

۹. فرض کنید $P(D) = D^2 - D + 5$ ، یک جواب مختلط معادله

$$P(D)y = 10e^{2ix}$$

را که به صورت $y = Ae^{2ix}$ است پیدا کنید. در اینجا A یک عدد مختلط ثابت است. با استفاده از این جواب، یک جواب حقیقی برای هریک از معادلات زیر را پیدا کنید.

$$P(D)y = 10 \cos 2x, \quad P(D)y = 10 \sin 2x.$$

۱۰. قواعد نمایش (۲۰.۲) را از قواعد (۱۴.۲) استنتاج کنید.

۱۱. تمام جوابهای معادله دیفرانسیل

$$x^2 y'' + xy' + 4y = 0$$

را بر بازه $(0, \infty)$ که به صورت $y = x^c$ هستند و c ممکن است مختلط باشد، بدست

آورید. با استفاده از این جواب، دو جواب حقیقی مستقل خطی از معادله را پیدا

کنید.

$$y_p = \frac{10}{17} (4+i) (e^{\cos x} + i \sin x)$$

$$u_p = \frac{40}{17} e^{\cos x} - \frac{10}{17} \sin x$$

$$y = \frac{40}{17} e^{\cos x} - \frac{10}{17} \sin x + c_1 e^{-\frac{1}{2}x} e^{\frac{\sqrt{19}}{2}x} + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} e^{\frac{\sqrt{19}}{2}x} \quad \text{جوابی 6-106}$$

اگر F جوابی از معادله $Q(D)y = 0$ باشد، $Q(D)y = 0$ در هر دو طرف جواب.

از معادله $Q(D)P(D)y = 0$ (2) است.

حال فرض کنیم که u جوابی از معادله (1) باشد یعنی $P(D)u = F$

$$Q(D)P(D)u = Q(D)F = 0$$

روش فرایب نامعین

معادله در فرایب $P(D)y = F$ را در نظر می گیریم (با فرایب است). فرض می کنیم F خودش بصورت

جوابی از معادله $Q(D)y = 0$ باشد و فرض می کنیم $F = A x^j e^{cx}$ (که $0 \leq j < \infty$)
چون است ضریب هم داشته باشد.

$$F = A x^j e^{cx} \Rightarrow \text{اگر } c = a + ib \text{ باشد} \Rightarrow A x^j e^{ax} e^{ibx}, \quad \text{که } A x^j e^{ax} \text{ و } A x^j e^{ibx} \text{ باشد}$$

$$Q(D) = (D - c)^{j+1} \Rightarrow Q(D)F = 0 \quad \text{حالت اول: } c \text{ حقیقی است}$$

$$Q(D) = (D - (a + ib))^{j+1} (D - (a - ib))^{j+1} = [(D - a)^2 + b^2]^{j+1} \quad \text{حالت دوم: } c \text{ تخیلی است}$$

$$Q(D)P(D)y = Q(D)F = 0 \quad \text{پس } Q(D) \text{ را فاکتور بچ کشته } F \text{ می گیریم.}$$

$$Q(D)P(D)y = 0 \Rightarrow Q(r)P(r) = 0 \Rightarrow Q(r) = 0, P(r) = 0$$

(1) فرض می کنیم C جوابی از معادله $P(r) = 0$ باشد پس جواب معادله $P(D)y = 0$

$$C_1 u_1 + \dots + C_n u_n$$

$$Q(r) = 0 \quad (1) \quad Q(D)y = 0 \quad \text{از طرفی،}$$

$$\Rightarrow A_0 e^{cx} + A_1 x e^{cx} + \dots + A_j x^j e^{cx} \quad \text{جواب عمومی معادله (1) است}$$

$$* P(D)[C_1 u_1 + \dots + C_n u_n + A_0 e^{cx} + A_1 x e^{cx} + \dots + A_j x^j e^{cx}] = F = A x^j e^{cx}$$

$$P(D)[A_0 e^{cx} + \dots + A_j x^j e^{cx}] = A x^j e^{cx}$$

$$\therefore y_p = A_0 e^{cx} + \dots + A_j x^j e^{cx} \Rightarrow y_p = (A_0 + A_1 x + \dots + A_j x^j) e^{cx}$$

$$P(P)[C_1 u_1 + \dots + C_n u_n] = C_1 P(P)u_1 + \dots + C_n P(P)u_n = 0$$

نتیجه: $\mathcal{P}(D)y = Ax^j e^{cx}, \mathcal{P}(c) \neq 0 \Rightarrow y_p = (A_0 + A_1 x + \dots + A_j x^j) e^{cx}$

مثال: جواب عمومی معادله دفرانسیل را پیدا کنید $y'' + y = x^2 + 4xe^x$

(1) $y'' + y = x^2 = x^2 e^{0x} \quad y'' + y = 0 \Rightarrow \mathcal{P}(r) = r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$

(2) $y'' + y = 4xe^x \quad y_h = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix}$

صفر نیست معادله کجی نیست پس شرط قرار می دهیم جواب این معادله

$y_{1p} = (A_0 + A_1 x + A_2 x^2) \quad y_p = (A_0 + A_1 x + A_2 x^2) + (B_0 + B_1 x) e^x$

$y_p' = (A_1 + 2A_2 x) + B_1 e^x + (B_0 + B_1 x) e^x$

$y_p'' = 2A_2 + 2B_1 e^x + (B_0 + B_1 x) e^x$

$y_p'' + y_p = A_2 x^2 + A_1 x + (A_0 + 2A_2) + 2B_0 e^x + 2B_1 x e^x = x^2 + 4xe^x$

$A_2 = 1, A_1 = 0, A_0 + 2A_2 = 0 \Rightarrow A_0 = -2 \Rightarrow y_{1p} = -2 + x^2$

$2B_1 = 4 \Rightarrow B_1 = 2$

$B_0 + 2B_1 = 0 \Rightarrow B_0 = -4 \quad y_{2p} = 2xe^x - 4e^x$

$y = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix} + (-2 + x^2) - 4e^x + 2xe^x$ (حالا جوابها افتاد خود)

مثال: جواب عمومی معادله دفرانسیل را پیدا کنید $y'' - 2y' + y = x e^x \cos x$

ابتدا بصورت نمایی بنویسیم. جواب خصوصی را پیدا کرده قسمت موهومی و حقیقی جوابها را پیدا کرد

$(a+ib)^x \quad e^{ax} \cos bx \quad e^{ax} \sin bx$

$y'' - 2y' + y = x e^x \cos x \quad (1)$

$y'' - 2y' + y = x e^{(1+i)x} \quad (2)$

(1) $y'' - 2y' + y = 0 \Rightarrow \mathcal{P}(r) = r^2 - 2r + 1 = 0 \quad r = 1$ (دو برابر)

$y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x$

$1+i$ ریشه معادله کجی نیست پس

$y_p = (A_0 + A_1 x) e^{(1+i)x}$

$-2(y_p' = A_1 e^{(1+i)x} + (1+i)(A_0 + A_1 x) e^{(1+i)x})$

$y_p'' = 2A_1(1+i) e^{(1+i)x} + (1+i)^2 (A_0 + A_1 x) e^{(1+i)x} + A_1(1+i) e^{(1+i)x}$

$(2A_1 i - A_0) e^{(1+i)x} + (-2A_1 + A_1) x e^{(1+i)x} = x e^{(1+i)x}$

$\begin{cases} A_1 = -1 \\ 2A_1 i - A_0 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow A_0 = -2i \quad y_p = (-2i - x) e^{(1+i)x}$

$= (-2i - x)(e^x \cos x + e^x \sin x)$

$$y_p = -x e^x \cos x + 2 e^x \sin x$$

پس جواب عمومی :

$$y_p = -e^x \cos x - x e^x \cos x + x e^x \sin x + 2 e^x \sin x + 2 e^x \cos x$$

$$y_p'' = -e^x \cos x + e^x \sin x - e^x \cos x + x e^x \cos x + e^x \sin x + e^x \sin x + x e^x \sin x + x e^x \cos x + 2 e^x \sin x + 2 e^x \cos x$$

$$\therefore y = c_1 e^x + c_2 x e^x + 2 e^x \sin x$$

2) C ریشه‌ای از معادله کلی $p(r) = 0$ باشد m بار تکراری شود پس

$$p(r) = (r-c)^m p_1(r) \quad Q(D) A x^j e^{cx} = 0 \Rightarrow$$

$$Q(r) = (r-c)^{j+1} \quad p(D) Q(D) y = 0 \Rightarrow p(r) Q(r) = 0$$

$$\Rightarrow (r-c)^{m+j+1} p_1(r) = 0$$

فرض می‌کنیم $u_1, u_2, \dots, u_{n-m}$ جواب $p_1(r) = 0$ باشد و جواب Q مربوط به $(r-c)^{m+j+1}$ برابر با $e^{cx}, x e^{cx}, \frac{x^2}{2} e^{cx}, \dots, x^{m+j} e^{cx}$ پس

$$y = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_{n-m} u_{n-m} + (B_0 e^{cx} + B_1 x e^{cx} + \dots + B_{m-1} x^{m-1} e^{cx} + B_m x^m e^{cx} + \dots + B_{m+j} x^{m+j} e^{cx})$$

$$p(D) [(c_1 u_1 + \dots + c_{n-m} u_{n-m}) + (B_0 e^{cx} + \dots + B_{m-1} x^{m-1} e^{cx} + B_m x^m e^{cx} + \dots + B_{m+j} x^{m+j} e^{cx})] = F$$

$$y_p = (B_m x^m + \dots + B_{m+j} x^{m+j}) e^{cx} = x^m (A_0 + A_1 x + \dots + A_j x^j) e^{cx}$$

نکته: اگر C جوابی از معادله کلی (همان) $p(r) = 0$ باشد m بار تکراری شود در این صورت

$$A_j y_p = x^m (A_0 + A_1 x + \dots + A_j x^j) e^{cx}$$

اعداد ثابت هستند تبدیل می‌شود.

مثال: جواب عمومی معادله دفرانسیل

$$y'' + y = e^{ix} \quad p(r) = r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i$$

$$y_h = c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix}$$

نکته: ریشه‌های معادله کلی هست

$$y = A_0 e^{ix} \Rightarrow y = A_0 x e^{ix}$$