

$$(3xy + y^2) dx + (x^2 + xy) dy = 0$$

را با روش این بند بباید، و آن را با جوابی که به روشهای دیگر در مثال ۳ و مسئله ۱۲ بند ۶۰۲ به دست آمده است مقایسه کنید.

۱۳۰. نشان دهید که اگر

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

یک معادله همگن باشد، آنگاه دارای عامل انتگرال ساز زیر است

$$\mu(x, y) = \frac{1}{xM(x, y) + yN(x, y)}$$

۱۴۰. با به کار بردن نتیجه مسئله ۱۳ هر یک از معادلات زیر را حل کنید

(الف) معادله مسئله ۲. (ب) معادله مسئله ۴.

۱۵۰. نشان دهید که معادله $y' = f(x, y)$ همگن است، اگر $f(x, y)$ به گونه ای

باشد که

$$f(x, tx) = f(1, t)$$

که در آن t یک پارامتر حقیقی است. با استفاده از این نکته همگنی هر یک از معادلات زیر را بررسی کنید.

$$y' = \ln x - \ln y + \frac{x+y}{x-y} \quad (\text{ب}) \quad y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 y + xy^2} \quad (\text{الف})$$

$$y' = \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} \quad (\text{د}) \quad y' = \frac{(x^2 + 3xy + 4y^2)^{1/2}}{x + 2y} \quad (\text{ج})$$

۸.۲ مسائل کوناگون

این بند شامل مجموعه ای از مسائل است. ۳۲ مسئله اول را می توان با روشهای بندهای پیش حل کرد. این مسائل را به منظور کسب مهارت خواننده در تشخیص روش یا روشهای قابل اجرا در مورد معادله داده شده ای آورده ایم. در پایان چند مسئله که مستلزم روشهای خاصی می باشند آمده است، این روشها در مورد برخی از انواع معادلات به کار می روند. به ویژه، مسائل ۳۵ و ۳۶ مربوط به معادله ریکاتی (۱۶۷۶-۱۷۵۴) است.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 2y}{x}$$

۰۱

$$(x+y) dx - (x-y) dy = 0$$

۰۲

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{x+2y^2-x}, y(0) = 0$$

۳

$$(x+e^x)dy - dx = 0$$

۴

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy+y^2+1}{x^2+2xy}$$

۵

$$x \frac{dy}{dx} + xy = 1 - y, y(1) = 0$$

۶

$$u = x^2 \text{ (توجه: فرض کنید)} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2y+y^2}$$

۷

$$x \frac{dy}{dx} + 2y = \frac{\sin x}{x}, y(2) = 1$$

۸

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy+1}{x^2+2y}$$

۹

$$(2y^2+2xy)dx - (2xy+x^2)dy = 0$$

۱۰

$$(x^2+y)dx + (x+e^x)dy = 0$$

۱۱

$$\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{1+e^x}$$

۱۲

$$x dy - y dx = (xy)^{1/2} dx$$

۱۳

$$(x+y)dx + (x+2y)dy = 0, y(2) = 3$$

۱۴

$$(e^x+1) \frac{dy}{dx} = y - ye^x$$

۱۵

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{x^2}$$

۱۶

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x} + 2y$$

۱۷

$$(2y+2x)dx = -x dy$$

۱۸

$$x dy - y dx = 2x^2 y^2 dy, y(1) = -2$$

۱۹

$$y' = e^{x+y}$$

۲۰

- ۰۲۱ $xy' = y + xe^{y/x}$
- ۰۲۲ $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 1}{y^2 + 1}, \quad y(-1) = 1$
- ۰۲۳ $xy' + y - y^2 e^{yx} = 0$
- ۰۲۴ $y \sin y \cos x dx + \cos y \sin x dy = 0$
- ۰۲۵ $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dx + \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{y^2} \right) dy = 0$
- ۰۲۶ $(2y + 1) dx + \left(\frac{x^2 - y}{x} \right) dy = 0$
- ۰۲۷ $(\cos 2y - \sin x) dx - 2 \operatorname{tg} x \sin 2y dy = 0$
- ۰۲۸ $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2y - y^2}{2x + 3xy^2}$
- ۰۲۹ $\frac{dy}{dx} = \frac{2y + \sqrt{x^2 - y^2}}{2x}$
- ۰۳۰ $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - 2xy^2}, \quad y(0) = 1$
- ۰۳۱ $(x^2 y + xy - y) dx + (x^2 y - 2x^2) dy = 0$
- ۰۳۲ $\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 y + y^2}{2x^2 + 3xy}, \quad y(1) = -2$

۰۳۳. نشان دهید که هر معادله به صورت

$$y = G(p)$$

را که در آن $p = dy/dx$ است، می توان به طریق زیر حل کرد.

- (الف) نسبت به x مشتق می گیریم،
 (ب) با حل معادله قسمت (الف) x را به صورت تابعی از p به دست می آوریم.
 این رابطه و معادله اصلی $y = G(p)$ ، جواب را به صورت پارامتری نشان می دهند.

۰۳۴. معادله دیفرانسیل

$$y - \ln p = 0$$

را که در آن $p = dy/dx$ است، با روش مسئله ۰۳۳ حل کنید. این معادله را مستقیماً نیز

حل کنید، و تحقیق کنید که هر دو جواب یکی است.

۳۵. معادله

$$\frac{dy}{dx} = q_1(x) + q_2(x)y + q_3(x)y^2$$

مشهور به معادله ریکاتی است. فرض کنیم که یک جواب خصوصی y_1 این معادله معلوم باشد. جواب عمومیتری را که شامل یک ثابت دلخواه است، می توان با تبدیل زیر بدست آورد

$$y = y_1(x) + \frac{1}{v(x)}$$

نشان دهید که $v(x)$ در معادله خطی مرتبه اول

$$\frac{dv}{dx} = -(q_2 + q_3 y_1)v - q_3$$

صدق می کند. توجه شود که $v(x)$ تنها شامل یک ثابت دلخواه است.

۳۶. با استفاده از روش مسئله ۳۵ و جواب خصوصی داده شده، هر یک از معادلات ریکاتی زیر را حل کنید.

$$y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2; \quad y_1(x) = x \quad (\text{الف})$$

$$y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2; \quad y_1(x) = 1/x \quad (\text{ب})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \cos^2 x - \sin^2 x + y^2}{2 \cos x}; \quad y_1(x) = \sin x \quad (\text{ج})$$

۹.۲ کاربردهای معادلات مرتبه اول

معادلات دیفرانسیل اصولاً به علت امکان استفاده از آنها در پژوهش مسائل بسیار گوناگون در علوم فیزیک، زیست شناسی، و اجتماعی مورد توجه غیر ریاضیدانان می باشند. در این خط مشی می توان بدون توجه به حوزه خاص کاربرد، سه مرحله تشخیص داد. نخست لازم است که وضعیت طبیعی را به عبارت ریاضی برگردانیم. برای این کار عموماً درباره آنچه اتفاق می افتد فرضیاتی می شود که ظاهراً با پدیده مشاهده شده سازگارند. مثلاً، مشاهده شده است که میزان از بین رفتن مواد رادیواکتیو با مقدار ماده موجود متناسب است، میزان عبور حرارت از یک جسم گرمتر به یک جسم سردتر با اختلاف دما متناسب است، حرکت اجسام در فضا طبق قوانین حرکت نیوتن انجام می گیرد، و میزان رشد جمعیت های مجزای حشرات با جمعیت موجود متناسب است. هر یک از این گزاره ها متضمن یک میزان تغییر (مشتق) می باشند، و در نتیجه هنگامی که با عبارت ریاضی بیان شوند،