

تمرین ۱. اثبات دهید که برای هر x, y در گروه G داریم: $xy = yx \Leftrightarrow (xy)^2 = x^2 y^2$
 (۱) اثبات دهید که برای هر x, y در گروه G داریم: $xy = yx \Leftrightarrow (xy)^{-1} = x^{-1} y^{-1}$
 (۲) اثبات دهید که برای هر x, y در گروه G داریم: $xy = yx \Leftrightarrow (xy)^2 = x^2 y^2$
 (۳) اثبات دهید که برای هر x, y در گروه G داریم: $xy = yx \Leftrightarrow (xy)^{-1} = x^{-1} y^{-1}$

$$(xy)^2 = (xy)(xy) = x(yx)y = x(xy)y = (xx)(yy) = x^2 y^2$$

$$(xy)^{-1} = (xy)^{-1} = (yx)^{-1} = x^{-1} y^{-1}$$

$$(xy)^{-1} = (xy)^{-1} = (yx)^{-1} = x^{-1} y^{-1}$$

$$(xy)^{-1} = (xy)^{-1} = (yx)^{-1} = x^{-1} y^{-1}$$

$$(xy)^{-1} = (xy)^{-1} = (yx)^{-1} = x^{-1} y^{-1}$$

$$(xy)^{-1} = (xy)^{-1} = (yx)^{-1} = x^{-1} y^{-1}$$

$$(xy)^{-1} = (xy)^{-1} = (yx)^{-1} = x^{-1} y^{-1}$$

قضیه ۱. اگر H زیرگروهی از یک گروه متناهی G باشد آنگاه مرتبه H بر مرتبه G را می‌سپارد. یعنی $|H| \mid |G|$.

مثال. Z_{15} گروه است و $|Z_{15}| = 15$. پس اگر $H \leq Z_{15}$ آنگاه $|H| = 1, 3, 5, 15$.

اثبات قضیه: رابطه $\sim$ را در G به این شکل تعریف می‌کنیم

$$a \sim b \Leftrightarrow \exists h \in H \text{ such that } ba = h \text{ or } a = bh$$

$$a \sim b \Leftrightarrow \exists h_1, h_2 \in H \text{ such that } a = bh_1 \text{ and } b = ch_2$$

$$\Rightarrow a = bh_1 = (ch_2)h_1 = c(h_2h_1) \Rightarrow a \sim c$$

$$[a] = \{x \in G \mid x \sim a\} = \{x \in G \mid (\exists h \in H) x = ah\} = \{ah \mid h \in H\} = aH$$

نمود H بر روی از زده هاست زیرا $[e] = eH = H$

$$2) [a] = [b] \Leftrightarrow a \sim_H b$$

$$\therefore aH = bH \Leftrightarrow a \sim_H b \Leftrightarrow (\exists h \in H) a = bh \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$$

$$3) \text{ هم‌جزء‌های } H \text{ به } aH = \{ah \mid h \in H\} \text{ و } a+H = \{a+h \mid h \in H\} \text{ در صورت زیر همی}$$

$$4) L_H = G / \sim_H = \{aH \mid a \in G\}$$

5) هم‌جزء‌های H به تعداد عضرهای یکسان دارند (هم‌سایه هستند) زیرا برای هر $a \in G$ ، $|aH| = |H|$ (؟) زیرا تابع زیر رویی است

$$f: H \longrightarrow aH$$

$$h \longmapsto ah$$

مقاله استقاده از این مطالب داریم:

$$L_H = \{aH \mid a \in G\}$$

$$G = \bigcup_{a \in G} aH, \text{ مستقیم } G \Rightarrow L_H \text{ مستقیم}$$

$$\text{مستقیم } k \text{ عضر } L_H = \{a_1H, \dots, a_kH\} \text{ پس}$$

$$|G| = |a_1H| + \dots + |a_kH| = |H| + \dots + |H| = k|H|$$

$$\Rightarrow |H| \mid |G|$$

آزمون: نشان دهید رابطه $\sim_H$ به تعریف

$$a \sim_H b \Leftrightarrow (\exists h \in H) a = hb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$$

نیز رابطه $\sim_H$ هم‌ارز روی G است و $|Ha| = |Hb|$ ، $[e] = He = H$ ، $[a] = Ha$

هر Ha را می‌توان هم‌جزء‌های H در G می‌نامیم. اگر $R_H = \{Ha \mid a \in G\}$

هم‌سایه L_H به R_H در G دو رویی است. پس $|L_H| = |R_H|$

$$aH \longmapsto Ha$$

این عدد را $|G:H|$ می‌نامیم و به صورت $[G:H]$ یا $(G:H)$ نشان می‌دهیم.

$$[G:H] = \frac{|G|}{|H|} \quad \text{نسبت مرتبه، میانگین مرتبه‌های مساوی}$$

قضیه. فرض کنیم G گروهی دلخواه (مساوی یا نامساوی) باشد و $H, K \leq G$ و $H \cap K = \{e\}$ داشته باشیم. در این صورت اگر $[G:K]$ و $[K:H]$ مساوی باشند آنگاه داریم:

$$[G:H] = [G:K][K:H]$$

پهان: فرض کنیم $L_1 = \{a_1 k, \dots, a_m k\}$ و $L_2 = \{b_1 H, \dots, b_n H\}$ به ترتیب مجموعه‌های هم‌پوشانی (مجموعه) G و H در K باشند. حال کافی است نشان دهیم $L_3 = \{a_i b_j H \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ مجموعه هم‌پوشانی (مجموعه) G است و در نتیجه $|L_3| = mn = |L_1||L_2|$. عناصر L_3 متمایزند؛

$$a_r b_s H = a_p b_q H \Rightarrow (a_p b_q)^{-1} (a_r b_s) \in H \subseteq K$$

$$\Rightarrow (a_p b_q)^{-1} (a_r b_s) \in K$$

$$\Rightarrow a_p b_q K = a_r b_s K$$

$$\Rightarrow a_p K = a_r K$$

$$\Rightarrow a_p = a_r$$

$$\Rightarrow b_s H = b_q H \Rightarrow b_s = b_q \Rightarrow a_p b_q = a_r b_s$$

حال کافی است نشان دهیم L_3 در واقع برابر با مجموعه هم‌پوشانی G در H است.

$x \in G, xH \in L_3$ ؟

$$xK \in L_1 \Rightarrow xk = a_r k \quad \text{برای یک } k \in K$$

$$\Rightarrow x = a_r k, k \in K$$

$$\Rightarrow kH \in L_2 \Rightarrow kH = b_s H \quad \text{برای یک } s \in \{1, \dots, n\}$$

$$\Rightarrow k = b_s h, h \in H$$

$$\Rightarrow xH = a_r kH = a_r b_s H \in L_3$$

$$[G:H] = [G:K][K:H] = mn$$

در بالا داریم