

$$a \in A, T_a = \{\sigma \in S_A \mid a\sigma = a\}$$

تمرین 4.4

اولی: $a\sigma = a$ و $a\tau = a \Rightarrow a(\sigma\tau) = (a\sigma)\tau = a\tau = a$

$$a\sigma = a, a\tau = a \Rightarrow a(\sigma\tau) = (a\sigma)\tau = a\tau = a$$

$$a\sigma = a \Rightarrow (a\sigma)\sigma^{-1} = a\sigma^{-1} \Rightarrow a = a\sigma^{-1}$$

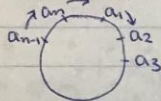
حاصلیت II فصل 5

تقریباً: فرض کنیم X یک مجموعه باشد در انصورت حاصلیت σ روی X یک حاصلیت دوری بطوریکه $a_1, \dots, a_n \in X$ و $a_1 \sigma = a_2, a_2 \sigma = a_3, \dots, a_{n-1} \sigma = a_n, a_n \sigma = a_1$

$$a\sigma = a_2, a_2\sigma = a_3, \dots, a_{n-1}\sigma = a_n, a_n\sigma = a_1$$

و علاوه بر این برای هر $x \in X - \{a_1, \dots, a_n\}$ داشته باشیم $x\sigma = x$ و بی ترتیب

$$\sigma = (a_1 a_2 \dots a_n)$$



مثال 1) فرض کنیم $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ در انصورت حاصلیت های زیر حاصلیت های دوری روی X هستند.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5)$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 3)$$

مثال 2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (2 \ 4 \ 5)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 3)(4 \ 5)$$

ترکیب دو حاصلیت دوری لزوماً یک حاصلیت دوری نیست.

تمرین: نشان دهید که الف - هر دو حاصلیت دوری جزاً با یکدیگر جابجا می شوند.

ب - متنی از دو حاصلیت دوری ارائه دهید که با یکدیگر جابجا نشود (با این همه متناهی)

متردد داشته باشید.

قضیه 1-5: هر حاصلیت روی یک مجموعه متناهی X را می توان حاصل فرم حاصلیت های دوری

مجزا تجزیه نمود و علاوه بر این تجزیه تا ترتیب قرار گرفتن عوامل تجزیه منتهی باشد.

یها: بدون از دست دادن حالت طی می توان فرض کرد که $x = 1, 2, \dots, n$ فرض کنیم σ یک

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1\sigma & 2\sigma & 3\sigma & \dots & n\sigma \end{pmatrix}$$

دنباله زیر را در نظر می گیریم $1, 1\sigma^2, 1\sigma^3, \dots$

چون x متناهی است پس این دنباله باید متناهی شود فرض کنیم m اولین عددی باشد که $1\sigma^m = 1$

قبل از تکرار شده باشد. در این صورت $1\sigma^m = 1$ خواهد بود که فرض کنیم $1\sigma^m = 1$ برای

$1 \leq i < m$ در این صورت داریم $1\sigma^m - i = 1\sigma^{m-i} = 1$ که تناقض با انتخاب m است.

بنابراین دور 1 بصورت زیر است: $1, 1\sigma, 1\sigma^2, \dots, 1\sigma^{m-1}$ علاوه بر این

می شود که اگر j هر یکی از عناصر σ روی آنها نیفتد است. فرض کنیم n اولین

عددی از سمت چپ باشد که در دور j قرار ندارد حال تا قدری را دور n را پیدا می کنیم

$$j_2 = (1\sigma^{k-1} j, \dots, 1\sigma j, 1)$$

با ادامه این بحث چون x متناهی است، نتیجه می شود که دورهای $j_1, j_2, \dots, j_r$ بدست می آیند

بطوریکه $j_1, j_2, \dots, j_r = \sigma$ روشن است که j ها مجزای باشند. ایشان یک دور j می

توانیم بنویسیم: اگر x یک مجزیه باشد آنکه یک چابلیست دوری بطول 2 روی x یک تراش

نامیده می شود.

$$(1 \ 2 \ 3) = (1 \ 2)(1 \ 3)$$

مثال:

$$(a_1 \dots a_n) = (a_1 a_2)(a_1 a_3) \dots (a_1 a_n)$$

بطور کلی

قضیه: هر چابلیست روی یک مجموعه متناهی را می توان به حاصلضرب از تراش بنویسید (ایشان

سراش می گویند)

توضیح: n دهی که اگر σ یک چابلیست دوری بطول n باشد آنکه σ^m روی σ چابلیست m می

خواهد بود.

قضیه: تعداد تراش در تجزیه یک چابلیست روی یک مجموعه متناهی زوج یا فرد و نه هر دو می

باشند. فرض کنیم $x = 1, 2, \dots, n$ یک چابلیست روی x باشد، n میله هم که تعداد

تراش ها در تجزیه σ زوج یا فرد و نه هر دو می باشد، ایشان n میله هم که اگر σ

یک چابلیست m روی x باشد آنکه تعداد تراش ها در تجزیه σ^m هم زوج می باشد

$$\text{میله اینم که } \varepsilon = (1 \ 2)(1 \ 2)$$

فرض کنیم $\tau_k \dots \tau_1 = \varepsilon$ که در آن τ_i ها تراش می باشند. چون میدانیم که k و ε عدد زوج است. پس عدد m در $\tau_k \dots \tau_1$ در τ_k و ε انتخاب کرده و فرض کنیم τ_1 اولین تراش است که m را می باشد. توجه می کنیم که $k < n$ زیرا که اگر $k = n$ باشد آنکه m توسط ε به یک عنصر دیگر فرستاده می شود که یک تناقض است. حاصل ضرب $\tau_1 \tau_2 \dots \tau_k$ را در نظر می گیریم در این صورت یکی این حاصل ضرب چه حالت زیر وجود دارد

$$(1) \quad (m, x)(m, x) = \varepsilon$$

$$(m, x)(m, y) = (x, y)(m, x)$$

$$(m, x)(y, z) = (y, z)(m, x) \quad \text{چون می خواهیم}$$

$$(m, x)(x, y) = (x, y)(m, y)$$

و به خطای می شود که در آن وی اول m حذف می شود و در y و x و m یک قدم به سمت راست فرستاده می شود و با ادامه این حرکت و با توجه به این مطلب که m نمی تواند در آخر تراش قرار گیرد نتیجه می شود که بلاخره باید n وی اول اتفاق بی افتد و در نتیجه دو تراش در τ_k و ε حذف کردند. با ادامه این حرکت برای سایر اعداد τ_k و ε نتیجه می شود که k باید یک عدد زوج باشد.

حال فرض کنیم $\tau_k = \tau_1 \dots \tau_l \quad \tau_k = \tau_1 \dots \tau_l \quad \tau_k = \tau_1 \dots \tau_l$

بنابراین استدلال فوق $k+l$ یک عدد زوج است و در نتیجه k و l هر دو زوج و یا هر دو فرد می باشند. $\square$

تعریف: فرض کنیم σ یک جایگشت روی یک مجموعه متناهی باشد در این صورت σ یک جایگشت زوج یا فرد است اگر ترتیب تعداد تراش ها در $\tau_k \dots \tau_1 = \sigma$ زوج یا فرد می باشد.

مثال: دیدیم که ε یک جایگشت زوج است.

(1 2 3) یک جایگشت زوج است

(1 2) فرد

قضیه: تعداد جایگشت های زوج مساوی تعداد جایگشت های فرد در S_n برای $n \geq 2$ می باشد.

اثبات: فرض کنیم A_n مجموعه همه جایگشت های زوج و B_n مجموعه همه جایگشت های فرد در S_n باشد. فرض کنیم $\tau = (1 2)$ و تعریف می کنیم $\lambda_\tau: A_n \rightarrow B_n$

$$\sigma \lambda_\tau = \tau \sigma$$

توجه کنیم که چون $\sigma \in A_n$ پس $\tau \sigma \in B_n$ و $\tau \sigma$ یک تبديلی زوج در S_n است.

$$\sigma_1 \lambda \tau = \sigma_2 \lambda \tau \Rightarrow \tau \sigma_1 = \tau \sigma_2 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$$

پس λ یک تبديلی است. فرض کنیم $\mu \in B_n$. در انصورت $\sigma = \tau \mu \in A_n$ و به علاوه داریم

$$\sigma \lambda \tau = \tau \sigma = \tau (\tau \mu) = \mu$$

پس λ یونی است.

$$|A_n| = \frac{n!}{2} \quad \text{و تعداد عناصرش}$$

چون جایگشت‌هایی که جایگشت زوج است پس A_n تعلق دارد.

$$\sigma, \tau \in A_n \Rightarrow \sigma \tau \in A_n$$

$$\sigma \in A_n \Rightarrow \sigma = \tau_1 \dots \tau_k \dots \tau_{2k} \Rightarrow \sigma^{-1} = \tau_{2k} \dots \tau_k \dots \tau_1 \in A_n$$

$$|A_n| = \frac{n!}{2} \quad \text{پس } A_n \leq S_n \text{ و بنا بر قضیه بالا}$$

توجه: زیرگروه A_n از S_n گروه متناوب از درجه n نامیده می‌شود.

$$A_3 = \{e, \rho_1, \rho_2\} \quad \text{مثال در } S_3 \text{ داریم}$$

تمرین 6 مر 66

(1) غلط (ب) درست (ج) غلط (د) غلط (ه) غلط (و) غلط (ز) غلط

(1) فکر شود (ه) غلط (و) غلط

فصل 7 از دومینیم همگنی و نکرگنی:

تعریف: فرض کنیم G و G' دو گروه باشند. $\phi: G \rightarrow G'$ یک همگنی است اگر داشته باشیم

$$(xy)\phi = (x\phi)(y\phi)$$

برای هر $x, y \in G$.

$$\phi: G \rightarrow G'$$

مثال: (1)

$$x\phi = x$$

در انصورت ϕ یک همگنی است که آنرا همگنی همانی می‌نامیم. زیرا که

$$(xy)\phi = xy = (x\phi)(y\phi)$$

مثال (2).

$$\phi: G \rightarrow G'$$

$$x\phi = e'$$

در این صورت ϕ یک همگنی است زیرا که:

$$(xy)\phi = e' = e'e' = (x\phi)(y\phi)$$