

فوشیختانه ریاضی‌دانانی در دانشگاه‌های ایران وجود دارند که این نوع دستگاه جبری را مطالعه می‌کنند.

۱۴.۴.۱ تعریف دستگاه جبری $(L; \vee, \wedge)$ از نوع $\tau = (2, 2)$ را **مشبکه** می‌نامیم اگر

۱- هر دو دستگاه جبری $(L; \vee)$ و $(L; \wedge)$ نیم‌گروه تعویض‌پذیر خودتوان (یعنی نیم‌مشبکه) باشند

۲- برای هر $x, y \in L$ ، قوانین جذب در L برقرار باشند:

$$x = x \wedge (x \vee y) \quad , \quad x = x \vee (x \wedge y)$$

۱۵.۴.۱ بحث در کلاس

۱- توجه کنید که نمادهای $\vee$ و $\wedge$ از این رو انتخاب شده‌اند که مثال‌های اولیه و اصلی **مشبکه‌ها**، ساختار منط

برای "و" و مجموعه‌ها ($\vee$ به جای $\cup$ و $\wedge$ به جای $\cap$) هستند.

۲- توجه می‌کنیم که $(L; \vee, \wedge)$ **مشبکه** است اگر اتحادهای زیر برقرار باشند:

(اتحادهای شرکت‌پذیری)

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \quad \text{و} \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$

$$(\text{اتحادهای تعویض‌پذیری}) \quad x \vee y = y \vee x \quad \text{و} \quad x \wedge y = y \wedge x$$

$$(\text{اتحادهای خودتوانی}) \quad x \vee x = x \quad \text{و} \quad x \wedge x = x$$

$$(\text{اتحادهای جذب}) \quad x = x \vee (x \wedge y) \quad \text{و} \quad x = x \wedge (x \vee y)$$

نکته‌ی قابل توجه این است که، ویژگی‌های عمل دوتایی $\vee$ همتای ویژگی‌های عمل دوتایی $\wedge$ هستند، و همگی شده‌اند. همچنین، **قوانین جذب** ارتباط بین این دو عمل را بیان می‌کنند.

۳- همان طور که بیان شد، استانداردترین مثال‌های مشبکه یکی $(\wp(X); \cup, \cap)$ و دیگری به صورت زیر است. فرض ترتیبی در مجموعه‌ی A باشد، به طوری که هر دو عضو $x, y \in A$ دارای سوپریمم (کوچک‌ترین کران بالا) و دارای این کران پایین باشند، آنگاه با استفاده از نمادهای

$$x \vee y = \sup\{x, y\} \quad , \quad x \wedge y = \inf\{x, y\}$$

دستگاه جبری $(A; \vee = \sup, \wedge = \inf)$ به دست می‌آید که به روشنی **مشبکه** است.

برعکس، اگر $(L; \vee, \wedge)$ **مشبکه** باشد، آنگاه می‌توان رابطه‌ی ترتیبی $\leq$ را در L به صورت زیر تعریف کرد

$$x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y$$

(که می‌توانید با استفاده از قوانین جذب نشان دهید که معادل $x \wedge y = x$ است)

$$x \vee y = y \Rightarrow x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x$$

$$x \wedge y = x \Rightarrow x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y$$

حال نشان دهید که، نسبت به این ترتیب، $\sup\{x, y\} = x \vee y$ و $\inf\{x, y\} = x \wedge y$

میشیم زیر دستگاه ها میگیریم
 A یک دستگاه جبر از نوع $\mathcal{C}$

$$\text{Sub}(A) = \{ H \mid H \text{ یک زیر دستگاه جبر است } \}$$

رویکرد قوی به رابطه " $\leq$ " را بدین ترتیب تعریف می کنیم که

$$\forall H, K \in \text{Sub}(A), \quad H \leq K \iff H \subseteq K$$

در این صورت $(\text{Sub}(A), \leq)$ یک مجموعه جزئی مرتب است. یعنی برای هر $H, K, L \in \text{Sub}(A)$ داریم

$$1) \quad H \leq H \quad (H \leq H \text{ زیرا})$$

$$2) \quad H \leq K, K \leq H \Rightarrow H = K \quad (H = K \text{ پس } K \leq H, H \leq K \text{ زیرا})$$

$$3) \quad H \leq K, K \leq L \Rightarrow H \leq L \quad (H \leq K \leq L \Rightarrow H \leq K \text{ هدف})$$

$(\leq)$ و $\text{Sub}(A)$ یک میسیم است.

$$\forall H, K \in \text{Sub}(A), \quad H \wedge K, H \vee K = \inf\{H, K\}$$

موجودند

$$\sup\{H, K\}$$

لم. A یک دستگاه جبر. در این صورت

① برای هر $H, K \in A$ ، $H \wedge K$ نیز یک زیر دستگاه جبر است.

② برای هر خانواده $\{H_i\}_{i \in I}$ از زیر دستگاه ها A ، $H = \bigcap_{i \in I} H_i$ نیز یک زیر دستگاه جبر است.

اثبات: ① برای این که $H \wedge K$ یک زیر دستگاه جبر است، باید نشان دهیم که $H \wedge K$ یک زیر مجموعه از A است. فرض کنیم λ یک عمل n -تایی روی A باشد.

$$\forall x_1, \dots, x_n \in H \wedge K \Rightarrow x_1, \dots, x_n \in H \text{ و } x_1, \dots, x_n \in K$$

$$\Rightarrow \lambda(x_1, \dots, x_n) \in H \text{ و } \lambda(x_1, \dots, x_n) \in K$$

زیرا H و K تحت عمل A بسته اند.

$$\Rightarrow \lambda(x_1, \dots, x_n) \in H \wedge K$$

② تمرین.

در مورد سوپریم: گاهی اوقات $H \vee K$ ، H و K است! اما آیا $H \vee K$ نیز یک زیر دستگاه جبر است؟

مثال: $(\mathbb{Z}, +)$ در نظریه اعداد، $2\mathbb{Z}$ و $3\mathbb{Z}$ زیر مجموعه اعداد صحیح منفی. 3 از $2\mathbb{Z}$ را! $3\mathbb{Z}$ نیز یک زیر مجموعه است.

6

$$2\mathbb{Z} = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}\}, \quad 3\mathbb{Z} = \{3x \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

$$2\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}, \quad 3\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z} \quad \text{اما} \quad 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$$

$$L = \mathbb{Z} \quad \text{پس احتیاج به نیست.}$$

$$2 \in L, 3 \in L, \text{ اما } 2+3 \notin L$$

تعریف. فرض کنیم $(A; F)$ یک دستگاه جبر از نوع π باشد و $X \subseteq A$ در آن مشخص
 1) کوچکترین زیر دستگاه جبر A که X را شامل شود X باشد زیر دستگاه تولید شده از X می
 گویند. $\langle X \rangle$ نماد آن است.

(2)

- $\langle \phi \rangle$

اگر $X = \{x_1, \dots, x_n\} \Rightarrow$ زیر دستگاه متناهی مولد $H = \langle X \rangle = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$
 اگر $A = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ آنگاه A را دستگاه متناهی مولد می‌نامیم.

مثال. $\langle 2 \rangle = \{2, 2+2, 2+2+2, \dots\} = 2\mathbb{N}$
 1) $(\mathbb{Z}; +)$, $2 \in \mathbb{Z}$, $\langle 2 \rangle = ?$

2) $(\mathbb{Z}; +, 0)$ گروه، $2 \in \mathbb{Z}$, $\langle 2 \rangle = \{0, 2, 4, \dots\}$

3) $(\mathbb{Z}; +, -, 0)$ گروه، $\langle 2 \rangle = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\} = 2\mathbb{Z}$
 باید نسبت به ضرب هم بسته باشد.

4) $(\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_8)$, $\langle 2 \rangle = \{2, 2 \oplus 2, 2 \oplus 2 \oplus 2, \dots\} = \{0, 2, 4, 6\}$

تمرین: زیرگروه‌ها $H = \langle 2, 3 \rangle$ در گروه وار $(\mathbb{Z}_6; +)$ کدام است؟

تفسیر: $(A; F)$ دستگاه جبری از نوع τ و $X \subseteq A$ در این صورت، اگر

$$\langle X \rangle = \bigcap_{B \in S} B = \bigcap \{B \subseteq A \mid X \subseteq B\}$$

اثبات: قرار دهیم $K = \bigcap_{B \in S} B$. نشان می‌دهیم K کوچکترین زیر دستگاه است که X را می‌پوشاند.

$$1) \forall B \in S \Rightarrow X \subseteq B \Rightarrow X \subseteq \bigcap_{B \in S} B \Rightarrow X \subseteq K$$

و چون اشتراک زیر دستگاه‌ها (از هر تعداد) یک زیر دستگاه، دستگاه مغروض است

پس K زیر دستگاه A است. حال فرض کنیم L زیر دستگاه از A باشد که

$$X \subseteq L, L \in S \text{ و لذا } L \subseteq K = \bigcap_{B \in S} B \text{ و اثبات تمام است.}$$

$$H, K \subseteq A \Rightarrow H \vee K = \sup\{H, K\} = \langle H \cup K \rangle$$

نتیجه: مجموعه مرتب $(\subseteq)$ زیر مجموعه (در واقع کامل) است

$$\bigvee \{H_i\}_{i \in I} = \sup\{H_i\}_{i \in I} = \langle \bigcup_{i \in I} H_i \rangle$$

ضرب و هم‌ضرب: $(A; F)$ و $(B; F')$ در دستگاه از نوع τ

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

$$\lambda^{A \times B}((a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)) = (\lambda^A(a_1, \dots, a_n), \lambda^B(b_1, \dots, b_n))$$

این دستگاه حاصل ضرب (درکات) A در B می‌باشد.

مثال: گروه $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}; +, -)$ گروه $(\mathbb{Q}; +, -)$ گروه

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \\ -(a, b) = (-a, -b) \text{ و } 0_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}} = (0, 0)$$

تکراراً طبق است A و B دارند و یکی می باشد $A \times B$ باشد.

مثال ضرب هر دو عضو صفر $\mathbb{Z}$ ، تا صفر است

اما $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ این ویژگی را ندارد زیرا: $(1,0) = (0,0) = (0,1)$

یا مثلاً هر عضو صفر $\mathbb{R}$ نسبت به ضرب (عمل) دارد و حاصل آن که $(0,0)$ به عنوان عضو از $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ دارد ندارد.

(2) اگر معادله x در A و B اقرار باشد آنکه x در $A \times B$ نیز اقرار است.

مثلاً اگر x معادله $x \cdot x = y \cdot x$ باشد و A و B اقرار باشند پس باید

$$\forall a_1, a_2 \in A, a_1 * a_2 = a_2 * a_1$$

$$\forall b_1, b_2 \in B, b_1 * b_2 = b_2 * b_1$$

آنکه

$$\forall (t_1, s_1) \in A \times B, (t_2, s_2) \in A \times B$$

$$(t_1, s_1) *_{A \times B} (t_2, s_2) = (t_1 * t_2, s_1 * s_2)$$

$$= (t_2 * t_1, s_2 * s_1)$$

$$= (t_2, s_2) *_{A \times B} (t_1, s_1)$$

یعنی عضو $A \times B$ نیز به هم می پیوندند.

9)

همبستگی و خارج قسمت

تعریف. فرض کنیم A دستگاهی جبر از نوع π و $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی روی A باشد. می‌گوییم که $\sim$ رابطه همبستگی روی A است اگر برای هر عمل n -تایی λ^A و $a_i, b_i \in A$ که $1 \leq i \leq n$ ، شرط زیر برقرار باشد

$$\forall 1 \leq i \leq n, a_i \sim b_i \Rightarrow \lambda^A(a_1, \dots, a_n) \sim \lambda^A(b_1, \dots, b_n)$$

مثال ۱۱. روی $\mathbb{Z}$ یک رابطه همبستگی است $(+)$ (گزاره ۱)

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, x \equiv_2 y \iff x - y \text{ مضرب } 2 \text{ باشد}$$

زیرا

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \equiv_2 y_1 \\ x_2 \equiv_2 y_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 - y_1 \text{ مضرب } 2 \\ x_2 - y_2 \text{ مضرب } 2 \end{array} \Rightarrow (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) = \underbrace{(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)}_{\text{مضرب } 2}$$

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{-1, -2, \dots\}, \text{ افراز } \mathbb{Z} \text{،}$$

$$\begin{array}{l} 2 \sim 2 \\ 1 \sim -2 \end{array} \nRightarrow \begin{array}{l} 2 + (-1) \sim 2 + (-4) \\ -1 \sim -4 \end{array}$$

مثال متناظر با هر عمل n -تایی λ^A و برای هر $[a_1], \dots, [a_n] \in A/\sim$ ، تعریف می‌کنیم

$$\lambda^{A/\sim}([a_1], \dots, [a_n]) = [\lambda^A(a_1, \dots, a_n)]$$

تعریف. فرض کنیم $(A; (\lambda^A))$ دستگاهی جبر از نوع π و $\sim$ رابطه همبستگی روی A باشد. در این صورت دستگاه جبر $(A/\sim; (\lambda^{A/\sim}))$ را خارج قسمت دستگاه جبر A به رابطه همبستگی $\sim$ می‌نامیم.