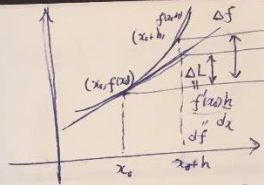


if h کوچک $\Rightarrow$ (مورد خطی) f و L نزدیک
به هم اندازه تغییر می کنند



$$\Delta f = f(x_0+h) - f(x_0)$$

$$\Delta L = L(x_0+h) - L(x_0)$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x_0+h-x_0) - (f(x_0) + f'(x_0)(x_0-x_0))$$

$$= f'(x_0)h$$

$\Rightarrow$ با ΔL می بینیم
با Δf نزدیک شدن، Δf می شود

$$\Delta L = f'(x_0)h \quad \text{کای این} \quad df = f'(x_0)dx$$

تغییر صورت خطی f را df می گویند
یعنی dx حاصل می شود
در هر جا

$$df = f'(x)dx \Rightarrow \frac{df}{dx} = f'(x)$$

$$\text{مثال} \quad r_0 = 10, \quad dr = 0.1$$

$$dA = ? \quad A = \pi r^2 \Rightarrow A'(r) = 2\pi r$$

$$\Delta A = ? \quad dA = A'(r_0)dr$$

$$dA = 20\pi \cdot 0.1 = 2\pi$$

تغییر dA در r_0

$$\Delta A = A(10.1) - A(10)$$

$$= \pi(10.1)^2 - \pi(10^2) = \pi(20.1)(0.1) = \frac{2\pi + 0.01\pi}{\text{خطا}}$$

$$\frac{\text{خطا}}{\text{مقدار اولی}} = \frac{0.01\pi}{100\pi} = 0.01\%$$

$$0.01\pi = dA \quad \text{خطا در dA در r_0 }$$

قاعده زنجیره ای

Example $y = 6t - 10 = 2(3t - 5)$

$$y = 2x, \quad x = 3t - 5$$

تابع y ترکیب دو تابع $y=2x$ و $x=3t-5$ است
پس می توانیم $\frac{dy}{dt}$ را پیدا کنیم
از $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{dx}{dt}$

قاعده زنجیره‌ای (chain rule)

صورت اول:

$$h = g \circ f, \quad y = g(x), \quad x = f(t)$$

$$(g \circ f)'(t) = g'(x) \cdot f'(t), \quad x = f(t) \quad \text{or} \quad \checkmark$$

$$h'(t) = g'(f(t)) \cdot f'(t)$$

صورت دوم: اگر y تابع مشتق‌پذیر از x ، x تابع مشتق‌پذیر از t ، باشد که

$$dy/dt = dy/dx \times dx/dt \quad y \text{ تابع مشتق‌پذیر از } t \text{ است و داریم}$$

$$\frac{d}{dx} \cos 3x, \quad \frac{d}{dx} \cos^2 3x$$

$$2. \quad \frac{d}{dx} \tan x = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) = \dots = \sec^2 x$$

$$a) \quad \frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

$$c) \quad \frac{d}{dx} \csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$$

$$b) \quad \frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}, \quad d) \quad \frac{d}{dx} \cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad y &= \sec^2 5x & \frac{dy}{dx} &= 2 \sec 5x \frac{d}{dx} \sec 5x \\ & & &= 2 \sec 5x \sec 5x \tan 5x \frac{d}{dx} 5x \\ & & &= 10 \sec^2 5x \tan 5x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} (\cos 5x)^{-2} = -2 (\cos 5x)^{-1} \frac{d}{dx} \cos 5x \\ &= -2 (\cos 5x)^{-1} (-\sin 5x) \frac{d}{dx} 5x \end{aligned}$$

$$4. \quad y = \tan \sqrt{3x}, \quad \frac{dy}{dx} = ?$$

صورتی مفید تریج $\tan x, \cos x, \sin x$, $x=0$ و $x=\pi$ کے لئے
(ترتیب کے لحاظ سے: $x, 1, x$)

معادله های پارامتری

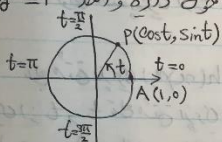
وقتی مسیر حرکت ذرات متحرک در صفحه نمودار می تابد، نمی توانیم با بیان متعین y و x مسیر را توصیف کنیم. برای اجتناب از این مشکل،

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

معادله پارامتری x و y از متغیر (پارامتر) t .

EX-1 $x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

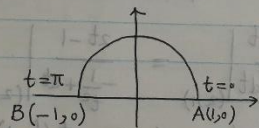
موضع $P(x, y)$ ذرات را که با افزایش t دور می دایره واحد $x^2 + y^2 = 1$ در صفحه حرکت می کنند، نشان می دهد.



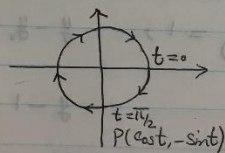
1) $x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + 2\pi$

$$(\cos t_0, \sin t_0) \rightarrow (\cos(t_0 + 2\pi), \sin(t_0 + 2\pi)) = (\cos t_0, \sin t_0)$$

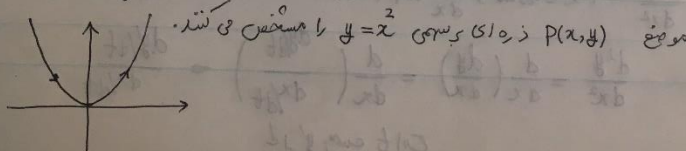
2) $x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi$



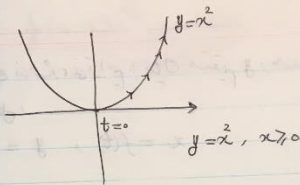
3) $x = \cos t, \quad y = -\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$



4) $x = t, \quad y = t^2, \quad -\infty < t < +\infty$



5) $x = \sqrt{t}$, $y = t$, $t \geq 0$



فرمول پارامتری $\frac{dy}{dx}$

$x = f(t)$, $y = g(t)$

$\frac{dy}{dt} \neq 0$

در این صورت تابع معکوس از t : $t = h(x)$

تابع معکوس از t و t تابع معکوس از x پس $y = g(t) = g(h(x)) = g \circ h(x)$

$y = g(t) = g(h(x)) = g \circ h(x)$

$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

مثال اگر $x = \frac{1}{t} + t^2$, $y = t^2 - t + 1$ در نقطه $(2, 1)$ بیابید. #36 P.134

$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(2,1)} = \left. \frac{dy/dt}{dx/dt} \right|_{(2,1)} = \left. \frac{2t-1}{-\frac{1}{t^2}+2t} \right|_{(2,1)} = \left. \frac{2t-1}{-\frac{1}{t^2}+2t} \right|_{t=1} = \frac{2-1}{-1+2} = 1$

$y = 1 \Rightarrow t^2 - t + 1 = 1 \Rightarrow t(t-1) = 0 \Rightarrow t = 1, t = 0$

$t = 1 \Rightarrow x = 2$

$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(2,1)} = 1$, $y - y_0 = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(2,1)} (x - x_0)$

$y - 1 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x - 1$

$\frac{d^2y}{dx^2}$, $x = \cos t$, $\frac{dy}{dx} = \sqrt{4 - \sin^2 t}$ در $t = \frac{\pi}{4}$ تابع معکوس از t بیابید. #50 P.134

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy/dt}{dx/dt} \right) = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy/dt}{dx/dt} \right)}{dx/dt}$

در $t = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{d}{dt}(\sqrt{4-\sin^2 t})}{-2\sin 2t} = \frac{\frac{1}{2}(4-\sin^2 t)^{-1/2} \cdot (2\sin t \cos t)}{-2\sin 2t}$$

فصل
آرایش صعودی و نزولی کاربرد مشتق

بازیه
\$y = f(x)\$ را \$I\$ صعودی می‌گویند
\$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)\$
\$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)\$

EX: \$y = x^2\$, \$y = \sin x\$, \$y = \tan x\$, \$y = \frac{1}{x}\$
(-∞, 0) (0, ∞)
صعودی نزولی

آزمون مشتق اول برای صعودی و نزولی بودن

فرض کنید که \$f\$ تابعی در نقطه \$x_0\$ از بازه \$I\$ مشتق داشته باشد. آنگاه

12

\$f\$ در \$I\$ صعودی است، هرگاه برای هر \$x\$ در \$I\$، \$f'(x) > 0\$
\$f\$ در \$I\$ نزولی است، هرگاه برای هر \$x\$ در \$I\$، \$f'(x) < 0\$

اگر دقتی از هیچ برآید و در دو نقطه ای هر دو \$C\$ مثلاً در مقدار \$f\$ از نسبت به مشتق تغییر
شود، آنگاه مقدار \$f\$ در \$C\$ یک مقدار یکسان برضی \$f\$ است.

1. \$y = x^3 - 3x^2 + 4\$

2. \$y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2\$

می‌توانیم موضوعی را به ترتیب اولی می‌شود

تغییر نقاط عطف

تقریباً: نمودار تابع مشتق \$f'(x)\$ را در بازه‌ای که \$f\$ کم می‌شود تغییر رو به بالا دارد.
بازیه‌ای که \$f\$ زیاد می‌شود تغییر رو به بالا دارد.

U

آزمون مشتق دوم برای تغییر

نمودار \$y = f(x)\$

در بازه‌ای که \$f'' > 0\$، تغییر رو به بالا دارد.
در بازه‌ای که \$f'' < 0\$، تغییر رو به بالا دارد.

نقاط عطف که تابع

تغییری از کم که در آن تغییر می‌شود نقطه عطف نام دارد.

در نقطه عطف \$f'' = 0\$

مثال: رسم کنید \$y = \frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 9x + 6)\$

تابع‌های زوج و فرد

تابع زوج (مغزدار) و فرد (مغزدار)

$y = f(x)$ is even if $\forall x \in D_f, f(-x) = f(x)$

" odd if $\forall x \in D_f, f(-x) = -f(x)$

1. $y = \frac{1}{x^2}, y = x^2 - \frac{1}{x^2} + 1$ زوج

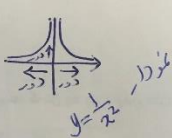
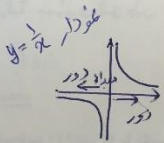
2. $y = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}, y = x^3$ فرد

3. $y = 1 + \frac{1}{x}, y = \frac{1}{x-1}$ هیچکدام

13

تابع‌های اوج و گام

$y = \frac{1}{x^2}, y = \frac{1}{x}$



1. $y = \frac{x}{x-1}, y = 1, x = 1$

تعریف: خط $y = b$ تابع اوج مغزدار است اگر داشته باشیم

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ or $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$

خط $x = a$ تابع گام مغزدار است اگر داشته باشیم

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm \infty$ or $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty$

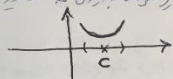
1. $y = \frac{8}{4-x^2}, y = 0, x = \pm 2$

مغزدار. مغزدار $y = x + \frac{1}{x}$ را رسم کنید. (4 نمره)

۴.۳ نظریه ماکسیم و مینیم

- تابعی چون f در $x=c$ مینیم نی یا موضعی دارد هرگاه: برای مقدار x دین بازه باز حول c داریم:

$$f(c) \leq f(x)$$



قضیه مشهور اول برای مقدار اکسترم موضعی

فرض کنید تابعی چون f در دین نقطه داخلی مانند c از بازه ای که f بر آن تعریف می شود، ماکسیم یا مینیم موضعی داشته باشد. اگر f در c تعریف نشود، آنگاه $f'(c) = 0$

یهاک: تمرین (برای اثبات درع شردم صغیر بعد)

- نقطه ای که در آنجا $f'(x) = 0$ یا f' وجود ندارد، عموماً نقاط بحرانی می نامند. در محاسبه برای یافتن مقادیر اکسترم می باید تنها نقطه ای که f' صفر می شود یا وجود ندارد و نقاط انتهایی اند.

۱) $y = x^{2/3}, -2 \leq x \leq 3$ مقادیر ماکسیم و مینیم مطلق

$y' = \frac{2}{3\sqrt{x}}, x=0$ نقطه بحرانی

$y(0) = 0, y(-2) = 4^{1/3}, y(3) = 9^{1/3}$

x	-2	0	3
y'			
y	$4^{1/3}$	0	$9^{1/3}$

نقطه Min Max

۲) $y = x^3 - 3x + 2, [0, 2]$ نقطه بحرانی

$y' = 3(x-1)(x+1) \quad x=1$

$y(1) = 0, y(0) = 2, y(2) = 4$

بازه های باز یا نامنظمی

از اصول مشهور دوم برای ماکسیم و مینیم های موضعی

اگر $f'(c) = 0$ و $f''(c) < 0$ آنگاه f در $x=c$ ماکسیم موضعی دارد

اگر $f'(c) = 0$ و $f''(c) > 0$ آنگاه f در $x=c$ مینیم موضعی دارد

(اگر $f''(c) = 0$ آنگاه فرض)

۱) $y = x^3 - 3x + 2, -\infty < x < \infty$

$$y = x^3 - 3x + 2, \quad -\infty < x < +\infty$$

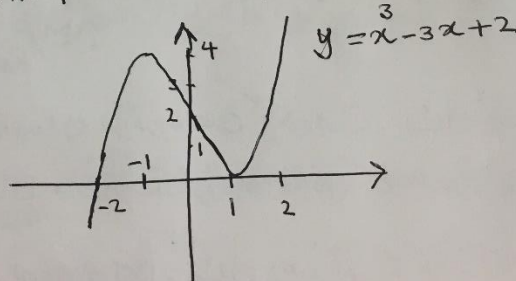
دامنه هیچ نقطه انتهایی ندارد و تابع همواره متناهی است

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

پس اکثریم ها در نقاطی رخ می دهند که $y' = 0$ پس $x = -1$ و $x = 1$

$$y'' = 6x, \quad y''(-1) = -6 < 0, \quad y''(1) = 6 > 0$$

پس $y(1) = 0$ یک مقدار محلی مینیمم می باشد و $y(-1) = 4$ یک مقدار ماکسیمم می باشد



#73
p.83

$$F(t) \leq M, \forall t$$

$$\text{اگر } \lim_{t \rightarrow c} F(t) = L \implies L \leq M$$

فرض $L > M$, $\epsilon = L - M$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad |t - c| < \delta \implies |F(t) - L| < \epsilon = L - M$$

$$\times M < F(t) \iff M = L - L + M < F(t) < L + L - M$$

قضیه ششم اول برای مقادیر انتزاعی
فرض کنید تابعی در یک نقطه داخلی مانند c از بازه ای که f بر آن تعریف شده است تعریف
یا منبسط و منقبض داشته باشد. اگر f در c تعریف نشود آنوقت $f(c) = 0$.

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

اگر c نقطه منبسط تابع f در $x = c$ باشد

$$f(x) \leq f(c) \quad \text{و}$$

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0 \quad \text{و}$$

$$f'(c) = f'_+(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0 \implies \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0$$

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{\text{منفی}}{\text{منفی}} = \text{مثبت} > 0 \implies \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

$$x \rightarrow c^-$$

$$\implies 0 \leq f'(c) \leq 0 \implies f'(c) = 0$$

#1
p. 168

$$y = x - x^2, [0, 1]$$

$$y' = 0 \quad 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = 1/2$$

بدرستی

x	0	$\frac{1}{2}$	1
y'		0	
y	0	$\frac{1}{4}$	0

Max در $x = \frac{1}{2}$

#21
p. 168

$$y = \tan x, [0, \pi/2]$$

$$y' = \sec^2 x > 0$$

x	0	$\pi/2$
y'	+	∞

در $x = 0$ و $x = \pi/2$

#5/p. 168

$$y = x^3 - 147x, -\infty < x < \infty$$

$$y' = 3x^2 - 147 = 0 \quad x = \pm \sqrt{\frac{147}{3}} = \pm 7$$

$$y'' = 6x \quad y''(\sqrt{147/3}) = y''(7) = 42$$

$$y''(-7) = -42$$

در $x = 7$ و $x = -7$ f -
در $x = 7$ و $x = -7$ f -

#22
p. 168

$$y = \sec x, (-\pi/2, \pi/2)$$

$$y' = \sec x \tan x = 0 \Rightarrow \tan x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

در $x = 0$ و $x = \pi$ و $x = -\pi$ و ...

$$\therefore x = 0$$

$$y'' = \sec x \tan^2 x + \sec x$$

$$y''(0) = 1 > 0$$

در $x = 0$ و $x = \pi$ و $x = -\pi$ و ...

x	$-\pi/2$	0	$\pi/2$
y'	-	+	
y			

#8
168

$$y = x^3 - 6x, [0, 2]$$

$$y' = 3x^2 - 6 = 0, x = \pm 2$$

$$y'' = 6x > 0$$

x	0	2
y'		
y	0	-4

$$y(0) = 0, y(2) = -4$$

نقطة صفرية نقطة صفرية

#13
168

$$y = x^2 + \frac{2}{x}, x > 0$$

$$y' = 2x - \frac{2}{x^2} \quad y' = 0 \Rightarrow 2x = \frac{2}{x^2} \Rightarrow \frac{x^3}{x^2} = 1$$

$$y'' = 2 + \frac{4}{x^3} > 0 \quad y''(1) = 2 + 4 > 0$$

نقطة صفرية عند $x=1 \rightarrow y$

#28 $y = |x^3| = |x|^3 \quad [-2, 3]$

p. 168 $y' = 3|x|^2 \cdot \frac{x}{|x|} = 3x|x| = 0 \Rightarrow x = 0$ *نقطه بحر*

$y(-2) = 8, y(3) = 27$

$y(0) = 0$ *مین*

x	-2	0	3
y'	-	+	
y	8	0	27

خلاصه

برای یافتن مقدار ماکسیم و مینیم تابعی $y = f(x)$

1. نقاطی را تعیین کنید که در آنجا مقدار تابع وجود داشته باشد، و
2. نقاط انتهایی دامنه f را در صورت وجود، بیابید. اینها نقاطی هستند که در آنجا مقدار f کم دارد

۳۰ مسئله‌ها ماکسیم و مینیم

- (1) در عددیای بزرگ مجموعشان 20، حاصلضرب آن مقدار کمترین باشد.

$$f(x) = x(20-x)$$

- (2) متعلقی داخلی برداری در شعاع 2 می‌باشد. مقدار کمین برای متعلقی چیست است و انبار آن چیست؟

- (3) ورق صغری ربع شکلی که طول هر ضلعش a اینجاست داده شده است. از هر ورق این ورق ربع کوچک می‌بریم و سه ورق را هم می‌کنیم تا یک مربع بزرگ ساخته شود. برای آنکه یک مربع بزرگ مقدار کمین را داشته باشد، انبار ربعی که می‌بریم مقدار باید باشد؟

$$y = x(a-2x)^2, \quad 0 \leq x \leq \frac{a}{2}$$

- (4) می‌خواهیم یک قوطی به شکل استوانه مستقیم بسازیم که در آن 4 کان رخت جا بگیرد. انبار قوطی چه مقدار ورق لازم به عنوان مقدار کمین است.

- (5) سبی به طول 1 داده شده است. آن را به دایره و یک ربع بسازیم برای آنکه مجموع مساحت دایره و ربع ماکسیم باشد. سبب چگونه باید تقسیم شود؟

#1
P.175

$x+y=20, \quad x, y \geq 0$
 ا) x^2+y^2 مربعات
 ب) x^2y^3 مكعبات
 ج) $x+\sqrt{y}$ مربعات

1) $f(x) = x^2 + y^2 = x^2 + (20-x)^2, \quad 0 \leq x \leq 20$

$f'(x) = 2x + 2(20-x)(-1) = 0 \Rightarrow 2(20-x) = 2x$
 $\Rightarrow 20-x = x \Rightarrow x = 10$

$f''(x) = 2 + (-2)(-1) = 4 > 0 \Rightarrow f(10) = 200$ نقطة اطلاق

$f(20) = 400$ نقطة اطلاق, $x = 20, y = 0$

2) $f(x) = x^2 y^3 = x^2 (20-x)^3, \quad 0 \leq x \leq 20$

$f'(x) = 2x(20-x)^3 + 3x^2(20-x)^2(-1) = 0$

$(20-x)^2(2x(20-x) - 3x^2) = 0 \Rightarrow x = 20, \quad 40x - 5x^2 = 0$

$5x(8-x) = 0$

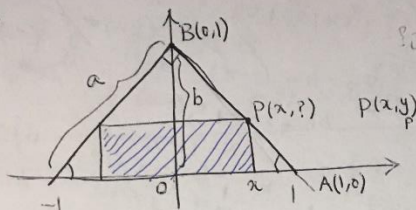
$x = 0, x = 8$

x	0	8	20
$f'(x)$			
$f(x)$	0	64×12^3	0

نقطة اطلاق

6
p. 175

a)



$$a^2 + a^2 = 2 \Rightarrow 2a^2 = 4 \Rightarrow a^2 = 2 \quad a = \sqrt{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Coulomb} \\ b + \frac{2}{1} = \frac{2}{a} = 2 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = 1 \end{array} \right\} \quad a + a = 2 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$A \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad B \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \frac{x-1}{0-1} = \frac{y-0}{1-0} \Rightarrow y = 1-x$$

AB: ~~line~~ $AB: x+y=1$

چون P در این حفاظت پس عرض نقطه P برابر است با: $x-1$

$$P \begin{vmatrix} x \\ 1-x \end{vmatrix}$$

b) $\text{مساحت } A = 2x(1-x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1$

$$A'(x) = 2(1-x) + (-2x) = 2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 1/2$$

x	0	$1/2$	1
y'		0	

$$A(x) = y \mid 0 \quad 1/2 \quad 0$$

or max

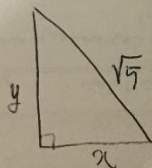
x دای طریق اضلاع منتهی ۶۲ فی الزاویه ان هفتیکه طول دیکش $\sqrt{6}$ و اضرای.

$$S = 2x + y$$

$$x^2 + y^2 = 5 \rightarrow y = \sqrt{5 - x^2}, 0 \leq x \leq \sqrt{5}$$

$$\frac{ds}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx}, \quad 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$



$$\frac{ds}{dx} = 2 - \frac{x}{\sqrt{5-x^2}} = 0 \Rightarrow 4(5-x^2) = x^2$$

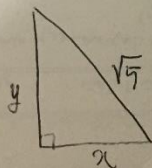
22
p. 177

$$S = 2x + y$$

$$x^2 + y^2 = 5 \rightarrow y = \sqrt{5 - x^2}, 0 \leq x \leq \sqrt{5}$$

$$\frac{ds}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx}, \quad 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$



$$\frac{ds}{dx} = 2 - \frac{x}{\sqrt{5-x^2}} = 0 \Rightarrow 4(5-x^2) = x^2$$

$$x=2 \quad \text{دستگاه}$$

$$x=2, \quad y=\sqrt{5-4}=1$$

$$S=4+1$$

x	0	2	$\sqrt{5}$
$\frac{ds}{dx}$			
s	$\sqrt{5}$	5	$2\sqrt{5} \rightarrow$ بیشتر مقدار

$\frac{43}{p.178}$

$$f(x) = x^2 - x + 1$$

$$f(x) = 3 + 4\cos x + \cos 2x$$

$$f(x) = 2x - 1, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1/2$$

$$f''(x) = 2 > 0 \quad \text{نقطه محلی مینیمم}$$

$$f(1/2) = 1/4 - 1/2 + 1 = 3/4$$

مقدار مطلق

$$f(x) > 0 \quad \text{در تمام نقاط}$$

$$f'(x) = -4\sin x + 2(-\sin 2x)$$

$$= -4\sin x - 4\sin x \cos x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\sin x (4 + 4\cos x) = 0$$

$$\sin x = 0, \quad \cos x = -1 = \cos \pi$$

$$\Downarrow \quad x = 2k\pi \pm \pi$$

$$x = k\pi$$

$$f''(x) = -4\cos x - 4\cos^2 x + 4\sin^2 x = 4(-\cos x - \cos^2 x + 1 - \cos^2 x)$$

چون:

$$f'(x) = 3 + 4\cos x + \cos 2x$$

$$f(x) = 3 + 4\cos x + 2\cos^2 x - 1$$

$$= 2(\cos^2 x + 2\cos x + 1)$$

$$= 2(1 + \cos x)^2 \geq 0$$

در تمام نقاط

۲. شکل های تغییر و الت

مثال ۱) مهتاب صاف. وقتی هوا را برآهنت $10 \text{ cm}^3/\text{sec}$ به یک مهتاب گردی صاف می ریزیم، سطح آن به چه سرعتی تغییر می کند.

مثلاً

$$\frac{d}{dt} V = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (\text{چون})$$

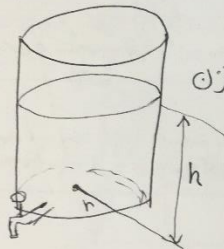
با هم سرعتی سطح تغییر می کند

$$\frac{dV}{dt} = 10, \quad \frac{dr}{dt} = ?$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \Rightarrow 10 = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{10}{4\pi r^2}$$

اگر $r=1$, $\frac{dr}{dt} = \frac{10}{4\pi} = 0.8 \text{ cm/sec}$ $r=10$, $\frac{dr}{dt} = \frac{10}{400\pi} = 0.008 \text{ cm/sec}$

مثال ۲. فنک استوانه ای. وقتی آب برآهنت 3 Lit/sec از یک فنک استوانه ای خارج می شود، سطح آب به چه سرعتی پایین می رود.



$$V = \pi r^2 h, \quad \frac{dV}{dt} = -3$$

$$\frac{dV}{dt} = -3$$

$$\frac{dh}{dt} = ?$$

$$\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt}$$

$$-3 = \pi r^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{\pi r^2} \text{ Lit/sec}$$

مثال ۳. بای زبانی که ۲۵ فوت طول دارد روی زمین افقی، و سرکان بردباری قائم می کند. بای آن را برآهنت ۴ فوت بهانه از دیوار دور می کنیم. وقتی بای نزدیک ۱۵ فوت از دیوار صاف دارد سرکان به چه سرعتی به طرف بای می لغزد؟

حل: در چند گام به این پرسش پاسخ می دهیم:

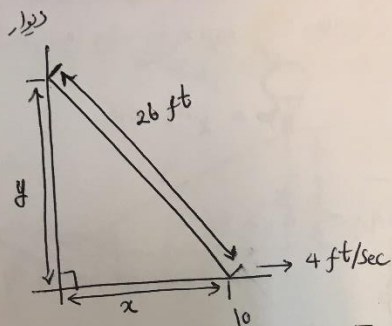
گام ۱: متغیرهای کنیم و متغیرها و ثابت ها را نامگذاری کنیم.

گام ۲: هر اطلاعات داده و دیگر را هم یادداشت می کنیم.

گام ۳: چیزی را که از ما خواسته شده است یادداشت می کنیم.

گام ۴: معادله ای می نویسیم که متغیرها را به هم ربط دهد.

گام ۵: مشتق می گیریم.



$$x^2 + y^2 = (26)^2$$

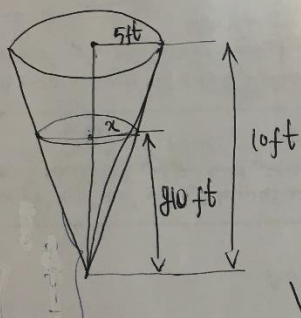
$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = 4, \quad y = \sqrt{(26)^2 - 10^2} = 24$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{10}{24} \cdot 4 = -\frac{5}{3}$$

مثلاً 4 آب با ارتفاع 2 فوت مکعب بر دقیقه وارد یک خزان می‌شود. نوبت خزان در پایین،
طنبزه اس 10 فوت و سطح قاعده اس 5 فوت است. وقتی ارتفاع آب 6 فوت باشد، سطح آب
با چه سرعتی بالا می‌آید؟



$$V = \text{حجم مکعب (آب در خزان در زمان } t)$$

$$x = \text{شعاع (فوت) سطح آب در زمان } t$$

$$y = \text{ارتفاع (فوت) آب در خزان در زمان } t$$

$$\frac{dV}{dt} = 2, \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=6}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 y$$

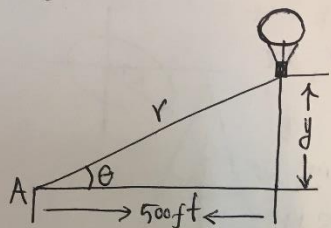
نوبت مکعبها

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{10} \Rightarrow x = \frac{1}{2} y$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{1}{2} y \right)^2 y = \frac{1}{12} \pi y^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4} \pi y^2 \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{4}{\pi y^2} \frac{dV}{dt} = \frac{4}{\pi (6)^2} \cdot 2 = \frac{4 \times 2}{36 \pi} = \frac{2}{9 \pi}$$

مسئله ۵. بالای آهنگ ۱۴۰ فوت در دقیقه از زمین بالا می رود و در آن با یک دیای در نقطه A که ۵۰۰ فوت از نقطه حرکت فاصله دارد گرفته می شود. وقتی آهنگ در ۵۰۰ فوتی سطح زمین باشد، آهنگ تغییر زاویه/سر را در A می یابد.



$$\tan \theta = \frac{y}{500}$$

$$\sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{500} \frac{dy}{dt}$$

$$y = 500 \Rightarrow \tan \theta = 1 \Rightarrow \theta = \pi/4$$

$$\sec^2 \theta = (\sqrt{2})^2 = 2, \quad dy/dt = 140 \text{ ft/min}$$

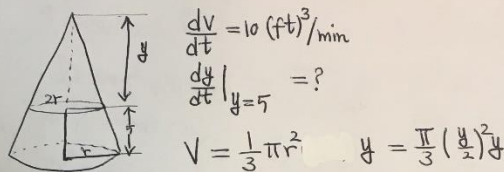
$$2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{500} \times 140 \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{140}{1000} = 0.14 \text{ radians/min}$$

$$r^2 = 500^2 + y^2 \Rightarrow 2r \frac{dr}{dt} = 2y \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{y}{r} \frac{dy}{dt}$$

$$y = 500, \quad r = \sqrt{500^2 + 500^2} = 500\sqrt{2}, \quad dy/dt = 140$$

$$dr/dt = \frac{500}{500\sqrt{2}} \times 140 = 70\sqrt{2} \text{ ft/min}$$

میزان $\frac{10}{184}$ ماسه با آهک $10 \text{ (ft)}^3/\text{min}$ از شیب نعلبای می ریزد و کپری مخروطی شکل می سازد. شعاع قاعده کپری چقدر برای با نصف ارتفاع آن است. وقتی ارتفاع کپری ۵ فوت باشد، ارتفاع آهک به چه سرعتی افزایش می یابد؟



$$r = \frac{y}{2}$$

$$V = \frac{\pi y^3}{12} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4} y^2 \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{4}{\pi y^2} \frac{dV}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} \big|_{y=5} = \frac{4}{\pi \times 25} \times 10 \text{ ft}$$

میزان $\frac{5}{183}$ در هر مدار الکتریکی، نظیر آنچه در شکل ۵۷.۴ نشان داده شده است، قانون اهم می آید که $V = IR$ در این رابطه ولتاژ، I جریان و R مقاومت می باشد. V و I به چه سرعتی تغییر می یابند؟ V به سرعت 1 volt/sec زیاد می شود، و I به سرعت $\frac{1}{3} \text{ amp/sec}$ کم می شود.

نیز فرض کنید زمان t به چه سرعتی تغییر می یابد؟ (الف) مقدار $\frac{dV}{dt}$ به چه سرعتی؟ (ب) مقدار $\frac{dI}{dt}$ به چه سرعتی؟

(ج) به چه سرعتی dR/dt را به dV/dt و dI/dt ربط می دهیم؟

(د) وقتی $V = 12 \text{ volt}$ و $I = 2$ آمپر است، آهک تغییر R را به چه سرعتی تغییر می یابد؟ R به چه سرعتی تغییر می یابد؟

$$\frac{dV}{dt} = R \frac{dI}{dt} + I \frac{dR}{dt} \quad \frac{dV}{dt} = 1$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{3}$$

$$V = 12, I = 2 \Rightarrow R = V/I = 12/2 = 6$$

$$2 \frac{dR}{dt} = \frac{dV}{dt} - R \frac{dI}{dt} = 1 - 6(-\frac{1}{3}) = 1 + 2 = 3$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{3}{2}$$

است. R

مقدار

