

dt

تابع نمایی: فرض کنیم $b > 0$ هر تابع بصورت $y = b^x$ یک تابع نمایی می‌گویند.

مثال: $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 0.5^x$ توابع نمایی هستند.

مثال: $f(x) = y = 2^x$
 $f(1) = 2$, $f(2) = 2^2 = 4$, $f(0) = 2^0 = 1$, $f(\sqrt{2}) = 2^{\sqrt{2}}$

مثال: حل معادله زیر را حل کنید.
 $7(2^{3x-5}) = 28$

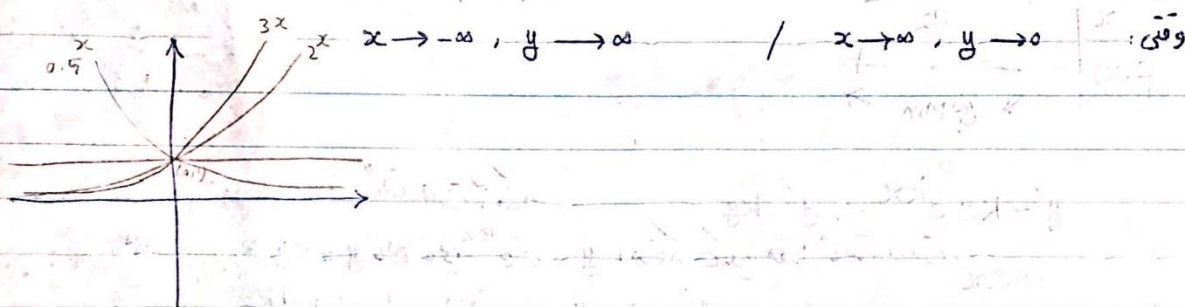
$$\frac{2^{3x-5}}{2} = \frac{28}{7} = 4 = 2^2 \Rightarrow 2 = 3x - 5 \Rightarrow x = \frac{7}{3}$$

تغییر: فرض کنیم $y = b^x$

$$(1) \quad b > 1 \quad \begin{matrix} x \rightarrow -\infty, y \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty \end{matrix}$$

(ادامه) روی نمودار، y هست. $y = 0$ مجانب. به ازای هر x ، تابع همواره مثبت است و برای هر x ، $y > 0$.

$$(2) \quad b < 1 \quad \begin{matrix} x \rightarrow -\infty, y \rightarrow \infty \\ x \rightarrow \infty, y \rightarrow 0 \end{matrix}$$



مشتق: فرض کنیم $y = b^x$ آنگاه ضریب زاویه مماس بر نمودار این تابع در $x = 0$ برابر است با: $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = f'(0) = m$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^h - 1}{h} \approx 0.7 \quad y = 2^x$$

و اگر $x=3$ باشد $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3^h - 1}{h} \sim 1.1$

نمایان می‌دهد برای مقادیر $2 < b < 3$ ضریب زلزله خطای من می‌گردد. $y = b^x$ برای $b < 1$ است این مقدار b را «e» نام می‌دهند و آن را پایه طبیعی یا پایه نپری می‌نامند.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

- فرض کنیم $y = b^x$ باشد $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^{h+a} - b^a}{h}$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=a} = \lim_{h \rightarrow 0} b^a \frac{b^h - 1}{h} = b^a \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h} = b^a \frac{dy}{dx} \Big|_{x=0}$$

نمایان می‌دهد اگر برای $y = b^x$ $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = m$ باشد $\frac{dy}{dx} = m b^x$ عبارت دیگر $y' = m y$ (1) که m اسکناس است. یعنی تابع $y = b^x$ در معادله (1) صدق می‌کند. (معادله‌ای که در آن تابع مشتق‌های تابع وجود داشته باشد را یک معادله دیفرانسیل می‌گویند)

تذکره: چون برای $y = e^x$ $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = 1$ پس $\frac{dy}{dx} = e^x$ یعنی $(e^x)' = e^x$ تذکره: $y = e^{kx}$ اگر قرار دهیم $u = kx$ حال با استفاده از فرمول زنجیره‌ای

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot k = k e^{kx}$$

$$\frac{dy}{dx} = g(x) e^{y(x)}$$

$$y = e^{g(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x e^{x^2+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x e^{x^2+1}$$

$$y = e^{x^2+1}$$

$$y = (1+x)e^{-x/2}$$

$$y' = e^{-x/2} + (1+x)(-\frac{1}{2}e^{-x/2})$$

مثال: فرض کنید $f(x) = \frac{3-2x}{e^{x/4}}$ به کمک این روش این تابع را در صورت وجود پیدا کنید.

$$f'(x) = \frac{-2e^{x/4} - 3/4 x e^{x/4} + 1/2 x e^{x/4}}{e^{x/2}} = 0$$

$$-7/4 e^{x/4} + 1/2 x e^{x/4} = 0 \Rightarrow e^{x/4} (-11/4 + 1/2 x) = 0 \Rightarrow 1/2 x = 11/4 \Rightarrow x = 11/2$$

x	11/2
f'(x)	— 0 +
	↘ Min ↗

مثال: فرض $y = ce^{kx}$ که k مقدار ثابت است. $y' = kce^{kx} \Rightarrow y' = ky$ تذکره: جواب معادله دیفرانسیل $y' = ky$ تابع $y = ce^{kx}$ است که c مقدار ثابت است.

مثال: تمام جواب‌های معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید. $y' = -0.2y$ $y = ce^{-0.2x}$ که در آن $c \in \mathbb{R}$

مثال: تابع $y = e^{-x^2}$ را رسم کنید.

$$y' = -2x e^{-x^2} = 0 \Rightarrow -2x \cdot \frac{1}{e^{x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1$$

x	0
f'(x)	+ 0 -
f(x)	↗ Max ↘

افزایشی $(-\infty, 0)$ Max $(0, \infty)$ کاهش

25

$$y' = -2e^{-x^2} + (-2xe^{-x^2})(-2x) = -2e^{-x^2}(1-2x^2) = 0 \Rightarrow 1-2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}, x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = e^{-1/2} \approx 0.6$$

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = e^{-1/2} \approx 0.6$$

نقاط عطف

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
	+	0	-	+
	∪		∩	∪

$$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty) \text{ تقریباً بالا} \quad (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ تقریباً پایین}$$

$$y = e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}}$$

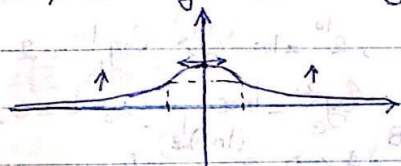
مخارج ها:

$$x \rightarrow +\infty \quad y \rightarrow 0 \quad y = 0 \text{ جانب افقی}$$

$$x \rightarrow -\infty \quad y \rightarrow 0 \quad y = 0 \text{ جانب افقی}$$

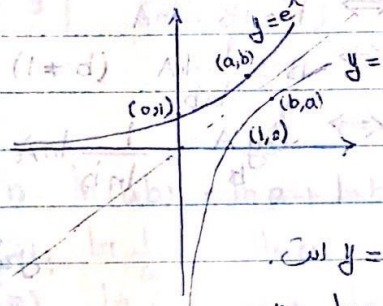
مخارج ها: $y = 0$ جانب افقی

مربع صفر نشود



تابع گسسته:

اگر نمودار تابع $y = e^x$ را نسبت به خط $y = x$ انطافس دهیم نموداری بصورت زیر حاصل می شود.



تابعی که نمودار آن متقارن نسبت به خط $y = x$ در واقع تابع وارون تابع $y = e^x$ است.

این تابع را تابع لگاریتم طبیعی می گویند و آنرا بصورت زیر نمایش می دهیم $y = \ln x$

بعضی از خواص تابع $y = \ln x$ با توجه به نمودار آن:

1. اولاً (b, a) روی $y = \ln x$ $\Leftrightarrow (a, b)$ روی $y = e^x$ باشد.

2. روی نمودار $y = \ln x$ است [زیرا $(a, 0)$ روی $y = e^x$ است] پس $\ln 1 = 0$.

3. دامنه $\ln x$ $\mathbb{R}^+$ (تمام اعداد حقیقی مثبت)

4. $0 < x < 1 \Rightarrow \ln x < 0$

5. $x > 1 \Rightarrow \ln x > 0$

6. $\ln x$ تابعی افزایشی است. همواره افزایشی.

7. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

تذکر:

همانطور که گفتیم (b, a) روی نمودار $y = \ln x$ است اگر و فقط اگر (a, b) روی $y = e^x$ باشد.

$$b = \ln a \Leftrightarrow e^b = a$$

لبنی

مثال: معادله $e^{x-3} = 4$ را حل کنید.

$$e^{x-3} = \frac{4}{1} = e^{\ln \frac{4}{1}} \Rightarrow x-3 = \ln \frac{4}{1} \Rightarrow x = 3 + \ln \frac{4}{1}$$

مثال: $2 \ln x + 7 = 0$

$$\ln x = -\frac{7}{2} \Rightarrow x = e^{-\frac{7}{2}} \quad (\ln a = b \Leftrightarrow a = e^b)$$

$$e^{\ln x} = e^{-\frac{7}{2}} \Rightarrow x = e^{-\frac{7}{2}}$$

تذکر: $b = (e^{\ln b})^x = e^{x \ln b}$

تذکر: اگر نمودار $y = b^x$ ($b > 0$) را نسبت به خط $y = x$ انعکاس دهیم نمودار تابع وارون تابع بدست می آید، تابع بدست آمده را تابع لگاریتمی درستی b می گویند.

این تابع را معکوس نمودار نیز می نامیم.

این تابع را $\log_b x$ می نویسند

$$\log_b A = B \Leftrightarrow A = b^B$$

مثال: $\log_2 16 = 4$ چون $2^4 = 16$

تذکر: اگر $b = e$ می نویسیم $\log_e x = \ln x$. اگر $b = 10$ می نویسیم $\log_{10} x = \lg x$.

تذکر: $b = A \Leftrightarrow e^{(\ln b)B} = A$

$$\Leftrightarrow e^{(\ln b)B} = e^{\ln A}$$

$$\Leftrightarrow (\ln b)B = \ln A$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{1}{\ln b} \ln A \quad (b \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_b A = \frac{1}{\ln b} \ln A$$

مثال: $\log_{10} 70 = \frac{1}{\ln 10} \ln 70$

مشتق: $y = \ln x$

فرض $y = \ln x$ پس $x = e^y$ از طرفین نسبت به x مشتق می گیریم

$$1 = y' e^y \Rightarrow y' = \frac{1}{e^y} \quad e^y = x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x}$$

مثال: مشتق $y = (1+e^x) \ln x$ را بدست آورید.

مشتق: $y = \ln g(x)$

فرض $y = \ln u \leftarrow u = g(x)$

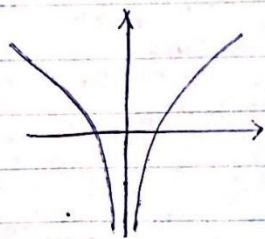
قاعده زنجیره ای

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot g'(x)$$

$$\therefore \frac{d}{dx} (\ln[g(x)]) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$\frac{d}{dx} (\ln u) = \frac{u'}{u}$$

همچنین $\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$ $x > 0, \ln|x| = \ln x \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$
 $x < 0, \ln|x| = \ln(-x) \quad [\ln(-x)]' = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$



مثال: نمودار $y = \ln|x|$ را رسم کنید.

مثال: نقاط ماکسیم یا مینیم تابع زیر را پیدا کنید.

$$y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (x > 0)$$

$$y' = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x)}{(\sqrt{x})^2} = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{(\ln x)\sqrt{x}}{2x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{x} - (\ln x)\sqrt{x}}{2x} = 0 \Rightarrow \ln x = 2 \Rightarrow x = e^2 \quad y = \frac{\ln e^2}{e} = \frac{2}{e}$$

x	> 0	1	e^2	$+\infty$
y'		+	•	-

در $x = e^2$ در نقطه ماکسیم داریم.

Max
می

خواص دیگر تابع لگاریتم طبیعی:

- 1) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- 2) $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$
- 3) $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- 4) $\ln a^r = r \ln a$

اثبات برخی از خواص داده شده در بالا:

1) فرض کنیم $\ln(ab) = x$ فرض $\ln a = x$ پس $\ln b = y$

$$a = e^x, b = e^y \Rightarrow ab = e^x \cdot e^y = e^{x+y}$$

$$ab = e^{x+y} \Rightarrow x+y = \ln(ab) \Rightarrow \ln(ab) = \ln a + \ln b$$

مثال: عبارات زیر را ساده کنید.

$$A = \ln 5 + 2 \ln 3, \quad B = \ln x + \ln 3 + \ln y - \ln 5$$

$$A = \ln 5 + \ln 3^2 = \ln 5 \cdot 3 = \ln 15 \quad B = \ln 3xy - \ln 5 = \ln \frac{3xy}{5}$$

مثال 2: $y = \ln[x(x+1)(x+2)]$ مشتق بگیرید.

$$1) y' = \frac{u'}{u} \quad u' = (x+1)(x+2) + x(x+2) + (x+1)x$$

$$y' = \frac{(x+1)[(x+2) + (x+1) + x]}{x(x+1)(x+2)}$$

$$y = \ln x + \ln(x+1) + \ln(x+2) \Rightarrow y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$$

مثال: $y = \ln \frac{e^x \sqrt{x}}{1+e^x}$ (الف) $y = \ln e^x + \ln \sqrt{x} - \ln(1+e^x) = \ln e^x + \ln \sqrt{x} - \ln(1+e^x)$

$$y = \ln e^x + \frac{1}{2} \ln x - \ln(1+e^x)$$

$$y' = \frac{e^x}{e^x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{e^x}{1+e^x}$$

(ب) $y = \ln 5x$ $y' = \frac{5}{5x} = \frac{1}{x}$

(ج) $y = x(x+1)^4(x+2)^5(x^2-7)$ از دو طرف به لگاریتم می‌گیریم

$$\ln y = \ln x + 4 \ln(x+1) + 5 \ln(x+2) + \ln(x^2-7)$$

مشتق می‌گیریم $\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{4}{x+1} + \frac{5}{x+2} + \frac{2x}{x^2-7}$ $y' = y \left[\frac{1}{x} + \frac{4}{x+1} + \frac{5}{x+2} + \frac{14x}{x^2-7} \right]$

روش مشتق بر مبنای متغیر می‌گیریم
مثال: $y = 2^x$: $y = 2^x$: $x = e^{\ln x}$: $y = x^{\ln x}$

$$\ln y = x \ln 2$$

$$\frac{y'}{y} = \ln 2 + \frac{1}{x} x$$

$$y' = y (\ln 2 + 1) = x (\ln 2 + 1)$$

$$y = (e^{\ln x})^x$$

$$y = e^{x \ln x}$$

$$y' = (\ln x + 1) e^{x \ln x} = x (\ln x + 1)$$

$$\ln y = x \ln 2$$

$$\frac{y'}{y} = \ln 2$$

$$y' = y \ln 2 = 2^x \ln 2$$

مثال: $\ln x$ $y = x^{\ln x}$ $\ln y = \ln x^{\ln x} = \ln x \cdot \ln x$ $\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{x} \ln x = \frac{2}{x} \ln x$
 $y' = y \left(\frac{2}{x} \ln x \right) = x^{\ln x} \left(\frac{2 \ln x}{x} \right)$

4) $y = x^r$ $y' = r x^{r-1}$: $\ln y = r \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{r}{x} \Rightarrow y' = y \left(\frac{r}{x} \right) = x^r \cdot \frac{r}{x} = r x^{r-1}$

5) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(7+h) - \ln 7}{h} = f'(7) = \frac{df}{dx} \Big|_{x=7} = \frac{d \ln x}{dx} \Big|_{x=7} = \frac{1}{x} \Big|_{x=7} = \frac{1}{7}$

6) $y = \ln 5 \Rightarrow y' = 0$

7) $\frac{d^2}{dt^2} (\ln t^2)^3 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 3 \cdot \frac{2t}{t^2} \cdot (\ln t^2)^2 = \frac{6}{t} (\ln t^2)^2$

$$\frac{d^2}{dt^2} y = \frac{-6}{t^2} (\ln t^2)^2 + \left(\frac{6}{t} \times 2 \times \frac{2t}{t^2} \right) (\ln t^2)$$

8) $y = (2x-1)^{2x}$ $\ln y = 2x \ln(2x-1) \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2 \ln(2x-1) + 2x \cdot \frac{2}{2x-1}$

$$y' = y \left(2 \ln(2x-1) + \frac{4x}{2x-1} \right) \Rightarrow y' = (2x-1)^{2x} \left(2 \ln 2x-1 + \frac{4x}{2x-1} \right)$$

9) $y = \ln(\ln x) \Rightarrow y' = \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x}$

کاربرد هابی از تراجاع می‌باشد
یادآوری: تابع $y = ce^{kx}$ در معادله دیفرانسیل $y' = ky$ صدق می‌کند و برعکس جواب $y = ky$ است.
صورت $y = ce^{kx}$ است که C و k در واقع $f(x) = f(0) e^{kx}$