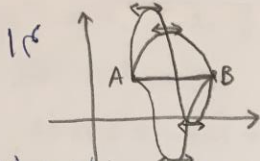


۷.۳ قضیه مقدار میانگین



قضیه رول : Rolle's Thm :

فرض کنید که $y=f(x)$ در هر نقطه از بازه $[a, b]$ پیوسته و در هر نقطه از بازه باز (a, b) مشتق پذیر باشد. اگر $f(a)=f(b)=0$ که نقطه دست کم یک نقطه مانند c بین a و b وجود دارد که در آن $f'(c)=0$ تغییر می کند.

پس f در $[a, b]$ پیوسته لذا f ماکزیم و مینیم خود را در $[a, b]$ اختیار می کند (قضیه). هم چنین این مقدار ماکزیم و مینیم در نقاط بحرانی و نقاط انتهایی رخ می دهد. چون تابع در نقاط داخلی $[a, b]$ مشتق پذیر است لذا نقاط بحرانی داخلی هستند که در آنجا صفر است. یعنی (a, b)

اگر f در نقطه داخلی مانند c ماکزیم یا مینیم شود آنگاه $f'(c)=0$ (قضیه). اگر f در نقاط انتهایی دارای ماکزیم و مینیم شود چون $f(a)=f(b)=0$ لذا صفر

هم مقدار ماکزیم هم مقدار مینیم است پس $f(x)=0$ برای هر x بین a و b و $f'(x)=0$ برای هر x بین a و b یعنی در آنجا c هر یک بین a و b است.

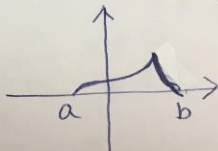
Example 1) $y=x^3-4x=f(x)$ در $[-2, 2]$

پیوسته و مشتق پذیر $-\infty < x < +\infty$

$$a=-2, b=2 \quad f(-2)=f(2)=0 \Rightarrow f'(x)=3x^2-4$$

باید بین -2 و 2 دست کم یک بار صفر شود.

Remark: مشتق نپذیر بودن f در (a, b) است.



کاربرد: یافتن جواب مسئله

۱. مشتق پذیر بودن f در $[a, b]$ پیوسته و در (a, b) مشتق پذیر
۲. $f(a)$ و $f(b)$ علامت های مختلف
۳. f' هرگز در بین a و b صفر نشود.

f بین a و b دقیقاً یک بار صفر می خورد.

* f' هم مختصاً به f در a و b است. اگر f در a و b مشتق پذیر باشد، داریم:

آنکه f در a و b مشتق پذیر است.

دقیقاً به همین روش داریم، $x^3 + 3x + 1 = 0$

$$f(x) = x^3 + 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 3 \neq 0$$

* f' به f در a و b نسبتاً f' در a و b مشتق پذیر است.

f در a و b مشتق پذیر است، f' در a و b مشتق پذیر است.

$$f(-1) = -3, f(1) = 5$$

$\Rightarrow f$ در a و b مشتق پذیر است.

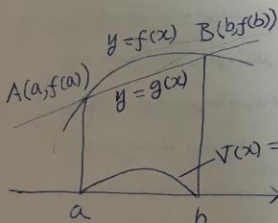
قضیه مقدار میانگین

اگر $y = f(x)$ در هر نقطه از بازه $[a, b]$ مشتق پذیر باشد و در هر نقطه از بازه $[a, b]$ مشتق پذیر باشد، آنگاه در a و b مشتق پذیر است.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

AB مدله نقطه f خط



$$V = f - g$$

$$V(x) = f(x) - g(x)$$

$$= f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

1) V در $[a, b]$ مشتق پذیر است.

(a, b) مشتق پذیر است زیرا f و g مشتق پذیر است.

2) $V(a) = V(b) = 0$ (از a و b در f)

$\Rightarrow V'$ در نقطه a و b مشتق پذیر است.

$$V'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$0 = V'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

اگر $f(x)$ بر $[a, b]$ پیوسته باشد، $\min f' \leq \max f' \leq \max f' \leq \min f'$ در $[a, b]$ دارد

$$\min f' \leq f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \max f' \quad 19$$

Example: 1) $y = x^3$, $a = -2$, $b = 2$

$$f'(x) = 3x^2, \quad f'(c) = 3c^2$$

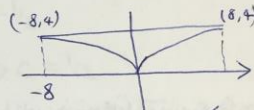
$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} \Rightarrow 3c^2 = 4 \Rightarrow c = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

2) $y = \sqrt{1-x^2}$ $[-1, 1]$ $f'(0) = 0$

3) $f(x) = x^{2/3}$, $[-8, 8]$ $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{4 - 4}{16} = 0$

$$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \quad f'(c) = \frac{2}{3\sqrt[3]{c}} \neq 0$$

f' در مرکز مشتق پذیر نیست



4) $f'(x) = \frac{1}{5-x^2}$, $f(0) = 4 \Rightarrow f(1)$ را پیدا کنید

$$f'(x) = \frac{1}{5-x^2} \quad \min \frac{1}{5-x^2} \leq \frac{f(1) - f(0)}{1-0} \leq \max \frac{1}{5-x^2}$$

$$\frac{1}{5-0} \leq f(1) - 4 \leq \frac{1}{5-1}$$

$$2 + \frac{1}{5} \leq f(1) \leq 2 + \frac{1}{4}$$

نتیجه ۱: اگر f' ، f صعودی است و اگر $f' < 0$ ، f نزولی است.

نتیجه ۲: اگر $f' = 0$ ، آنگاه f یک عدد ثابت است.

نتیجه ۳: تابعی که مشتقش یک تابع است، تفاضل آن یک تابع است.

Example: $(x^2)' = 2x$

هر تابع دیگری که مشتقش $2x$ باشد

از فرمول $F(x) = x^2 + C$ بدست می آید

مشتق هیچ تابع دیگری $2x$ نیست.

قضیه مقدار میانگین را برای تابع زیر در $[0, 2]$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases} \quad (14)$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3-x^2}{2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1)$$

پس f در $[0, 2]$ پیوسته است.

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{3-x^2}{2} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1-x^2}{2}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1+x}{-2} = -1$$

$$= -1, \quad f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x}{x(x-1)} = -1$$

شرط قضیه مقدار میانگین برقرار است.

$$0 < c < 2: f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = f'(c) \cdot 2 \Rightarrow f'(c) = -\frac{1}{2}$$

$$0 < c \leq 1 \Rightarrow f'(c) = -\frac{1}{2} \Rightarrow -c = -\frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$1 < c < 2 \Rightarrow f'(c) = -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{c^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow c = \pm\sqrt{2} \Rightarrow c = \sqrt{2}$$

نتیجه: فرض کنید f تابعی پیوسته بر $[a, b]$ و (a, b) مشتق پذیر باشد، علاوه بر $f(a) = f(b)$ در این صورت

درست کم یک c بین a, b هست که $f'(c) = 0$

رابطه: قضیه مقدار میانگین
 $\exists c \ a < c < b \text{ s.t. } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
 $f'(c) = 0 \quad \checkmark$

مسئله: اگر $0 = \frac{C_0}{1} + \frac{C_1}{2} + \dots + \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{C_n}{n+1}$ که در آن C_i ها اعداد حقیقی هستند و n در یک

عدد دلخواه n معادله $0 = C_0 + C_1 x + \dots + C_{n-1} x^{n-1} + C_n x^n$ را دارد.

$$f(x) = C_0 x + C_1 \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{C_n x^{n+1}}{n+1}$$

$$f(0) = 0 = f(1) \quad (\text{با فرض})$$

f بر $[0, 1]$ پیوسته و $(0, 1)$ مشتق پذیر است پس C بین $(0, 1)$ وجود دارد که

$$f'(c) = 0 \quad (\text{قضیه رول}) \Rightarrow$$

$$C_0 + C_1 c + \dots + C_n c^n$$

یعنی C معادله $0 = C_0 + C_1 x + \dots + C_n x^n$ است.

$$f(3) = 3, f(-3) = -3, |f'(x)| \leq 1 \Rightarrow f'(0) = 0$$

مثال 21
P. 112

$$[-3, 0] \quad \frac{f(0) - f(-3)}{0 - (-3)} = f'(c) \Rightarrow -1 \leq \frac{f(0) + 3}{3} \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3 + f(0) \leq 3$$

$$\Rightarrow -6 \leq f(0) \leq 0$$

$$[0, 3] \quad \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = f'(d) \Rightarrow -1 \leq \frac{3 - f(0)}{3} \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3 - f(0) \leq 3$$

$$\Rightarrow -6 \leq -f(0) \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq f(0) \leq 6$$

$$0 \leq f(0) \leq 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

(14")

سوال: ثابت کنید معادله $x + \tan x = 0$ در بازه $(-\pi/2, \pi/2)$ دقیقاً یک جواب دارد.

$$x + \tan x = 0 \quad (-\pi/2, \pi/2)$$

$$f(x) = x + \tan x \quad f(-\pi/4) = -\pi/4 + \tan(-\pi/4) \\ = -\pi/4 - 1 < 0$$

$$f(\pi/4) = \pi/4 + 1 > 0$$

قضیه مقدار میانی

$$\Rightarrow \exists -\pi/4 \leq c \leq \pi/4 \text{ s.t. } f(c) = 0 \\ c + \tan c = 0$$

$$\& \exists c_1, c_2 \in (-\pi/2, \pi/2) \text{ s.t. } f(c_1) = 0 = f(c_2)$$

$$\Rightarrow \exists c_1 \leq c_3 \leq c_2 \text{ s.t. } f'(c_3) = 0 \quad \text{قضیه مقدار میانی}$$

$$\Rightarrow 1 + (1 + \tan^2 c_3) = 0 \quad \times \quad (1 + (1 + \tan^2 x) > 0)$$

(14) //

قاعده هسپیتال (صورت اول)

فرض کنید $f(a) = g(a) = 0$ ، $f'(a) \neq 0$ ، $g'(a) \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ وجود داشته باشد

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

$$\frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

نکته:

۱) a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin x}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

قاعده هسپیتال (صورت دوم)

فرض کنید $f(x_0) = g(x_0) = 0$ و در بازه (a, b) هر دو درجه f و g مرتبه n داشته باشند و $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ وجود داشته باشد و $g'(x) \neq 0$ برای $x \in (a, b)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

a) $f(x) = 3x - \sin x$, $g(x) = x$, $f(0) = 0$, $g(0) = 0$, $f'(x) = 3 - \cos x$, $g'(x) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin x}{x} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{3 - 1}{1} = 2$$

b) $f(x) = \sqrt{1+x} - 1$, $g(x) = x$, $f(0) = 0$, $g(0) = 0$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$, $g'(x) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{6} = -\frac{1}{6}$

تذکره: این قاعده (هوشیال) تنها در موارد $\frac{0}{0}$ بکار می آید، در موارد دیگر مثل $\frac{\infty}{\infty}$ نیز بکار نرود
مثال:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} =$ ؟ $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x =$ ؟

$$x = \frac{1}{t} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \sin t = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{1}{1} = 1$$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$

$x \rightarrow 0$

$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow +\infty, \frac{1}{\sin x} \rightarrow +\infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x =$ ؟

$x \rightarrow 0^- \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow -\infty, \frac{1}{\sin x} \rightarrow -\infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x =$ ؟

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2-0} = 0$$

نکته

در موارد $\frac{\infty}{\infty}$ و $\frac{0}{0}$ می توان از قاعده هوشیال یا از نسبت ل'Hopital استفاده کرد. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{10x+1}}{\sqrt{x+1}}$ $\frac{\infty}{\infty}$ در مورد $\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{\#25}{p.196}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{10x+1}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{10}{2\sqrt{10x+1}}}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5\sqrt{x+1}}{\sqrt{10x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5\sqrt{x+1}}{\sqrt{10}\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{10x+1}}{2\sqrt{x+1}} \quad ?$$

(IV)

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$$

حل اول: با استفاده از قانون ل'Hôpital

$$1-x=t \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\cot \frac{\pi x}{2}} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\cot(\frac{\pi}{2}(1-t))} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\cot(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}t)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan \frac{\pi}{2}t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos \frac{\pi}{2}t}{\sin \frac{\pi}{2}t}$$

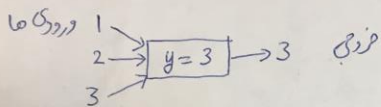
$$= \frac{2}{\pi} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{2}t}{\sin \frac{\pi}{2}t} \times \lim_{t \rightarrow 0} \cos \frac{\pi}{2}t = \frac{2}{\pi} \times 1$$

راه دوم: استفاده از سری تیلور

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)}{\cot \frac{\pi x}{2}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{dx}(1-x)}{\frac{d}{dx}(\cot \frac{\pi x}{2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{-\frac{\pi}{2} \csc^2 \frac{\pi x}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{\pi} \sin^2 \frac{\pi}{2} x = \frac{2}{\pi} \sin^2 \frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}$$

$$x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow y = f(x) \quad y = 3, y = x^2, y = \sin x$$



به ازای ورودی های متفاوت می تواند
خروجی های یکسان داشته باشد.

$$y = 4x - 4, y = x^3, y = \sqrt{x}$$

توابعی هستند که:

به ازای ورودی های متفاوت خروجی های متفاوت دارند. (توابع یک یک)
این توابع را می توان معکوس کرد. بدون معنی که

$$x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow y \rightarrow \boxed{f^{-1}} \rightarrow x$$

نکته: ۱) $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$
 * (توجه: ۱- در اینجا ناایست)

۲) تئیم ترکیب f و f^{-1} تابع هویت است. و عکسوار به آن تئیم

$$x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow f(x) \rightarrow \boxed{f^{-1}} \rightarrow x$$

آزاد است. هر دو معکوس می گیرند. اگر $f \circ g = g \circ f = \text{Id}$ آنگاه f و g معکوس یکدیگرند.

Example 1) $y = \sqrt{x}$ (صورت درکتا)

$$y = \sqrt{x}, x = y^2, y = x^2 \geq 0$$

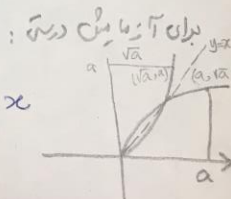
$$f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x^2, x \geq 0$$

$$g(f(x)) = (\sqrt{x})^2 = x, f(g(x)) = \sqrt{x^2} = |x| = x$$

۲) $y = \frac{1}{4}x + 3, y = 4x - 12$ (صورت درکتا)

۳) $y = 8x^3, y = \sqrt[3]{x}$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{y}{8}} = \frac{\sqrt[3]{y}}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt[3]{x}}{2}$$



نوعه ۱۱: متغیرهای معکوس

اگر f در هر نقطه از بازه I مشتق پذیر باشد، و f' بر I هرگز صفر نشود، آنگاه $g = f^{-1}$ در هر نقطه داخلی بازه $f(I)$ مشتق پذیر است و مقدار آن در نقطه $f(x)$ برابر است با:

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad \left[(g \circ f)(x) = x \Rightarrow g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \Rightarrow g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \right]$$

برای هر $x \in I$

۴) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$ $g'(3) = \frac{1}{f'(9)}$ نشان دهید

$f(9) = 3$, $g'(x) = 2x$, $g'(3) = 6$

$$\frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \quad , \quad \frac{1}{f'(9)} = 2\sqrt{9} = 6$$

در واقع به سادگی می‌توانیم متوجه شویم که از درجه اول تابع f داریم:

$$g'(f(9)) = \frac{1}{f'(9)}$$

۵) $f(x) = 4x - 12$, $g(x) = \frac{1}{4}x + 3$

$$f'(x) = 4, \quad g'(x) = \frac{1}{4} \quad , \quad g'(f(x)) = g'(x) = \frac{1}{4} = \frac{1}{f'(x)}$$

۶) $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$

$$g'(f(2)) = \frac{1}{f'(2)}$$

$$f(2) = 8 \quad , \quad g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad , \quad g'(8) = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{12}$$

$$f'(x) = 3x^2, \quad f'(2) = 12 \quad , \quad g'(f(2)) = \frac{1}{f'(2)}$$

۳۴
- اگر $y = f(x)$ و معکوس $x = g(y)$ متعکض باشند

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

۴) $y = \sqrt{x}$, $x = y^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad , \quad \frac{dx}{dy} = 2y$$

$$\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = 2\sqrt{x} = 2y = \frac{dx}{dy}$$

نکته مهم: هرگاه می‌توان متغیرهای تابع معکوس را از رابطه زیر استخراج کرد:
(معکوس تابع f است) $(g \text{ معکوس تابع } f \text{ است})$
 $f(x) = y \Leftrightarrow x = g(y)$



$$P_0 = 1 \text{ cm}^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dx} = 0.1 \text{ mm/hr}$$

تمرین: غول‌ساز افعالی: ابتدا نشان دهید تابع با ضابطه $f(x) = \cos^2 x + \frac{12x}{\pi}$ معکوس پذیر است و سپس
(۱۳) $(f^{-1})'$ را بدست آورید

حل: $f(x) = 13 \Rightarrow \cos^2 x + \frac{12x}{\pi} = 13 \Rightarrow x = \pi$, $f'(x) = -2 \sin x \cos x + \frac{12}{\pi}$
 $= -\sin 2x + \frac{12}{\pi}$

$$(f^{-1})'(13) = \frac{1}{f'(\pi)} = \frac{1}{\frac{12}{\pi}} = \frac{\pi}{12}$$

تمرین: با استفاده از دستور $f(f^{-1}(x)) \equiv x$ معکوس تابع $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ را بدست آورید.

حل: $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, $f(f^{-1}(x)) = \frac{1+f^{-1}(x)}{1-f^{-1}(x)} = x$

$$\Rightarrow x - x f^{-1}(x) = 1 + f^{-1}(x) \Rightarrow f^{-1}(x)(1+x) = x-1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

 $x \neq -1$