

5. با استفاده از استقرای ریاضی نشان دهید که

$$D_n = (r_2 - r_1)[(r_3 - r_1)(r_2 - r_1)][(r_4 - r_1)(r_4 - r_2)(r_4 - r_3)] \cdots \times [(r_n - r_1)(r_n - r_2) \cdots (r_n - r_{n-1})]$$

که در آن

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_{n-1} & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_{n-1}^2 & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots & r_{n-1}^{n-1} & r_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

حل: برای $n=2$ رابطه برقرار است. فرض کنیم رابطه برای

$n=k$ برقرار باشد. قرار دهیم

واقع است که D_k چند جمله‌ای از درجه k است و

$$D(r) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_k & r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \cdots & r_k^{k-1} & r^k \end{vmatrix}$$

$$D(r) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_k & r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \cdots & r_k^{k-1} & r^k \end{vmatrix} = D_k + \cdots$$

$$D(r) = D_k r^k + \cdots$$

(به حسب توان آخر در ضرایب رابطه داده ایم) لذا

همچنین $D(r_k) = 0$ زیرا ضرایب فوق در سطرهای r_k و r_k خواهند داشت و $D(r_k) = 0$ زیرا r_k ریشه‌های چند جمله‌ای D و در واقع تمام ریشه‌های آن است. لذا

$$D(r) = D_k (r - r_1)(r - r_2) \cdots (r - r_k)$$

$$D_{k+1} = D(r_{k+1}) = \underbrace{D_k}_{\downarrow} (r_{k+1} - r_1)(r_{k+1} - r_2) \cdots (r_{k+1} - r_k) \quad \text{دلایل}$$

$$D_{k+1} = (r_2 - r_1)(r_3 - r_1)(r_3 - r_2) \cdots (r_k - r_1)(r_k - r_2) \cdots (r_k - r_{k-1}) \times (r_{k+1} - r_1)(r_{k+1} - r_2) \cdots (r_{k+1} - r_k) \quad \square$$

$$D_n = (r_n - r_{n-1})(r_n - r_{n-2}) \dots (r_n - r_3)(r_n - r_2)(r_n - r_1) \cdot \\ [(r_{n-1} - r_{n-2}) \dots (r_{n-1} - r_2)(r_{n-1} - r_1)] \dots [(r_3 - r_2)(r_3 - r_1)] [(r_2 - r_1)]$$

$$3.5 \quad r_1 = 2i, r_2 = -1, r_3 = 2$$

چون ریشه ها مختلط داریم پس مزدوج هم بر روی بارند

$$p(r) = (r - 2i)(r + 2i)(r + 1)(r - 2) = (r^2 + 4)(r^2 - r - 2)$$

$$p(r) = r^4 - r^3 + 2r^2 - 4r - 8 \quad p(D)y = 0$$

$$p(D)y = (D^4 - D^3 + 2D^2 - 4D - 8)y = 0 \Rightarrow y^{(4)} - y^{(3)} + 2y'' - 4y' - 8y = 0$$

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

$$W = W(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} = u_1 u_2' - u_1' u_2$$

$$a_0 w' + a_1 w = 0 \Rightarrow w' = u_1 u_2'' + u_1' u_2' - u_1' u_2' - u_1'' u_2 \Rightarrow w' = u_1 u_2'' - u_1'' u_2$$

$$\begin{aligned} -u_2 \{ a_0 u_1'' + a_1 u_1' + a_2 u_1 = 0 \} &+ \\ u_1 \{ a_0 u_2'' + a_1 u_2' + a_2 u_2 = 0 \} &\Rightarrow a_0 (u_1 u_2'' - u_1'' u_2) + a_1 (u_1 u_2' - u_1' u_2) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore a_0 w' + a_1 w = 0 \Rightarrow a_0 \frac{dw}{dx} + a_1 w = 0 \Rightarrow \frac{dw}{dx} = -\frac{a_1}{a_0} w \Rightarrow$$

$$\frac{dw}{w} = -\frac{a_1}{a_0} dx \Rightarrow \ln w = -\int \frac{a_1}{a_0} dx + \ln c \Rightarrow w = c e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}$$

تابعی نمی باشد صفر نمی شود لذا W بر حسب (x) انتخاب می شود. c ≠ 0 و c = 0 صفر است.

$$- Ly = 0 \quad L = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0$$

$$p(r) = 0 \quad p(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0$$

$r_1, r_2, \dots, r_n$ ریشه های حقیقی و مختلط از معادله کلی (1) باشند. در این صورت جواب عمومی معادله

$$c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x}$$

در این صورت عبارت است از:

$$y' + y = 0 \quad p(r) = r^2 + 1 = 0 \quad r_1 = i, r_2 = -i$$

$$W(x) = u(x) + i v(x)$$

تابع مختلط W را در نظر می گیریم

$$W'(x) = u'(x) + i v'(x) \Rightarrow W''(x) = u''(x) + i v''(x)$$

$$W^{(n)}(x) = u^{(n)}(x) + i v^{(n)}(x)$$

$$L = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 \quad \text{معادله دیفرانسیل (۱) را در نظر بگیرید}$$

a_i ها مقادیر ثابتند

اگر W یک جواب مختلط از معادله دیفرانسیل (۱) را در نظر بگیرید $W = u + iv$ و جواب واقعی u, v

$$\begin{aligned} L W &= (a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0)(W) \\ &= (a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0)(u + iv) \\ &= a_n (D^n u + i D^n v) + a_{n-1} (D^{n-1} u + i D^{n-1} v) + \dots + a_1 (D u + i D v) \\ &\quad + a_0 (u + iv) = L u + i L v = 0 \Rightarrow L u = 0, L v = 0 \end{aligned}$$

$$L y = f(x) + i g(x)$$

$$W = u(x) + i v(x) \quad L u(x) = f(x), L v(x) = g(x)$$

فرمول انگر:

$$\begin{aligned} e^{a+ib} &= e^a \cdot e^{ib} = e^a \left(1 + (ib) + \frac{(ib)^2}{2!} + \frac{(ib)^3}{3!} + \dots + \frac{(ib)^n}{n!} + \dots \right) \\ &= e^a \left[\left(1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} - \dots \right) + i \left(b - \frac{b^3}{3!} + \dots \right) \right] = e^a (\cos bx + i \sin bx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos \theta + i \sin \theta \quad Z = x + iy \\ \frac{Z}{e} &= e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y = \left(\frac{e^x}{i} + \frac{e^x}{i} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (e^{h(z)})' &= e^{h(z)} \cdot h'(z) \\ (e^{w(x)})' &= e^{w(x)} w'(x) \end{aligned}$$

$$(e^{x+ix^2})' = e^{x+ix^2} (1 + 2xi)$$

فرض می کنیم $r_1 = a + ib, r_2 = a - ib, r_3 = c + id, r_4 = c - id, \dots, r_n$ ریشه های

معادله $p(r) = 0$ را در نظر بگیرید. r_2, r_1 را دور هم مختلط از معادله $p(r) = 0$ را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} L y &= 0 \\ W &= e^{r_1 x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax} e^{ibx} = e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) \\ &= e^{ax} \cos bx + i e^{ax} \sin bx \end{aligned}$$

نتیجه می گیریم که $e^{ax} \cos bx$ و $e^{ax} \sin bx$ دو جواب حقیقی هستند و در n درجه اول

است. $e^{ax} \sin bx$ و $-e^{ax} \sin bx$ را می توان به ترتیب خطی همان جواب اولی است لذا درجه اول اولی

است. $e^{ax} \cos bx$ و $-e^{ax} \cos bx$ را می توان به ترتیب خطی همان جواب اولی است لذا درجه اول اولی

است. $e^{ax} \sin bx$ و $-e^{ax} \sin bx$ را می توان به ترتیب خطی همان جواب اولی است لذا درجه اول اولی

است. $e^{ax} \cos bx$ و $-e^{ax} \cos bx$ را می توان به ترتیب خطی همان جواب اولی است لذا درجه اول اولی

فرض کنید n ریشه یابنده، $r_1, r_2, \dots, r_n$ ریشه یابنده، $r_1, r_2, \dots, r_n$ ریشه یابنده

$$e^{ax} \cos bx, e^{ax} \sin bx, e^{ax} \cos bx, e^{ax} \sin bx, r_3 = a_1 + ib_1, r_4 = a_1 - ib_1$$

$$\begin{cases} e^{ibx} = \cos bx + i \sin bx \\ e^{-ibx} = \cos bx - i \sin bx \end{cases} \Rightarrow \cos bx = \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2}$$

$$\sin bx = \frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i}$$

$$c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx + c_3 e^{ax} \cos bx + c_4 e^{ax} \sin bx + \dots = 0$$

$$c_1 e^{ax} \left(\frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2} \right) + c_2 e^{ax} \left(\frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i} \right) + c_3 e^{ax} \left(\frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2} \right)$$

$$+ c_4 e^{ax} \left(\frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i} \right) + \dots = 0$$

$$\left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_3}{2i} \right) e^{(a+ib)x} + \left(\frac{c_1}{2} - \frac{c_3}{2i} \right) e^{(a-ib)x} + \left(\frac{c_3}{2} + \frac{c_4}{2i} \right) e^{(a+ib)x}$$

$$+ \left(\frac{c_3}{2} - \frac{c_4}{2i} \right) e^{(a-ib)x} + \dots = 0$$

$$\begin{cases} \frac{c_1}{2} + \frac{c_3}{2i} = 0 \\ \frac{c_1}{2} - \frac{c_3}{2i} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 i + c_3 = 0 \\ c_1 i - c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2c_1 i = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$c_3 = 0$$

$$y'' + 2y' = 0 \Rightarrow p(r) = r^2 + 2r = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = i\sqrt{2}, r_3 = i\sqrt{2}$$

$$y_1 = e^0 = 1, e^{(i\sqrt{2})x} = \cos \sqrt{2}x + i \sin \sqrt{2}x$$

$$y_2 = \cos \sqrt{2}x, y_3 = \sin \sqrt{2}x$$

$$y_h = C_1 + C_2 \cos \sqrt{2}x + C_3 \sin \sqrt{2}x$$

فرض کنید $p(D)$ معادله دیفرانسیل

$$(D^2 + D + 1)(D^2 + 1)(D^2 - 1)y = 0$$

$$p(r) = (r^2 + r + 1)(r^2 + 1)(r^2 - 1) = 0$$

$$r^2 + r + 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i, \quad r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1$$

$$e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x}, e^{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x}, e^{ix}, e^{-ix}, e^x, e^{-x}$$

$$y_h = c_1 e^{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x} + c_2 e^{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x} + c_3 e^{ix} + c_4 e^{-ix} + c_5 e^x + c_6 e^{-x}$$

$$p(D)y = 0, \quad p(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0$$

$$p(r) = 0 \quad p(r) = r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow p(r) = (r-1)^2 = 0$$

$$r_1 = r_2 = 1 \quad p(r) = (r-r_1)^k Q(r) \quad p(D) = (D-r_1)^k Q(D)$$

فرض کنید $Q(D) = Q(D)$ و $W(x)$ را به صورت $W(x) = e^{rx}$ فرض کنید

$$(D-r)^m [e^{rx} W(x)] = e^{rx} D^m W(x)$$

$$m=1 \quad (D-r)[e^{rx} W(x)] = re^{rx} W(x) + e^{rx} D W(x) + (-re^{rx} W(x)) = e^{rx} D W(x)$$

$$(D-r)^k [e^{rx} W(x)] = e^{rx} D^k W(x) \quad \text{فرض کنید } m=k \text{ و فرض کنید } W(x) = e^{rx}$$

$$(D-r)^{k+1} [e^{rx} W(x)] = (D-r) e^{rx} D^k W(x) = re^{rx} D^k W(x) + e^{rx} D^{k+1} W(x) - re^{rx} D^k W(x) = e^{rx} D^{k+1} W(x)$$

فرض کنید r_1 ریشه ای از معادله $p(r) = 0$ که k بار تکرار شده و فرض کنید

$$p(D) = (D-r_1)^k Q(D)$$

$$0 \leq j \leq k-1, \quad x^j e^{r_1 x}$$

k جواب معادله دیفرانسیل $p(D)y = 0$ است

$$p(D) = (D-r_1)^k Q(D) = Q(D) (D-r_1)^k$$

$$p(D) x^j e^{r_1 x} = Q(D) (D-r_1)^k x^j e^{r_1 x} = Q(D) e^{r_1 x} D^k x^j \quad D^k x^j = 0, k > j$$

$$j = 0, 1, \dots, k-1 \Rightarrow D^k x^j = 0 \Rightarrow Q(D) e^{r_1 x} D^k x^j = 0$$

این ریشه ها مختلف و تکراری باشند.

فرض کنید $r_1 = a+ib$ ریشه ای از معادله $p(r) = 0$ باشد که k بار تکرار می شود، پس $r_2 = a-ib$ ریشه ای دیگر است.

و $2k$ جواب می‌خواهیم

$$x^j e^{r_j x} \quad 0 \leq j \leq k-1$$

$$x^j e^{r_j x} = x^j e^{(a+ib)x} = x^j e^{ax} (\cos bx + i \sin bx)$$

$$x^j e^{ax} \cos bx, x^j e^{ax} \sin bx$$

اگر $r_1 = a+ib$ ریشه از معادله k بار تکراری بود در این صورت

$$x^j e^{ax} \sin bx, x^j e^{ax} \cos bx \quad 0 \leq j \leq k-1$$

که $2k$ جواب می‌خواهیم.

$$(D^2+2^3)(D^2+D)(D^2-4)y=0$$

مسئله جواب عمومی معادله در این

$$p(r) = (r^2+2^3)(r^2+r)(r^2-4) = 0$$

$$r^2+2^3=0 \Rightarrow r^2=-2^3 \Rightarrow r=\pm i2$$

ریشه‌های تکراری $r_1=i2$

$$r^2+r=0 \Rightarrow r=0, r=-1$$

ریشه‌های تکراری $r_2=-i2$

$$r^2-4=0 \Rightarrow r=\pm 2$$

$r_3=0$ ریشه تکراری $r_4=-1$

$r_5=2$ ریشه تکراری $r_6=-2$

$$e^{iax} = \cos ax + i \sin ax \quad \cos ax, \sin ax$$

$$x \cos ax, x \sin ax, x^2 \cos ax, x^2 \sin ax$$

$$1, x, x^2, e^{-x}, x e^{-x}, x^2 e^{-x}, e^{2x}, x e^{2x}, x^2 e^{2x}$$

$$e^{-2x}, x e^{-2x}, x^2 e^{-2x}$$

$$y_h =$$

تکلیف خطی این جواب می‌خواهیم

مسئله جواب عمومی معادله در این $y''+a^2y=0$ را پیدا کنید

$$p(r) = r^2+a^2=0 \Rightarrow r=\pm ia$$

$\cos ax, \sin ax$

$$y_h = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax$$

$$y = (c_1^2+c_2^2)^{1/2} [p \cos ax + q \sin ax], \quad p = \frac{c_1}{(c_1^2+c_2^2)^{1/2}},$$

$$q = \frac{c_2}{(c_1^2+c_2^2)^{1/2}} \quad p = \cos \alpha, \quad q = \sin \alpha$$

$$y = A [\cos \alpha \cos ax - \sin \alpha \sin ax], \quad A = (c_1^2+c_2^2)^{1/2}$$

$$y = A \cos(ax+\alpha) \quad p = \sin \beta, \quad q = \cos \beta \quad y = A \sin(ax+\beta)$$

α, β اعداد حقیقی

معادلات کوئی وادی (1)

معادله دیفرانسیل صورت $a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0$ که در آن $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ اعداد حقیقی هستند معادله دیفرانسیل کوئی وادی و این معادله همواره کوئی وادی است. فرض می‌کنیم $x \in (0, \infty)$ اگر $x \in (-\infty, 0)$ تغییر متغیر $t = \ln(-x)$ را در نظر بگیریم

$$t = \ln x \quad \text{تغییر متغیر} \Rightarrow x = e^t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$y(x) = y(e^t) = Y(t)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dY}{dt} \Rightarrow x y' = D Y$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dY}{dt} \cdot \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2} \frac{dY}{dt} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{dY}{dt} \right)$$

$$= -\frac{1}{x^2} \frac{dY}{dt} + \frac{1}{x} \frac{d}{dt} \left(\frac{dY}{dt} \right) \cdot \left(\frac{dt}{dx} \right) = \frac{1}{x^2} \frac{d^2 Y}{dt^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dY}{dt}$$

$$x^2 y'' = \frac{d^2 Y}{dt^2} - \frac{dY}{dt} = D^2 Y - D Y \quad \text{طرفین را در } x^2 \text{ ضرب کرده}$$

$$x^2 y'' = D(D-1)Y$$

تغییر با استفاده از انتگرال می‌گیریم که $x^m y^{(m)} = D(D-1) \dots (D-m+1)Y$ پس با استفاده از فرمول نسبت آورده معادله (1) صورت زیر نوشته می‌شود.

$$a_n D(D-1) \dots (D-n+1)Y + a_{n-1} D(D-1) \dots (D-n+2)Y + \dots +$$

$$a_2 D(D-1)Y + a_1 D Y + a_0 Y = 0$$

$$(2) \quad b_n D^n Y + b_{n-1} D^{n-1} Y + \dots + b_2 D^2 Y + b_1 D Y + b_0 Y = 0$$

معادله (2) را تشکیل می‌دهیم

$$p(r) = b_n r^n + b_{n-1} r^{n-1} + \dots + b_2 r^2 + b_1 r + b_0 \quad (3)$$

r_k ریشه حقیقی از معادله (3) باشد که k بار تکرار شود

$$t^j e^{r_k t} \quad 0 \leq j \leq k-1$$

k جواب مرتبط با معادله دیفرانسیل (1) عبارت است از:

$$(\ln x)^j e^{r_k \ln x} = (x^{r_k}) (\ln x)^j \quad 0 \leq j \leq k-1$$

حال فرض می کنیم $r_2 = a + ib$ ریشه ای از معادله دیکه (3) باشد که k بار تکراری شود در این صورت

حالا $r_3 = a - ib$ هم ریشه است که k بار تکراری شود و جواب می خواهیم
 $t^j e^{at} e^{ibt}$, $t^j e^{at} e^{-ibt}$ $0 \leq j \leq k-1$

جوابی مربوط به معادله دیکه (1) عبارتند از:

$$(\ln x)^j e^{a \ln x} e^{b \ln x}$$

$$(\ln x)^j e^{a \ln x} e^{-b \ln x} \quad 0 \leq j \leq k-1$$

$$(\ln x)^j x^a e^{b \ln x} \quad \left. \begin{array}{l} \text{If } j=0 \text{ solution is} \\ x^a e^{b \ln x} \end{array} \right\}$$

$$(\ln x)^j x^a e^{-b \ln x}$$

$$x^a e^{b \ln x}$$

مسئله: جواب عمومی معادله دیکه (1) را بنویسید $x \in (0, \infty)$

$$x^2 y'' - 3x y' + 4y = 0 \quad x \in (0, \infty)$$

$$t = \ln x \quad x^m y^{(m)} = D(D-1) \dots (D-m+1) Y$$

$$x^2 y'' = D(D-1) Y$$

$$\Rightarrow D(D-1) Y - 3 D Y + 4 Y = 0$$

$$x y' = D Y$$

$$Y'' - Y' - 3Y' + 4Y = 0 \Rightarrow Y'' - 4Y' + 4Y = 0$$

$$p(r) = r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r-2)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 2$$

$$Y = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} \quad y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x$$

$$x^3 y''' + 6x^2 y'' + 7x y' + y = 0 \quad t = \ln x$$

$$x^3 y''' = D(D-1)(D-2) Y, \quad x^2 y'' = D(D-1) Y, \quad x y' = D Y$$

$$D(D-1)(D-2) Y + 6D(D-1) Y + 7D Y + Y = 0$$

$$Y''' - 3Y'' + 2Y' + 6Y'' - 6Y' + 7Y' + Y = 0$$

$$Y''' + 3Y'' + 3Y' + Y = 0 \Rightarrow (Y+1)^3 = 0 \Rightarrow r = -1 \quad \text{صورت تکراری سه بار}$$

$$Y = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + c_3 t^2 e^{-t}$$

$$y(x) = c_1 e^{-\ln x} + c_2 (\ln x) e^{-\ln x} + c_3 (\ln x)^2 e^{-\ln x}$$

$$y(x) = c_1 \frac{1}{x} + c_2 \frac{\ln x}{x} + c_3 \frac{(\ln x)^2}{x}$$

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0 \quad \text{روشی دیگر:}$$

$$y = x^s \quad x \in (0, \infty) \quad \text{هر چیزی می تواند باشد.}$$

$$y' = s x^{s-1}, \quad y'' = s(s-1) x^{s-2}, \dots, \quad y^{(n)} = s(s-1) \dots (s-n+1) x^{s-n}$$

مشتقات را در معادله قرار می دهیم

$$a_n s(s-1) \dots (s-n+1) x^s + a_{n-1} s(s-1) \dots (s-n+2) x^s + \dots + a_1 s x^s + a_0 x^s = 0$$

$$[a_n s(s-1) \dots (s-n+1) + a_{n-1} s(s-1) \dots (s-n+2) + \dots + a_1 s + a_0] x^s = 0$$

$$b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0 = 0$$

این معادله ساده سه عبارت به دست می آید چند موردی می بینیم.

اگر ریشه ها حقیقی و متمایز باشند شکل معادله را داریم اگر s_1 و s_2 ریشه این معادله باشند k بار تکراری

در این صورت k جواب مستقل این معادله عبارتند از $x^{s_1} (\ln x)^j$ $0 \leq j \leq k-1$

حال اگر ریشه مختلط باشند $s_1 = a+ib$ و $s_2 = a-ib$ k بار تکراری شود حتماً $s_2 = a-ib$ هم یک ریشه است

و k بار تکراری شود و $2k$ جواب می خواهیم:

$$(\ln x)^j x^a \cos(b \ln x) \quad 0 \leq j \leq k-1$$

$$(\ln x)^j x^a \sin(b \ln x) \quad 0 \leq j \leq k-1$$

$$\text{مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل} \quad x^2 y'' - 3x y' + 4y = 0$$

$$y = x^s \Rightarrow y' = s x^{s-1} \Rightarrow y'' = s(s-1) x^{s-2}$$

$$s(s-1) x^{s-2} - 3s x^{s-1} + 4x^s = 0 \Rightarrow s^2 - 4s + 4 = 0$$

$$s_1 = s_2 = 2 \quad x^2 (\ln x) \quad \text{و} \quad x^2 \quad \text{جواب عمومی} \quad y = c_1 x^2 + c_2 x^2 (\ln x)$$

19- معادله را برای $x \in (0, \infty)$ حل کرده و در جواب x را x تبدیل کنید.

$$\text{معادلات دیفرانسیل غیر همگن خطی}$$

$$L y = a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = F(x) \quad (1)$$

$$F(x) \text{ به } y \text{ و مشتقات آن بستگی ندارد.}$$

$$\text{مثال: (1)} \quad y'' + x^2 y = x \cos x$$

$$L y = a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0 \quad (2)$$

قضیه: اگر $y_1, \dots, y_n$ جواب مستقل خطی از معادله همگن (2) باشند و y_p یک

جواب خصوصی از معادله (1) (یعنی $L y_p = F$) آنگاه

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n + y_p = y_h + y_p \quad (3)$$

جواب عمومی معادله همگن

جواب عمومی معادله (۱) است

$$L(c_1 y_1 + \dots + c_n y_n + y_p) = c_1 L y_1 + \dots + c_n L y_n + L y_p \\ = L y_p = F(x)$$

فرض می کنیم که u جوابی از معادله (۱) باشد یعنی $Lu = F(x)$. باین ترتیب داریم که u را می توان صورت (۳) داد.

$$L(u - y_p) = Lu - L y_p = F(x) - F(x) = 0$$

نتیجه می گیریم که $u - y_p$ جوابی از معادله همگن (۲) است. پس می توانیم $c_1, \dots, c_n$ و $u - y_p = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$ را در نظر بگیریم.

$$u = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n + y_p$$

نتیجه: فرض می کنیم $y = f + g$ (۴) در این صورت اگر u جوابی از معادله $Lu = f$ و g جوابی از معادله $Lg = g$ باشد، آنگاه $u + g$ جوابی از معادله (۴) است.

$$y'' + y = e^x + \cos x + \frac{1}{2}x$$

$$L(u+v) = Lu + Lv = f + g$$

نتیجه: اگر $Ly = f + g$ اگر $w = u + v$ است همان فقط از معادله $Lu = f$ و $Lv = g$ در این صورت می توان نوشت

$$Lu = f, L v = g \quad L(u+v) = f + g$$

قسمت حقیقی جوابی از $Ly = f$ و قسمت مجازی جوابی از $Ly = g$ است.

مثال: جواب عمومی معادله زیر را بیابید. $y'' + y = 10e^{ix}$

$$y'' - y' + 5y = 10e^{ix} \quad (*)$$

چون ضرایب ثابت اند، می توان جواب عمومی معادله همگن را بدست آورد.

$$p(r) = r^2 - r + 5 = 0 \Rightarrow r = \frac{1 \pm \sqrt{1-20}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{19}}{2}$$

$$y_h = c_1 e^{\frac{1+i\sqrt{19}}{2}x} + c_2 e^{\frac{1-i\sqrt{19}}{2}x}$$

جای پیدا کردن جواب خصوصی معادله (*) جواب خصوصی معادله زیر را پیدا می کنیم.

$$y'' - y' + 5y = 10e^{ix} \quad y_p = A e^{ix} \quad y_p' = iA e^{ix}$$

$$-A e^{ix} - iA e^{ix} + 5A e^{ix} = 10e^{ix}$$

$$(4-i)A e^{ix} = 10e^{ix} \Rightarrow A = \frac{10}{4-i} = \frac{10}{4-i} \times \frac{4+i}{4+i} = \frac{10(4+i)}{17}$$

$$y_p = \frac{10}{17}(4+i)e^{ix}$$

پس قسمت حقیقی این جواب یک قسمت از جواب خصوصی معادله (*) است.