

$h(y) = \frac{y^{-3}}{3} \Rightarrow h(y) = \frac{y^{-2}}{-2} + C$
 $\frac{-1}{y} \frac{dx}{dy} - \frac{y^{-2}}{2} = k$

عامل انتگرال ز: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ (1) معادله دیفرانسیل
 معادله را به شکل $\mu = \mu(x,y)$ درآوریم. عامل انتگرال ز (فاکتور انتگرال) برای معادله (1) می‌گیریم اگر معادله
 فوق کامل گردد.

$\mu M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy = 0$ (2) شرط کامل بودن برای معادله (2) را می‌گیریم

$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$

$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial x} N \Rightarrow \mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = \frac{\partial \mu}{\partial x} N - \frac{\partial \mu}{\partial y} M$

(1) فرض می‌کنیم که معادله دیفرانسیل دارای عامل انتگرال زی است که تنها تابعی از x است.
 $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0, \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dx}$

(1)

$$\mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = \frac{d\mu}{dx} N \Rightarrow g(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dx}$$

طرفین را در dx ضرب کرده، انتگرال می گیریم

$$\int g(x) dx = \int \frac{d\mu}{\mu} \Rightarrow \int g(x) dx = \ln |\mu|$$

$$\mu = |\mu| = e^{\int g(x) dx} \quad \text{فقط یک عامل اشتراک روی قسمن و بسط داریم (مستحق است)}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

برعکس است

$$\varphi(x, y) = \int_{x_0}^x M(s, y_0) ds + \int_{y_0}^y N(x, t) dt$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = N \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x M(s, y_0) ds + \frac{\partial}{\partial y} \int_{y_0}^y N(x, t) dt \\ &= \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial y} M(s, y_0) ds + \int_{y_0}^y \frac{\partial}{\partial y} N(x, t) dt \\ &= \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial x} N(s, y_0) ds + N(x, y) - N(x, y_0) \end{aligned}$$

$$= N(x, y_0) + N(x, y) - N(x, y_0)$$

تقریباً معادله دفرانسیل را در نظر می گیریم و مشابه درس قبل

$$\mu = e^{\int g(x) dx}$$

در یک

$$\text{مثال: معادله دفرانسیل} \quad \frac{dy}{dx} - y = x \quad \text{را حل کنید}$$

$$(x+y)dx - dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \quad \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{1-0}{-1} = -1 \Rightarrow \mu = e^{\int -dx}$$

$$\mu = e^{-x} \quad e^{-x}(x+y)dx - e^{-x}dy = 0 \quad \frac{\partial M}{\partial y} = e^{-x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

پس:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = e^{-x}(x+y), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -e^{-x} \Rightarrow \varphi = -ye^{-x} + h(x)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = ye^{-x} + h'(x) = e^{-x}(x+y) \Rightarrow h'(x) = xe^{-x} \Rightarrow h(x) = \int xe^{-x} dx$$

استرال فرم جز

$$h(x) = -xe^{-x} - e^{-x} \quad \boxed{-ye^{-x} - xe^{-x} - e^{-x} = C} \quad \text{جران معادله}$$

(2) فرض کنیم h فقط تابعی از y باشد.

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial x} N \right) \quad \mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = -M \frac{d\mu}{dy}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -M$$

$$= \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dy}$$

اگر این کمره‌ای از y باشد

(2)

$$y \frac{dx}{dy} + 2x = 4y^2$$

مسئله معادله دیفرانسیل

$$y dx + (2x - 4y^2) dy = 0 \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 2$$

$$\frac{\partial M / \partial y - \partial N / \partial x}{-M} = \frac{1-2}{-y} = \frac{1}{y} \quad \mu = e^{\int \frac{1}{y} dy} = e^{\ln y} = y$$

$$y^2 dx + (2xy - 4y^3) dy = 0 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2xy - 4y^3, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = y^2$$

$$\varphi = xy^2 + z(y) \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2xy - z'(y) = 2xy - 4y^3 \Rightarrow z(y) = -y^4$$

$$\therefore xy^2 - y^4 = C \quad \text{جران معادله}$$

قریب: تحت چه شرایطی معادله دیفرانسیل (1) $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ دارای عامل استرال می‌باشد که(i) فقط تابعی از $x+y$ است.(ii) فقط تابعی از xy است.

فرض می کنیم μ فقط تابعی از $z = x + iy$ باشد. در این صورت:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d\mu}{dz}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{d\mu}{dz}$$

$$\mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = (-M + N) \frac{d\mu}{dz}$$

(3)

$$\therefore \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M + N} = \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dz} \Rightarrow \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M + N} dz = \int \frac{d\mu}{\mu}$$

$$\mu = e^{\int g(z) dz}$$

معادلات دیرنسل زیر را حل کنید

1. $x(\ln x)y' + y = 2 \ln x$

2. $xy' - 3y = x^3$

3. $x dy - (y + x \sin x) dx = 0$

4. $dy + [(e^{\sin x})y - \cos x] dx = 0$

- برای مثال مر 22: بعضی از معادلات دارای عامل اشتراک می باشند.

18 مر 22

$$(3x^2 + 5xy^2)y' + 3xy + 2y^3 = 0$$

$$(3x^{m+1}y^{n+1} + 2x^m y^{n+3}) dx + (3x^{m+2}y^n + 5x^{m+1}y^{n+2}) dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3(n+1)x^{m+1}y^n + 2(n+3)x^m y^{n+2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 3(m+2)x^{m+1}y^n + 5(m+1)x^m y^{n+2}$$

$$\begin{cases} 3(n+1) = 3(m+2) \\ 2(n+3) = 5(m+1) \end{cases}$$

$$\therefore m=1, n=2 \quad \mu = xy^2$$

- فرمولی برای انتخاب عامل اشتراک عبارتند از:

$$d(x^2 + y^2) = 2x dx + 2y dy \quad \frac{1}{2} d(x^2 + y^2) = x dx + y dy$$

7

$$d(x/y) = \frac{ydx - xdy}{y^2}, \quad d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2}$$

$$d\left(\frac{1}{y} \frac{y}{x}\right) = \frac{\frac{xdy - ydx}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \Rightarrow d\left(\frac{1}{y} \frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

$$d\left(\ln \frac{y}{x}\right) = \frac{\frac{xdy - ydx}{x^2}}{\frac{y}{x}} = \frac{xdy - ydx}{xy}$$

$$y y' + x - x^2 - y^2 = 0 \quad \text{24 ص 24: معادله دیفرانسیل برعکس را حل کنید}$$

$$y dy + x dx - (x^2 + y^2) dx = 0 \quad \text{س 1:}$$

$$\frac{1}{2} d(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2) dx = 0 \Rightarrow \frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 2 dx$$

$$\Rightarrow \ln(x^2 + y^2) = 2x + C$$

23 ص 5

$$(x + y^2) dy + (2x^2 - y) dx = 0$$

$$x dy - y dx + y^2 dy + 2x^2 dx = 0 \quad \text{همه عامل است را بنویسید.}$$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n ام

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = F(x)$$

$$a_1(x) y' + a_0(x) y = F(x) \quad \text{معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول بصورت}$$

فرض می کنیم که $a_1(x)$ بر مخرج I هرگز صفر نمی شود.

$$y' + \left(\frac{a_0(x)}{a_1(x)}\right) y = \left(\frac{F(x)}{a_1(x)}\right) Q(x) \quad y' + P(x)y = Q(x)$$

24 ص 25

$$dy + (P(x)y - Q(x)) dx = 0 \quad \frac{\partial M}{\partial y} = P(x), \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{P(x) - 0}{1} = P(x)$$

$$\mu = e^{\int P(x) dx}$$

$$e^{\int p(x)dx} y' + p(x) e^{\int p(x)dx} y = Q(x) e^{\int p(x)dx}$$

$$\frac{d}{dx} \left(y e^{\int p(x)dx} \right) = Q(x) e^{\int p(x)dx}$$

$$y e^{\int p(x)dx} = \int Q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C$$

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int Q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C \right] \quad \text{معادلة 24}$$

$$x dy - y dx - 2y(x^2 + y^2) dy = 0 \quad \text{24 م 22}$$

$$\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} - 2y dy = 0 \Rightarrow \int d\left(\frac{y}{x}\right) - \int 2y dy = 0$$

$$\frac{y}{x} - y^2 = C$$

$$x dy - y dx - 4x^3 dy + 3x^4 dx = 0 \quad ; \quad \mu = \frac{1}{x^2} \quad \text{24 م 21}$$

$$\frac{x dy - y dx}{x^2} - 4y^3 dy + 3x^2 dx = 0$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right) - d(y^4) + d(x^3) = 0 \Rightarrow \frac{y}{x} - y^4 + x^3 = C$$

معادلات ديفرانسيل كرتي:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \quad n \neq 0, 1$$

نوع معادله ديفرانسيل بصورت $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ ، $n \neq 0, 1$ (نوع معادله ديفرانسيل غير خطي) برای حل آن:

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \quad z = y^{1-n} \quad \text{تغییر متغیر}$$

$$z' = (1-n)y^{-n} y' \Rightarrow \frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx} \Rightarrow y^{-n} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx}$$

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \Rightarrow \frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x)$$

سؤال: 18 م 29 معادله درجه اول زیر را حل کنید

$$3x^2 y y' - 3y^3 = x^4 \ln x$$

$$y' - \frac{1}{x} y = \frac{x^3 (\ln x)}{3} y^{-2} \Rightarrow y^2 y' - \frac{1}{x} y^3 = \frac{x^3 \ln x}{3}$$

$$z = y^3$$

$$\frac{1}{3} \frac{dz}{dx} - \frac{1}{x} z = \frac{1}{3} x^3 \ln x \Rightarrow \frac{dz}{dx} - \frac{1}{x} z = x^3 \ln x$$

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x} z = x^3 \ln x, \mu = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x^3} \frac{dz}{dx} - \frac{3}{x^4} z = \ln x \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^3} z \right) = \ln x \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x^3} z = \int \ln x dz + C \Rightarrow \frac{z}{x^3} = \frac{1}{3} \ln x + C \Rightarrow z = x^3 \ln x + C x^3$$

$$y^3 = x^3 \ln x + C x^3$$

$$y' - 2(\ln x)y = -2y^{3/2} \ln x \quad z = y^{1-3/2} = y^{-1/2}$$

$$\frac{dz}{dx} = z' = -\frac{1}{2} y^{-3/2} y' \Rightarrow -\frac{1}{2} y^{-3/2} y' + \ln x y^{-1/2} = \ln x$$

$$z' + (\ln x)z = \ln x \Rightarrow e^{\ln x} z' + (\ln x) e^{\ln x} z = e^{\ln x} \ln x$$

$$\frac{d}{dx} (e^{\ln x} z) = e^{\ln x} \ln x \Rightarrow e^{\ln x} z = e^{\ln x} + C$$

$$\Rightarrow z = 1 + C e^{-\ln x} \quad y^{-1/2} = 1 + C e^{-\ln x}$$

$$\frac{1}{y^2+1} y' + \frac{2}{x} y^{-1} = \frac{2}{x} \quad z = \frac{1}{y^2+1}$$

$$z' = \frac{1}{1+y^2} y' \Rightarrow z' + \frac{2}{x} z = \frac{2}{x} \quad \mu = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \ln x} = x^2$$

$$x^2 z' + 2xz = 2x \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2 z) = 2x \Rightarrow x^2 z = x^2 + C$$

$$z = 1 + Cx^{-2} \Rightarrow \frac{1}{z^2} y' = 1 + Cx^{-2}$$

معادلات دیفرانسیل ریاضی (Riccati)
معادله ای بصورت $y' = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2$ فرض می کنیم $y_1(x)$ یک جواب معادله بالا را بدست می آوریم.

$$y' = a_0(x) + a_1(x)y_1 + a_2(x)y_1^2$$

برای حل معادله جواب را بصورت زیر در نظر می گیریم:

$$y = y_1 + \frac{1}{z} \Rightarrow y' = y_1' - \frac{1}{z^2} z'$$

$$y_1' - \frac{1}{z^2} z' = a_0(x) + a_1(x) \left[y_1 + \frac{1}{z} \right] + a_2(x) \left[y_1 + \frac{1}{z} \right]^2$$

$$y_1' - \frac{1}{z^2} z' = a_0(x) + a_1(x)y_1 + a_1(x)\frac{1}{z} + a_2(x)y_1^2 +$$

$$2a_2(x)\frac{y_1}{z} + a_2(x)\frac{1}{z^2} \Rightarrow z' + (a_1(x) + 2y_1 a_2(x))z + a_0(x) - y_1' = 0$$

معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی

$$1. \quad y' = x^3 + \frac{2}{x}y - \frac{1}{x}y^2 \quad y_1(x) = -x^2$$

$$2. \quad y' = 2 \tan x \sec x - y^2 \sin x \quad y_1(x) = \sec x$$

$$3. \quad y' = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} - y^2 \quad y_1(x) = \frac{1}{x}$$

$$4. \quad y' = 1 + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} \quad y_1(x) = x$$

$$4) \quad y' = 1 - \frac{1}{z^2} z'$$

به عنوان نمونه (4) را حل کنیم:
تغییر متغیر $z = x + \frac{1}{z}$

9

$$1 - \frac{1}{z^2} z' = 1 + \frac{x + \frac{1}{2}}{x} - \frac{(x + \frac{1}{2})^2}{x^2} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{z^2} z' = 1 + \frac{1}{x^2} - 1 - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^2 z^2} \Rightarrow -\frac{1}{z^2} z' = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 z^2}$$

$$\Rightarrow z' - \frac{1}{x} z = \frac{1}{x^2} \quad \mu = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x} z' - \frac{1}{x^2} z = \frac{1}{x^3} \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} z \right) = \frac{1}{x^3} \Rightarrow \frac{1}{x} z = \int \frac{1}{x^3} dx + c$$

$$\frac{1}{x} z = -\frac{1}{2x^2} + c \Rightarrow z = -\frac{1}{2} x^{-1} + cx$$

$$y = x + \frac{1}{-\frac{1}{2} x^{-1} + cx} \quad \text{جواب نهایی}$$

حل درونج خاص از معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم

صورت کلی یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم
 $F(x, y, y', y'') = 0$
 حالت اول: در معادله مرتبه دوم متغیر مستقل یعنی x ظاهر نشده باشد.
 $G(y, y', y'') = 0$
 برای حل اینگونه معادلات از تغییر متغیر $y' = p$ استفاده می کنیم
 $\frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy} \therefore G(y, p, p \frac{dp}{dy}) = 0$

12 ص 53
 حل:
 $x \frac{d^2 x}{dt^2} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ (x متغیر وابسته، t متغیر مستقل)

$\frac{dx}{dt} = p, \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = p \frac{dp}{dx} \quad (1)$

$\therefore x \frac{d^2 x}{dt^2} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \Rightarrow x p \frac{dp}{dx} = p^2 \quad (I)$
 $p = 0$ همان معادله می باشد.

$x \neq 0, p \neq 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|p| = \ln|x| + \ln|C|$
 $|p| = |C| |x| \Rightarrow p = \pm Cx, C \neq 0 \therefore p = kx$

$\frac{dx}{dt} = kx \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int k dt \Rightarrow \ln|x| = kt + C_2 \Rightarrow |x| = e^{C_2 kt} \Rightarrow x = \pm C_3 e^{kt}$

$x = \pm C_3 e^{kt} \Rightarrow x = m e^{kt}$

حالت دوم: فرض می کنیم که در معادله دیفرانسیل مرتبه دوم متغیر وابسته یعنی y ظاهر نشده باشد.
 $p = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow x = C''$

$F(x, y, y', y'') = 0 \quad y' = p = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = \frac{dp}{dx}$

یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است.
 $G(x, p, \frac{dp}{dx}) = 0$

م 55 ص 53

$2t \frac{d^2 x}{dt^2} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 1$

حل:
 $\frac{dx}{dt} = p \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dp}{dt}, \quad 2t \frac{dp}{dt} = p^2 - 1 \Rightarrow \frac{dp}{p^2 - 1} = \frac{dt}{2t}, t \neq 0$

حل دو نوع خاص از معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم

صورت کلی یک معادله دیفرانسیل درجه دوم
 $F(x, y, y', y'') = 0$
 حالت اول: در معادله مرتبه دوم متغیر مستقل یعنی x ظاهر نشده باشد. $F(y, y', y'') = 0$
 برای حل اینگونه معادلات از تغییر متغیر $y' = p$ استفاده می کنیم
 $\frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy} \quad \therefore G(y, p, p \frac{dp}{dy}) = 0$

12 ص 53
 حل:
 $x \frac{d^2 x}{dt^2} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \quad (x \text{ متغیر وابسته و } t \text{ متغیر مستقل})$

$\frac{dx}{dt} = p, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = p \frac{dp}{dx} \quad (1)$

$\therefore x \frac{d^2 x}{dt^2} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \Rightarrow x p \frac{dp}{dx} = p^2 \quad (I)$
 $p = 0$ جواب معادله می باشد.

$x \neq 0, p \neq 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|p| = \ln|x| + \ln|C|$
 $|p| = |Cx| \Rightarrow p = \pm Cx, C \neq 0 \quad \therefore p = kx$

$\frac{dx}{dt} = kx \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int k dt \Rightarrow \ln|x| = kt + C_2 \Rightarrow |x| = e^{C_2} e^{kt}$

$x = \pm C_3 e^{kt} \Rightarrow x = m e^{kt}$

حالت $p = 0$ را بررسی می کنیم
 $p = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow x = C''$
 حالت دوم: فرض می کنیم که در معادله دیفرانسیل مرتبه دوم متغیر وابسته یعنی y ظاهر نشده باشد.

$F(x, y', y'') = 0 \quad y' = p = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = \frac{dp}{dx}$

یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است
 $G(x, p, \frac{dp}{dx}) = 0$

15 ص 53

$2t \frac{d^2 x}{dt^2} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 1$

حل:
 $\frac{dx}{dt} = p \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dp}{dt}, \quad 2t \frac{dp}{dt} = p^2 - 1 \Rightarrow \frac{dp}{p^2 - 1} = \frac{dt}{2t}, t \neq 0$

$$\int \left[\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1} \right] dp = \int \frac{dt}{t} \quad p \neq \pm 1 \text{ می توانیم از طرفین انتگرال بگیریم}$$

$$\ln \frac{p-1}{p+1} = \ln ct \Rightarrow \frac{p-1}{p+1} = ct \Rightarrow p-1 = ct p + ct$$

$$p = \frac{ct+1}{1-ct} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{ct+1}{-ct+1} \Rightarrow x = \int \frac{ct+1}{-ct+1} dt$$

$$x = -\int \frac{ct-1+2}{ct-1} dt = -\int dt - 2\int \frac{dt}{ct-1}$$

$$x = -t - \frac{2}{c} \ln |ct-1| + C'$$

برای $p=1$

$$p=1 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 1 \Rightarrow x = t + k$$

برای $p=-1$

$$p=-1 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -x + m$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه 2 به بالا

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = F(x) \quad (1)$$

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (2)$$

معادله دیفرانسیل (2) را معادله دیفرانسیل همگن و معادله (1) می نویسیم.

این همگن موقعی مرتبه n است که $f(x)$ ، n مرتبه مرتبه n می نویسیم.

$$D^n f(x) = f^{(n)}(x)$$

$$D^3 f(x) = D^2(Df(x)) = D^2(f'(x)) = D(Df'(x)) = D(f''(x)) = f'''(x)$$

$$L = 3D^2 - 2xD - \frac{1}{2}x \quad Ly = p$$

$$Ly = (3D^2 - 2xD - \frac{1}{2}x)y \quad \text{این همگن می شود که حد اول در برابر مرتبه n می نویسیم.}$$

$$= 3y'' - 2xy' - (\frac{1}{2}x)y$$

مثال: معادله دیفرانسیل را به صورت همگن بنویسید.

$$y''' - 3x^2y'' + xy' = \sin x$$

$$L = D^3 - 3x^2D^2 + xD \quad Ly = \sin x$$

$$t \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + 2\sqrt{t^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = v \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \Rightarrow t \frac{dv}{dt} = v + 2\sqrt{t^2 + v^2} \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v + 2\sqrt{t^2 + v^2}}{t} \Rightarrow \frac{v}{t} = p \Rightarrow p + p't = \frac{pt + \sqrt{t^2 + p^2 t^2}}{t}$$

$$\Rightarrow p + p't = p + \sqrt{1 + p^2} \Rightarrow p't = \sqrt{1 + p^2} \Rightarrow \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{dt}{t} \Rightarrow \ln ct =$$

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \ln ct \Rightarrow p + \sqrt{1 + p^2} = ct \Rightarrow$$

$$\frac{v}{t} + \sqrt{1 + \frac{v^2}{t^2}} = ct \Rightarrow 1 + \frac{v^2}{t^2} = c^2 t^2 - 2cv + \frac{v^2}{t^2} \Rightarrow$$

$$2cv = c^2 t^2 - 1 \Rightarrow v = \frac{c t^2}{2} - \frac{1}{2c} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{c}{2} t^2 - \frac{1}{2c} \Rightarrow$$

$$\boxed{x = \frac{c}{2} \cdot \frac{t^3}{3} - \frac{1}{2c} t + C'}$$