

(1)

فصل دوم: مشتق

تعریف: فرض کنید $f(x)$ تابعی از x در

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

این عدد را مشتق f در x می‌گویند و آن را $f'(x)$ یا $\frac{dy}{dx}$ می‌نویسند. x متغیر است.

قاعده (1) مشتق عدد ثابت صفر است

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

قاعده (2) توان برای توانهای صحیح و مثبت x :

قاعده (3) مشتق ثابت صفر است

$$\frac{d}{dx}(cu) = c \frac{du}{dx}$$

قاعده (4) مشتق مجموع

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(u_1 + \dots + u_n) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \dots + \frac{du_n}{dx}$$

مشتق های درجه 1:

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(\dots) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx}(\dots) \right)$$

عمل دوبار مشتق گیری

$$\frac{d^2y}{dx^2}$$

سرعت و شتاب

مکان مطالعه حرکت جسی روی یک خط فرض می‌کنیم



$$s = f(t)$$

دری توان از آن دریا مشتق گرفت

$$\frac{ds}{dt} = \text{مشتق اول سرعت جسی}$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \text{مشتق دوم شتاب جسی}$$

سرعت را به عنوان تغییر مکان
شتاب را به عنوان تغییر سرعت

مثال: سبک بزرگ به سرعت ۱۶۰ فوت بر ثانیه در امتداد قائم به طرف بالا پرتاب می شود و پس از ۵ ثانیه به ارتفاع $s = 160t - 16t^2$ فوت می رسد.
 الف) سبک متحرک به بالا می رود؟ ب) سرعت سبک را در ارتفاع ۷۸۴ فوتی از سطح زمین در دو حالت بالا رفتن و پایین آمدن آن محاسبه کنید.

الف) $v = \frac{ds}{dt} = 160 - 32t = 0 \Rightarrow t = 5$ (ثانیه)
 $s_{max} = 160(5) - 16(25) = 800 - 400 = 400$
 ب) $s(t) = 160t - 16t^2 = 784$
 $16t^2 - 160t + 784 = 0$
 $16(t^2 - 10t + 49) = 0$
 $16(t-2)(t-8) = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ Sec} \quad t = 8 \text{ Sec}$
 $v(2) = 160 - 32 \times 2 = 160 - 64 = 96 \text{ ft/sec}$, $v(8) = -96 \text{ ft/sec}$

40
 ۱) $s = 832t - 2.6t^2$
 ۲) $s = 832t - 16t^2$
 الف) $v = 0$ ۱) $v = \frac{ds}{dt} = 832 - 2.6 \times 2t = 0 \Rightarrow t = \frac{416}{2.6}$
 $t = \frac{4160}{26} = 16$
 ب) $t = ?$ $\frac{416}{26} \overline{) 26}$ $s = 0 \Rightarrow 832t - 16t^2 = 0$
 $t = \frac{832}{26} = 32$
 $\begin{array}{r} 416 \\ 26 \overline{) 26} \\ \underline{156} \\ 156 \\ \underline{00} \end{array}$

(2)

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

قاعده 5) قاعده حاصلضرب
قاعده 6) قاعده خارج

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

$$y = \frac{u}{v}, \quad v \neq 0, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

قاعده 7) قاعده خارج

$$\frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

قاعده 8) قاعده مشتق توان
(قاعده 7) (قاعده 5)

$$\# 45/p. 98 \quad p(t) = \frac{akt}{(akt+1)}$$

$$1) \frac{dp}{dt} = \frac{a^2k(akt+1) - ak(a^2kt)}{(akt+1)^2} = \frac{a^2k}{(akt+1)^2}$$

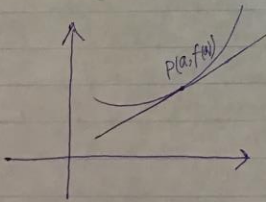
مشتق

مشتق

قاعده 9) قاعده مشتق توان

$$p, q \in \mathbb{Z}, \quad q > 0, \quad p/q < 1, \quad \frac{d}{dx}(u^{p/q}) = \frac{p}{q} u^{p/q-1} \frac{du}{dx}$$

قاعده 10) قاعده مشتق توان



$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad (y - y_0 = m(x - x_0) \text{ معادله خط})$$

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

خط مماس به $f(x)$ در a

$$f(x) \approx L(x), \quad \alpha > 0$$

تقریب خطی و دایره ای

$$- \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}$$

برای k در $(1+x)^k \approx 1+kx$

مقدار تقریب

$$1) \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$$

$$2) \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \approx 1 + (-1)(-x) = 1+x$$

$$3) \sqrt[3]{1+5x^4} = (1+5x^4)^{1/3} \approx 1 + \frac{1}{3}(5x^4) = 1 + \frac{5}{3}x^4$$

$$4) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} \approx 1 + (-1/2)(-x^2) = 1 + \frac{1}{2}x^2$$

برای درجه

$$\Delta f = f(x_0+h) - f(x_0) \quad \text{تقریب } f$$

$$\Delta L = L(x_0+h) - L(x_0)$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)[(x_0+h) - x_0] - f(x_0)$$

$$= f'(x_0)h$$

$$df = f'(x_0) dx \quad (\Delta L = f'(x_0)h) \quad \text{درجه } f \text{ تقریب}$$

$$dx: \quad \text{تقریب } x, \quad df = \text{تقریب } f$$

$$\frac{df}{dx} = f'(x) \quad \text{مقدار (تقریب) } f \text{ تقریب}$$

(۲۷)

$x_0 \rightarrow$	تغییر مطلق و نسبی و درصد تغییر		
	برآورد	واقعی	تغییر مطلق
	df	Δf	تغییر نسبی
	$\frac{df}{f(x_0)}$	$\frac{\Delta f}{f(x_0)}$	درصد تغییر
	$\frac{df}{f(x_0)} \times 100$	$\frac{\Delta f}{f(x_0)} \times 100$	

$$\begin{aligned} \Delta y &\approx f'(x) \Delta x && \text{خطا در تقریب} \\ \text{خطا در تقریب} &= \Delta y - f'(a) \Delta x \\ &= f(a + \Delta x) - f(a) - f'(a) \Delta x \\ &= \underbrace{[f(a + \Delta x) - f(a) - f'(a) \Delta x]}_{\varepsilon} = \varepsilon \Delta x \end{aligned}$$

$$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \rightarrow f'(a)$$

$$\Rightarrow \varepsilon \rightarrow 0$$

$$\Delta y = f'(a) \Delta x + \varepsilon \Delta x$$

خطا تغییر برآورد شده تغییر واقعی