{e\}$ $\Rightarrow \{e\} = \langle S \rangle$
 $\Rightarrow \exists a_1, a_2, b_1, b_2 \in S$ $(a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \in \{e\})$
 $\Rightarrow a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} = e \quad \forall a_1, b_1 \in S \quad a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} = e \Rightarrow ab = ba$

* تمرین: برای قضیه محب نشان بدهید برابر S_3 زیر گروه S_n آنرا می توانیم

تمرین: نشان دهید که S_3 است اگر فقط اگر S_3 دارد $\{e\}$ و S_3

CS Scanned with CamScanner $\{e\} = S_3 \Rightarrow S_3$