

۱- ریشه های چهارم عدد منقط $z = 2\sqrt{3} + 2i$ را بدست آورید .

۲- اگر z یک عدد منقط باشد، مکان هندسی $Re(\frac{1}{z} + 1) > 2$ را در صفحه منقط تعیین کنید .

۳- محدود زبر را بدون استفاده از هویتینال و هم لری بدست آورید :

الف) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 11x + 5}{3x^2 - 14x - 5}$ ب) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ ج) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$

د) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})$

۴- اگر $x > 0$ ، $x^2 - 4x + 7 < f(x) < x^2 - 9$ ، $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ را بیابید .

۵- تعداد a را طوری تعیین کنید که f : $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x + 2 & x < 2 \\ x^3 - ax & x \geq 2 \end{cases}$ در $x=2$ پیوسته باشد .

۶- نشان دهید که $x^2 + 2x + 1 - 3 = 0$ در $x=0$ و $x=1$ ریشه است .

۷- فرض کنید f بر $[a, b]$ پیوسته و x_1 و x_2 دو نقطه دلخواه از این بازه باشند .

نشان دهید $\exists c \in (a, b)$ که $f(x_1) + f(x_2) = 2f(c)$ برقرار است .

مسئله. فن $y = \frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 9x + 6)$ را رسم کنید.

حل: (1) y' , y'' را حساب می‌کنیم

$$y' = \frac{1}{6}(3x^2 - 12x + 9)$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 3) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \text{ یا } (x-1)(x-3) = 0$$

$x=1, x=3$ نقاط بحرانی

$$y'' = \frac{1}{2}(2x - 4) = x - 2$$

(2) نقاطی که $y' = 0$ را می‌یابیم برای این که کجا $y' > 0$ و کجا $y' < 0$ است.

(3) نقاطی که $y'' = 0$ را می‌یابیم و کجا y'' مثبت و کجا منفی است.

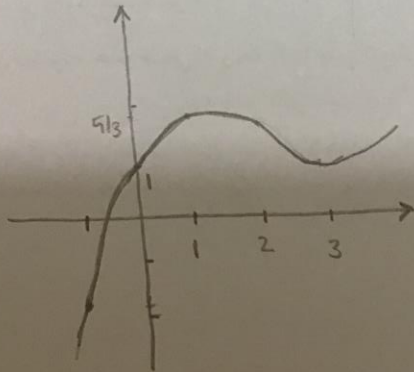
$$y'' = 0 \Rightarrow x = 2$$

(4) جدولی که در آن مقادیر y , y' , y'' را تغییر می‌دهیم:

(5) عرض از مبدا و مقادیر y عند نقاط انحنای را هم یادداشت می‌کنیم:

$$x=0 \Rightarrow y = \frac{1}{6} \times 6 = 1 \text{ عرض از مبدا} \quad , \quad x=-1 \Rightarrow y = \frac{1}{6}(-10) = \frac{-5}{3}$$

x	-1	0	1	2	3		
y'		+	+	0	-	0	+
y''		-	-	0	+	+	
y	$-\frac{5}{3}$	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	1		



مثلاً نمودار تابع $y = x + \frac{1}{x}$ را رسم کنید.
 حل: برای رسم نمودار دامنه، نقاط، نقاط بحرانی، مقعر و محدب بودن، تقعر و محدب بودن چپ و راست نقطه را مشخص کنید.

(1) $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

(2) تابع فرد است:
 $-x + (-\frac{1}{x}) = -(x + \frac{1}{x})$
 پس نسبت به مبدأ متقارن است.

(3) نقاط بحرانی
 پس $x=0$ نقاط بحرانی است.
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \frac{1}{x}) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + \frac{1}{x}) = -\infty$

نقطه افقی
 $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow y = x$
 (4) محدود و متقارن:

$y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$

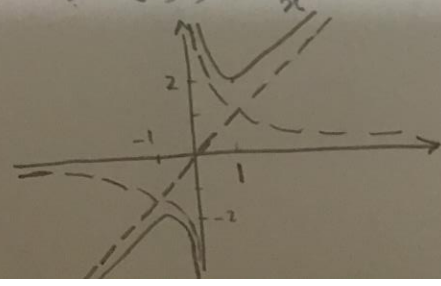
$y' = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1$
 نقاط بحرانی: 1, 0, -1

x	-1	0	1
y'	+	0	-

$y'' = +\frac{2}{x^3}$

آنگاه $x < 0$ ، $y'' < 0$ تقعر عمیق رو به بالا
 آنگاه $x > 0$ ، $y'' > 0$ تقعر عمیق رو به پایین

نقطه چپ و راست: وقتی x کوچک است
 $y \approx \frac{1}{x}$ و وقتی x بزرگ است $y \approx x$



x	-∞	-1	0	1	+∞
y'	+	0	-	0	+
y''	-	-	+	+	-
y	∞	2	∞	2	∞