تعریف: فرض کنیم $(G,*)$ یک گروه باشد در این صورت زیرمجموعهٔ H از G یک زیرگروه G است اگر (الف) H نسبت به $*$ بسته باشد (ب) $(H,*)$ یک گروه باشد و می‌نویسیم

$$H \leq G$$

مثال:

(۱) گروه $(\mathbb{Z},+)$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم E مجموعهٔ اعداد زوج صحیح باشد ملاحظه می‌شود که $(E,+)$ یک زیرگروه $(\mathbb{Z},+)$ است می‌نویسیم $E = 2\mathbb{Z}$. بطور کلی برای هر $n \in \mathbb{Z}$ اگر $n\mathbb{Z}$ مجموعهٔ همهٔ مضارب n باشد آنگاه $n\mathbb{Z}$ یک زیرگروه است.

(۲) اگر $(G,*)$ یک گروه باشد آنگاه G دارای دو زیرگروه بدیهی $\{e\}$ و G می‌باشد. اگر G زیرگروه دیگری داشته باشد آنگاه به آن زیرگروه، زیرگروه غیربدیهی گفته می‌شود

مثال: فرض کنیم $G = \{e, a\}$ و عمل $*$ روی G بصورت زیر باشد.

$*$	e	a
e	e	a
a	a	e

ملاحظه می‌شود که تنها زیرگروههای G زیرگروههای بدیهی هستند.

مثال: $(\mathbb{Q},+) \leq (\mathbb{R},+)$ ، $(\mathbb{Z},+) \leq (\mathbb{Q},+)$ ؛ $(\mathbb{Z},+) \leq (\mathbb{R},+)$ و

$(\mathbb{Q}-\{0\},\cdot) \leq (\mathbb{R}-\{0\},\cdot)$

قضیه: فرض کنیم G یک گروه باشد. اگر K یک زیرگروه G و H یک زیرگروه K باشد آنگاه H زیرگروه G است.

واضح است که:

$$H \leq K \wedge K \leq G \Rightarrow H \leq G$$

مثال: فرض کنیم $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ روی $\mathbb{Z}_n$ عمل $\oplus$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$x \oplus y =$ باقیماندهٔ تقسیم $x+y$ بر n

در اینصورت $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ یک گروه است (چرا؟) و در حقیقت یک گروه آبلی است.

در حالت خاص اگر $n=2$ آنگاه $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ دارای عمل زیر است.

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

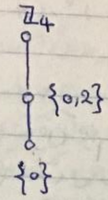
در حالت خاص اگر $n=3$ آنگاه $\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$ دارای عمل زیر است.

ملاحظه می‌شود $\mathbb{Z}_3$ زیرگروه غیربدیهی ندارد.

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

در حالت $n=4$ در اینصورت $\mathbb{Z}_4=\{0,1,2,3\}$ دارای جدول زیر است.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2



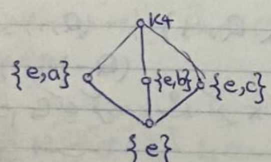
نمودار زیرگروه‌های $\mathbb{Z}_4$.

مثال: فرض کنیم $K_4=\{e,a,b,c\}$ و جدول روی K_4 بصورت زیر باشد.

+	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

(چهار گروه کلاین)

نمودار زیرگروه‌ها



* گروه‌های یک تا چهار عضوی گروه‌های آبلی هستند.

فرض کنیم $(G,\cdot)$ یک گروه باشد و $a\in G$ هر $n\in\mathbb{Z}$ تعریف می‌کنیم:

$$a^n=\begin{cases} \underbrace{a a \cdots a}_{n \text{ مرتبه}}, & n>0 \\ e, & n=0 \\ \underbrace{a^{-1}\cdot a^{-1}\cdots a^{-1}}_{|n| \text{ مرتبه}}, & n<0 \end{cases}$$

در اینصورت داریم:

تمرین: ثابت کنید که:

$$a^{m+n}=a^m\cdot a^n \qquad m,n\in\mathbb{Z}$$

$$(a^m)^n=a^{mn}$$

$$(a^{-1})^m=(a^m)^{-1}=a^{-m}$$

(چون $m,n\in\mathbb{Z}$ سه حالت در نظر گرفته برای n,m در هر حالت با استفاده از تعریف قبل شرایط را اثبات شده را بررسی کنید)

قضیه: فرض کنیم G یک گروه و $\{H_i\}_{i\in I}$ یک دسته از زیرگروههای G باشد. در اینصورت اشتراک این دسته $H=\bigcap_{i\in I} H_i$ یک زیرگروه G است.

اثبات: فرض کنیم $x,y\in H \Rightarrow \forall i\,(i\in I \Rightarrow x,y\in H_i)$

$$\Rightarrow \forall i\,(i\in I \Rightarrow xy\in H_i) \Rightarrow xy\in H$$

پس H تحت عمل G بسته است.

$$\forall i\,(i\in I \Rightarrow H_i\le G) \Rightarrow \forall i\,(i\in I \Rightarrow e\in H_i)$$

$$\therefore e\in H$$

فرض کنیم $x\in H \Rightarrow \forall i\,(i\in I\Rightarrow x\in H_i) \Rightarrow \forall i\,(i\in I \Rightarrow x^{-1}\in H_i)$

$$\therefore x^{-1}\in H$$

بنابراین H یک زیرگروه G است.

قضیه: فرض کنیم $(G,*)$ یک گروه باشد در اینصورت H یک زیرگروه G است اگر و فقط اگر داشته باشیم:

(1) $e\in H$

(2) $x,y\in H \Rightarrow xy\in H$

(3) $x\in H \Rightarrow x^{-1}\in H$

اثبات بعنوان تمرین بنویسید.

تمرین: نشان دهید که اجتماع دو زیرگروه لزوماً یک زیرگروه نیست. (مثال نقض از $\mathbb{Z}$) (تحت چه شرایطی اجتماع دو زیرگروه، یک زیرگروه است (شرط لازم و کافی پیدا کنید)).

تعریف: فرض کنیم G یک گروه و S یک زیرمجموعهٔ G باشد. اشتراک همهٔ زیرگروههای G شامل S زیرگروه تولید شده توسط S نامیده می‌شود و می‌نویسیم.

$$\langle S\rangle = \bigcap\{H \mid H\le G \wedge S\subseteq H\}$$

به عبارت دیگر $\langle S\rangle$ کوچکترین زیرگروه G شامل S می‌باشد. اگر $S=\{x_1,\dots,x_n\}$ متناهی باشد آنگاه $\langle S\rangle$ یک زیرگروه تولید شده متناهی نامیده می‌شود و در اینصورت می‌نویسیم

$$\langle S\rangle = \langle x_1,\dots,x_n\rangle$$

و می‌گوئیم $\langle S\rangle$ توسط x_1 و ... و x_n تولید شده است.

تعریف: فرض کنیم G یک گروه باشد و $a\in G$ در اینصورت $\langle a\rangle$ زیرگروه دوری تولید شده توسط a نامیده می‌شود. گروه G یک گروه دوری نامیده می‌شود اگر

$a\in G$ وجود داشته باشد بطوریکه $G=\langle a\rangle$ و در اینصورت می‌گوئیم a یک مولد G است.

قضیه: فرض کنیم G یک گروه باشد و $a\in G$ در اینصورت

$$\langle a\rangle=\{a^n \mid n\in\mathbb{Z}\}$$

اثبات: نشان می‌دهیم که $H=\{a^n \mid n\in\mathbb{Z}\}$ کوچکترین زیرگروه G شامل a می‌باشد. واضح است که $a\in H$ $(n=1)$. برای آنکه نشان دهیم H یک زیرگروه است اولاً واضح است که

$$a^0=e \Rightarrow e\in H$$

$$a^m, a^n\in H \Rightarrow a^m\cdot a^n=a^{m+n}\in H$$

$$a^n\in H \Rightarrow (a^n)^{-1}=a^{-n}\in H$$

پس H یک زیرگروه G است. حال فرض کنیم K یک زیرگروه G شامل a باشد. نشان می‌دهیم که $H\leq K$.

$$a^n\in H \xrightarrow[a\in K\leq G]{} a^n\in K$$

پس $H\leq K$.

بنابراین H کوچکترین زیرگروه G شامل a می‌باشد و در نتیجه $H=\langle a\rangle$.

تذکر: اگر G یک گروه جمعی باشد آنگاه برای هر $a\in G$ و $n\in\mathbb{Z}$ می‌نویسیم:

$$na=\begin{cases} a+a+\cdots+a & ; n>0 \\ na=e & , n=0 \\ \underbrace{(-a)+(-a)+\cdots+(-a)}_{|n| \text{ مرتبه}} & ; n<0 \end{cases}$$

$$(m+n)a=ma+na$$

$$(mn)a=m(na)$$

$$(-n)a=-(na)=n(-a)$$

تمرین: تحقیق کنید در این حالت

$$\langle a\rangle=\{na \mid n\in\mathbb{Z}\}$$

مثال: گروه جمعی $\mathbb{Z}$ را در نظر می‌گیریم:

مثلاً $2\in\mathbb{Z}$ $\quad \langle 2\rangle=\{2n \mid n\in\mathbb{Z}\}=2\mathbb{Z}$

$$\langle n\rangle=\{nk \mid k\in\mathbb{Z}\}=n\mathbb{Z}$$

$$\langle 1\rangle=\mathbb{Z}, \quad \langle -1\rangle=\mathbb{Z}$$

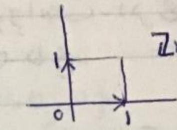
تمرین: فرض کنید که G یک گروه باشد. نشان دهید که اگر a یک مولد G باشد آنگاه معکوس a نیز یک مولد G است یعنی:

$$\langle a\rangle=G \Rightarrow G=\langle a^{-1}\rangle$$

$$\langle a\rangle=G \Rightarrow G=\langle -a\rangle$$

- پس $\mathbb{Z}$ یک گروه دوری است.
اما $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ دوری نیست

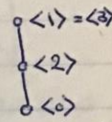
$$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}=\{(m,n)\mid m,n\in\mathbb{Z}\}$$
$$(m,n)+(p,q)=(m+p,n+q)$$
$$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}=\langle(1,0),(0,1)\rangle$$



توسط دو بردار تولید می شود.

مثال: گروه جمعی $\mathbb{Z}_4$ را در نظر می گیریم.

$$\mathbb{Z}_4=\{0,1,2,3\}$$
$$\langle 0\rangle=\{0\}\ ,\ \langle 1\rangle=\{0,1,2,3\}=\mathbb{Z}_4$$
$$\langle 2\rangle=\{0,2\}\ ,\ \langle 3\rangle=\{0,1,2,3\}=\mathbb{Z}_4$$

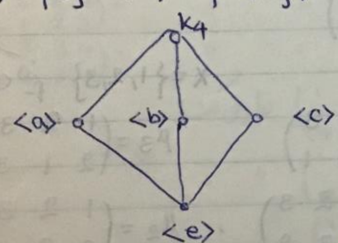


پس $\mathbb{Z}_4$ یک گروه دوری است.

مثال: گروه ضربی K_4 (4- گروه کلاین) را در نظر می گیریم

$$K_4=\{e,a,b,c\}$$
$$\langle e\rangle=\{e\}\quad \langle a\rangle=\{e,a\}\ ,\ \langle b\rangle=\{e,b\}\ ,\ \langle c\rangle=\{e,c\}$$

ملاحظه می شود K_4 یک گروه دوری نیست.



تمرین: گروه جمعی $\mathbb{Z}_{12}$ را در نظر بگیرید و تحقیق کنید آیا $\mathbb{Z}_{12}$ دوری است یا خیر و همینطور نمودار زیرگروه های $\mathbb{Z}_{12}$ را رسم کنید.

تمرین ۳- ۷ ص 43 الف) درست ب) غلط ج) درست د) غلط هـ) غلط و) درست
ز) غلط مثل Z ح) غلط (b) درست ی) غلط

جا یگشت ها (permutations)

تعریف: فرض کنیم X یک مجموعه باشد در اینصورت یک تابع دوسوئی روی X یک جا یگشت نامیده می شود.

مثال: اگر $X=\{1,2\}$ آنگاه $\varphi: X\longrightarrow X$ بطوریکه $1\varphi=2$ و $2\varphi=1$ یک جا یگشت روی X است.

قضیه: فرض کنیم X یک مجموعه باشد. اگر S_X مجموعه همه جایگشت های روی X باشد آنگاه $(S_X, \circ)$ یک گروه می باشد.

اثبات: میدانیم که $\circ$ (ترکیب توابع) شرکت پذیر است. اگر ε تابع همانی روی X باشد آنگاه $\varepsilon \in S_X$، بعلاوه برای هر $\sigma \in S_X$ داریم: $\sigma \circ \varepsilon = \varepsilon \circ \sigma = \sigma$

پس ε عنصر همانی S_X می باشد.

چون معکوس یک تابع دوسوی روی X یک تابع دوسوی روی X است پس اگر $\sigma \in S_X$ آنگاه $\sigma^{-1} \in S_X$ پس S_X با عمل ترکیب توابع یک گروه تشکیل میدهد.

تعریف: S_X گروه همه جایگشت های روی X نامیده می شود.

حالت های خاص

1) $X = \{1\}$ در اینصورت $S_1 = S_X = \{\varepsilon\}$ یک گروه آبلی است.

2) $X = \{1, 2\}$. $S_2 = S_X = \{\varepsilon, \sigma\}$ یک گروه آبلی است.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} , \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3) فرض کنیم $X = \{1, 2, 3\}$

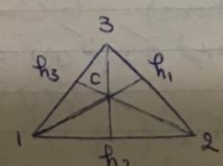
$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} , \quad \rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mu_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} , \quad \mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} , \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_X = S_3 = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$$

ملاحظه می کنیم که $\rho_1 \mu_1 \neq \mu_1 \rho_1$ پس S_3 یک گروه غیر آبلی است.

تعریف: اگر $X = \{1, 2, \dots, n\}$ آنگاه گروه S_n گروه متقارن از درجه n نامیده می شود. (برای هر $n \geq 3$، S_n غیر آبلی خواهد بود)



دوران مثلث حول c به اندازه $120°$ در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت جایگشت ρ_1 را نظیر می کند.

دوران مثلث حول c به اندازه $240°$ در خلاف جهت عقربه های ساعت جایگشت ρ_2 را نظیر می کند.

دوران مثلث حول c به اندازه 360° در خلاف جهت عقربه های ساعت جایگشت ρ_0 را نظیر می کند.

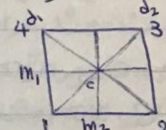
انعکاس نسبت به محور h_1 جایگشت μ_1 را نظیر می کند.

" " " " h_2 " μ_2 " " "

" " " " h_3 " μ_3 " " "

D_3 = {دورانها و انعکاس های مثلث متساوی الاضلاع}

ترکیب هر دو دوران یک دوران و ترکیب دو انعکاس، یک انعکاس می باشد.



دوران مربع حول c به اندازه ۹۰° در خلاف جهت عقربه های ساعت جایگشت $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

" " " " " ۱۸۰° " " " " $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

" " " " " ۲۷۰° " " " " $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

" " " " " ۳۶۰° " " " " $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

انعکاس نسبت به محور m_1 جایگشت $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ نظیر می کند.

" " " m_2 " $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ " "

" " " d_1 " $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ " "

" " " d_2 " $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ " "

D_4 = {دورانها و انعکاس های مربع}

بطور کلی مجموعه انعکاس ها و دورانهای n وجهی منتظم را D_n می نامیم.

D_n = {دورانها و انعکاس های n وجهی منتظم}

و D_n همواره دارای n دوران و n انعکاس خواهد داشت پس D_n، 2n عضو دارد و فقط در حالت $n = 2,3$، D_2، D_3 برابر S_2 و S_3 خواهد بود.