

$$1) x^2 y' + y^2 = x y y'$$

$$2) y' = \frac{x\sqrt{1+y^2}}{y\sqrt{1+x^2}}$$

نفاذ کے لیے

$$3) y' = \frac{a^2}{(x+y)^2}$$

$$4) y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

معادلات کے لیے

$$5) (1-x)y' - xy = xy^2$$

معادلات کے لیے

$$6) 2x^3 y' = 1 + \sqrt{1+4x^2 y}$$

$$7) y'' + y'^2 + 1 = 0$$

$$8) y'' = e^y$$

$$9) x(1-x)y'' + 4y' + 2y = 0$$

$$10) (1-x)y^2 dx - x^3 dy = 0$$

$$11) xy' + y + x^4 y^4 e^x = 0$$

$$12) (1+x^2)y' + y = \tan x$$

$$13) x^2 y'^2 - 2(xy-4)y' + y^2 = 0$$

$$14) yy'' - (y')^2 - 6xy^2 = 0$$

$$15) x^4 y y'' + x^4 y'^2 + 3x^3 y y' - 1 = 0$$

$$16) x^2 y'' - 2y = x$$

معادلات کے لیے، جواب: درجہ اولیٰ، درجہ اولیٰ

$$17) y'' - 2y'' - y' + 2y = \sin x$$

$$18) y^{iv} + 2y'' + y = \cos x$$

$$19) y'' + 3y' + 2y = \exp[e^x]$$

$$20) x^2 y'' = (1+y'^2)^3$$

• معادلات دفرانسیل مرتبه 2 به بالا

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = F(x) \quad (1)$$

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (2)$$

معادله دفرانسیل (2) را معادله دفرانسیل همگن و انتهم (1) می گویند.

این عملگر موصی قرین شده است که $f(x)$ ، n بار مشتق پذیر باشد.

$$D^n f(x) = f^{(n)}(x)$$

$$D^3 f(x) = D^2(Df(x)) = D^2(f'(x)) = D(Df'(x)) = D(f''(x)) = f'''(x)$$

$$L = 3D^2 - 2xD - \frac{1}{2}x \quad Ly = p$$

$$Ly = (3D^2 - 2xD - \frac{1}{2}x)y \quad \text{این معادله در بار مشتق پذیر باشد.}$$

$$= 3y'' - 2xy' - (\frac{1}{2}x)y$$

مثال: معادله دفرانسیل را بصورت عملگر بنویسید.

$$y''' - 3x^2y'' + xy' = \sin x$$

$$L = D^3 - 3x^2D^2 + xD \quad Ly = \sin x$$

مثال: معکوس $L = D^2 - 3D + 2$ را در نظر بگیرید. معادله دیفرانسیل $Ly = 0$ را بنویسید و آن را حل کنید. e^x جوابی از معادله دیفرانسیل است.

$$(D^2 - 3D + 2)y = 0 \Rightarrow y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$L(e^x) = (D^2 - 3D + 2)(e^x) = (e^x)'' - 3(e^x)' + 2e^x = e^x - 3e^x + 2e^x = 0$$

معادله دیفرانسیل (2) را در نظر بگیرید.

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots + a_1(x)D + a_0(x) \quad (3)$$

معادله (2) را بصورت $Ly = 0$ بنویسیم. قضیه: فرض کنیم که u, v و I از I متعلق به n مشتق پذیری باشند (3) موارد زیر را به دست آوریم.

$$L(u+v) = Lu + Lv \quad \text{الف}$$

$$L(cu) = cLu \quad \text{ب}$$

$$L(c_1u + c_2v) = c_1Lu + c_2Lv \quad \text{ج}$$

بنویسیم L معکوس خطی است.

$$\begin{aligned} L(u+v) &= (a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0)(u+v) \\ &= a_n (u+v)^{(n)} + a_{n-1} (u+v)^{(n-1)} + \dots + a_1 (u+v)' + a_0 (u+v) \\ &= a_n u^{(n)} + a_n v^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + a_{n-1} v^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_1 v' \\ &\quad + a_0 u + a_0 v \\ &= a_n u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u + a_n v^{(n)} + a_{n-1} v^{(n-1)} + \dots + a_1 v' + a_0 v \\ &= (a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0)(u) + (a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0)(v) \\ &= Lu + Lv \end{aligned}$$

نتیجه: فرض کنید $u_1, \dots, u_n$ متعلق به I باشند و $c_1, \dots, c_n$ اعداد حقیقی باشند.

$$L(c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n) = c_1 L u_1 + c_2 L u_2 + \dots + c_n L u_n$$

قضیه: فرض کنید n جواب معادله دفرانسیل $y = 0$ باشد. فرض کنید $u_1, u_2, \dots, u_n$ جوابهای معادله دفرانسیل $y = 0$ باشند. در این صورت ثابت کنید که ترکیب خطی این n جواب نیز یک جواب است یعنی $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n$ هم جواب معادله است.

دنباله $u_1, u_2, \dots, u_n$ جواب معادله است یعنی $L u_1 = L u_2 = \dots = L u_n = 0$ که از طرفی بنام قضیه قبل خواهیم داشت:

$$L(c_1 u_1 + \dots + c_n u_n) = c_1 L u_1 + \dots + c_n L u_n = 0$$

$$L = D^2 - 4D + 4 \quad \text{مثال: معادله دفرانسیل را در نظر بگیرید}$$

فرض کنید $u_1 = e^{2x}, u_2 = 5e^{2x}$ جوابهای معادله دفرانسیل $y = 0$ باشند.

$$L u_1 = (D^2 - 4D + 4)(e^{2x}) = (e^{2x})'' - 4(e^{2x})' + 4e^{2x} = 4e^{2x} - 8e^{2x} + 4e^{2x} = 0$$

$$c_1 e^{2x} + c_2 (5e^{2x}) = (c_1 + 5c_2) e^{2x} = c_3 e^{2x} \quad \text{توجه: u_2 مضرب از u_1 باشد}$$

در نتیجه جواب دیگری با تکرار است و در واقع این جوابها ترکیب خطی از u_1 می باشد جواب باید نسبت به هم مستقل خطی باشند.

توجه: معادله دفرانسیل خطی مرتبه n هم n جواب معادله (2) را به شرایط اولیه

$$y(x_0) = k_0, y'(x_0) = k_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = k_{n-1}$$

را در نظر بگیرید. اگر هم ضرایب a_i های بازه I که شامل نقطه x_0 است پیوسته باشند و

$a_n(x)$ در I هرگز صفر نشود آنگاه یک جواب از معادله دفرانسیل $y = 0$ وجود دارد که در شرایط اولیه صدق می کند.

$$x^2 y'' - x y' + 8y = 0 \quad (0, \infty)$$

7 مر 7

$$u_1(x) = x^4, u_2(x) = x^{-2}$$

$$L = (x^2 D^2 - x D - 8)(x^4) = 12x^4 - 4x^4 - 8x^4 = 0$$

$$y(1) = 3, y'(1) = 0 \quad \text{همانجا که جواب وجود دارد چون ضرایب پیوسته اند}$$

ترکیب خطی جوابهای معادله دفرانسیل را ضرایب پیوسته هستند.

$$c_1 x^4 + c_2 x^{-2} = y$$

$$4c_1 x^3 - 2c_2 x^{-3} = y'$$

$$y = x^4 - 2x^{-2}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ 4c_1 - 2c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_1 = 1, c_2 = 2$$

$$y'' - xy'' + (\sin x)y' + y = 0, \quad y(2) = y'(2) = y''(2) = 0 \quad 7029$$

ضرافى ڀرندو آت ۾ $y=0$ ٿيڻ جو ϕ بعد ڏسي سگهجي ٿو.

قرین و انسانی خطی: f_1 , f_2 , ... f_n بازه I را به خطی توهم از دستهای مانند $C_1, C_2, \dots, C_n$

$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n = 0 \quad \forall x \in I$ که همگی صفر نباشند وجود داشته باشد و بالعکس

بعبارة دیگر اگر تمام ناسه ها صفر شوند مجموعه را مستقل خطی گویند.

قصه: مجرمه توابع هر ... و البته خطی است اگر و نه اگر نمی از این توابع ترکیب خطی از توابع
در یک سال

اشاره: $(\Rightarrow)$ فرض می‌کنیم که مجموعه والدین $\mathcal{H}$ خالی باشد، یعنی $\mathcal{H}$ عبارت‌هایی مانند $C_1, \dots, C_n$ وجود دارند که $\mathcal{H}$ خالی می‌نویسند (فرض $C_i \neq \emptyset$). بطوریکه:

$$c_1 f_1 + \dots + c_{j-1} f_{j-1} + c_j f_j + c_{j+1} f_{j+1} + \dots + c_n f_n = 0$$

$$f_j = \frac{1}{c_j} (c_1 f_1 + \dots + c_{j-1} f_{j-1} + c_{j+1} f_{j+1} + \dots + c_n f_n)$$

 $(\Rightarrow)$

$$f_j = c_1 f_1 + \dots + c_{j-1} f_{j-1} + c_{j+1} f_{j+1} + \dots + c_n f_n$$

$$c_1 f_1 + \dots + c_{j-1} f_{j-1} + \cancel{+ f_j} + c_{j+1} f_{j+1} + \dots + c_n f_n$$

۱- اگر خارج قسمت دو تابع عددی باشد و البته خطی هستند در غیر این صورت خط انتقال خطی است.

مثال: نشان دهید که x, x^2, x^3 مستقل هستند؟

$$C_1 + C_2 x + C_3 x^2 = 0$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$x=1 \Rightarrow \cancel{c_1} + c_2 + c_3 = 0$$

$$\Rightarrow c_2 = c_3 = 0$$

$$x = -1 \Rightarrow -c_2 + c_3 = 0$$

قضیه معادله دفرانسیل خطی مرتبه n هم زری را در نظر بگیرید $Ly = 0$ اگر $u_1, u_2, \dots, u_n$

n جرم متصل خطی از این معادله دفعی است. باشند آنگاه

جوان عمومی معادله (فرانس) است.

مثال: معادله تفاضل $y'' + 4y' + 4y = 0$ را در نظر بگیرید. $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ دهد که توابع $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ ،

$x e^{-2x}$ جوابهای این معادله دفرانسیل هستند و چون عمومی را پیدا کنید.

۱۱. $L = D^3 + 4D^2 + 4D$ برای جواب ۱

$$L(e^{-2x}) = (D^3 + 4D^2 + 4D)(e^{-2x}) = -8e^{-2x} + 16e^{-2x} - 8e^{-2x} = 0$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x} = 0 \\ -2c_2 e^{-2x} + c_3(1-2x)e^{-2x} = 0 \\ 4c_2 e^{-2x} - 2c_3 x e^{-2x} - 2c_3 e^{-2x} + 4c_3 x e^{-2x} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & e^{-2x} & x e^{-2x} \\ 0 & -2e^{-2x} & (1-2x)e^{-2x} \\ 0 & 4e^{-2x} & (-4+4x)e^{-2x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2e^{-2x} & (1-2x)e^{-2x} \\ 4e^{-2x} & (-4+4x)e^{-2x} \end{vmatrix}$$

$$= 4e^{-2x} (2 - 2x - 1 + 2x) = 4e^{-2x} \neq 0$$

$\det A \neq 0 \Rightarrow$ Independent linearly

$\det A = 0 \Rightarrow$ dependent linearly

روشنی (Wronskian):

فرض کنیم $f_1, f_2, \dots, f_n$ در بازه I در نظر گرفته می‌شوند و این توابع I را در $(n-1)$ مرتبه مشتق می‌گیریم.

$$\begin{cases} c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n = 0 \\ c_1 f_1' + c_2 f_2' + \dots + c_n f_n' = 0 \\ \vdots \\ c_1 f_1^{(n-1)} + c_2 f_2^{(n-1)} + \dots + c_n f_n^{(n-1)} = 0 \end{cases}$$

توابع روشنی: $W = W(x, f_1, \dots, f_n)$ که با $f_1, \dots, f_n$ وابسته است

$$W(x, f_1, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

قضیه: اگر مجموعه توابع $f_1, f_2, \dots, f_n$ وابسته خطی باشند آنگاه روشنی آن‌ها صفر است.

برعکس: اگر روشنی صفر باشد وابسته خطی نیست (نتیجه معکوس).

مثال:

$$f_1(x) = x^2|x|, \quad f_2(x) = x^3|x| = x^3$$

$$I) \quad x > 0 \quad W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} x^2|x| & x^3 \\ 2x|x| & 3x^2 \end{vmatrix} = 0$$

بصورت داده می شود 1 جواب است

$$L = D^3 + 4D^2 + 4D$$

$$L(e^{-2x}) = (D^3 + 4D^2 + 4D)(e^{-2x}) = -8e^{-2x} + 16e^{-2x} - 8e^{-2x} = 0$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x} = 0 \\ -2c_2 e^{-2x} + c_3(1-2x)e^{-2x} = 0 \\ 4c_2 e^{-2x} - 2c_3 x e^{-2x} - 2c_3 e^{-2x} + 4c_3 x e^{-2x} = 0 \end{cases}$$

مستق
مستق

$$\begin{vmatrix} 1 & e^{-2x} & x e^{-2x} \\ 0 & -2e^{-2x} & (1-2x)e^{-2x} \\ 0 & 4e^{-2x} & (-4+4x)e^{-2x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2e^{-2x} & (1-2x)e^{-2x} \\ -2e^{-2x} & (-4+4x)e^{-2x} \end{vmatrix}$$

$$= 4e^{-2x} (2 - 2x - 1 + 2x) = 4e^{-2x} \neq 0$$

$\det A \neq 0 \Rightarrow$ Independent linearly

$\det A = 0 \Rightarrow$ dependent linearly

روشنی (Wronskian):

فرض می کنیم که این توابع وابسته I در نظر گرفته می شود و I در (n-1) بار مشتق نیز باشد.

$$\begin{cases} c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n = 0 \\ c_1 f_1' + c_2 f_2' + \dots + c_n f_n' = 0 \\ \vdots \\ c_1 f_1^{(n-1)} + c_2 f_2^{(n-1)} + \dots + c_n f_n^{(n-1)} = 0 \end{cases}$$

توابع روشنایی توابع $f_1, \dots, f_n$ که با $W = W(x, f_1, \dots, f_n)$ نشان داده می شود

$$W(x, f_1, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

قضیه: اگر مجموعه توابع $f_1, \dots, f_n$ وابسته خطی باشند آنگاه روشنایی آن برابر صفر است. برعکس اگر روشنایی صفر نشود مستقل هستند.

اگر روشنایی صفر باشد وابسته خطی نیست (نمی پذیرد)

مثال:

$$f_1(x) = x^2 |x|, \quad f_2(x) = x^3$$

$$I) \quad x > 0 \quad W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} x^2 |x| & x^3 \\ 2x|x| & 3x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^3 & x^3 \\ 2x^2 & 3x^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{II) } x < 0 \quad W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} -x^3 & x^3 \\ -3x^2 & 3x^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$c_1 x^2 |x| + c_2 x^3 = 0 \quad x=1, x=-1 \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

بنی دو تابع مستقل هستند. قضیه: اگر y_1 و y_2 جوابی معادله دیرانسیل مرتبه دوم باشند آنگاه

$$W(y_1, y_2) = 0$$

$$(Ly = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0)$$

باشد نتیجه می گیریم که y_1 و y_2 وابسته خطی هستند. (اثبات کتاب سمیرا)

اثبات: $W(y_1, y_2) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 = 0$
 y_1 و y_2 در بازه $[a, b] = I$ همواره صفر نیست. پس y_1 و y_2 در $[c, d]$ فاکتور صفر نیست (اگر یکی صفر باشد نقطه مشترک می باشد در یک هم یکی صفر است یا معنی است)

$$\Rightarrow \frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = 0 \quad \forall x \in [c, d] \Rightarrow \frac{d}{dx} \left[\frac{y_2}{y_1} \right] = 0 \Rightarrow y_2 = k y_1 \quad \forall x \in [c, d]$$

$$y_2(x_0) = k y_1(x_0) \quad x_0 \in [c, d]$$

$$y_2'(x_0) = k y_1'(x_0) \quad \text{بنابراین } y_2 \text{ و } y_1 \text{ جواب های معادله هستند.} \quad k y_1, \quad \forall x \in [a, b]$$

$$y_2(x_0) = m, \quad k y_1(x_0) = m$$

$$Ly = 0$$

حل معادله دیرانسیل

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots + a_1(x)D + a_0(x)$$

پس از این لحظه باید عملگرهای را که دارای ضرایب متغیر در نظر می گیریم به عبارت دیگر معادله دیرانسیل خطی با ضرایب ثابت را بررسی می کنیم.

$$Ly = 0$$

$$L = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0$$

که در اینجا ضرایب ثابت هستند.

$$p(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0$$

هندسه ای عملگر

$$p(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 = L$$

$$p(D)y = 0$$

مواضعی از عملگرها:

$$L_1 f = L_2 f \quad \text{دو عملگر } L_1 \text{ و } L_2 \text{ را می توانیم اگر به ازای هر } f \text{ که } L_1 \text{ و } L_2 \text{ تعریف کرده است.}$$

$$(L_1 + L_2)f = L_1f + L_2f, \quad (L_1 L_2)f = L_1(L_2f)$$

$$\text{def } L_1 = D^2 - 1, \quad L_2 = D + 1$$

$$(L_2 L_1)u = L_2(L_1 u) = L_2((D^2 - 1)u) = L_2(u'' - u) \\ = (D + 1)[u'' - u] = u''' - u' + u'' - u = (D^3 + D^2 - D - 1)u$$

$$P_1(r) = r^2 - 1, \quad P_2(r) = r + 1$$

$$P_1(r)P_2(r) = r^3 + r^2 - r - 1$$

$$P_1(r)P_2(r) = P_2(r)P_1(r)$$

$$L_1 L_2 = L_2 L_1 \text{ از آنجایی که } L_1, L_2 \text{ با ضرایب ثابت هستند}$$

$$g) \quad L_1 = D + 2x, \quad L_2 = D - 1$$

$$(L_1 L_2)f = L_1(L_2 f) = L_1[(D - 1)f] = L_1(f' - f) = (D + 2x)(f' - f) \\ = f'' - f' + 2xf' - 2xf$$

$$(L_2 L_1)f = L_2(L_1 f) = L_2((D + 2x)f) = L_2(f' + 2xf) \\ = (D - 1)(f' + 2xf) = f'' + 2f + 2xf' - f' - 2xf$$

$$- \quad P_1(D) \text{ و } P_2(D) \text{ چندجمله‌ای} \Rightarrow P_1(D)P_2(D) \text{ و } P_2(D)P_1(D) \text{ چندجمله‌ای} \\ P_1(r)P_2(r) = P_2(r)P_1(r)$$

$$P_1(D) + P_2(D)$$

$$- \quad P_1(r) \cdot (P_2(r) \cdot P_3(r)) = (P_1(r)P_2(r))P_3(r) \Rightarrow$$

$$P_1(D) \cdot (P_2(D) \cdot P_3(D)) = (P_1(D)P_2(D))P_3(D)$$

قضیه: چندجمله‌ای $P(r)$ را در نظر بگیرید. چهاره می‌تواند این چندجمله‌ای را به صورت حاصلضرب خطی و چندجمله‌ای r درجه دوم با ضرایب حقیقی تجزیه کرد.

$$P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0$$

$$P(r) = P_1(r)P_2(r) \dots P_k(r)$$

$$P(D) = P_1(D)P_2(D) \dots P_k(D)$$

$$P(r) = r^3 + r^2 - 3r + 1 = (r - 1)(r^2 + 2r - 1) = (r - 1)(r + 1 - \sqrt{2})(r + 1 + \sqrt{2})$$

$$r^2 + 2r - 1 = 0 \quad r = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{1}$$

$$L y = (a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0) y = 0$$

$$y = e^{rx} \quad L e^{rx} = (a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0) e^{rx}$$

$$= a_n r^n e^{rx} + a_{n-1} r^{n-1} e^{rx} + \dots + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx}$$

$$= (a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0) e^{rx}$$

$$p(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0$$

شبهه ای برای معادله تفاضلی

$$p(r) = 0$$

معادله کلی. اگر r ریشه ای از معادله کلی باشد معادله e^{rx} هم هست.

$$p(r) = 0$$

حالت اول 0

معادله کلی $p(r) = 0$ دارای n ریشه حقیقی و تکی باشد $r_1, r_2, \dots, r_n$ باشد در این صورت جوابی معادله تفاضلی $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_n x}$ می توانیم بنویسیم که مستقل خطی هستند. مثال: جواب عمومی معادله تفاضلی را بیابید.

$$y'' + y'' - 3y' + y = 0 \quad p(D) = D^3 + D^2 - 3D + 1$$

$$p(r) = r^3 + r^2 - 3r + 1 \quad p(r) = 0 \quad r^3 + r^2 - 3r + 1 = 0$$

$$r_1 = 1, r_2 = -1 - \sqrt{2}, r_3 = -1 + \sqrt{2}$$

چون ریشه ها حقیقی و تکی اند پس جواب عمومی معادله بصورت $C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x}$ می توانیم بنویسیم که $r_1 \neq r_2 \neq r_3$ و مستقل خطی هستند.

$$W(x, e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_n x}) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} & \dots & e^{r_n x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} & \dots & r_n e^{r_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-1} e^{r_1 x} & r_2^{n-1} e^{r_2 x} & \dots & r_n^{n-1} e^{r_n x} \end{vmatrix} = \frac{W_b}{W}$$

$$(r_1 + r_2 + \dots + r_n) x \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \dots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \dots & r_n^{n-1} \end{vmatrix} = D_n$$

(ریشه ها و درجه ها)

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} = r_2 - r_1 \neq 0$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \end{vmatrix} = (r_3 - r_2)(r_3 - r_1)(r_2 - r_1) \neq 0$$