

هر یک از دسته‌های زیر

یا در آن دسته است: $(A; F)$ از یک مجموعه A و مجموعه‌ای $F = (f_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ از توابع n_λ -تایی $\lambda: A^{n_\lambda} \rightarrow A$ تشکیل شده است. در این صورت $\tau = (n_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ از اعداد را نوع یا نشانه جبر می‌نامیم.

مثال. نیم گروه $(G; *)$ یا گروه می‌نامیم اگر دارای عضو واحد باشد و هر عضو آن وارون داشته باشد. به عبارت دیگر، گروه واحد آن که دارای عضو یک‌تایی زیر باشد گروه می‌نامیم.

$$\forall x, y, z \in G \quad x * (y * z) = (x * y) * z \quad (1 \text{ گ})$$

$$\exists e \in G \quad \forall x \in G \quad x * e = e * x = x \quad (2 \text{ گ})$$

$$(\forall x \in G)(\exists x^{-1} \in G) \quad x * x^{-1} = x^{-1} * x = e \quad (3 \text{ گ})$$

مثال. دسته جبر $(R; +, \cdot)$ از نوع $\tau = (2, 2)$ را حلقه می‌نامیم اگر

(1 ع) دسته جبر $(R; +)$ گروه تعویض پذیر (آبج) باشد.

(2 ع) دسته جبر $(R; \cdot)$ نیم گروه باشد.

(3 ع) برای هر $x, y, z \in R$ داشته باشیم

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$$

مثال. مثله (?)

هر یک از دسته‌های زیر

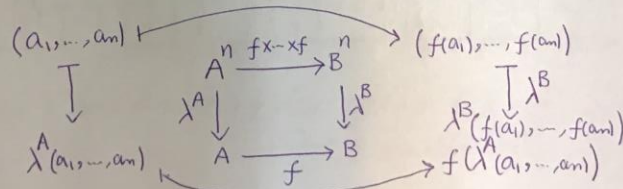
تعریف.

دسته‌های جبر از نوع $\tau = (n_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$: $(A; F)$, $(B; F)$

$$f: A \rightarrow B$$

f را هر یک از n_λ هرگاه برای هر $\lambda \in \Omega$ n_λ -تایی $\lambda: A^{n_\lambda} \rightarrow A$ و n_λ -تایی $f_\lambda: B^{n_\lambda} \rightarrow B$ داشته باشیم.

$$\forall a_1, \dots, a_{n_\lambda} \in A, \quad f(\lambda^A(a_1, \dots, a_{n_\lambda})) = \lambda^B(f(a_1), \dots, f(a_{n_\lambda}))$$



مثال 1.

$$f: (\mathbb{R}; +, -) \longrightarrow (\mathbb{R}^+; \cdot, ^{-1})$$

$$f(x) = e^x, \quad (\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\})$$

$$a) f(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = f(x) \cdot f(y)$$

محققا عمل درونی

$$b) f(-x) = e^{-x} = (e^x)^{-1} = f(x)^{-1}$$

محققا عمل یگانه

$$c) f(0) = e^0 = 1$$

محققا عمل صفری

$$f: (\mathbb{Z}; \cdot) \longrightarrow (\mathbb{Z}; \cdot)$$

2: تابع زیر هر عملی نیست

$$f(n) = 2n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

زیرا

$$\text{پس } f(1 \cdot 1) = f(1) = 2, \quad f(1) \cdot f(1) = 2 \cdot 2 = 4$$

$$f(1 \cdot 1) \neq f(1) \cdot f(1)$$

نکته: تابع بین دستگاه های همبسته که چند عمل را محققا کند ممکن است به عنوان خود همبسته عمل دیگر دستگاه را نیز محققا کند!

قضیه: $(A; \cdot, ^{-1}, e)$ و $(B; *, ^{-1}, e')$ گروه اند. اگر تابع $f: A \rightarrow B$ عمل درونی را محققا کند آنگاه f عمل های صفری و یگانه را نیز محققا می کند. یعنی

$$f(e) = e', \quad f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$$

$$f(x * y) = f(x) * f(y)$$

اثبات: داریم

$$f(e) = f(e * e) = f(e) * f(e) \Rightarrow$$

حال

$$e' = f(e) * f(e) = f(e) * (f(e) * f(e)) = \overbrace{(f(e) * f(e))}^{e'} * f(e) = f(e)$$

$$\text{پس } f(e) = e'$$

$$e' = f(e) = f(x * x^{-1}) = f(x) * f(x^{-1}) \quad \text{و} \quad f(x^{-1} * x) = e' \quad \text{پس } f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$$

چون وارون هر عضو یک گروه یکبار است پس

نکته: اگر $f: A \rightarrow B$ هر عملی بین دستگاه های همبسته (مثلاً از نوع τ) آنگاه $f(A)$ نیز دستگاه همبسته از نوع τ است.

زیرا $f(A)$ نسبت به هر عمل n تایی λ^B بسته است:

$$\lambda^B(f(a_1), \dots, f(a_n)) = f(\lambda^A(a_1, \dots, a_n)) \in f(A)$$

دو سؤال:

الف) اگر A دارای ویژگی σ باشد آنگاه آیا $f(A)$ نیز دارای ویژگی σ است؟
 ب) اگر $f(A)$ دارای ویژگی σ باشد آنگاه آیا A نیز دارای ویژگی σ است؟

تعریف: اگر پاین سؤال (الف) مثبت باشد (یعنی $f(A) \models \sigma \Rightarrow A \models \sigma$) می‌گوییم f ویژگی σ را حفظ می‌کند و اگر پاین سؤال (ب) مثبت باشد (یعنی $A \models \sigma \Rightarrow f(A) \models \sigma$) می‌گوییم که f ویژگی σ را بازتاب می‌دهد یا متغیر می‌کند.

قضیه: فرض کنیم $f: A \rightarrow B$ و $A, B \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$ و هر ویژگی σ در این صورت
 ① اگر معادله $p = q$ در A برقرار باشد (یعنی اتحاد باشد) آنگاه در $f(A)$ نیز اتحاد است.
 ② اگر f یک به یک باشد آنگاه عکس حکم ① نیز برقرار است.

اثبات:

$$f(a_1), \dots, f(a_n) \in f(A)$$

①

چون $p = q$ در A اتحاد است پس داریم $p(a_1, \dots, a_n) = q(a_1, \dots, a_n)$
 چون در عبارت f در طرف این تساوی تنها عضوهای عمل‌ها و دستگاه‌های A به کار رفته‌اند و f این عمل‌ها را حفظ می‌کند داریم

$$f(f(a_1), \dots, f(a_n)) = f(p(a_1, \dots, a_n)) = f(q(a_1, \dots, a_n)) = q(f(a_1), \dots, f(a_n))$$

و در نتیجه $f(A) \models (p = q)$

② فرض کنیم معادله $p = q$ در $f(A)$ اتحاد باشد و $a_1, \dots, a_n \in A$

$$p(f(a_1), \dots, f(a_n)) = q(f(a_1), \dots, f(a_n))$$

داریم

$$p(p(a_1, \dots, a_n)) = f(q(a_1, \dots, a_n))$$

پس $(f$ هر ویژگی است)

و چون f یک به یک است پس $p(a_1, \dots, a_n) = q(a_1, \dots, a_n)$ و لذا $p = q$ در A اتحاد است.

تعریف: می‌گوییم دو دستگاه A و B $A \cong B$ اگر یک ویژگی f دو سویه f بین آن‌ها وجود داشته باشد. f را یک ویژگی می‌نامیم.

