

مسئله زیر را حل کنید (3) حرفی می‌نیم

$$\phi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$$

$$x\phi = \text{باقی‌مانده تقسیم } x \text{ بر } n$$

در این صورت ϕ یک همرفتی است.

$$(x+y)\phi = \text{باقی‌مانده تقسیم } x+y \text{ بر } n = \text{باقی‌مانده تقسیم } n\text{ بر } n + \text{باقی‌مانده تقسیم } x \text{ بر } n = n\phi + x\phi$$

همواره صحت داشته باشد

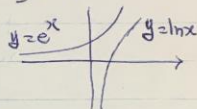
مسئله (4): گروه $(\mathbb{R}, +)$ و $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ را در نظر بگیرید و حرفی می‌نیم

$$\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x\phi = e^x$$

در این صورت ϕ یک همرفتی است زیرا که: $(x+y)\phi = e^{x+y} = e^x e^y = (x\phi)(y\phi)$

$$(\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}^+, \cdot)$$



تعریف: تابع $\phi: G \rightarrow G'$ یک همرفتی از G به G' است اگر ϕ یک همرفتی و یک به یک و برعکس باشد.

در این صورت می‌نویسیم $G \cong G'$ و می‌گوییم G و G' همرفتی هستند.

مسئله (1): تابع ϕ یک همرفتی است.

قضیه: فرض کنیم G, G', G'' سه گروه باشند در این صورت داریم:

$$G \cong G' \Rightarrow G' \cong G \quad (1) \quad G \cong G' \quad (الف)$$

$$G \cong G', G' \cong G'' \Rightarrow G \cong G'' \quad (ب)$$

اثبات: (الف) تابع ϕ یک همرفتی از G به G' است داریم $G \cong G'$.

(ب) چون $G \cong G'$ پس یک همرفتی $\phi: G \rightarrow G'$ وجود دارد در این صورت

$\phi^{-1}: G' \rightarrow G$ یک همرفتی می‌باشد زیرا که ϕ^{-1} دوسری است و معکوسه

$$(x'y')\phi^{-1} = x'\phi^{-1}y'\phi^{-1} \Rightarrow x' = x\phi, y' = y\phi \Rightarrow x = x'\phi^{-1}, y = y'\phi^{-1}$$

$$x'y = (x'\phi^{-1})(y'\phi^{-1})$$

$$x'y' = (x\phi)(y\phi) = (xy)\phi \Rightarrow xy = (x'y')\phi^{-1}$$

$$\therefore (x'\phi^{-1})(y'\phi^{-1}) = (x'y')\phi^{-1}$$

(ج) اگر $\phi: G \rightarrow G'$ و $\psi: G' \rightarrow G''$ همرفتی باشند، آنگاه

$\varphi: G \rightarrow G'$ یک همومورفیسم است.

$$(xy)(\varphi) = (x\varphi)(y\varphi) = (x\varphi)(y\varphi) = (x\varphi)(y\varphi)$$

$$= [x(\varphi)] [y(\varphi)]$$

قضیه: فرض کنیم G' دگروه و φ همومورفیسم از G به G' باشد، در این صورت داریم:

$$e\varphi = e' \quad (الف)$$

$$x^{-1}\varphi = (x\varphi)^{-1} \quad x \in G \quad (ب)$$

(ج) اگر H زیرگروه G باشد آنگاه $\{h\varphi \mid h \in H\}$ یک زیرگروه G' است.
 (د) اگر H' یک زیرگروه G' باشد آنگاه $\{h \in H \mid h\varphi \in H'\} = H' \cap H$ یک زیرگروه G است.

$$(e\varphi)^2 = e\varphi \quad (الف) \text{ نیکو می بینیم}$$

$$(e\varphi)^2 = (e\varphi)(e\varphi) = (ee)\varphi = e\varphi \Rightarrow e\varphi = e'$$

توجه: e' در G' یک عضو خنثی است (خود را) عضو می است

$$(x\varphi)(x^{-1}\varphi) = (xx^{-1})\varphi = e\varphi = e' \quad (ب)$$

$$(x^{-1}\varphi)(x\varphi) = (x^{-1}x)\varphi = e\varphi = e' \quad (ج)$$

$$H \leq G \Rightarrow e \in H \Rightarrow e' = e\varphi \in H\varphi$$

$$x', y' \in H\varphi \Rightarrow \exists x, y \in H (x' = x\varphi, y' = y\varphi)$$

$$x'y' = (x\varphi)(y\varphi) = (xy)\varphi \in H\varphi$$

$$x' \in H\varphi \Rightarrow \exists x \in H (x' = x\varphi) \stackrel{H}{\Rightarrow} x^{-1} = (x\varphi)^{-1} = x'^{-1} \in H\varphi \quad H\varphi \leq G'$$

$$H' \leq G' \Rightarrow e\varphi = e' \in H' \Rightarrow e \in H'^{-1} \quad (د)$$

$$\text{فرض کنیم } x, y \in H'^{-1} \Rightarrow x\varphi, y\varphi \in H' \Rightarrow (xy)\varphi = (x\varphi)(y\varphi) \in H'$$

$$\Rightarrow xy \in H'^{-1}$$

$$\text{فرض کنیم } x \in H'^{-1} \Rightarrow x\varphi \in H' \Rightarrow x^{-1}\varphi = (x\varphi)^{-1} \in H' \Rightarrow x^{-1} \in H'^{-1}$$

$$\therefore H'^{-1} \leq G$$

توجه: فرض کنیم K یک همومورفیسم از G به G' باشد و K یک زیرگروه G است.

$$K = \{x \in G \mid x\varphi = e'\} \quad (ب) \text{ یک زیرگروه از } G \text{ است}$$

$$K = \{e'\} \varphi^{-1} \quad (مستقیماً هم می شود)$$

تقریباً آنکه دهیم که اگر G یک گروه است، G یک گروه آبله است اگر و فقط اگر G همگروه آبله است (تصور کنید که G یک گروه آبله است، یک گروه آبله است)

گروههای دوری

تعریف: گروه G یک گروه دوری است اگر $a \in G$ وجود داشته باشد بطوریکه

$$G = \langle a \rangle = \{ a^n \mid n \in \mathbb{Z} \}, \quad a^0 = e$$

$$G = \langle a \rangle = \{ a^n \mid n \in \mathbb{Z} \}, \quad a^0 = e$$

مثلاً، (۱) گروه $\mathbb{Z}$ یک گروه دوری است که $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$.

(۲) گروه $\mathbb{Z}_n$ یک گروه دوری است زیرا که $\mathbb{Z}_n = \langle 1 \rangle$.

$$\mathbb{Z}_n = \{ 0, 1, 2, \dots, n-1 \} \quad x+y = n \quad \text{با قیاس تقسیم}$$

تذکره: فرض کنیم G یک گروه دوری باشد و $G = \langle a \rangle$.

حالت اول: فرض کنیم G نامتناهی باشد. در این صورت هیچ دو توان a^m و a^n نمی توانند برابر باشند زیرا $a^m = a^n$ به معنی $a^{m-n} = e$ است و این با فرض دوری G ناسازگار است. در این صورت داریم $m < n$.

$$a^m = a^n \Rightarrow a^m \cdot a^{-m} = a^n \cdot a^{-m} \Rightarrow a^{n-m} = e \quad n-m > 0$$

فرض کنیم k کوچکترین عدد صحیح مثبت باشد که $a^k = e$ (ساده اصل خوشه ای). در این صورت

$$G = \{ e, a, a^2, \dots, a^{k-1} \}$$

در این صورت $a^l = e$ وجود دارد بطوریکه $g = a^l$ و l یک عدد صحیح مثبت است. در این صورت داریم

$$l = kq + r, \quad 0 \leq r < k$$

پس داریم:

$$a^l = a^{kq+r} = a^{kq} \cdot a^r = e \cdot a^r = a^r \quad 0 \leq r < k$$

پس نتیجه می گیریم که $G = \{ e, a, a^2, \dots, a^{k-1} \}$ و $a^k = e$ و $a^r = e$ برای $r < k$ نادرست است. همچنین فرض شده است.

حالت دوم: فرض کنیم G متناهی باشد. در این صورت باید استدلالی مشابه استدلال حالت اول داشته باشیم. اگر k کوچکترین عدد صحیح مثبت باشد که $a^k = e$ باشد.

$$G = \{ e, a, a^2, \dots, a^{k-1} \}$$

فرض کنیم G یک گروه دوری باشد و $G = \langle a \rangle$ در این صورت:

$$G \cong \mathbb{Z}_k$$