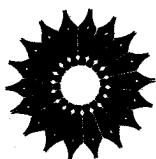




جبر خطی

کنت هافمن
زی کنزی

ترجمه جمشید فرشیدی



جبر خطی

کنت هافمن
ری کنزی

ترجمه جمشید فرشیدی

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	پیشگفتار مؤلفین
۵	فصل ۱. معادلات خطی
۵	۱.۱. هیأتها
۷	۲.۱. دستگانه‌های معادلات خطی
۱۰	۳.۱. ماتریسها و اعمال سطری مقدماتی
۱۸	۴.۱. ماتریسهای تحویل شده سطری پلکانی
۲۵	۵.۱. ضرب ماتریسی
۳۱	۶.۱. ماتریسهای معکوس پذیر
۴۱	فصل ۲. فضاهای برداری
۴۱	۱.۲. فضاهای برداری
۴۸	۲.۲. زیرفضاها
۵۶	۳.۲. پایه و بعد
۶۷	۴.۲. مختصات
۷۵	۵.۲. خلاصه هم‌ارزی سطری
۷۸	۶.۲. محاسبات مربوط به زیرفضاها

صفحه	عنوان
۹۱	فصل ۳. تبدیلهای خطی
۹۱	۱.۳. تبدیلهای خطی
۱۰۰	۲.۳. جبر تبدیلهای خطی
۱۱۲	۳.۳. یکریختی
۱۱۵	۴.۳. نمایش ماتریسی تبدیلهای
۱۲۹	۵.۳. تابعکهای خطی
۱۴۱	۶.۳. دوگان مضاعف
۱۴۷	۷.۳. ترانزفاده تبدیل خطی
۱۵۳	فصل ۴. چند جمله‌ایها
۱۵۳	۱.۴. جبرها
۱۵۶	۲.۴. جبر چند جمله‌ایها
۱۶۱	۳.۴. درون‌یابی لاگرانژ
۱۶۶	۴.۴. ایدآلهای چند جمله‌ایها
۱۷۵	۵.۴. تجزیه چند جمله‌ایها به‌سازدهای اول
۱۸۳	فصل ۵. دترمینان
۱۸۳	۱.۵. حلقه‌های جابجایی
۱۸۴	۲.۵. تابع دترمینان
۱۹۶	۳.۵. جایگشتها و یکتایی دترمینان
۲۰۴	۴.۵. چند خاصیت دیگر دترمینان
۲۱۴	۵.۵. مدول
۲۱۶	۶.۵. تابع چند خطی
۲۲۶	۷.۵. حلقه‌گر اسمان
۲۳۷	فصل ۶. فرمهای متعارف مقدماتی
۲۳۷	۱.۶. مقدمه
۲۳۸	۲.۶. مقادیر سرشت‌نما
۲۴۹	۳.۶. چند جمله‌ایهای پوچساز
۲۶۰	۴.۶. زیرفضاهای پایا

۵.۶. مثلث بندی همزمان با قطری سازی همزمان

۲۶۹

۶.۶. تجزیه به مجموع مستقیم

۲۷۲

۷.۶. مجموعه‌های مستقیم پایا

۲۷۸

۸.۶. قضیه تجزیه اولیه

۲۷۶

فصل ۷. فرمهای گویا و ژوردان

۲۹۷

۱.۷. زیر فضاهای دوری و پوچساز

۲۹۷

۲.۷. تجزیه‌های دوری و فرم گویا

۳۰۲

۳.۷. فرم ژوردان

۳۱۸

۴.۷. محاسبه سازه‌های پایا

۳۲۸

۵.۷. خلاصه؛ عملگرهای نیم‌ساده

۳۴۱

فصل ۸. فضاهای ضرب داخلی

۳۵۱

۱.۸. ضربهای داخلی

۳۵۱

۲.۸. فضاهای ضرب داخلی

۳۵۹

۳.۸. تابعکهای خطی و الحاقیه

۳۷۶

۴.۸. عملگرهای یکانی

۳۸۸

۵.۸. عملگرهای نرمال

۴۰۳

فصل ۹. عملگرهای روی فضاهای ضرب داخلی

۴۱۳

۱.۹. مقدمه

۴۱۳

۲.۹. فرمهای روی فضاهای ضرب داخلی

۴۱۴

۳.۹. فرمهای مثبت

۴۲۰

۴.۹. چند مطلب دیگر درباره فرمها

۴۲۹

۵.۹. نظریه طیفی

۴۳۳

۶.۹. چند خاصیت دیگر از عملگرهای نرمال

۴۴۹

فصل ۱۰. فرمهای دو خطی

۴۶۱

۱.۱۰. فرمهای دوخطی

۴۶۱

۲.۱۰. فرمهای دوخطی متقارن

۴۷۱

۴۸۲	۳۰۱۰. فرمهای دو خطی متقارن کج
۴۸۷	۴۰۱۰. گروههای حافظ فرمهای دو خطی
	پیوستها
۴۹۵	
۴۹۶	پ.۱. مجموعه
۴۹۷	پ.۲. تابع
۵۰۱	پ.۳. رابطه هم‌ارزی
۵۰۵	پ.۴. فضاهای خارج قسمت
۵۰۸	پ.۵. روابط هم‌ارزی در جبر خطی
۵۰۹	پ.۶. اصل موضوع انتخاب
۵۱۱	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۵۲۷	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۵۳۳	فهرست راهنما

پیشگفتار مؤلفین

هدف اصلی ما از نوشتن این کتاب تهیه کتابی درسی برای درس جبر خطی دوره لیسانس در انستیتو تکنولوژی ماساچوست (M. I. T.) بوده است. این درس برای دانشجویان بامهادر ریاضی در سطح سال سوم طرح ریزی شده بود؛ با این وجود سه چهارم دانشجویان از سایر رشته‌های علمی و فنی، از دانشجویان سال اول گرفته تا دانشجویان بعد از لیسانس، جلب این درس می‌شدند. چنین توصیفی امروزه هم در مورد مستمعین این درس در M. I. T. عموماً درست است. در ده‌سالی که از چاپ اول این کتاب می‌گذرد، دوره‌های جبر خطی در سراسر کشور رشد نموده و به یکی از مؤلفین فرصتی دست داده است تا مطالب بنیانی این کتاب را برای گروه‌های مختلفی در دانشگاه‌های براندایز^۱، واشینگتن (سینت-لوئیس)^۲، و کالیفرنیا (ایروین)^۳ تدریس کند.

منظور اصلی ما از تجدیدنظر در کتاب جبر خطی افزایش تنوع درسهایی بوده است که بسهولت بتواند از روی آن تدریس شود. از یک طرف، فصلها، بخصوص فصلهای مشکل را طوری پی‌ریزی کرده‌ایم که در طول راه ایستگاههای طبیعی متعددی وجود داشته باشد تا دست مدرس در انتخاب موضوع برای یک دوره سه‌ماهه یا نیمساله به‌میزان قابل توجهی باز نگه داشته شود. از طرف دیگر، مقدار مطالب کتاب را افزایش داده‌ایم، تا بتواند برای یک دوره یکساله نسبتاً جامع در جبر خطی به‌کار رود و حتی به‌عنوان کتابی مرجع مورد استفاده ریاضیدانان قرار گیرد.

تغییرات عمده، در نحوه برخورد ما با فرمهای متعارف و فضاهاى ضرب داخلی صورت گرفته است. دیگر آنکه فصل ۶ را همچون گذشته با نظریه فضایی عمومی که زمینه نظریه فرمهای متعارف است آغاز نمی‌کنیم. ابتدا مقادیر سرشت‌نما را در رابطه با قضایای قطری کردن و مثلثی کردن مطرح می‌کنیم و سپس راه‌خود را به‌سوی نظریه عمومی می‌گشاییم. فصل ۸ را به دو نیمه شکسته‌ایم تا به دنبال مطالب اساسی در مورد فضاهاى ضرب داخلی

وقطری کردن یکانی، فصل ۹ را بیاوریم که دربارهٔ فرمهای يك و نیم خطی است و دربارهٔ خواص پیچیده تر عملگرهای نرمال از جمله عملگرهای نرمال روی فضاهای ضرب داخلی حقیقی به بحث می پردازد.

بعلاوه، نسبت به جاب اول چند تغییر کوچک هم داده و اصلاحاتی نیز در آن به عمل آورده ایم. اما فلسفهٔ بنیانی متن را همچنان حفظ کرده ایم.

ما برای این واقعیت که ممکن است اکثر دانشجویان عمدتاً به ریاضیات علاقه مند نباشند امتیاز خاصی قابل نشده ایم. زیرا اعتقاد داریم که دروس ریاضی نباید تکنیکهای درهم و برهم به دانشجویان رشته های علوم، مهندسی، یا علوم اجتماعی بیاموزند، بلکه باید وسیله ای جهت درک مفاهیم بنیانی ریاضی برای آنان فراهم آورند.

از طرف دیگر، ما از گونا گونی زمینه های تحصیلی دانشجویان و بخصوص از این واقعیت که دانشجویان ممکن است در استدلال ریاضی مجرد تجربهٔ بسیار اندکی داشته باشند، بخوبی آگاه بوده ایم. بهمین دلیل در ابتدای کتاب از معرفی بیش از حد ایده های مجرد خودداری کرده ایم. ضمناً پیوستی را که متضمن مفاهیمی اساسی چون مجموعه، تابع، و رابطهٔ هم ارزی است به کتاب افزوده ایم. به تجربه دریافته ایم که روی این مفاهیم زیاد مکث نکنیم، بلکه به دانشجویان توصیه نماییم که هنگام مواجهه با این مفاهیم به پیوست مراجعه کنند.

در سراسر کتاب مثالهای متنوع بسیاری برای مفاهیم مهمی که در متن ظاهر می شوند گنجانیده ایم. مطالعهٔ چنین مثالهایی واجد اهمیتی اساسی است و به کم شدن تعداد دانشجویانی منجر می شود که می توانند تعاریف، قضایا، و اثباتها را به ترتیب منطقی ولی بدون درک معانی مفاهیم مجرد تکرار کنند. کتاب همچنین شامل انواع بسیاری تمرین طبقه بندی شده (در حدود شصصد تمرین) است که مسائل سراسر را در بر می گیرد تا مسائلی را که مخصوص دانشجویان خیلی زبده است. هدف این بوده است که تمرین بخش مهمی از کتاب را تشکیل بدهد.

فصل يك با دستگاههای معادلات خطی و یافتن جواب آنها از طریق عملهای سطری مقدماتی روی ماتریسها سروکار دارد. کار ما این بوده است که حدود شش ساعت درسی روی این مطالب وقت صرف کنیم. این فصل برای دانشجویان تصویری از خاستگاههای جبر خطی را فراهم می کند، و نیز شیوهٔ محاسباتی لازم جهت فهم مثالهایی از مفاهیم مجردتری را که در فصلهای بعد پیش می آیند به آنان می آموزد. فصل ۲ فضاهای برداری، زیرفضاها، پایه ها، و بعد را مورد بحث قرار می دهد. فصل ۳ دربارهٔ تبدیلهای خطی، جبر آنها، نمایش آنها توسط ماتریسها، و نیز دربارهٔ یکرخیتهایا، تابمکهای خطی، و فضاهای دوگان گفتگو می کند. فصل ۴ به تعریف جبر چند جمله ایهای بر روی يك هیأت، اید آنها در آن جبر، و تجزیهٔ چند جمله ایها به سازه های اول می پردازد. این فصل همچنین ریشه ها، فرمول تیلور، و فرمول درون یابی لاگرانژ را مورد بحث قرار می دهد. فصل ۵ در مینان ماتریسهای مربعی را عرضه می کند - در مینان به عنوان تابع ϕ خطی متناوبی از سطرهای ماتریس در نظر گرفته می شود - و سپس به توابع چند خطی روی مدولها و نیز به حلقهٔ گراسمان می پردازد.

مطالب مربوط به مدولها، مفهوم درمیان را درمقامی گسترده تر و فراگیرنده تر از آنچه که معمولاً در کتب درسی مقدماتی یافت می شود، قرار می دهد. فصلهای ۶ و ۷ دربرگیرنده بحثی است در مورد مفاهیمی که برای تحلیل یک تبدیل خطی تنها روی یک فضای برداری با بعد متناهی، تحلیل مقادیر سرشت نما (ویژه)، تبدیلهای مثلثی شونده و قطری شدنی، و نیز برای تحلیل مفاهیم اجزای قطری شدنی و پوچ توان تبدیلهای عمومیت و فرمهای متعارف گویا و ژردان بنیانی هستند. قضایای تجزیه اولیه و تجزیه دوری، که قضیه دوم ضمن مطالعه زیرفضاهای مجاز پیش می آید، نقشی اساسی به عهده دارند. فصل ۷ شامل مبحثی است در مورد ماتریسهای بر روی یک میدان چند جمله ایها، محاسبه سازه های پایا و مقسوم علیه های مقدماتی ماتریسها، و نیز شامل پروراندن فرم متعارف اسمیت است. این فصل با بحثی راجع به عملگرهای نیم ساده، جهت تکمیل تحلیل یک عملگر، پایان می پذیرد. فصل ۸ بتفصیل درباره فضاهای ضرب داخلی با بعد متناهی گفتگو می کند. این فصل هندسه پایه را، جهت ربط متعامدسازی با ایده «بهترین تقریب یک بردار»، شامل می شود و زاهش را به مفاهیم تصویر متعامد یک بردار بروی یک زیرفضا و مکمل متعامد یک زیرفضا می گشاید. همچنین این فصل عملگرهای یکانی را مورد بحث قرار می دهد، و به قطری کردن عملگرهای خودالحاق و نرمال منتهی می شود. فصل ۹ پس از معرفی فرمهای یک و نیم خطی، آنها را به عملگرهای مثبت و خودالحاق روی فضاهای ضرب داخلی مربوط می سازد و به سمت نظریه طیفی عملگرهای نرمال و سپس به سمت نتایج ظریف تر درباره عملگرهای نرمال روی فضاهای ضرب داخلی حقیقی یا مختلط به پیش می رود. فصل ۱۰ ضمن بحث درباره فرمهای دوخطی، بر فرمهای متعارف برای فرمهای متقارن و متقارن کسج و نیز بر گروههای حافظ فرمهای نابتگون، به ویژه بر گروههای متعامد، یکانی، شبه متعامد و لورنتس تأکید می کند.

به گمان ما هر درسی که این کتاب را مورد استفاده قرار دهد باید فصلهای ۱، ۲، ۳ و ۴ بجز احتمالاً بخشهای ۶.۳ و ۷.۳ را که با دوگان مضاعف و ترانواده تبدیلی خطی سروکار دارند تماماً شامل شود. فصلهای ۴ و ۵ درباره چند جمله ایها و درمیانها را می توان با درجات متفاوتی از دقت تدریس کرد. در حقیقت، اید آلهای چند جمله ایها و خواص بنیانی درمیانها را می توان کاملاً به طور خلاصه و بدون خدشه جدی به سیر منطقی متن درض داد؛ با این وجود، تمایل ما این است که این فصلها (به استثنای نتایج مربوط به مدولها) با کمال دقت مورد بحث قرار گیرند، چرا که این مطالب به نحو بسیار بارزی نمایانگر ایده های اساسی جبر خطی هستند. بالاخره یک درس مقدماتی می تواند به طور مطلوبی با چهار بخش اول فصل ۶ همراه با فصل ۸ (جدید) پایان پذیرد. در صورتی که فرمهای گویا و ژردان نیز مدنظر باشند، پوشش جامع تری از فصل ۶ الزامی است.

هنوز هم مدیون کسانی هستیم که ما را در چاپ اول یاری داده اند، بویژه به استنادی چون هری فورستبرگ، لوئیس هوارد، دانیل کن، ادوارد ترپ، و به خانم جودیت بوورز، خانم بتی آن (سارجنت) رز و دوشیزه فیلیس رویی. بعلاوه، علاقه مندی از بسیاری از

دانشجویان و همکارانی که نظر تیزبینشان سبب این تجدید چاپ شده است و نیز از کارکنان پرنیتیس-هال به خاطر بردباریشان در سروکله زدن با دوماؤلف گرفتار در عذاب مدیریت دانشگاهی تشکر کنیم. در پایان، تشکر خاص خود را به خانم سوفیا کولوراس، هم به خاطر مهارت و هم به لحاظ کوششهای خستگی ناپذیرش در ماشین کردن نسخه خطی تجدید نظر شده تقدیم می کنیم.

ك. م. ه. / ر. ا. ك.

معادلات خطی

۱.۱. هیأتها

فرض می‌کنیم خواننده با جبر مقدماتی اعداد حقیقی و اعداد مختلط آشنا باشد. خواص جبری اعدادی که در بخش عمده‌ای از این کتاب به کار خواهند رفت، از فهرست مختصر خواص جمع و ضرب مذکور در زیر سهولت قابل استخراج اند. فرض کنیم F نمایشگر مجموعه اعداد حقیقی یا مجموعه اعداد مختلط باشد.

۱. جمع جابجایی است؛ یعنی به ازای هر x و y در F ،

$$x + y = y + x.$$

۲. جمع شرکت پذیر است؛ یعنی به ازای هر x ، y ، و z در F ،

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

۳. عنصر یکتایی مانند 0 (صفر) در F وجود دارد، به طوری که به ازای هر x در

$$x + 0 = x, \quad F$$

۴. به هر x در F عنصر یکتای $(-x)$ در F متناظر است به طوری که

$$x + (-x) = 0.$$

۵. ضرب جابجایی است؛ یعنی به ازای هر x و y در F ،

$$xy = yx.$$

۶. ضرب شرکت پذیر است؛ یعنی به ازای هر x, y ، و z در F ،

$$x(yz) = (xy)z.$$

۷. عنصر غیر صفر یکتایی مانند 1 (يك) در F وجود دارد به طوری که به ازای هر x

$$x \cdot 1 = x, \text{ در } F$$

۸. به هر x غیر صفر در F ، عنصر یکتای x^{-1} (یا $1/x$) در F متناظر است به طوری

$$\text{که } x \cdot x^{-1} = 1.$$

۹. ضرب بر روی جمع پخش پذیر است؛ بدین معنی که، به ازای هر x, y ، و z در

$$x \cdot (y + z) = xy + xz, \text{ در } F$$

فرض کنیم مجموعه F متشکل از اشیاء x, y, z, \dots ، و دو عمل، به صورت زیر، روی عناصر آن در دست باشند. عمل اول، که جمع نام دارد، به هر جفت عنصر x و y در F ، عنصر $(x+y)$ در F را مربوط می سازد؛ عمل دوم، که ضرب نامیده می شود، به هر جفت x و y ، عنصر xy در F را وابسته می سازد؛ بعلاوه، این دو عمل شرایط (۱)–(۹) فوق الذکر را برمی آورند. در این صورت، مجموعه F همراه با این دو عمل يك هیأت نامیده می شود. به صورت نادقیق، يك هیأت عبارت است از مجموعه ای همراه با چند عمل روی اشیاء آن که رفتاری شبیه به اعمال جمع، ضرب، تفریق، و تقسیم معمولی در اعداد دارند؛ بدین معنی که از نه قاعده جبری مذکور در بالا تبعیت می کنند. C ، مجموعه اعداد مختلط، همراه با اعمال جمع و ضرب معمولی يك هیأت است، و همچنین است R مجموعه اعداد حقیقی.

در بخش اعظم این کتاب «اعداد»ی را که به کار می بریم می توانند عناصر يك هیأت دلخواه مانند F باشند. برای تثبیت این عمومیت، به جای «عدد»، واژه «اسکالر» را به کار خواهیم برد. هر گاه خواننده هیأت اسکالرها را همواره زیر هیأتی از هیأت اعداد مختلط فرض کند، چیز زیادی را از دست نداده است. يك زیر هیأت از هیأت C ، مجموعه ای است مانند F از اعداد مختلط که خود تحت اعمال معمولی جمع و ضرب اعداد مختلط، يك هیأت باشد. منظور این است که 1 و 0 در مجموعه F قرار داشته باشند، و اگر x و y عناصر F باشند، $(x+y)$ ، $-x$ ، xy ، و x^{-1} (هر گاه $x \neq 0$) نیز در F باشند. مثالی از این گونه زیر هیأتها، هیأت اعداد حقیقی R است. زیرا، اگر اعداد حقیقی را با اعداد مختلط $a+bi$ که در آنها $b=0$ یکی بگیریم، 0 و 1 هیأت اعداد مختلط، اعدادی حقیقی محسوب می شوند، و اگر x و y حقیقی باشند، $(x+y)$ ، $-x$ ، xy ، و x^{-1} (هر گاه $x \neq 0$) نیز حقیقی خواهند بود. مثالهای دیگری نیز در زیر آورده خواهد شد. نکته بحثمان در مورد زیر هیأتها اساساً این است که: اگر با اسکالرهاى زیر هیأت معینی از C کار کنیم، انجام اعمال جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم روی این اسکالرها ما را از زیر هیأت مفروض خارج نخواهد ساخت.

مثال ۱. مجموعه اعداد صحیح و مثبت: ۱، ۲، ۳، ...، به دلایل مختلف زیر هیأتی از C نیست. مثلاً، ۰ عددی صحیح و مثبت نیست؛ به ازای هر عدد صحیح و مثبت n ، n - عددی صحیح و مثبت نمی باشد؛ به ازای هر عدد صحیح و مثبت n ، بجز ۱، $1/n$ عددی صحیح و مثبت نیست.

مثال ۲. مجموعه اعداد صحیح: ...، -۲، -۱، ۰، ۱، ۲، ...، زیر هیأتی از C نیست، چرا که به ازای هر عدد صحیح n ، $1/n$ عدد صحیحی نیست مگر آنکه n برابر ۱ یا -۱ باشد. مجموعه اعداد صحیح همراه با اعمال جمع و ضرب معمولی همه شرایط (۱) - (۹)، بجز شرط (۸) را برمی آورد.

مثال ۳. مجموعه اعداد گویا، یعنی اعدادی به صورت p/q که در آنها p و q اعدادی صحیح اند و $q \neq 0$ ، زیر هیأتی از هیأت اعداد مختلط است. عمل تقسیم، که در مجموعه اعداد صحیح ممکن نیست، در مجموعه اعداد گویا امکان پذیر است. مناسب است که خواننده علاقه مند تحقیق کند که هر زیر هیأت دلخواه C باید شامل همه اعداد گویا باشد.

مثال ۴. مجموعه همه اعداد مختلط به صورت $x + y\sqrt{-1}$ ، که در آنها x و y گویا هستند، زیر هیأتی از C است. تحقیق این مطلب را به خواننده وامی گذاریم.

در مثالها و تمرینات این کتاب خواننده بهتر است یا می باید فرض کند که هیأت درگیر در بحث زیر هیأتی از هیأت اعداد مختلط است، مگر آنکه صریحاً قید شده باشد که هیأت کلی تری منظور شده است. در اینجا قصد آن را نداریم که در مورد این نکته به بحث مفصلی بپردازیم؛ اما، به هر تقدیر بهتر است که علت قبول چنین قراردادی را بیان کنیم. در هیأت F ممکن است بتوان یکده ۱ را چندین بار با خودش جمع کرد و به ۰ دست یافت (ر. ک. تمرین ۵ بخش ۲۰۱):

$$1 + 1 + \dots + 1 = 0.$$

این وضع در هیأت اعداد مختلط (یا در زیر هیأت دلخواهی از آن) رخ نمی دهد. هرگاه چنین وضعی در F روی دهد، آنگاه کوچکترین n که مجموع n تا ۱ برابر ۰ شود، سرشت نمای هیأت F نامیده می شود. اگر چنین وضعی در هیأت F رخ ندهد، آنگاه (به دلایلی کم و بیش عجیب) F را هیأتی با سرشت نمای صفر می نامند. اغلب، در مواردی که F را زیر-هیأتی از C فرض می کنیم، آنچه را که می خواهیم تضمین بشود، این است که F هیأتی باشد با سرشت نمای صفر؛ اما، معمولاً بهتر است در نخستین برخورد با جبر خطی خیلی نگران سرشت نمای هیأتها نباشیم.

۲۰۱. دستگاههای معادلات خطی

گیریم F يك هیأت باشد. حال مسئله یافتن n اسکالر (عنصر F)، x_1, \dots, x_n که در شرایط

$$\begin{aligned}
 A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \dots + A_{1n}x_n &= y_1 \\
 A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \dots + A_{2n}x_n &= y_2 \\
 \vdots & \\
 A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \dots + A_{mn}x_n &= y_m
 \end{aligned} \tag{1-1}$$

صدق می کنند، را مورد توجه قرار می دهیم. در اینجا y_1, \dots, y_m, A_{ij} ها، به ازای $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$ عناصر مفروضی از F هستند. (۱-۱) را یک دستگاه m معادله خطی n مجهولی می نامیم. هر n تایی (x_1, \dots, x_n) از عناصر F که در هر یک از معادلات (۱-۱) صدق کند، یک جواب دستگاه نامیده می شود. هر گاه $y_1 = y_2 = \dots = y_m = 0$ بگیریم دستگاه همگن است، یا آنکه هر یک از معادلات همگن می باشد.

شاید اساسی ترین روش یافتن جوابهای یک دستگاه معادلات خطی، روش «حذف» باشد. این روش را می توان روی دستگاه همگن

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0$$

نشان داد. اگر (۲-) برابر معادله دوم را به معادله اول بیفزاییم، معادله

$$-7x_2 - 7x_3 = 0$$

یا $x_2 = -x_3$ را بدست می آوریم. اگر (۳) برابر معادله اول را به معادله دوم بیفزاییم، معادله

$$7x_1 + 7x_3 = 0$$

یا $x_1 = -x_3$ حاصل می شود. لذا، نتیجه می گیریم که اگر (x_1, x_2, x_3) یک جواب باشد، آنگاه $x_1 = x_2 = -x_3$. بعکس، با آسانی می توان دید که هر سه تایی از این نوع یک جواب است. بنابراین، مجموعه جوابها متشکل است از همه سه تاییهای $(-a, -a, a)$. جوابهای این دستگاه معادلات را با «حذف مجهولها» یافتیم؛ بدین معنی که با ضرب معادلات در اسکلرها و سپس افزودن آنها به هم معادلاتی بدست آوردیم که در آنها بعضی از x_j ها ظاهر نشدند. می خواهیم این فرایند را اندکی رسمیت بخشیم تا علت درست بودنش را دریابیم و نیز بتوانیم محاسبات لازم برای حل یک دستگاه را با روشی منظم انجام بدهیم.

فرض کنیم برای دستگاه عمومی (۱-۱)، m اسکلر c_1, c_2, \dots, c_m را انتخاب، معادله m را در c_j ضرب، و سپس آنها را با هم جمع کرده باشیم. بدین نحو، معادله

$$\begin{aligned}
 (c_1A_{11} + \dots + c_mA_{m1})x_1 + \dots + (c_1A_{1n} + \dots + c_mA_{mn})x_n \\
 = c_1y_1 + \dots + c_my_m
 \end{aligned}$$

را به دست می آوریم. چنین معادله‌ای را يك ترکیب خطی از معادلات (۱-۱) می نامیم. بدیهی است که هر جواب کل دستگاه معادلات (۱-۱)، يك جواب این معادله جدید نیز خواهد بود. این مطلب، ایده اساسی فرایند حذف است. اگر دستگاه معادلات خطی دیگر

$$\begin{aligned} B_{11}x_1 + \dots + B_{1n}x_n &= z_1 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ B_{k1}x_1 + \dots + B_{kn}x_n &= z_k \end{aligned} \quad (۲-۱)$$

را داشته باشیم، که در آن هر يك از این k معادله ترکیبی خطی از معادلات دستگاه (۱-۱) باشد، آنگاه هر جواب (۱-۱) يك جواب دستگاه جدید نیز هست. البته، این امکان وجود دارد که برخی از جوابهای (۲-۱) جواب (۱-۱) نباشند. واضح است که اگر هر معادله دستگاه اصلی ترکیبی خطی از معادلات دستگاه جدید باشد، این وضع پیش نخواهد آمد. دو دستگاه معادلات خطی را هم ارز نامیم، هر گاه هر معادله يك دستگاه ترکیبی خطی از معادلات دستگاه دیگر باشد. بدین نحو، می توانیم مشاهدات خود را رسماً به صورت زیر بیان کنیم.

قضیه ۱. جوابهای دستگاههای معادلات خطی هم ارز یکی هستند.

هر گاه فرایند حذف دریافتن جوابهای دستگاهی نظیر (۱-۱) مؤثر باشد، در این صورت باید دید چگونه می توان با تشکیل ترکیبات خطی معادلات داده شده، دستگاه معادلات هم ارزی به دست آورد که حل آن ساده تر باشد. در بخش بعد، درباره يك روش انجام این کار بحث خواهیم کرد.

تمرین

۱. تحقیق کنید مجموعه‌ای از اعداد مختلط که در مثال ۴ توصیف شده زیرهاتی از C است.

۲. فرض کنید F هیأت اعداد مختلط باشد. آیا دو دستگاه معادلات خطی زیر هم ارزند؟ اگر چنین است، هر معادله این دو دستگاه را به صورت ترکیبی خطی از معادلات دستگاه دیگر بیان کنید.

$$x_1 - x_2 = 0 \quad 3x_1 + x_2 = 0$$

$$2x_1 + x_2 = 0 \quad x_1 + x_2 = 0$$

۳. دستگاههای معادلات زیر را همانند تمرین ۲ بررسی کنید.

$$-x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \quad x_1 - x_3 = 0$$

$$x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 0 \quad x_2 + 3x_3 = 0$$

$$\frac{1}{4}x_1 + x_2 + \frac{5}{4}x_3 = 0$$

۴. دستگاههای زیر را همانند تمرین ۲ مورد بررسی قرار دهید.

$$2x_1 + (-1+i)x_2 + x_3 = 0 \quad \left(1 + \frac{i}{4}\right)x_1 + 8x_2 - ix_3 - x_4 = 0$$

$$3x_2 - 2ix_3 + 5x_4 = 0 \quad \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{4}x_2 + x_3 + 7x_4 = 0$$

۵. فرض کنید F مجموعه متشکل از تنها دو عنصر 0 و 1 باشد. اعمال جمع و ضرب را با جدولهای زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{array}{c|cc}
 + & 0 & 1 \\
 \hline
 0 & 0 & 1 \\
 1 & 1 & 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c|cc}
 \cdot & 0 & 1 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1
 \end{array}$$

تحقیق کنید که F همراه با این دو عمل یک هیأت است.

۶. ثابت کنید که اگر جوابهای دودستگاه معادلات خطی همگن یکی باشند، آنگاه آن دو دستگاه هم ارزند.

۷. ثابت کنید که هر زیر هیأت از هیأت اعداد مختلط شامل همه اعداد گویاست.

۸. ثابت کنید که هر هیأت با سرشت نمای صفر شامل نسخه‌ای از هیأت اعداد گویاست.

۳.۱. ماتریسها و اعمال سطری مقدماتی

در تشکیل ترکیبات خطی از معادلات خطی نمی‌توان بدون توجه به این نکته گذشت که نیازی به ادامه نوشتن «مجهولهای» x_1, \dots, x_n نیست، چرا که محاسبات عملاً فقط روی ضرایب A_{ij} و اسکلرهای y_i صورت می‌گیرند. دستگاه (۱-۱) را اکنون به صورت

$$AX = Y$$

که در آن

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

خلاصه می‌کنیم. A را ماتریس ضرایب این دستگاه می‌نامیم. دراصل باید بگوییم که آرایهٔ مستطیلی نموده شده در بالا یک ماتریس نیست، بلکه نمایشی از یک ماتریس است. یک ماتریس $m \times n$ برروی هیأت F عبارت است از یک تابع A از مجموعهٔ جفت‌های (i, j) از اعداد صحیح، $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$ ، در هیأت F . درایه‌های ماتریس A عبارتند از اسکالرهایی $A(i, j) = A_{ij}$ ، و اغلب بسیار راحت تر است که، همچون بالا، این ماتریس را با نمایش درایه‌هایش در یک آرایهٔ مستطیلی m سطری و n ستونی توصیف کنیم. بدین نحو، X (در بالا) یک ماتریس $n \times 1$ است، یا یک ماتریس $n \times 1$ را تعریف می‌کند، و Y یک ماتریس $m \times 1$ می‌باشد. در حال حاضر، $AX = Y$ چیزی جز نمادی خلاصه‌نویسی برای دستگاه معادلات خطی ما نیست. بعدها، که ضرب ماتریسها را تعریف کردیم، Y به معنی حاصل ضرب دو ماتریس A و X نیز خواهد بود.

اکنون می‌خواهیم آن دسته از اعمال روی سطرهای ماتریس A را، که متناظر به تشکیل ترکیبات خطی معادلات در دستگاه $AX = Y$ هستند، مورد توجه قرار بدهیم. ابتدا، توجه خود را به سه عمل سطری مقدماتی روی یک ماتریس $m \times n$ ، مانند A ، برروی هیأت F محدود می‌سازیم:

۱. ضرب یک سطر A در یک اسکالر غیر صفر c ;

۲. گذاشتن به جای سطر A_r سطر A_s به علاوهٔ c برابر سطر s ، که در آن c یک اسکالر

است و $r \neq s$.

۳. تعویض دو سطر A .

بدین نحو، یک عمل سطری مقدماتی عبارت است از نوعی تابع (قاعدهٔ) خاص مانند e که به هر ماتریس $m \times n$ ، مانند A ، ماتریس $e(A)$ را که $m \times n$ است متناظر می‌سازد. e را بطور دقیق می‌توان در این سه حالت، به صورت زیر توصیف کرد:

$$1. \quad e(A)_{ij} = A_{ij} \quad \text{هر گاه} \quad i \neq r \quad \text{و} \quad e(A)_{rj} = cA_{rj}$$

$$2. \quad e(A)_{ij} = A_{ij} \quad \text{هر گاه} \quad i \neq r \quad \text{و} \quad e(A)_{rj} = A_{rj} + cA_{sj}$$

$$3. \quad e(A)_{ij} = A_{ij} \quad \text{هر گاه} \quad i \text{ مخالف با } r \text{ و مخالف با } s \text{ باشد، و } e(A)_{rj} = e(A)_{sj} \text{ و}$$

$e(A)_{sj} = A_{rj}$ در تعریف $e(A)$ ، در واقع این مهم نیست که ماتریس A چند ستون دارد، اما تعداد سطرهای آن کاملاً حائز اهمیت است. مثلاً، در تصمیم‌گیری راجع به این که معنی تعویض سطرهای ۵ و ۶ در یک ماتریس 5×5 چیست، باید کمی نگران بود. برای اجتناب از این گونه پیچیدگیها، توافق می‌کنیم که عمل سطری مقدماتی e روی ردهٔ همهٔ ماتریسهای $m \times n$ برروی هیأت F ، به ازای یک m ثابت اما هر n دلخواه تعریف می‌شود. به بیان دیگر،

يك e بخصوص روی رده همه ماتریسهای m سطری بر روی F تعریف می شود. يك دلیل این که ما خود را به این سه نوع ساده از اعمال سطری محدود می سازیم این است که پس از انجام يك چنین عمل e روی يك ماتریس A ، می توانیم با انجام عملی مشابه روی $e(A)$ ماتریس A را دوباره به دست بیاوریم.

قضیه ۰۲. به هر عمل سطری مقدماتی e يك عمل سطری مقدماتی e_1 ، از همان نوع e ، متناظر است، به طوری که به ازای هر ماتریس A ، $e_1(e(A)) = e(e_1(A)) = A$ ، به بیان دیگر، عمل (تابع) معکوس هر عمل سطری مقدماتی وجود دارد، و خود يك عمل سطری مقدماتی از همان نوع است.

اثبات. (۱) فرض کنیم e عملی باشد که سطر r يك ماتریس را در اسکالر غیر صفر c ضرب می کند. e_1 را عملی بگیریم که سطر r را در اسکالر c^{-1} ضرب می کند. (۲) فرض کنید e عملی باشد که سطر r را با سطر s بعلاوه c برابر سطری $s \neq r$ ، جایگزین می کند. در این حالت، e_1 را عملی بگیریم که سطر r را با سطر s بعلاوه $(-c)$ برابر سطر s جایگزین می سازد. (۳) اگر e عمل تعویض سطرها m و s باشد، e_1 را همان e بگیریم. در هر يك از این سه حالت، به ازای هر ماتریس A ، بوضوح داریم

$$e_1(e(A)) = e(e_1(A)) = A. \quad \square$$

تعریف. اگر A و B دو ماتریس $m \times n$ بر روی هیأت F باشند، گوئیم B هم ارز سطری A است، هرگاه بتوان B را با دنباله ای متناهی از اعمال سطری مقدماتی از A به دست آورد.

با استفاده از قضیه ۲ خواننده براحتی می تواند مطالب زیر را تحقیق کند. هر ماتریس هم ارز سطری خودش است؛ اگر B هم ارز سطری A باشد، آنگاه A هم ارز سطری B است؛ اگر B هم ارز سطری A و C هم ارز سطری B باشد، آنگاه C هم ارز سطری A است. به بیان دیگر، هم ارزی سطری يك رابطه هم ارزی است (ر. ک. ضمیمه).

قضیه ۰۳. اگر دو ماتریس $m \times n$ ، A و B هم ارز سطری باشند، آنگاه جوابهای دو دستگاه معادلات خطی همگن $AX = 0$ و $BX = 0$ یکی هستند.

اثبات. فرض کنیم با دنباله ای متناهی از اعمال سطری مقدماتی، از A به B برسیم:

$$A = A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_k = B.$$

کافی است ثابت کنیم جوابهای دو دستگاه $AX = 0$ و $A_1X = 0$ یکی هستند؛ یعنی، اعمال سطری مقدماتی مجموعه جوابها را تغییر نمی دهند.

لذا، فرض کنیم B با يك تك عمل سطری مقدماتی از A به دست آید. صرف نظر از نوع این عمل، اعم از (۱)، (۲)، یا (۳)، هر معادله دستگاه $BX = 0$ ترکیبی خطی از

معادلات دستگاه $AX = 0$ است. چون معکوس يك عمل سطری مقدماتی خود يك عمل سطری مقدماتی است، هر معادله دستگاه $AX = 0$ نیز ترکیبی خطی از معادلات دستگاه $BX = 0$ می باشد. از این رو، این دو دستگاه هم ارزند، و بنابراین قضیه ۱ جوابهایشان یکی است. \square

مثال ۵. فرض کنیم A هیأت اعدادگویا باشد، و

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

دنباله ای متناهی از اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس A انجام می دهیم، و با اعدادی در پرانتز نوع عمل انجام شده را مشخص می کنیم.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{15}{2} & -\frac{55}{2} \\ 1 & 0 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 0 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

هم ارزی سطری ماتریس A با ماتریس آخر دنباله بالا، علی الخصوص برای ما روشن می سازد که جوابهای

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 - x_4 = 0$$

$$2x_1 + 6x_2 - x_3 + 5x_4 = 0$$

و

$$x_3 - \frac{11}{3}x_4 = 0$$

$$x_1 + \frac{17}{3}x_4 = 0$$

$$x_2 - \frac{5}{3}x_4 = 0$$

یکی هستند. در دستگاه دوم، روشن است که هرگاه مقدار دلخواه گویای c را به x_4 نسبت بدهیم، جواب $(-\frac{17}{3}c, \frac{5}{3}c, \frac{11}{3}c, c)$ را به دست می آوریم، و نیز روشن است که همه جوابها به همین صورت می باشند.

مثال ۶. فرض کنیم F هیأت اعداد مختلط باشد، و

$$A = \begin{bmatrix} -1 & i \\ -i & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

در انجام اعمال سطری غالباً راحت تر است که چند عمل از نوع (۲) را توأمأ انجام دهیم. با در نظر داشتن این مطلب،

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & i & (2) \\ -i & 3 & \\ \hline 1 & 2 & \end{array} \right] &\rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2+i & (1) \\ 0 & 3+2i & \\ \hline 1 & 2 & \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & (2) \\ 0 & 3+2i & \\ \hline 1 & 2 & \end{array} \right] &\rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \\ \hline 1 & 2 & \end{array} \right] \end{aligned}$$

بنابراین، دستگاه معادلات

$$-x_1 + ix_2 = 0$$

$$-ix_1 + 3x_2 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 = 0$$

فقط دارای جواب بدیهی $x_1 = x_2 = 0$ است.

در مثالهای ۵ و ۶، بدیهی است که اعمال سطری را به طور تصادفی انجام ندادیم. گزینش ما از اعمال سطری تحت تأثیر تمایلی برای ساده کردن ماتریس ضرایب، به گونه‌ای شبیه به «حذف مجهولها» در دستگاه معادلات خطی، صورت می‌گیرد. اکنون، اجازه بدهید تعریفی رسمی از نوع ماتریسی را که سعی داشتیم بدان دست یابیم، ارائه کنیم.

تعریف. ماتریسی $m \times n$ ، مانند R ، تحویل شدهٔ سطری نامیده می‌شود، هرگاه:

(الف) اولین درایهٔ غیرصفر در هر سطر غیرصفر R برابر ۱ باشد؛

(ب) همهٔ درایه‌های دیگر هرستونی از R که شامل درایهٔ غیر صفر مقدم یک سطر

است، ۰ باشند.

مثال ۷. یک مثال از ماتریسهای تحویل شدهٔ سطری، ماتریس همانی $n \times n$ (مربعی)

I است. این ماتریس، ماتریسی $n \times n$ است که با

$$I_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{هرگاه } i = j \\ 0 & \text{هرگاه } i \neq j \end{cases}$$

تعریف می‌شود. این اولین کاربرد دلتای کرونیگر (δ) است که کرارا به کار خواهد رفت.

در مثالهای ۵ و ۶، آخرین ماتریسها در دنباله‌های نمایش داده شده، ماتریسهای

تحویل شده سطری هستند. دومیال از ماتریسهایی که تحویل شده سطری نیستند، ماتریسهایی زیرند:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

دومین ماتریس در شرط (الف) صدق نمی کند، زیرا درایه غیر صفر مقدم اولین سطر آن ۱ نیست. اولین ماتریس شرط (الف) را برمی آورد، اما ستون ۳ آن حایز شرط (ب) نیست. اکنون ثابت می کنیم که می توان از هر ماتریس داده شده، با تعدادی متناهی عمل سطری مقدماتی، به یک ماتریس تحویل شده سطری رسید. ترکیب این مطلب با قضیه ۳ ابزار مؤثری برای حل دستگاههای معادلات خطی به دست می دهد.

قضیه ۴. هر ماتریس $m \times n$ بردی هیأت F ، هم از سطری یک ماتریس تحویل شده سطری است.

اثبات. گیریم A یک ماتریس $m \times n$ بروی هیأت F باشد. اگر همه درایه های سطر اول A برابر ۰ باشند، آنگاه تا آنجایی که به سطر اول مربوط است، شرط (الف) برقرار است. اگر سطر اول دارای یک درایه غیر صفر باشد، k را کوچکترین عدد صحیح مثبت z می گیریم که به ازای آن $A_{1z} \neq 0$. سطر اول را در A_{1z}^{-1} ضرب می کنیم تا بدین ترتیب شرط (الف) در سطر اول برقرار باشد. اکنون به ازای هر $z \geq 2$ ، $(-A_{1z})$ برابر سطر اول را به سطر z می افزاییم. بدین نحو، درایه غیر صفر مقدم سطر اول در ستون k قرار می گیرد؛ این درایه ۱ است، و هر درایه دیگر ستون k برابر ۰ است.

اکنون ماتریس حاصل از اعمال فوق را در نظر می گیریم. هر گاه همه درایه های سطر دوم ۰ باشند، روی آن هیچ عملی انجام نمی دهیم. اما، اگر درایه ای در سطر دوم مخالف ۰ باشد، این سطر را در اسکلر مناسبی ضرب می کنیم تا درایه غیر صفر مقدم آن ۱ بشود. در حالی که سطر اول، درایه غیر صفر مقدمی در ستون k داشته باشد، این درایه غیر صفر مقدم سطر دوم نمی تواند در ستون k قرار گیرد. لذا، فرض کنید درایه اخیر در ستون k $k' \neq k$ باشد. با افزودن مضربهای مناسبی از سطر دوم به سطر دیگر، می توان ترتیبی داد که تمامی درایه های ستون k' ، بجز ۱ موجود در سطر دوم، ۰ گردند. نکته مهم قابل توجه این است که ضمن انجام اعمال اخیر، نه تنها درایه های سطر ۱ در ستونهای ۱، ۰، ۰، ۰، k تغییر نمی کنند، بلکه همه درایه های ستون k نیز بدون تغییر می مانند. البته، اگر همه درایه های سطر اول صفر باشند، اعمال روی سطر دوم تأثیری بر سطر اول نخواهند داشت.

هر گاه روش فوق الذکر را هر بار روی یک سطر به کار بندیم، روشن است که پس از طی مراحل متناهی به یک ماتریس تحویل شده سطری دست خواهیم یافت. □

تمرین

۱. همه جوابهای دستگاه معادلات

$$(1-i)x_1 - ix_2 = 0$$

$$2x_1 + (1-i)x_2 = 0$$

را به دست آورید.

۱.۲ اگر

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

با تحویل سطری کردن A ، همه جوابهای $AX = 0$ را به دست آورید.

۱.۳ اگر

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

همه جوابهای دستگاههای $AX = 2X$ و $AX = 3X$ را به دست آورید. (علامت cX نشانگر ماتریسی است که هر دایه آن c برابر دایه متناظرش در ماتریس X است.)

۴. يك ماتریس تحویل شده سطری بیابید که هم ارز سطری ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} i & -(1+i) & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2i & -1 \end{bmatrix}$$

باشد.

۵. ثابت کنید که دو ماتریس زیر هم ارز سطری نیستند:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ b & c & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

۶. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ماتریسی 2×2 با درایه‌های مختلط باشد. همچنین فرض کنید A تحویل شده سطری باشد، و $a+b+c+d=0$. ثابت کنید که دقیقاً سه ماتریس از این نوع وجود دارد.

۷. ثابت کنید که عمل تعویض دو سطر یک ماتریس را می‌توان با دنباله‌ای متناهی از اعمال سطری مقدماتی از دو نوع دیگر انجام داد.

۸. دستگاه معادلات $AX=0$ را که در آن

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

یک ماتریس 2×2 بر روی هیأت F است، در نظر بگیرید. ثابت کنید که:

(الف) اگر همه درایه‌های A صفر باشند، آنگاه هر جفت (x_1, x_2) جوابی برای $AX=0$ است.

(ب) اگر $ad-bc \neq 0$ ، آنگاه دستگاه $AX=0$ فقط دارای جواب بدیهی $x_1=x_2=0$ است.

(پ) اگر $ad-bc=0$ و درایه‌ای از A مخالف ۰ باشد، آنگاه جوابی چون (x_1^0, x_2^0) وجود دارد به طوری که (x_1, x_2) یک جواب دستگاه است اگر و تنها اگر اسکالری چون y با شرایط $x_1 = yx_1^0$ و $x_2 = yx_2^0$ وجود داشته باشد.

۴.۱. ماتریسهای تحویل شده سطری پلکانی

تا به حال، کار ما روی دستگاههای معادلات خطی از کوششی جهت یافتن جوابهای این دستگاهها نشأت می‌گرفت. در بخش ۳.۱ روشی متعارفی برای یافتن این جوابها بنیاد نهادیم. اکنون می‌خواهیم اطلاعاتی به دست آوریم که اندکی بیشتر جنبه نظری دارند، و برای این منظور، مناسب است از ماتریسهای تحویل شده سطری پا را کمی فراتر ببریم.

تعریف. ماتریس $m \times n$. مانند R ، تحویل شده سطری پلکانی نامیده می‌شود هرگاه:

(الف) R تحویل شده سطری باشد؛

(ب) هر سطر R که همه درایه‌هایش صفر باشند، زیر همه سطری که دارای درایه‌ای غیرصفرند واقع بشود؛

(پ) اگر سطرهای $1, \dots, r$ سطرهای غیرصفر ماتریس R باشند و درایه غیرصفر مقدم سطر i در ستون k_i ، $i=1, 2, \dots, r$ واقع بشود، آنگاه $k_1 < k_2 < \dots < k_r$.

هر ماتریس تحویل شده سطری پلکانی $m \times n$ مانند R را می توان به صورت زیر توصیف کرد. یا هر درایه R برابر ۰ است، و یا عدد صحیح مثبتی مانند $m, r \leq r \leq m$ ، و r عدد صحیح مثبت k_1, k_2, \dots, k_r ، با شرط $1 \leq k_i \leq n$ وجود دارند به طوری که

(الف) به ازای $r > i$ ؛ $R_{ij} = 0$ ؛ و اگر $k_i < j$ ، آنگاه $R_{ij} = 0$.

(ب) $1 \leq j \leq r$ و $1 \leq i \leq r$ ، $R_{ik_j} = \delta_{ij}$

(ب) $k_1 < \dots < k_r$

مثال ۸. ماتریس همانی $n \times n$ و ماتریس صفر $m \times n$ که با $0 \dots 0$ نشان داده می شود و همه درایه هایش ۰ هستند، دو مثال از ماتریسهای تحویل شده سطری پلکانی اند. هر چند، خواننده در ساختن مثالهای دیگر نباید مشکل چندانی داشته باشد، با این حال علاقه مندم مثال غیر بدیهی هم ارائه کنیم:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

قضیه ۵. هر ماتریس $m \times n$ مانند A با یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی هم ارز سطری است.

اثبات. می دانیم که A هم ارز سطری با یک ماتریس تحویل شده سطری است. تنها چیزی که باید ثابت کنیم این است که با انجام تعدادی متناهی عمل تعویض سطری روی یک ماتریس تحویل شده سطری می توان آن را به شکل تحویل شده سطری پلکانی در آورد. □

در مثالهای ۵ و ۶ اهمیت ماتریسهای تحویل شده سطری را در حل دستگاههای معادلات خطی همگن دیدیم. اکنون به طور خلاصه دستگاه $RX = 0$ را، که در آن R یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی است، مطرح می کنیم. فرض کنیم سطرهای $1, \dots, r$ سطرهای غیر صفر R ، و درایه غیر صفر مقدم سطر i م آن در ستون k_i م باشد. در این صورت، دستگاه $RX = 0$ مرکب از r معادله غیر بدیهی است. بعلاوه، مجهول x_{k_i} فقط در i مین معادله (با ضریب غیر صفر) ظاهر می شود. اگر u_1, \dots, u_{n-r} را $(n-r)$ مجهول غیر از x_{k_1}, \dots, x_{k_r} فرض کنیم، آنگاه r معادله غیر بدیهی در $RX = 0$ ، به صورت

$$\begin{aligned} x_{k_1} + \sum_{j=1}^{n-r} c_{1j} u_j &= 0 \\ &\vdots \\ x_{k_r} + \sum_{j=1}^{n-r} c_{rj} u_j &= 0 \end{aligned} \quad (3-1)$$

هستند. همه جوابهای دستگاه معادلات $RX = 0$ با تخصیص مقادیری دلخواه به u_1, \dots, u_{n-r} و سپس محاسبه مقادیر متناظر x_1, \dots, x_r از (۳-۱) به دست می آید. مثلاً، اگر R ماتریس نشان داده شده در مثال ۸ باشد، آنگاه $r = 2$ ، $k_1 = 2$ ، $k_2 = 4$ ، و دو معادله غیر بدیهی در دستگاه $RX = 0$ ، عبارتند از

$$x_2 = 3x_3 - \frac{1}{4}x_5 \quad \text{یا} \quad x_2 - 3x_3 + \frac{1}{4}x_5 = 0$$

$$x_4 = -2x_5 \quad \text{یا} \quad x_4 + 2x_5 = 0$$

لذا، می توان هر مقداری به x_1 ، x_3 ، و x_5 تخصیص داد، مثلاً $x_1 = a$ ، $x_3 = b$ ، $x_5 = c$ و جواب $(a, 3b - \frac{1}{4}c, b, -2c, c)$ را به دست آورد.

حال در مورد دستگاه معادلات $RX = 0$ مطلب دیگری را بررسی می کنیم. اگر r تعداد سطرهاى غیر صفر ماتریس R ، کمتر از n باشد، آنگاه دستگاه $RX = 0$ دارای يك جواب غیر بدیهی، یعنی يك جواب (x_1, \dots, x_n) است که در آن همه x_j ها صفر نیستند. زیرا، به دلیل اینکه $r < n$ ، می توانیم r ای را انتخاب کنیم که در بین r مجهول x_j ، \dots, x_r نباشد، و در این صورت می توانیم جوابی همچون جواب بالا را که در آن این x_j برابر ۱ باشد، بسازیم. این مطلب ما را به یکی از بنیادترین واقعیتهای در باره دستگاههای معادلات خطی همگن می رساند.

قضیه ۶. اگر A يك ماتریس $n \times m$ و $n < m$ باشد، آنگاه دستگاه معادلات خطی همگن $AX = 0$ يك جواب غیر بدیهی دارد.

اثبات. فرض کنیم R يك ماتریس تحویل شده سطری پلکانی باشد که با A هم ارز سطری است. بنا بر قضیه ۳، جوابهای دستگاههای $AX = 0$ و $RX = 0$ یکی هستند. اگر r تعداد سطرهاى غیر صفر R باشد، آنگاه یقیناً $r \leq m$ ، و چون $m < n$ ، داریم $r < n$. از ملاحظات فوق بیدرتنگ نتیجه می شود که $AX = 0$ يك جواب غیر بدیهی دارد. \square

قضیه ۷. اگر A يك ماتریس $n \times n$ (مربعی) باشد، آنگاه A هم ارز سطری ماتریس همانی $n \times n$ است اگر و تنها اگر دستگاه معادلات $AX = 0$ فقط جواب بدیهی داشته باشد.

اثبات. اگر A هم ارز سطری I باشد، آنگاه جوابهای $AX = 0$ و $IX = 0$ یکی هستند. بعکس، فرض کنیم $AX = 0$ فقط دارای جواب بدیهی $X = 0$ باشد. R را ماتریس تحویل شده سطری پلکانی $n \times n$ می گیریم که هم ارز سطری A است. فرض کنیم r تعداد سطرهاى غیر صفر R باشد. در این صورت، $RX = 0$ هیچ جواب غیر بدیهی ندارد. بنا بر این، $r \geq n$. از طرفی، چون R دارای n سطر است، روشن است که $r \leq n$ و بنا بر این $r = n$. چون مطلب اخیر به این معنی است که R عملاً در هر يك از n سطرش يك درایه غیر صفر مقدم ۱ دارد، و نیز این اها هر يك در یکی از n ستون مختلف قرار دارند،

می باید ماتریس همانی $n \times n$ باشد. □

اکنون این سؤال را مطرح می کنیم که اثر اعمال سطری مقدماتی در جریان حل يك دستگاه معادلات خطی ناهمگن $AX=Y$ چیست؟ در بدو امر، تفاوتی اساسی بین این حالت و حالت همگن مشاهده می شود، و آن این است که علی رغم این که دستگاه همگن همواره دارای جواب بدیهی $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ است، لازم نیست يك دستگاه ناهمگن اصلاً جوابی داشته باشد.

A' ، ماتریس افزوده دستگاه $AX=Y$ را تشکیل می دهیم. این ماتریس، ماتریسی $m \times (n+1)$ است که n ستون اولش ستونهای ماتریس A و ستون آخرش Y است. به طور دقیقتر،

$$A'_{ij} = A_{ij} \quad , \quad j \leq n$$

$$A'_{i(n+1)} = y_i$$

فرض کنیم دنباله ای از اعمال سطری مقدماتی روی A انجام داده ایم تا به يك ماتریس تحویل شده سطری پلکانی R برسیم. اگر همین دنباله از اعمال سطری را روی ماتریس افزوده A' انجام دهیم، به ماتریسی چون R' می رسیم که n ستون اولش ستونهای R ، و ستون آخرش متشکل از اسکلرهای معین z_1, \dots, z_m است. اسکلرهای z_i ، درایه های ماتریس $m \times 1$

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}$$

هستند که از بدکار بستن دنباله اعمال سطری فوق روی ماتریس Y حاصل می شوند. برای خواننده می باید روشن باشد که، درست شبیه اثبات قضیه ۳، دستگاههای $AX=Y$ و $RX=Z$ هم ارزند، و از این رو، جوابهایشان یکی است. تعیین این که آیا دستگاه $RX=Z$ دارای جوابی هست یا نه، و نیز تعیین همه جوابهای این دستگاه، در صورت وجود، کار بسیار آسانی است. زیرا، اگر R دارای r سطر غیر صفر باشد، و درایه غیر صفر مقدم سطر i م در ستون k ، $r, \dots, 2, 1, i$ قرار بگیرد، آنگاه r معادله اول $RX=Z$ عملاً x_k, \dots, x_r را بر حسب $(n-r)$ مجهول باقیمانده x_j و اسکلرهای z_1, \dots, z_r بیان می کنند. $(m-r)$ معادله آخر عبارتند از

$$0 = z_{r+1}$$

$$\vdots$$

$$0 = z_m$$

و بنابراین، شرط وجود جواب برای دستگاه این است که به ازای $i > r$ ، $z_i = 0$ ، اگر این شرط برقرار باشد، همه جوابهای دستگاه، دقیقاً مانند حالت همگن، با تخصیص مقادیر دلخواه به $(n-r)$ مجهول x_r ، سپس محاسبه x_i از i مین معادله به دست می آیند.

مثال ۹. گیریم F هیأت اعداد گویا و

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

باشد، و بخواهیم دستگاه $AX=Y$ را، به ازای مقادیر y_1, y_2, y_3 و y_3 حل کنیم. روی ماتریس افزوده A' دنباله ای از اعمال سطری که A را تحویل شده سطری می سازد، انجام می دهیم:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & y_1 \\ 2 & 1 & 1 & y_2 \\ 0 & 5 & -1 & y_3 \end{array} \right] \xrightarrow{(2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & y_1 \\ 0 & 5 & -1 & (y_2 - 2y_1) \\ 0 & 5 & -1 & y_3 \end{array} \right] \xrightarrow{(2)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & y_1 \\ 0 & 5 & -1 & (y_2 - 2y_1) \\ 0 & 0 & 0 & (y_3 - y_2 + 2y_1) \end{array} \right] \xrightarrow{(1)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5}(y_2 - 2y_1) \\ 0 & 0 & 0 & (y_3 - y_2 + 2y_1) \end{array} \right] \xrightarrow{(2)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5}(y_1 + 2y_2) \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5}(y_2 - 2y_1) \\ 0 & 0 & 0 & (y_3 - y_2 + 2y_1) \end{array} \right]$$

از این رو، شرطی که تحت آن دستگاه $AX=Y$ دارای جواب باشد، عبارت است از

$$2y_1 - y_2 + y_3 = 0.$$

هرگاه اسکلرهای داده شده y_i این شرط را برآورند، همه جوابها با تخصیص يك مقدار

دلخواه c به x_3 و سپس محاسبه

$$x_1 = -\frac{3}{5}c + \frac{1}{5}(y_1 + 2y_2)$$

$$x_2 = \frac{1}{5}c + \frac{1}{5}(y_2 - 2y_1)$$

به دست می آیند.

اکنون به مشاهده آخرین مطلب درباره دستگاه $AX=Y$ می پردازیم. فرض کنیم برحسب توافق درایه های ماتریس A و اسکالره های y_1, \dots, y_m در زیر هیأت F_1 از هیأت F قرار گیرند. اگر دستگاه معادلات $AX=Y$ دارای جوابی با x_1, \dots, x_n در F باشد، این دستگاه دارای جوابی با x_1, \dots, x_n در F_1 است؛ زیرا، بر روی هر یک از این دو هیأت، شرط وجود جواب برای دستگاه عبارت است از برقراری روابط معینی بین y_1, \dots, y_m در F_1 (روابط $z_i = 0$ ، به ازای $i > r$ ، که قبلاً ذکر شد). به عنوان مثال، فرض کنیم $AX=Y$ دستگاهی از معادلات خطی باشد که در آن اسکالره های y_1 و همچنین A_{ij} ها همه حقیقی اند. اگر جوابی برای این دستگاه موجود باشد که در آن x_1, \dots, x_n مختلط باشند، آنگاه این دستگاه دارای جوابی است که در آن x_1, \dots, x_n حقیقی اند.

تمرین

۰۱ همه جوابهای دستگاه معادلات زیر را با تحویل سطری کردن ماتریس ضرایب آن به دست آورید:

$$\frac{1}{3}x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0$$

$$-2x_1 + 5x_3 = 0$$

$$-3x_1 + 6x_2 - 12x_3 = 0$$

$$-\frac{7}{3}x_1 + 2x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 0$$

۰۲ ماتریس تحویل شده سطری پلکانی ای بیابید که هم ارز سطری ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 2 & 2 \\ i & 1+i \end{bmatrix}$$

باشد. جوابهای $AX=0$ را به دست آورید.

۳. همه ماتریسهای 2×2 تحویل شده سطری پلکانی را به طور صریح توصیف کنید.

۴. دستگاه معادلات

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 + 2x_3 = 1$$

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2$$

را در نظر بگیرید. آیا این دستگاه جواب دارد؟ اگر چنین است، همه این جوابها را صریحاً توصیف کنید.

۵. مثالی از یک دستگاه دو معادله خطی دو مجهولی بی‌اورید که جواب نداشته باشد.

۶. نشان دهید دستگاه

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2$$

$$x_1 + 7x_2 - 5x_3 - x_4 = 3$$

جواب ندارد

۷. همه جوابهای دستگاه

$$2x_1 - 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 + 2x_5 = -2$$

$$x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 = -2$$

$$2x_1 - 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 3$$

$$x_1 - 5x_2 - 7x_3 + 6x_4 + 2x_5 = -7$$

را بیابید.

۸. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

به ازای کدام سه تاییهای (y_1, y_2, y_3) دستگاه $AX=Y$ جواب دارد؟

۹. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

به‌ازای کدام (y_1, y_2, y_3, y_4) دستگاه $AX=Y$ جواب دارد؟

۱۰. فرض کنید R و R' دو ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی 3×2 باشند و جوابهای دستگاههای $RX=0$ و $R'X=0$ یکی باشند. ثابت کنید $R'=R$.

۵.۱. ضرب ماتریسی

واضح است که فرایند تشکیل ترکیبات خطی از سطرهای یک ماتریس، فرایندی بنیانی است (یا به‌هرحال، باید چنین باشد). بدین دلیل، ارائهٔ طرحی با نظام برای بیان این نکته که دقیقاً چه اعمالی باید انجام شوند، ارجح است. به‌صورت مشخصتر، فرض کنیم B ماتریسی $n \times p$ بر روی هیأت F ، با سطرهای β_1, \dots, β_n باشد، و نیز فرض کنیم از B ماتریس C با سطرهای $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ را با تشکیل ترکیبات خطی معین

$$\gamma_i = A_{i1}\beta_1 + A_{i2}\beta_2 + \dots + A_{in}\beta_n \quad (4-1)$$

ساخته‌ایم. سطرهای C با mn اسکالر A_{ij} که خود درایه‌های ماتریسی $m \times n$ مانند A هستند تعیین می‌شوند. اگر (۴-۱) را به‌صورت

$$(C_{i1} \dots C_{ip}) = \sum_{r=1}^n (A_{ir}B_{r1} \dots A_{ir}B_{rp})$$

بسط دهیم، می‌بینیم که درایه‌های C با رابطهٔ زیر مشخص می‌شوند:

$$C_{ij} = \sum_{r=1}^n A_{ir}B_{rj}$$

تعریف. فرض کنیم A ماتریسی $m \times n$ بر روی هیأت F ، و B ماتریسی $n \times p$ بر روی همین هیأت باشد. حاصل‌ضرب AB ، ماتریس $m \times p$ مانند C است که درایهٔ (i, j) آن عبارت است از

$$C_{ij} = \sum_{r=1}^n A_{ir}B_{rj}$$

مثال ۱۰. در این مثال، چند حاصل ضرب از ماتریسهای با درایه‌های گویا آمده است.

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 15 & 4 & 8 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

در اینجا

$$\gamma_1 = (5 \quad -1 \quad 2) = 1 \cdot (5 \quad -1 \quad 2) + 0 \cdot (15 \quad 4 \quad 8)$$

$$\gamma_2 = (0 \quad 7 \quad 2) = -3 \cdot (5 \quad -1 \quad 2) + 1 \cdot (15 \quad 4 \quad 8)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 9 & 12 & -8 \\ 12 & 62 & -3 \\ 3 & 8 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

در اینجا

$$\gamma_1 = (0 \quad 6 \quad 1) = -2(0 \quad 6 \quad 1) + 3(3 \quad 8 \quad -2)$$

$$\gamma_2 = (12 \quad 62 \quad -3) = 5(0 \quad 6 \quad 1) + 4(3 \quad 8 \quad -2)$$

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (\text{پ})$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} [2 \quad 4] \quad (\text{ت})$$

در اینجا

$$\gamma_1 = (6 \quad 12) = 3(2 \quad 4)$$

$$[2 \quad 4] \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = [10] \quad (\text{ث})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 9 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 9 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

توجه به این نکته مهم است که ضرب دو ماتریس همواره قابل تعریف نیست؛ ضرب دو ماتریس زمانی، و تنها زمانی، تعریف می‌شود که تعداد ستونهای ماتریس اول برابر با تعداد سطرهای ماتریس دوم باشد. لذا، تعویض ترتیب سازه‌ها در بندهای (الف)، (ب)، و (پ) مثال فوق بی‌معنی است. غالباً، ضربهایی مانند AB را بدون ذکر صریح اندازه سازه‌های آن می‌نویسیم؛ در چنین حالتی استنباط این است که ضرب تعریف می‌شود. از (ت)، (ث)، (ج)، و (چ) درمی‌یابیم که حتی اگر ضربهای AB و BA هر دو تعریف بشوند، لزوماً $AB = BA$ درست نیست؛ به بیان دیگر، ضرب ماتریسی جا‌بجایی نیست.

مثال ۱۱.

- (الف) اگر I ماتریس همانی $m \times m$ و A ماتریسی $m \times n$ باشد، آنگاه $IA = A$
 (ب) اگر I ماتریس همانی $n \times n$ و A ماتریسی $m \times n$ باشد، آنگاه $AI = A$
 (پ) اگر $0^{k,m}$ ماتریس صفر $k \times m$ باشد، آنگاه $0^{k,m} A = 0^{k,n}$. به طور مشابه $A \cdot 0^{n,p} = 0^{m,p}$

مثال ۱۲. فرض کنیم A ماتریسی $m \times n$ بردوی هیأت F باشد. نماد اختصاری پیشین برای دستگاههای معادلات خطی، یعنی $AX = Y$ ، با تعریف ضرب ماتریسی سازگار است. زیرا، اگر

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

و x_i ها در F باشند، آنگاه AX ماتریس $m \times 1$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

است که در آن $y_i = A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + \dots + A_{in}x_n$

استفاده از ماتریسهای ستونی نمادی را پیشنهاد می‌کند که غالباً مفید است. اگر B

ماتریسی $n \times p$ باشد، ستونهای B ماتریسهای $1 \times n, B_1, \dots, B_p$ خواهند بود که به صورت

$$B_j = \begin{bmatrix} B_{1j} \\ \vdots \\ B_{nj} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq j \leq p$$

تعریف می‌شوند، و ماتریس B توالی این ستونهاست:

$$B = [B_1, \dots, B_p].$$

درایه (i, j) ماتریس حاصل ضرب AB از سطر i ماتریس A و ستون j ماتریس B شکل می‌گیرد. خواننده خود تحقیق خواهد کرد که ستون j ماتریس AB برابر AB_j است:

$$AB = [AB_1, \dots, AB_p].$$

علی‌رغم این که ضرب ماتریسها به ترتیب نوشتن سازه‌هایش بستگی دارد، اما همان‌طور که قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد از نحوهٔ شرکت آنها مستقل است.

قضیهٔ ۸. اگر A, B, C ماتریسهایی بردی هیأت F باشند که ضربهای BC و $A(BC)$ تعریف بشوند، آنگاه ضربهای AB و $(AB)C$ نیز تعریف می‌شوند و

$$A(BC) = (AB)C.$$

اثبات. فرض کنیم B ماتریسی $n \times p$ باشد. چون BC تعریف می‌شود، C ماتریسی است با p سطر، و لذا BC n سطر دارد. حال، به دلیل اینکه $A(BC)$ هم تعریف می‌شود می‌توانیم فرض کنیم که A ماتریسی است $m \times n$. بنابراین، حاصل ضرب AB وجود دارد و ماتریسی $m \times p$ است. از اینجا نتیجه می‌شود که حاصل ضرب $(AB)C$ وجود دارد. برای نشان دادن تساوی $(AB)C = A(BC)$ ، کافی است نشان دهیم که به ازای هر i و j ،

$$[A(BC)]_{ij} = [(AB)C]_{ij}.$$

طبق تعریف

$$\begin{aligned} [A(BC)]_{ij} &= \sum_r A_{ir}(BC)_{rj} \\ &= \sum_r A_{ir} \sum_s B_{rs} C_{sj} \\ &= \sum_r \sum_s A_{ir} B_{rs} C_{sj} \\ &= \sum_s \sum_r A_{ir} B_{rs} C_{sj} \\ &= \sum_s (\sum_r A_{ir} B_{rs}) C_{sj} \\ &= \sum_s (AB)_{is} C_{sj} \\ &= [(AB)C]_{ij}. \quad \square \end{aligned}$$

اگر A ماتریسی $n \times n$ (مربعی) باشد، ضرب AA تعریف می‌شود. این ماتریس را با A^2 نشان می‌دهیم. بنا بر قضیه ۸، $A(AA) = (AA)A$ ، یا $A(AA) = (AA)A$ ، از این رو، ضرب AAA بدون ابهام تعریف می‌شود. این حاصل ضرب را با A^3 نشان می‌دهیم. در حالت عمومی، ضرب $A \circ \circ \circ A$ (k بار) بدون ابهام تعریف می‌شود، و این حاصل ضرب را با A^k نشان می‌دهیم.

توجه کنید که از جمله نتایجی که رابطه $A(BC) = (AB)C$ ایجاب می‌کند، یکی این است که ترکیب‌هایی خطی از ترکیب‌های خطی سطرهاى C ، مجدداً ترکیب‌های خطی از سطرهاى C هستند.

اگر B ماتریس مفروضی باشد و C به وسیله يك عمل سطری مقدماتی از B حاصل شده باشد، آنگاه هر سطر C ترکیبی خطی از سطرهاى B است؛ و از این رو، ماتریسی چون A وجود دارد به طوری که $AB = C$. معمولاً ماتریسهایی با این خاصیت زیادند، و لذا مناسبت دارد و نیز ممکن است در بین آنها یکی را که دارای خواص ویژه‌ای است انتخاب کنیم. قبل از آنکه به این بحث وارد شویم، نیاز داریم که باردهای از ماتریسها آشنا شویم.

تعریف. يك ماتریس $m \times m$ يك ماتریس مقدماتی خوانده می‌شود هرگاه بتوان آن را از ماتریس همانی $m \times m$ با تنها يك عمل سطری مقدماتی به دست آورد.

مثال ۱۳. يك ماتریس مقدماتی 2×2 لزوماً یکی از ماتریسهای زیر است:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c \neq 0, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}, \quad c \neq 0.$$

قضیه ۹. فرض کنیم e يك عمل سطری مقدماتی و E ماتریس مقدماتی $m \times m$ ، $E = e(I)$ باشد. در این صورت، به ازای هر ماتریس $m \times n$ مانند A ، داریم

$$e(A) = EA.$$

اثبات. نکته مهم این است که درایه واقع در سطر i و ستون j م ماتریس حاصل ضرب EA ، از سطر i م ماتریس E و ستون j م ماتریس A شکل می‌گیرد. لذا، لازم است هر يك از سه نوع عمل سطری مقدماتی را جداگانه بررسی کنیم. در اینجا اثبات مفصلی برای عملی از نوع (۲) خواهیم آورد. بررسی دو حالت دیگر، حتی از این یکی هم ساده‌تر است و به عنوان تمرین واگذار می‌شود. فرض کنیم $r \neq s$ ، و e عمل «جایگزینی سطر r با سطر s بعلاوه c برابر سطر s » باشد. در این صورت

$$E_{ik} = \begin{cases} \delta_{ik}, & i \neq r \\ \delta_{rk} + c\delta_{sk}, & i = r. \end{cases}$$

بنابراین،

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^n E_{ik} A_{kj} = \begin{cases} A_{ik}, & i \neq r \\ A_{rj} + cA_{sj}, & i = r. \end{cases}$$

و به بیان دیگر، $\square \cdot EA = e(A)$

نتیجه. فرض کنیم A و B دو ماتریس $m \times n$ بردی هیأت F باشند. در این صورت، B هم‌ارزسطری A است اگر و تنها اگر $B = PA$ و P حاصل ضربی از ماتریسهای مقدماتی $m \times m$ باشد.

اثبات. فرض کنیم $B = PA$ ، که در آن $P = E_s \cdots E_r E_1$ ، و E_i ها ماتریسهای مقدماتی $m \times m$ باشند. در این صورت، $E_1 A$ هم‌ارزسطری A ، و $E_r (E_1 A)$ هم‌ارزسطری $E_1 A$ ، و بنابراین $E_r E_1 A$ هم‌ارزسطری A است؛ با ادامه این راه می‌بینیم که $(E_s \cdots E_1) A$ هم‌ارزسطری A است.

حال فرض کنیم B هم‌ارزسطری A باشد، و E_1, E_r, \dots, E_s ماتریسهای مقدماتی متناظر به دنباله‌ای از اعمال سطری مقدماتی باشند که A را به B تبدیل می‌کنند. در این صورت، $\square \cdot B = (E_s \cdots E_1) A$

تمرین

۱. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad -1].$$

ماتریسهای ABC و CAB را محاسبه کنید.

۲. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

مستقیماً تحقیق کنید که $A(AB) = A^2 B$.

۳. دو ماتریس مختلف 2×2 مانند A بیابید به طوری که $A^2 = 0$ ولی $A \neq 0$.

۴. برای ماتریس A در تمرین ۲، ماتریسهای مقدماتی E_1, E_2, \dots, E_k را بیابید که

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I.$$

۵. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

آیا ماتریسی چون C با خاصیت $CA = B$ وجود دارد؟

۶. فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ ، و B ماتریسی $n \times k$ باشد. نشان دهید که ستونهای $C = AB$ ترکیباتی خطی از ستونهای A هستند. اگر $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ستونهای ماتریس A ، و $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ ستونهای ماتریس C باشند، آنگاه

$$\gamma_j = \sum_{r=1}^n B_{rj} \alpha_r.$$

۷. فرض کنید A و B دو ماتریس 2×2 باشند که $AB = I$. ثابت کنید $BA = I$.

۸. فرض کنید

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

ماتریسی 2×2 باشد. می‌خواهیم بدانیم چه وقت ممکن است ماتریسهایی 2×2 مانند A و B یافت به طوری که $C = AB - BA$. ثابت کنید چنین ماتریسهایی را می‌توان یافت اگر و تنها اگر $C_{11} + C_{22} = 0$.

۶.۱. ماتریسهای معکوس پذیر

فرض کنیم ماتریس $m \times m$ مانند P حاصل ضربی از ماتریسهای مقدماتی باشد. به ازای هر ماتریس $m \times n$ مانند A ، ماتریس $B = PA$ هم‌ارز سطری A است؛ از این رو، A نیز هم‌ارز سطری B است و حاصل ضربی چون Q از ماتریسهای مقدماتی وجود دارد به طوری که $A = QB$. این امر، بخصوص، هنگامی که A ماتریس همانی $m \times m$ باشد، درست است. به بیان دیگر، ماتریس $m \times m$ چون Q که خود حاصل ضربی از ماتریسهای مقدماتی است، وجود دارد به طوری که $QP = I$. بزودی خواهیم دید که وجود ماتریسی مانند Q

با خاصیت $QP = I$ ، هم ارز این مطلب است که P حاصل ضربی از ماتریسهای مقدماتی است.

تعریف. فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ (مربعی) بر دوی هیأت F باشد. یک ماتریس $n \times n$ مانند B ، به طوری که $BA = I$ ، یک معکوس چپ A نامیده می شود؛ یک ماتریس $n \times n$ مانند B با این شرط که $AB = I$ یک معکوس راست A نام دارد. اگر $AB = BA = I$ ، آنگاه B به یک معکوس دوطرفه A موسوم است، A معکوس پذیر نامیده می شود.

لم. اگر A دارای یک معکوس چپ B و یک معکوس راست C باشد، آنگاه $B = C$.

اثبات. فرض کنیم $BA = I$ و $AC = I$. در این صورت

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C. \quad \square$$

بنابراین، اگر A یک معکوس چپ و یک معکوس راست داشته باشد، آنگاه A معکوس پذیر است و دارای معکوس دوطرفه یکتایی است. این معکوس را که با A^{-1} نشان می دهیم، به طور ساده معکوس A می نامیم.

قضیه ۱۰ فرض کنیم A و B دو ماتریس $n \times n$ بر دوی هیأت F باشند.

(۱) اگر A معکوس پذیر باشد، A^{-1} نیز معکوس پذیر است و $(A^{-1})^{-1} = A$.
 (۲) اگر A و B هر دو معکوس پذیر باشند، AB نیز معکوس پذیر است و $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

اثبات. گزاره اول از تقارن تعریف بسادگی نتیجه می شود. گزاره دوم، از تحقیق صحت روابط

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$$

به دست می آید. \square

نتیجه. هر حاصل ضربی از ماتریسهای معکوس پذیر ماتریسی است معکوس پذیر.

قضیه ۱۱. هر ماتریس مقدماتی معکوس پذیر است.

اثبات. فرض کنیم E ماتریس مقدماتی متناظر به عمل سطری مقدماتی e باشد. اگر e_1 عمل معکوس e باشد (قضیه ۲) و $E_1 = e_1(I)$ ، آنگاه

$$EE_1 = e(E_1) = e(e_1(I)) = I$$

$$E_1E = e_1(E) = e_1(e(I)) = I.$$

از این رو، E معکوس پذیر است و $E_1 = E^{-1}$. \square

مثال ۱۴.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{پ})$$

(ت) اگر $c \neq 0$.

$$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} c^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{bmatrix}.$$

قضیه ۱۴. اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد، گزاره‌های زیر هم‌ا‌دزند:

- (۱) A معکوس پذیر است.
 - (۲) A هم‌ا‌دز سطری ماتریس همانی $n \times n$ است.
 - (۳) A حاصل‌ضربی است از ماتریسهای مقدماتی.
- اثبات. گیریم R ماتریس تحویل شده سطری پلکانی‌ای باشد که هم‌ارز سطری A است. طبق قضیه ۹ (یا نتیجه آن)،

$$R = E_k \cdots E_r E_1 A$$

که در آن E_1, \dots, E_k ماتریسهای مقدماتی هستند. همه E_j ها معکوس پذیرند، و از این رو،

$$A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1} R.$$

چون حاصل‌ضرب ماتریسهای معکوس پذیر ماتریسی است معکوس پذیر، می‌بینیم که A معکوس پذیر است اگر و تنها اگر R معکوس پذیر باشد. از طرفی چون R يك ماتریس تحویل شده سطری پلکانی (مربعی) است، R معکوس پذیر است اگر و تنها اگر هر سطر R شامل يك درایه غیر صفر باشد؛ یعنی، اگر و تنها اگر $R = I$. تا اینجا نشان داده‌ایم که A معکوس پذیر است اگر و تنها اگر $R = I$ ؛ و اگر $R = I$ آنگاه $A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1} R$. اکنون، باید روشن باشد که (۱)، (۲)، و (۳) گزاره‌های هم‌ارزی در باره ماتریس A هستند. \square

نتیجه ۴. اگر A يك ماتریس $n \times n$ معکوس پذیر باشد و دنباله‌ای از اعمال سطری مقدماتی، A را به ماتریس همانی تحویل کند، آنگاه همان دنباله اعمال هنگامی که بر I به‌کار بسته شود، A^{-1} را به دست می‌دهد.

نتیجه. فرض کنیم A و B دو ماتریس $m \times n$ باشند. در این صورت، B هم‌ارز سطری A است اگر و تنها اگر $B = PA$ ، و P یک ماتریس $m \times m$ معکوس پذیر باشد.

قضیه ۱۳. برای ماتریسی $n \times n$ مانند A ، گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

- (۱) A معکوس پذیر است.
- (۲) دستگاه همگن $AX = 0$ فقط جواب بدیهی $X = 0$ را دارد.
- (۳) دستگاه معادلات $AX = Y$ ، به ازای هر ماتریس $1 \times n$ مانند Y ، لا اقل یک جواب دارد.

اثبات. بنا بر قضیه ۷، شرط (۲) هم‌ارز این مطلب است که A هم‌ارز سطری ماتریس همانی است. از این‌رو، بنا بر قضیه ۱۲، (۱) و (۲) هم‌ارزند. اگر A معکوس پذیر باشد، جواب دستگاه $AX = Y$ عبارت است از $X = A^{-1}Y$. بعکس، فرض کنیم دستگاه $AX = Y$ به ازای هر Y مفروض دارای یک جواب باشد. گیریم R ماتریس تحویل شده سطری پلکانی‌ای باشد که هم‌ارز سطری A است. می‌خواهیم نشان بدهیم که $R = I$. بدین صورت، کافی است نشان دهیم که همه درایه‌های آخرین سطر R برابر ۰ نیستند. فرض کنیم

$$E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

اگر دستگاه $RX = E$ برای X قابل حل باشد، سطر آخر R هیچ‌گاه ۰ نیست. می‌دانیم که $R = PA$ و P ماتریسی معکوس پذیر است. بنابراین، $RX = E$ اگر و تنها اگر $AX = P^{-1}E$ ؛ و بنا بر (۳) دستگاه اخیر لا اقل یک جواب دارد. \square

نتیجه. ماتریسی مربعی که دارای یک معکوس چپ یا یک معکوس راست باشد، معکوس پذیر است.

اثبات. فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ و دارای یک معکوس چپ باشد؛ یعنی، یک ماتریس B وجود داشته باشد به طوری که $BA = I$. در این صورت، چون $X = IX = B(AX)$ ، دستگاه $AX = 0$ فقط دارای جواب بدیهی است. بنابراین، A معکوس پذیر است. از طرف دیگر، فرض کنیم A دارای یک معکوس راست باشد؛ یعنی، ماتریسی چون C یافت شود به طوری که $AC = I$. آنگاه C دارای یک معکوس چپ است و بنابراین معکوس پذیر. پس $A = C^{-1}$ ، و از این‌رو A معکوس پذیر و دارای

معکوس C است. \square

نتیجه. فرض کنیم $A = A_1 A_2 \dots A_k$ و A_1, \dots, A_k ماتریسهای $n \times n$ (هر بعی) باشند. در این صورت، A معکوس پذیر است اگر و تنها اگر هر A_j معکوس پذیر باشد. اثبات. قبلاً نشان دادیم که حاصل ضرب دو ماتریس معکوس پذیر ماتریسی است معکوس پذیر. از این مطلب بسادگی مشهود است که اگر هر A_j معکوس پذیر باشد، آنگاه A نیز معکوس پذیر است.

حال فرض کنیم A معکوس پذیر باشد. ابتدا ثابت می کنیم A_k معکوس پذیر است. فرض کنیم X ماتریسی $n \times 1$ باشد و $A_k X = 0$ ، در این صورت $A X = (A_1 \dots A_{k-1}) A_k X = 0$ چون A معکوس پذیر است، باید داشته باشیم $X = 0$. بنابراین، دستگاه معادلات $A_k X = 0$ هیچ جواب نابدیهی ندارد. لذا، A_k معکوس پذیر است. حال، $A_1 \dots A_{k-1} = A A_k^{-1}$ معکوس پذیر است. با استدلال قبل، A_{k-1} نیز معکوس پذیر است، با ادامه این راه بدین نتیجه می رسیم که هر A_j معکوس پذیر است. \square

اکنون می خواهیم به آخرین نکته در باره حل معادلات خطی پردازیم. فرض کنیم A ماتریسی $m \times n$ باشد و بخواهیم دستگاه معادلات $AX = Y$ را حل کنیم. اگر R یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی هم ارز سطری با A باشد، آنگاه $R = PA$ که در آن P ماتریسی $m \times m$ و معکوس پذیر است. جوابهای دستگاه $AX = Y$ دقیقاً همان جوابهای دستگاه $AX = Y$ هستند. در عمل، یافتن ماتریس P خیلی مشکلتراز تحویل کردن A به R نیست. زیرا، فرض کنیم ماتریس افزوده A' از دستگاه $AX = Y$ را که در آن اسکالرهای دلخواه y_1, \dots, y_m در آخرین ستون قرار می گیرند، تشکیل داده باشیم. در این صورت، اگر روی A' دنباله ای از اعمال سطری مقدماتی را به کار بندیم که A را به R سوق می دهد، آنگاه روشن خواهد شد که ماتریس P چیست. (بهرتر است خواننده به مثال ۹ که در آن این فرایند به طور اساسی به کار بسته شده است، رجوع کند.) در حالت خاص، اگر A ماتریسی مربعی باشد، این فرایند روشن می سازد که A معکوس پذیر است یا نه، و اگر معکوس پذیر باشد، P ، معکوس آن چیست. چون قبلاً لب مثالی از چنین محاسبه ای را ارائه کرده ایم، اینک به یک مثال 2×2 اکتفا می کنیم.

مثال ۱۵. فرض کنیم F هیأت اعداد گویا باشد، و

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

در این صورت،

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & y_1 \\ 1 & 3 & y_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & y_2 \\ 2 & -1 & y_1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & y_2 \\ 0 & -\gamma & y_1 - 2y_2 \end{bmatrix} \quad (1) \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & y_2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\gamma}(2y_2 - y_1) \end{bmatrix} \quad (2) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\gamma}(y_2 + 3y_1) \\ 0 & 1 & \frac{1}{\gamma}(2y_2 - y_1) \end{bmatrix}$$

حال واضح است که A معکوس پذیر است و

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\gamma} & \frac{1}{\gamma} \\ -\frac{1}{\gamma} & \frac{2}{\gamma} \end{bmatrix}$$

ممکن است چنین به نظر آید که در محاسبه معکوسها ادامه نوشتن اسکالرهای دلخواه y_1, y_2, \dots پر زحمت باشد. عده‌ای حمل دو دنباله از ماتریسها را، یکی برای توصیف تحویل کردن A به ماتریس همانی، و دیگری برای ثبت اثر همان دنباله اعمال روی ماتریس همانی، ترجیح می‌دهند. خواننده خود قضاوت خواهد کرد که کدام روش از نظر ثبت مطالب و نوشتن روش بهتری است.

مثال ۱۶. می‌خواهیم معکوس ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

را بیابیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{25} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 12 & 0 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 & 60 & -60 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}$$

این مطلب نباید از نظر خوانندگان دور مانده باشد که تاکنون در مورد سطرهای ماتریسها به طور مفصل بحث کرده ایم ولی مطلب چندانی در باره ستونها نگفته ایم. بدین جهت توجه خود را روی سطرها متمرکز کردیم که از دیدگاه معادلات خطی این امر طبیعتاً به نظر می آید. چون مسلماً هیچ نکته خاصی در مورد سطرها وجود ندارد، بحث انجام شده در بخشهای قبل می توانست به جای سطرها روی ستونها هم انجام بگیرد.

روشن است که اگر یک عمل ستونی مقدماتی، و نیز هم‌ارزی ستونی به‌طریقی شبیه به‌طریقهٔ تعریف عمل سطری مقدماتی و هم‌ارزی سطری تعریف شود، هر ماتریس $m \times n$ هم‌ارز ستونی یک ماتریس «تحویل شدهٔ ستونی پلکانی» است. بعلاوه، هر عمل ستونی مقدماتی به‌شکل $A \rightarrow AE$ است که در آن E یک ماتریس مقدماتی $n \times n$ است - و الی‌آخر.

تمرین

۰۱ فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

یک ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی R که هم‌ارز سطری A باشد، و نیز یک ماتریس 3×3 معکوس‌پذیر P بیابید که $R = PA$.

۰۲ تمرین ۱ را با ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & i \\ 1 & -3 & -i \\ i & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

انجام دهید.

۰۳ در مورد هر یک از دو ماتریس

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

با به‌کار بردن اعمال سطری مقدماتی، معکوس‌پذیر بودن یا نبودن آنها را معلوم کنید؛ در صورت معکوس‌پذیر بودن، معکوس آنها را بیابید.

۰۴ فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

به ازای کدام X يك اسکالر c وجود دارد به طوری که $AX = cX$ ؟

۵. معلوم کنید که ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

معکوس پذیر است یا نه و A^{-1} را در صورت وجود بیابید.

۶. فرض کنید A يك ماتریس 2×1 ، و B ماتریسی 1×2 باشد. ثابت کنید که $C = AB$ معکوس پذیر نیست.

۷. فرض کنید A يك ماتریس $n \times n$ (مربعی) باشد. دو گزاره زیر را ثابت کنید:
الف) اگر A معکوس پذیر باشد، و به ازای يك ماتریس $n \times n$ مانند B ، $AB = 0$ ، آنگاه $B = 0$.

ب) اگر A معکوس پذیر نباشد، آنگاه ماتریسی $n \times n$ مانند B وجود دارد که $AB = 0$ ولی $B \neq 0$.

۸. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

با به کارگیری اعمال سطری مقدماتی ثابت کنید که A معکوس پذیر است اگر و تنها اگر $(ad - bc) \neq 0$.

۹. ماتریس $n \times n$ مانند A بالا مثلثی نامیده می شود، هرگاه به ازای $i > j$ ، $A_{ij} = 0$ ؛ یعنی، هرگاه همه درایه های واقع در زیر قطر اصلی آن ۰ باشند. ثابت کنید يك ماتریس (مربعی) بالا مثلثی معکوس پذیر است، اگر و تنها اگر همه درایه های واقع بر قطر اصلی آن مخالف صفر باشند.

۱۰. تعمیم زیر از تمرین ۶ را ثابت کنید: اگر A ماتریسی $m \times n$ و B ماتریسی $n \times m$ باشد و $n < m$ ، آنگاه AB معکوس پذیر نیست.

۱۱. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ باشد. نشان دهید که با تعدادی متناهی عمل سطری

و/یا ستونی مقدماتی می توان از A به يك ماتریس R رسید که هم «تحویل شده سطرى پلکانى» و هم «تحویل شده ستونى پلکانى» باشد؛ یعنی، $R_{ij} = 0$ هر گاه $i \neq j$ ، $R_{ii} = 1$ به ازای $1 \leq i \leq r$ ، و $R_{ii} = 0$ هر گاه $i > r$. نشان دهید $R = PAQ$ که در آن P و Q بترتیب ماتریسهایی $n \times m$ و $m \times n$ معکوس پذیر هستند.

۰۱۲. نتیجه مثال ۱۶ این مطلب را تداعی می کند که شاید ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

معکوس پذیر و معکوس آن A^{-1} دارای درایه های صحیح باشد. آیا می توانید این مطلب را ثابت کنید؟

فضاهای برداری

۱.۲. فضاهای برداری

در بخشهای مختلف ریاضیات با مجموعه‌هایی روبرو می‌شویم که مطالعه «ترکیبات خطی» عناصر آنها، هم بامعنی و هم جالب است. مثلاً، هنگام مطالعه معادلات خطی کاملاً طبیعی به نظر رسید که ترکیبات خطی سطرهای یک ماتریس را مورد توجه قرار بدهیم. احتمال دارد که خواننده، درس حساب دیفرانسیل و انتگرال را مطالعه کرده و در آنجا با ترکیبات خطی توابع روبرو شده باشد؛ و اگر درس معادلات دیفرانسیل را گرفته باشد، قطعاً این مفهوم را دیده است. همچنین، احتمالاً خواننده بردارهای در فضای اقلیدسی سه بعدی، بریزه ترکیبات خطی چنین بردارهایی را تجربه کرده است.

به بیان نادقیق، جبر خطی آن شاخه از ریاضیات است که درباره خواص عام دستگاههایی جبری متشکل از یک مجموعه همراه با مفهومی مناسب از نوعی «ترکیب خطی» از عناصر آن به بحث می‌پردازد. در این بخش ما به تعریف شیئی ریاضی می‌پردازیم که بنا بر تجربه مفیدترین تجرید از این نوع دستگاههای جبری است.

تعریف. یک فضای برداری (یا فضای خطی) متشکل است از:

۱. یک هیأت F از اسکالرها؛
۲. یک مجموعه V از اشیائی به نام بردارها؛
۳. یک قاعده (یا عمل) به نام جمع برداری که به هر جفت از بردارهای α و β از

V بردار $\alpha + \beta$ از V را که مجموع α و β نامیده می‌شود وابسته می‌سازد با این شرایط که
(الف) جمع جابجایی است؛ یعنی $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ؛

(ب) جمع شرکت‌پذیر است؛ یعنی $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ ؛

(پ) بردار یکتای 0 به نام بردار صفر در V موجود است به طوری که به ازای

$$\alpha + 0 = \alpha, \quad 0 + \alpha = \alpha$$

(ت) به ازای هر بردار α در V ، بردار یکتای $-\alpha$ در V موجود است به طوری

$$\alpha + (-\alpha) = 0$$

۴. یک قاعده (یا عمل) به نام ضرب اسکالری که به هر اسکالر c از F و هر بردار

α از V بردار $c\alpha$ در V را که حاصل ضرب c و α نامیده می‌شود وابسته سازد با این شرایط که

(الف) به ازای هر α در V ، $1\alpha = \alpha$ ؛

(ب) $(c_1 c_2)\alpha = c_1(c_2\alpha)$ ؛

(پ) $c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta$ ؛

(ت) $(c_1 + c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha$.

توجه به این نکته مهم است که طبق تعریف، یک فضای برداری شیئی است مرکب، متشکل از یک هیأت، یک مجموعه از بردارها، و دو عمل با خواص ویژه معین. مجموعه مفروضی از بردارها می‌تواند بخشی از چند فضای برداری متمایز باشد (ر. ک. مثال ۵ زیر). هر گاه هیچ امکان اشتباهی نباشد، فضای برداری را به طور ساده با V نشان می‌دهیم، و هنگامی که مشخص کردن هیأت نیز لازم باشد، خواهیم گفت که V فضایی برداری بر روی هیأت F است. نام «بردار» عمدتاً به جهت سهولت به عناصر مجموعه V اطلاق می‌شود. منشأ این نامگذاری را می‌توان از مثال ۱ که در زیر آمده است دریافت؛ اما، به این نام نباید بیش از اندازه اهمیت داد، زیرا چیزهای متنوعی که به عنوان بردار در V قرار می‌گیرند ممکن است شباهت چندانی با هیچ یک از مفاهیم بردار که خواننده در ذهن دارد نداشته باشند. می‌کوشیم این تنوع را با چند مثال روشن کنیم؛ حین مطالعه فضاهای برداری بر تعداد این مثالها به طور قابل ملاحظه‌ای خواهیم افزود.

مثال ۱. فضای n تایی F^n . فرض کنیم F هیأتی دلخواه و V مجموعه همه n تایی‌های

$\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ از اسکالرها x_i در F باشد. با فرض $\beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

و y_i ها در F ، مجموع α و β با

$$\alpha + \beta = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \quad (1-2)$$

و حاصل ضرب اسکالر c و بردار α با

$$c\alpha = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n) \quad (2-2)$$

تعریف می‌شود. بررسی این حکم که جمع برداری و ضرب اسکالری اخیر در شرایط (۳) و (۴) صدق می‌کنند با استفاده از خواص مشابه جمع و ضرب عناصر F آسان است.

مثال ۲. فضای ماتریسهای $m \times n$ ، $F^{m \times n}$. گیریم F هیأتی دلخواه و nm اعدادی صحیح و مثبت باشند. فرض کنیم $F^{m \times n}$ مجموعه همه ماتریسهای $m \times n$ بر روی هیأت F باشد. مجموع دو بردار A و B از $F^{m \times n}$ با

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \quad (۳-۲)$$

و حاصل ضرب اسکالر c و ماتریس A با

$$(cA)_{ij} = cA_{ij} \quad (۴-۲)$$

تعریف می‌شود. توجه کنید که $F^{1 \times n} = F^n$.

مثال ۳. فضای توابع از یک مجموعه به یک هیأت. گیریم F هیأتی دلخواه و S مجموعه‌ای غیر تهی باشد. فرض کنیم V مجموعه همه توابع از مجموعه S در مجموعه F باشد. مجموع دو بردار f و g از V بردار $f+g$ است؛ یعنی، تابعی از S در F است که با

$$(f+g)(s) = f(s) + g(s) \quad (۵-۲)$$

تعریف می‌شود. حاصل ضرب اسکالر c و تابع f ، تابع cf است که با

$$(cf)(s) = cf(s) \quad (۶-۲)$$

تعریف می‌شود. مثالهای قبل حالات خاصی از این مثال هستند. زیرا هر n تایی از عناصر F ممکن است به عنوان تابعی از مجموعه S متشکل از اعداد صحیح $۱, ۲, \dots, n$ در F محسوب شود. به طور مشابه، هر ماتریس $m \times n$ بر روی هیأت F تابعی است از مجموعه S متشکل از جفت اعداد صحیح (i, j) با شرایط $۱ \leq i \leq m$ و $۱ \leq j \leq n$ ، در هیأت F . حال برای این مثال، چگونگی بررسی صدق شرایط (۳) و (۴) توسط اعمال تعریف شده را نشان می‌دهیم. برای جمع برداری:

(الف) چون عمل جمع در F جابجایی است، به ازای هر s در S

$$f(s) + g(s) = g(s) + f(s)$$

و از این رو، دو تابع $f+g$ و $g+f$ یکی هستند.

(ب) چون عمل جمع در F شرکت پذیر است، به ازای هر s در S

$$f(s) + [g(s) + h(s)] = [f(s) + g(s)] + h(s)$$

و بنابراین، تابع $f+(g+h)$ همان تابع $(f+g)+h$ است.

(پ) بردار یکتای صفر، همان تابع صفر است که به هر عنصر S اسکالر 0 از F را

تخصیص می‌دهد.

(ت) به ازای هر f در V ، $(-f)$ تابعی است که با

$$(-f)(s) = -f(s)$$

تعریف می‌شود.

اکنون خواننده می‌بایست به آسانی بتواند با برهانی شبیه به آنچه که در مورد جمع برداری آوردیم، نشان دهد که ضرب اسکالری در شرایط مذکور در (۴) صدق می‌کند.

مثال ۴. فضای توابع چند جمله‌ای بر روی هیأت F . فرض کنیم F یک هیأت، و V

مجموعه همه توابع f ، از F در F ، با قاعده‌ای به صورت

$$f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n \quad (۷-۲)$$

باشد. در اینجا c_0, c_1, \dots, c_n اسکالرهایی ثابتی متعلق به F (و مستقل از x) هستند. چنین تابعی یک تابع چند جمله‌ای بر روی F نامیده می‌شود. فرض کنیم جمع و ضرب اسکالری طبق مثال ۳ تعریف بشوند. در اینجا باید توجه داشت که اگر f و g دو تابع چندجمله‌ای و c در F باشد، آنگاه $f + g$ و cf هم توابعی چندجمله‌ای هستند.

مثال ۵. هیأت اعداد مختلط C می‌تواند به عنوان فضایی برداری بر روی هیأت اعداد

حقیقی R محسوب شود. در حالت کلی‌تر، فرض کنیم F هیأت اعداد حقیقی باشد و V مجموعه n تایی‌های $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ که در آن $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ اعدادی مختلط هستند. جمع بردارها و ضرب اسکالری را طبق (۱-۲) و (۲-۲) در مثال ۱ تعریف می‌کنیم. بدین طریق به یک فضای برداری بر روی هیأت R دست می‌یابیم که با فضاهای C^n و R^n اختلاف بسیار دارد.

اینک به استخراج چند حکم ساده که تقریباً بلافاصله از تعریف فضای برداری

نتیجه می‌شوند، می‌پردازیم. اگر c یک اسکالر و o بردار صفر باشد، آنگاه بنا بر ۳ (پ) و ۴ (پ)

$$co = c(o + o) = co + co .$$

با افزودن $(-co)$ به دو طرف این تساوی و استفاده از ۳ (ت) داریم

$$co = o . \quad (۸-۲)$$

به‌طور مشابه، به‌ازای اسکالر o و هر بردار α داریم

$$o\alpha = o . \quad (۹-۲)$$

اگر c یک اسکالر غیر صفر و α برداری باشد که $c\alpha = o$ ، آنگاه بنا بر (۸-۲)،

$$\text{اما } c^{-1}(c\alpha) = o$$

$$c^{-1}(c\alpha) = (c^{-1}c)\alpha = 1\alpha = \alpha$$

و از اینجا، $\alpha = 0$. بنابراین، می‌بینیم که اگر c یک اسکالر و α یک بردار باشد و $c\alpha = 0$ ، آنگاه یا c اسکالر صفر است و یا α بردار صفر. اگر α برداری دلخواه در V باشد، آنگاه

$$0 = 0\alpha = (1-1)\alpha = 1\alpha + (-1)\alpha = \alpha + (-1)\alpha$$

و از آن نتیجه می‌شود که

$$(-1)\alpha = -\alpha. \quad (10-2)$$

سرانجام، از خواص شرکت پذیری و جایجایی عمل جمع برداری نتیجه می‌شود که حاصل جمع چند بردار نیز مستقل از نحوه ترکیب و شرکت این بردارها در جمع است. مثلاً، اگر $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ بردارهایی در V باشند، آنگاه

$$(\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4) = [\alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_3)] + \alpha_4$$

و چنین مجموعی می‌تواند بدون ابهام به صورت

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

نوشته شود.

تعریف. بردار β از V یک ترکیب خطی بردارهای $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ از V نامیده می‌شود، هرگاه اسکالرهایی چون c_1, \dots, c_n در F وجود داشته باشند به طوری که

$$\begin{aligned} \beta &= c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n \\ &= \sum_{i=1}^n c_i\alpha_i. \end{aligned}$$

تعمیمهای دیگر خاصیت شرکت پذیری جمع برداری و خواص بخش پذیری ۴ (ب) و ۴ (ث) ضرب اسکالری، در ترکیبات خطی نیز به کار می‌روند:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c_i\alpha_i + \sum_{i=1}^n d_i\alpha_i &= \sum_{i=1}^n (c_i + d_i)\alpha_i \\ c \sum_{i=1}^n c_i\alpha_i &= \sum_{i=1}^n (cc_i)\alpha_i. \end{aligned}$$

بخشهای معینی از جبر خطی با هندسه ارتباطی نزدیک دارد. خود واژه «فضا» مفهومی هندسی را تداعی می‌کند. همچنین است واژه «بردار» نزد بیشتر مردم. ضمن ادامه مطالعه فضاهای برداری، خواننده مشاهده خواهد کرد که بسیاری از اصطلاحات به طور ضمنی معنی هندسی دارند. قبل از آنکه این بخش مقدماتی در مورد فضاهای برداری را

پایان دهیم، به بررسی رابطه این فضاها با هندسه، تا آنجایی که اقلاً منشأ نام «فضای برداری» روشن شود، می پردازیم. این بررسی بحثی شهودی و خلاصه است.

فضای برداری R^3 را در نظری می گیریم. در هندسه تحلیلی، ۳ تایی های (x_1, x_2, x_3) از اعداد حقیقی با نقاط فضای سه بعدی اقلیدسی یکی گرفته می شوند. با این زمینه، یک بردار معمولاً به صورت یک پاره خط جهت دار PQ ، از یک نقطه P واقع در فضا به نقطه دیگر Q تعریف می شود. این مطلب به فرمولبندی دقیق ایده «پیکان» از نقطه P به نقطه Q می انجامد. از نحوه به کار رفتن بردارها چنین برمی آید که بردار باید با طول و جهت مشخص شود. بنابراین، دو پاره خط جهت دار با طول برابر و جهت یکسان را باید یکی گرفت.

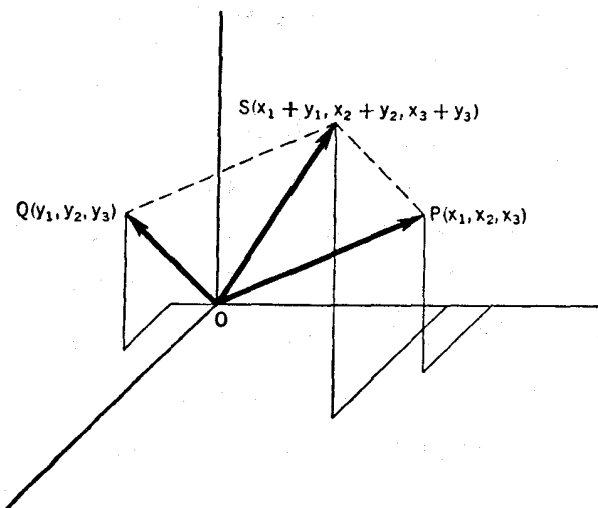
پاره خط جهت دار PQ ، از نقطه $P = (x_1, x_2, x_3)$ به نقطه $Q = (y_1, y_2, y_3)$ و پاره خط جهت دار از مبدأ $(0, 0, 0)$ به نقطه $(y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$ دارای یک طول و یک جهت هستند. بعلاوه، این تنها پاره خط جهت داری است که از مبدأ آغاز می شود و دارای طول و جهتی مساوی PQ است. بنابراین، اگر توافق شود که تنها بردارهایی را مطرح کنیم که از مبدأ آغاز می شوند، به هر طول و هر جهت داده شده ای دقیقاً یک بردار مربوط می شود.

بردار OP ، از مبدأ به نقطه $P = (x_1, x_2, x_3)$ ، کاملاً با نقطه P معین می شود؛ از این رو، می توان این بردار را با نقطه P یکی دانست. به همین دلیل، در تعریف فضای برداری R^3 بردارها را به طور ساده با سه تایی های (x_1, x_2, x_3) تعریف کردیم.

با مفروض بودن دو نقطه $P = (x_1, x_2, x_3)$ و $Q = (y_1, y_2, y_3)$ تعریف مجموع بردارهای OP و OQ را می توان به طور هندسی بیان کرد. اگر این بردارها موازی نباشند، آنگاه پاره خطهای OP و OQ یک صفحه را مشخص می کنند و این دو پاره خط دو ضلع متوازی الاضلاعی را تشکیل می دهند که در این صفحه قرار دارد (ر. ک. شکل ۱). یکی از قطرهای این متوازی الاضلاع از O به یک نقطه S امتداد می یابد و مجموع دو بردار OP و OQ بنا بر تعریف بردار OS گرفته می شود. مختصات نقطه S عبارتند از $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ ؛ و از این رو، تعریف هندسی جمع برداری با تعریف جبری ارائه شده در مثال ۱ هم ارز است.

ضرب اسکالری تعبیر هندسی ساده تری دارد. اگر c عددی حقیقی باشد، آنگاه حاصل ضرب c و بردار OP ، برداری است از مبدأ با طولی $|c|$ برابر طول OP و جهتی موافق با جهت OP هر گاه $c > 0$ ، و مخالف با جهت OP هر گاه $c < 0$. حاصل این ضرب اسکالری، دقیقاً بردار OT است که در آن $T = (cx_1, cx_2, cx_3)$ ؛ و بنابراین، با تعریف جبری ارائه شده برای R^3 سازگار است.

ممکن است گاهی خواننده مفید بداند که درباره فضاهای برداری «به طور هندسی بیندیشد»؛ بدین معنی که برای خود و به جهت تصور بهتر و نیز برانگیختن برخی از ایده ها به ترسیم شکل پردازد. در واقع، او باید چنین کند؛ اما، هنگام رسم چنین تصاویری باید به خاطر داشته باشد که چون برخورد ما با فضاهای برداری به صورت دستگاههای جبری



شکل ۱

است، تمام اثباتهایی هم که ارائه می‌کنیم طبیعتی جبری خواهند داشت.

تمرین

۱. هرگاه F یک هیأت باشد، تحقیق کنید که F^m (به صورتی که در مثال ۱ تعریف شد) فضایی برداری بر روی هیأت F است.

۲. هرگاه V یک فضای برداری بر روی هیأت F باشد، به ازای همه بردارهای $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ و رابطه در V

$$(\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4) = [\alpha_2 + (\alpha_3 + \alpha_1)] + \alpha_4$$

برقرار است.

۳. اگر C هیأت اعداد مختلط باشد، چه بردارهایی از C^3 ترکیبی خطی از بردارهای $(1, 1, 1)$ ، $(1, 0, -1)$ ، $(0, 1, 1)$ و $(1, 1, 1)$ هستند؟

۴. فرض کنید V مجموعه همه جفتهای (x, y) از اعداد حقیقی و F هیأت اعداد حقیقی باشد. آیا V با دو عمل تعریف شده زیر

$$(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1)$$

$$c(x, y) = (cx, y)$$

فضایی برداری بر روی هیأت اعداد حقیقی هست؟

۰۵ روی R^n دو عمل

$$\alpha \oplus \beta = \alpha - \beta$$

$$c \odot \alpha = -c\alpha$$

را تعریف می‌کنیم. اعمال سمت راست همان اعمال معمولی هستند. چه اصولی از فضاهای برداری توسط (R^n, \oplus, \odot) برآورده می‌شوند؟

۰۶ فرض کنید V مجموعه همه توابع (با مقدار) مختلط f روی خط اعداد حقیقی با فرض

$$f(-t) = \overline{f(t)}$$

به ازای هر t در R باشد. در اینجا خط زیر نشانگر مزدوج عددی مختلط است. نشان دهید که V با دو عمل

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t)$$

$$(cf)(t) = cf(t)$$

فضایی برداری بر روی هیأت اعداد حقیقی است. تابعی در V مثال بزنید که (بامقدار) حقیقی نباشد.

۰۷ فرض کنید V مجموعه جفتهای (x, y) از اعداد حقیقی و F هیأت اعداد حقیقی باشد. آیا V با اعمال تعریف شده زیر

$$(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, 0)$$

$$c(x, y) = (cx, 0)$$

یک فضای برداری است؟

۲.۲ زیرفضاها

در این بخش به معرفی برخی از مفاهیم بنیادی مبحث فضاهای برداری می‌پردازیم.

تعریف. گیریم V فضایی برداری بر روی هیأت F باشد. یک زیرفضای V عبارت است از یک زیر مجموعه W از V که خود با اعمال جمع برداری و ضرب اسکالری روی V ، یک فضای برداری بر روی F باشد.

بررسی مستقیم اصول فضاهای برداری نشان می‌دهد که زیرمجموعه W از V يك زیرفضاست هرگاه به‌ازای هر α و β در W بردار $\alpha + \beta$ نیز در W باشد؛ بردار 0 در W باشد؛ به‌ازای هر α در W بردار $(-\alpha)$ در W باشد؛ و بالاخره به‌ازای هر α در W و هر اسکالر c بردار $c\alpha$ نیز در W باشد. بررسی خواص جابجایی و شرکت‌پذیری جمع برداری و خواص ۴ (الف)، (ب)، (پ)، و (ت) ضرب اسکالری لزومی ندارد؛ زیرا این خواص همان خواص اعمال روی V هستند. هنوز هم امکان ساده‌تر کردن مطالب هست.

قضیه ۱. يك زیرمجموعه غیرتهی W از V زیرفضایی از V است اگر و تنها اگر به‌ازای هر دو بردار α و β از W و هر اسکالر c از F بردار $c\alpha + \beta$ در W باشد.

اثبات. فرض کنیم W زیرمجموعه‌ای غیرتهی از V باشد که به‌ازای همه بردارهای α و β از W و همه اسکالرهایی c از F بردار $c\alpha + \beta$ متعلق به W باشد. چون W غیرتهی است، برداری مانند ρ در W موجود است، و از این رو، $\rho + (-1)\rho = 0$ به W تعلق دارد. در این صورت، اگر α برداری دلخواه از W و c اسکالری دلخواه باشد، بردار $0 = c\alpha + (-1)\alpha$ نیز در W قرار دارد. بخصوص، $(-1)\alpha = -\alpha$ هم در W است. سرانجام، اگر α و β در W باشند، آنگاه $\alpha + \beta = 1\alpha + \beta$ نیز در W است. بنابراین، W يك زیرفضای V است. بعکس، اگر W زیرفضایی از V ، α و β دو بردار از W ، و c يك اسکالر باشد، یقیناً $c\alpha + \beta$ در W قرار دارد. \square

بعضی ترجیح می‌دهند که خاصیت $c\alpha + \beta$ از قضیه ۱ را به‌عنوان تعریف يك زیرفضا به‌کار برند، که البته با اصل آن اندکی تفاوت دارد. نکته مهم در این است که اگر W زیرمجموعه‌ای غیرتهی از V باشد و به‌ازای همه α ها و β های در W و همه اسکالرهایی c در F ، بردار $c\alpha + \beta$ در W قرار بگیرد، آنگاه W (با اعمالی که از V به‌ارث می‌برد) يك فضای برداری تشکیل می‌دهد. این مطلب چندین مثال جدید از فضاهای برداری برای ما تدارک می‌بیند.

مثال ۶.

(الف) اگر V فضای برداری دلخواهی باشد، آنگاه V زیرفضایی از V است؛ زیر-مجموعه متشکل از بردار صفر تنها، زیرفضایی از V است که زیرفضای صفر V نامیده می‌شود.
(ب) در F^n ، به‌ازای $n \geq 2$ ، مجموعه همه n تایی‌های (x_1, x_2, \dots, x_n) با شرط $x_1 = 0$ يك زیرفضاست؛ حال آنکه، مجموعه این n تایی‌ها با شرط $x_1 = 1 + x_2$ با يك زیرفضا نیست.

(پ) فضای توابع چندجمله‌ای بر روی هیأت F ، زیرفضایی از فضای همه توابع از F در F است.

(ت) يك ماتریس $n \times n$ (مربعی) A بر روی هیأت F متقارن است هرگاه به‌ازای هر i و j ، $A_{ij} = A_{ji}$. ماتریسهای متقارن زیرفضایی از فضای همه ماتریسهای $n \times n$ بر روی

F را تشکیل می‌دهند.

(ث) يك ماتريس $n \times n$ (مربعی) A بر روی هیأت اعداد مختلط C هرمیتی (یا خودالحاقی) است، هرگاه به ازای هر z و k

$$A_{jk} = \overline{A_{kj}}.$$

در اینجا خط زیر نمایشگر مزدوج عددی مختلط است. يك ماتريس 2×2 هرمیتی است اگر و تنها اگر به شکل

$$\begin{bmatrix} z & x+iy \\ x-iy & \omega \end{bmatrix}$$

باشد که در آن x, y, z ، و ω اعدادی حقیقی اند. مجموعه همه ماتریسهای هرمیتی، زیر-فضایی از فضای همه ماتریسهای $n \times n$ بر روی C نیست. زیرا، اگر A هرمیتی باشد درایه‌های قطری آن A_{11}, A_{22}, \dots ، همگی حقیقی خواهند بود؛ اما، در حالت عمومی، درایه‌های قطری iA حقیقی نیستند. از طرف دیگر، بسادگی می‌توان تحقیق کرد که مجموعه ماتریسهای هرمیتی مختلط $n \times n$ فضایی برداری بر روی هیأت اعداد حقیقی R (با اعمال معمولی) است.

مثال ۷. فضای جواب يك دستگاه معادلات خطی همگن. گیریم A يك ماتريس $m \times n$ بر روی هیأت F باشد. در این صورت، مجموعه همه ماتریسهای $1 \times n$ (ستونی) مانند X بر روی F به طوری که $AX = 0$ ، زیرفضایی از فضای همه ماتریسهای $1 \times n$ بر روی F است. برای اثبات این موضوع، باید نشان دهیم وقتی که $AX = 0$ ، $AY = 0$ ، و c اسکالری دلخواه از F باشد، $A(cX + Y) = 0$. این مطلب بیدرنگ از مطلب کلی زیر نتیجه می‌شود.

لم. اگر A ماتریسی $m \times n$ بر روی F باشد، و B و C دو ماتریس $n \times p$ بر روی F باشند، آنگاه به ازای هر اسکالر d در F

$$A(dB + C) = d(AB) + AC. \quad (11-2)$$

اثبات.

$$\begin{aligned} [A(dB + C)]_{ij} &= \sum_k A_{ik}(dB + C)_{kj} \\ &= \sum_k (dA_{ik}B_{kj} + A_{ik}C_{kj}) \\ &= d \sum_k A_{ik}B_{kj} + \sum_k A_{ik}C_{kj} \\ &= d(AB)_{ij} + (AC)_{ij} \\ &= [d(AB) + AC]_{ij}. \quad \square \end{aligned}$$

به طور مشابه، می توان نشان داد که به شرط تعریف شدن حاصل جمعها و حاصل ضربهای ماتریسی، $(dB+C)A = d(BA) + CA$.

قضیه ۲. گیریم V فضایی برداری برداری بر روی هیأت F باشد. اشتراك هر دسته از زیر-فضاهای V زیرفضایی از V است.

اثبات. فرض کنیم $\{W_\alpha\}$ دسته ای از زیرفضاهای V ، و $W = \bigcap_\alpha W_\alpha$ اشتراك آنها باشد. توجه دارید که W به عنوان مجموعه همه عناصر متعلق به همه W_α ها تعریف می شود (ر. ک. ضمیمه). چون هر W_α زیرفضاست، شامل بردار صفر هم هست. بنابراین، بردار صفر در W است، و از این رو W غیرتهی است. گیریم α و β دو بردار در W و c يك اسکالر باشد. بنا بر تعریف W ، هم α و هم β به همه W_α ها تعلق دارند، و چون هر W_α زیرفضاست، بردار $(c\alpha + \beta)$ در همه W_α ها قرار دارد. بنابراین، $(c\alpha + \beta)$ نیز در W است و بنا بر قضیه ۱، W يك زیر فضای V است. \square

از قضیه ۲ نتیجه می شود که اگر S مجموعه ای دلخواه از بردارهای V باشد، آنگاه کوچکترین زیرفضایی از V که شامل S باشد هم وجود دارد؛ یعنی زیرفضایی از V وجود دارد که شامل S است و خود مشمول هر زیر فضای دیگر در بردارنده S .

تعریف. گیریم S مجموعه ای از بردارهای فضای برداری V باشد. زیر فضای پدید آمده توسط S ، بنا بر تعریف، عبارت است از اشتراك W از همه زیرفضاهای V که شامل S باشند. هنگامی که S مجموعه ای متناهی از بردارها باشد، یعنی $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ ، W را زیر فضای پدید آمده توسط بردارهای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ نیز می نامیم.

قضیه ۳. زیر فضای پدید آمده توسط يك زیرمجموعه غیرتهی S از فضای برداری V عبارت است از مجموعه همه ترکیبات خطی بردارهای S .
اثبات. گیریم W زیر فضای پدید آمده توسط S باشد. در این صورت، هر ترکیب خطی

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n$$

از بردارهای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ در S ، مسلماً در W است. بنابراین، W شامل L ، مجموعه همه ترکیبات خطی بردارهای واقع در S ، است. از طرف دیگر، مجموعه L شامل S و غیرتهی است. اگر α و β متعلق به L باشند، آنگاه α يك ترکیب خطی

$$\alpha = x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n$$

از بردارهای α_i در S ، و β يك ترکیب خطی

$$\beta = y_1\beta_1 + \dots + y_n\beta_n$$

از بردارهای β_j در S است. حال، به ازای هر اسکالر c

$$c\alpha + \beta = \sum_{i=1}^m (cx_i)\alpha_i + \sum_{j=1}^n y_j\beta_j.$$

از این رو، $c\alpha + \beta$ به L تعلق دارد و L یک زیر فضای V است.

تا اینجا نشان داده ایم که L زیر فضایی است از V شامل S و همچنین نشان داده ایم هر زیر فضایی که شامل S باشد شامل L نیز هست. بنابراین، نتیجه می گیریم که L اشتراک همه زیر فضاهای شامل S است؛ یعنی L زیر فضای پدید آمده توسط مجموعه S است. \square

تعریف. اگر S_1, S_2, \dots, S_k زیر مجموعه هایی از فضای برداری V باشند، مجموعه همه حاصل جمعهای

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$$

از بردارهای α_i در S_i ، مجموع زیر مجموعه های S_1, S_2, \dots, S_k نام دارد و با

$$S_1 + S_2 + \dots + S_k$$

یا

$$\sum_{i=1}^k S_i$$

نشان داده می شود.

اگر W_1, W_2, \dots, W_k زیر فضاهایی از V باشند، بسادگی دیده می شود که مجموع

$$W = W_1 + W_2 + \dots + W_k$$

یک زیر فضای V است که شامل هر یک از زیر فضاهای W_i است. همچنان که در اثبات قضیه ۳ آمده است، از این مطلب نتیجه می شود که W زیر فضای پدید آمده توسط اجتماع W_1, W_2, \dots, W_k است.

مثال ۸. گیریم F زیر هئاتی از هیأت اعداد مختلط باشد و

$$\alpha_1 = (1, 2, 0, 3, 0)$$

$$\alpha_2 = (0, 0, 1, 4, 0)$$

$$\alpha_3 = (0, 0, 0, 0, 1).$$

بنابراین قضیه ۳ بردار α در زیر فضای W پدید آمده توسط $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ از فضای F^5 قرار دارد اگر و تنها اگر اسکالرهایی مانند c_1, c_2, c_3 در F وجود داشته باشند به طوری که

$$\alpha = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + c_3 \alpha_3.$$

از این رو، W متشکل است از همه بردارهای به صورت

$$\alpha = (c_1, 2c_1, c_2, 3c_1 + 2c_2, c_3)$$

که در آن c_1, c_2, c_3 و c_3 اسکالرهایی دلخواه از F می باشند. به عبارت دیگر، می توان W را به عنوان مجموعه همه ۵ تایی های

$$\alpha = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

که در آن x_i ها در F هستند و

$$x_2 = 2x_1$$

$$x_4 = 3x_1 + 2x_2$$

توصیف کرد. بدین نحو $(2, 4, 6, 7, 8)$ در W نیست. لیکن $(-3, -6, 1, -5, 2)$ در W قرار دارد، لیکن

مثال ۹. گیریم F زیرهیاتی از هیأت اعداد مختلط C و V فضای برداری همه ماتریسهای 2×2 بر روی F باشد. فرض کنیم W_1 زیرمجموعه ای است از V متشکل از همه ماتریسهای به صورت

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & 0 \end{bmatrix}$$

که در آن x, y و z اسکالرهایی دلخواهی از F هستند. سرانجام، فرض کنیم W_2 زیرفضایی از V باشد متشکل از همه ماتریسهای به صورت

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$$

که در آن x و y اسکالرهایی دلخواهی از F هستند. W_1 و W_2 دو زیرفضا از V هستند. همچنین

$$V = W_1 + W_2.$$

زیرا،

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}.$$

زیرفضای $W_1 \cap W_2$ متشکل از همه ماتریسهای به صورت

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

است.

مثال ۰۱۰. گیریم A ماتریسی $m \times n$ بروی هیأت F باشد. بردارهای سطری ماتریس A بردارهایی در F^n هستند که با $\alpha_i = (A_{i1}, \dots, A_{in})$ ، $i = 1, 2, \dots, m$ ، بدست می‌آیند. زیرفضایی از F^n که توسط بردارهای سطری A پدید می‌آید فضای سطری ماتریس A نامیده می‌شود. زیرفضایی که در مثال ۸ در نظر گرفته شد، فضای سطری ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

است. این زیرفضا، فضای سطری ماتریس

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -8 & 1 & -8 & 0 \end{vmatrix}$$

نیز هست.

مثال ۰۱۱. فرض کنیم V فضای همه توابع چندجمله‌ای بروی هیأت F باشد. گیریم S زیرمجموعه‌ای از V متشکل از توابع چندجمله‌ای f_0, f_1, f_2, \dots با تعریف

$$f_n(x) = x^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

باشد. در این صورت، V زیرفضای پدیدآمده توسط مجموعه S است.

تمرین

۰۱. کدامیک از مجموعه‌های زیر متشکل از بردارهای $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ در R^n زیر-فضایی از R^n ($n \geq 3$) است؟

(الف) مجموعه همه α ها به طوری که $a_1 \geq 0$ ؛

(ب) مجموعه همه α ها با شرط $a_1 + 3a_2 = a_3$ ؛

(پ) مجموعه همه α ها به طوری که $a_1^2 = a_2$ ؛

(ت) مجموعه همه α ها با شرط $a_1 a_2 = 0$ ؛

(ث) مجموعه همه α ها به طوری که a_2 گویا باشد.

۰۴. گیریم V فضای برداری (حقیقی) همه توابع f از R در R باشد. کدامیک از مجموعه‌های توابع زیر، زیرفضایی از V است؟

(الف) همه f هایی که برای آنها $f(x^2) = f(x)^2$ ؛

(ب) همه f های با شرط $f(0) = f(1)$ ؛

(پ) همه f هایی که برای آنها $f(3) = 1 + f(-5)$ ؛

(ت) همه f های با شرط $f(-1) = 0$ ؛

(ث) همه f هایی که پیوسته هستند.

۰۳. آیا بردار $(-1, 0, -1, 3)$ ، $(-1, 1, 1, -3)$ ، و $(1, 1, 9, -5)$ از فضای R^5 قرارداد؟

۰۴. گیریم W مجموعه همه $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ ها در R^5 باشد که در دستگاه

$$2x_1 - x_2 + \frac{4}{3}x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + \frac{3}{4}x_2 - x_3 - x_5 = 0$$

$$9x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0$$

صدق می‌کنند. مجموعه‌ای متشکل از چند بردار بیابید که W را پدید آورد.

۰۵. فرض کنید f یک هیأت و n عدد صحیح مثبتی باشد ($n \geq 2$). گیریم V فضای برداری همه ماتریسهای $n \times n$ بر روی F باشد. کدامیک از مجموعه‌های زیرین از ماتریسهای A در V زیرفضایی از V است؟

(الف) همه ماتریسهای معکوس پذیر A ؛

(ب) همه ماتریسهای معکوس ناپذیر A ؛

(پ) همه A ها با شرط $AB = BA$ ؛ که در اینجا B یک ماتریس ثابت در V است؛

(ت) همه ماتریسهای A به طوری که $A^2 = A$.

۰۶. (الف) ثابت کنید که زیرفضاهای R^1 فقط R^1 و زیرفضای صفر هستند.

(ب) ثابت کنید که هر زیرفضای R^2 یا خود R^2 است یا زیرفضای صفر است و یا

متشکل از همه مضربهای اسکالری یک بردار ثابت در R^2 است. (زیرفضای نوع آخر،

به طور شهودی، خط راستی است که از مبدأ می‌گذرد.)

(پ) آیا می‌توانید زیرفضاهای R^3 را توصیف کنید؟

۰۷. فرض کنید W_1 و W_2 دو زیر فضا از یک فضای برداری V ، و نیز اجتماع (دومجموعه)

W_1 و W_2 يك زیر فضای آن باشد. ثابت کنید که یکی از دو زیر فضای W_1 شامل دیگری است.

۸. فرض کنید V فضای برداری همه توابع از R در R باشد. فرض کنید V_0 زیر مجموعه توابع زوج باشد، یعنی توابعی مانند f به قسمی که $f(-x) = f(x)$ و V_1 زیر مجموعه توابع فرد باشد، یعنی توابعی مانند f به قسمی که $f(-x) = -f(x)$.

(الف) ثابت کنید V_0 و V_1 زیر فضاهای V هستند؛

(ب) ثابت کنید $V_0 + V_1 = V$ ؛

(پ) ثابت کنید $V_0 \cap V_1 = \{0\}$.

۹. فرض کنید W_1 و W_2 دو زیر فضای يك فضای برداری V با شرایط $W_1 + W_2 = V$ و $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ باشند. ثابت کنید به ازای هر بردار α در V ، بردار یکتای α_1 در W_1 و بردار یکتای α_2 در W_2 وجود دارد به طوری که $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.

۳.۴. پایه و بعد

اکنون، به امر مهم تخصیص بعد به فضاهای برداری معینی می پردازیم. هر چند معمولاً «بعد» را مقوله‌ای هندسی تلقی می کنیم، با این وجود باید تعریف جبری مناسبی برای بعد يك فضای برداری بیابیم. این مهم از طریق مفهوم پایه برای فضا انجام می گیرد.

تعریف. گیریم V فضایی برداری بردی F باشد. يك زیرمجموعه S از V وابسته خطی (یا به طود ساده وابسته) نامیده می شود هرگاه بردارهایی متمایز مانند $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ در S و اسکالرهایی مانند c_1, c_2, \dots, c_n که همگی صفر نباشند در F یافت شود، به طوری که

$$c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \dots + c_n \alpha_n = 0.$$

مجموعه‌ای که وابسته خطی نباشد مستقل خطی (یا دارای استقلال خطی) نام دارد. اگر مجموعه S تنها شامل تعدادی متناهی بردار $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ باشد، گاهی به جای اینکه بگوییم S وابسته (یا مستقل) خطی است می‌گوییم $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ وابسته (یا مستقل) خطی هستند.

نکات زیرپی آمده‌های ساده این تعریف هستند.

۱. هر مجموعه که شامل يك مجموعه وابسته خطی باشد خود وابسته خطی است.
۲. هر زیر مجموعه يك مجموعه مستقل خطی، مجموعه‌ای است مستقل خطی.
۳. هر مجموعه‌ای که شامل بردار 0 باشد وابسته خطی است؛ زیرا $0 = 0$.
۴. مجموعه S از بردارها، مستقل خطی است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعه متناهی S مستقل خطی باشد؛ یعنی، اگر و تنها اگر به ازای هر چند بردار متمایز $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ از

S ، تساوی $c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n = 0$ ایجاب کند که همه c_i ها صفر هستند.

تعریف. گیریم V فضایی برداری باشد. یک پایه برای V مجموعه‌ای مستقل خطی از بردارهای V است که فضای V را پدیدآورد. فضای V دارای (یا با) بعد متناهی است هرگاه یک پایه متناهی داشته باشد.

مثال ۱۲. فرض کنیم F زیرحیاتی از اعداد مختلط باشد. بردارهای

$$\alpha_1 = (3, 0, -3)$$

$$\alpha_2 = (-1, 1, 2)$$

$$\alpha_3 = (4, 2, -2)$$

$$\alpha_4 = (2, 1, 1)$$

از F^3 وابسته خطی هستند؛ زیرا

$$2\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 + 0\alpha_4 = 0.$$

بردارهای

$$\epsilon_1 = (1, 0, 0)$$

$$\epsilon_2 = (0, 1, 0)$$

$$\epsilon_3 = (0, 0, 1)$$

مستقل خطی هستند.

مثال ۱۳. فرض کنیم F یک هیأت و S زیرمجموعه‌ای از F^n متشکل از بردارهای

$\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ با تعریف

$$\epsilon_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$$

$$\epsilon_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

.

$$\epsilon_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

باشد. x_1, x_2, \dots, x_n را اسکالرهایی در F می‌گیریم و قرار می‌دهیم

$$\alpha = x_1\epsilon_1 + x_2\epsilon_2 + \dots + x_n\epsilon_n.$$

در این صورت،

$$\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (12-2)$$

این مطلب نشان می‌دهد که $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ فضای F^n را پدید می‌آورند. چون $\alpha = 0$ اگر و تنها اگر $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ ، بردارهای $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ مستقل خطی هستند.

در نتیجه، مجموعه $S = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n\}$ پایه‌ای برای F^n است. این پایه خاص را پایه استاندارد F^n می‌نامیم.

مثال ۱۴. گیریم P یک ماتریس $n \times n$ معکوس پذیر بر روی هیأت F باشد. در این صورت، ستونهای P ؛ یعنی، P_1, P_2, \dots, P_n پایه‌ای برای فضاهای ماتریسهای ستونی $F^{n \times 1}$ تشکیل می‌دهند. دلیل این مطلب به شرح زیر است. اگر X ماتریسی ستونی باشد، آنگاه

$$PX = x_1 P_1 + \dots + x_n P_n.$$

حال چون $PX = 0$ تنها دارای جواب بدیهی $X = 0$ است، نتیجه می‌گیریم که مجموعه $\{P_1, \dots, P_n\}$ مستقل خطی است. اما، چرا این مجموعه $F^{n \times 1}$ را پدید می‌آورد؟ فرض کنیم Y ماتریس ستونی دلخواهی باشد. اگر بگیریم $X = P^{-1}Y$ ، آنگاه $Y = PX$ یا

$$Y = x_1 P_1 + \dots + x_n P_n.$$

از این رو، $\{P_1, \dots, P_n\}$ پایه‌ای برای $F^{n \times 1}$ است.

مثال ۱۵. گیریم A ماتریسی $m \times n$ و فضای جواب دستگاه همگن $AX = 0$ باشد (مثال ۷). فرض کنیم R یک ماتریس تحویل شده سطر پلکانی هم ارز با A باشد. در این صورت، فضای جواب دستگاه $AX = 0$ نیز هست. اگر R دارای r سطر غیر صفر باشد، آنگاه دستگاه معادلات $AX = 0$ بوضوح r تا از مجهولهای x_1, \dots, x_n را بر حسب $(n-r)$ مجهول باقیمانده x_j بیان می‌کند. فرض کنیم درایه‌های غیر صفر مقدم سطرهای غیر صفر در ستونهای k_1, \dots, k_r قرار گیرند. اگر J مجموعه متشکل از $(n-r)$ نمایه غیر از k_1, \dots, k_r باشد:

$$J = \{1, \dots, n\} - \{k_1, \dots, k_r\}$$

آنگاه، دستگاه $AX = 0$ به صورت

$$x_{k_1} + \sum_J c_{1j} x_j = 0$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$x_{k_r} + \sum_J c_{rj} x_j = 0$$

است که در آن c_{ij} ها اسکالرهای معینی هستند. همه جوابها با تخصیص مقادیری (دلخواه) به x_j هایی که نمایه J آنها در J قرار دارد، و سپس محاسبه مقادیر متناظر x_{k_1}, \dots, x_{k_r} به دست می‌آیند. به ازای هر z در J ، گیریم E_z جوابی باشد که از قرار دادن $x_i = 0$ و $x_j = 1$ به ازای همه i های دیگر واقع در J ، به دست می‌آید. ادعا می‌کنیم که $(n-r)$ بردار E_z ، z در J ، پایه‌ای برای فضای جواب تشکیل می‌دهند.

چون ماتریس ستونی E_j در سطر j م دارای درایه ۱ و در سطرهای نمایه گذاری شده توسط عناصر دیگر J دارای درایه صفر است، استدلال مثال ۱۳ نشان می‌دهد که مجموعه این بردارها مستقل خطی است. به دلیل زیر، این مجموعه فضای جواب را پدید می‌آورد. اگر ماتریس ستونی T با درایه‌های $t_{n,0}, t_{n,1}, \dots, t_{n,n}$ در فضای جواب باشد، ماتریس

$$N = \sum_j t_j E_j$$

نیز در فضای جواب قرارداد و جوابی است که به ازای هر j در J ، $x_j = t_j$. جوابی با این خاصیت، یکتاست؛ از این رو، $N = T$ و T در فضای پدید آمده توسط بردارهای E_j قرارداد.

مثال ۱۶. اکنون مثالی از یک پایه نامتناهی می‌آوریم. گیریم F زیرمجموعه از هیأت اعداد مختلط و V فضای توابع چندجمله‌ای بر روی F باشد. یادآوری می‌کنیم که این توابع، توابعی از F در F هستند که قاعده‌ای به صورت

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$$

دارند. فرض کنیم $f_k(x) = x^k$ و $k = 0, 1, 2, \dots$ مجموعه (نامتناهی) $\{f_0, f_1, f_2, \dots\}$ پایه‌ای برای V است. این مجموعه بوضوح V را پدید می‌آورد؛ زیرا تابع f (بالا) عبارت است از

$$f = c_0 f_0 + c_1 f_1 + \dots + c_n f_n.$$

خواننده باید متوجه باشد که این فرمول در واقع تکراری از تعریف تابع چندجمله‌ای است؛ یعنی، تابع f از F در F ، یک تابع چندجمله‌ای است اگر و تنها اگر یک عدد صحیح n و اسکالرهای c_0, c_1, \dots, c_n وجود داشته باشند به طوری که $f = c_0 f_0 + \dots + c_n f_n$. چرا این توابع مستقل اند؟ نشان دادن اینکه مجموعه $\{f_0, f_1, f_2, \dots\}$ مستقل خطی است به معنی نشان دادن این است که هر زیرمجموعه متناهی آن مستقل خطی است. پس، کافی است نشان دهیم به ازای هر n مجموعه $\{f_0, \dots, f_n\}$ مستقل خطی است. فرض کنیم

$$c_0 f_0 + \dots + c_n f_n = 0.$$

این بدان معنی است که به ازای هر x در F

$$c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n = 0;$$

به بیان دیگر، هر x در F یک ریشه چندجمله‌ای $f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$ است. فرض می‌کنیم خواننده بداند که یک چندجمله‌ای از درجه n با ضرایب مختلط نمی‌تواند بیش از n ریشه متمایز داشته باشد. در این صورت، نتیجه می‌گیریم که $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$.

تا اینجا يك پایه نامتناهی برای V ارائه کرده ایم. آیا این بدان معنی است که V دارای بعد متناهی نیست؟ در واقع این طور است؛ ولی، این نتیجه ای فوری از تعریف نیست؛ زیرا، تا جایی که ما می دانیم ممکن است V دارای پایه متناهی نیز باشد. این امکان بسادگی قابل رفع است. (در قضیه بعد این مطلب را در حالت عمومی مرتفع می کنیم.) فرض کنیم تعدادی متناهی تابع چند جمله ای g_1, \dots, g_r داشته باشیم. مسلماً بین توانهایی از x که در $g_1(x), \dots, g_r(x)$ (با ضریب غیرصفر) ظاهر می شوند، بزرگترین وجود دارد. اگر این توان k باشد، به طور قطع $f_{k+1}(x) = x^{k+1}$ در پدید آمدن خطی g_1, \dots, g_r قرار ندارد. بنابراین، V با بعد متناهی نیست.

اینک پردازیم به آخرین نکته در مورد این مثال. پایه های نامتناهی ربطی به «ترکیبات خطی نامتناهی» ندارند. خواننده ای که قویاً احساس کند بین رشته توانی

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

و این مثال ربطی وجود دارد، بهتر است مجدداً و با دقت این مثال را مطالعه کند. اگر این توصیه گشایشی ایجاد نکرد بهتر است از این پس در پی محدود کردن توجه خود به فضاهای با بعد متناهی باشد.

قضیه ۴. فرض کنید V فضای برداری پدیدآمده توسط مجموعه متناهی متشکل از بردارهای $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ باشد. در این صورت، هر مجموعه مستقل از بردارهای V متناهی است و بیش از m عنصر ندارد.

اثبات. برای اثبات قضیه کافی است نشان دهیم که هر زیر مجموعه S از V که شامل بیش از m بردار باشد، وابسته خطی است. گیریم S چنین مجموعه ای باشد. پس، در S ، n بردار متمایز $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ با شرط $n > m$ وجود دارد. چون β_1, \dots, β_m فضای V را پدید می آورند، اسکالرهایی مانند A_{ij} در F یافت می شوند به طوری که

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^m A_{ij} \beta_i.$$

به ازای هر n اسکالر دلخواه x_1, x_2, \dots, x_n داریم:

$$\begin{aligned} x_1 \alpha_1 + \dots + x_n \alpha_n &= \sum_{j=1}^n x_j \alpha_j \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m A_{ij} \beta_i \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (A_{ij} x_j) \beta_i \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n A_{ij} x_j \right) \beta_i. \end{aligned}$$

چون $n > m$ ، قضیه ۶ از فصل ۱ ایجاب می‌کند که اسکالرهای x_1, x_2, \dots, x_n مانند x_1, x_2, \dots, x_n که همگی ۰ نیستند، وجود داشته باشند به طوری که

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}x_j = 0, \quad 1 \leq i \leq m.$$

از این رو، $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = 0$ این نشان می‌دهد که مجموعه S وابسته خطی است. \square

نتیجه ۱. اگر V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد، آنگاه هر دو پایه از V به تعداد مساوی (و متناهی) عضو دارند.

اثبات. چون V با بعد متناهی است، دارای یک پایه متناهی

$$\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$$

است. بنا بر قضیه ۴، هر پایه V ، متناهی است و بیش از m عضو ندارد. پس، اگر $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ یک پایه باشد، آنگاه $n \leq m$. با برهانی مشابه، $n \geq m$ و بنا بر این، $n = m$. \square

این نتیجه به ما اجازه می‌دهد که بعد یک فضای برداری با بعد متناهی را به عنوان تعداد اعضای هر یک از پایه‌های آن تعریف کنیم. بعد یک فضای برداری با بعد متناهی V را با $\dim V$ یا بعد (V) نشان می‌دهیم. بنا بر این مطلب قضیه ۴ را به صورت زیر بازگویی کنیم.

نتیجه ۲. فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد، و بعد $n = (V)$.

در این صورت

(الف) هر زیر مجموعه V که شامل بیش از n بردار باشد وابسته خطی است.

(ب) هیچ زیر مجموعه‌ای از V که کمتر از n بردار داشته باشد نمی‌تواند V را

پدید آورد.

مثال ۱۷. اگر F یک هیأت باشد، بعد F^n برابر n است؛ زیرا، پایه استاندارد F^n

شامل n بردار است. بعد فضای ماتریسی $F^{m \times n}$ برابر mn است. این مطلب در مقایسه با

حالت F^n باید روشن باشد، چرا که mn ماتریسی که در مکان i, j خود درایه ۱ و در

مکانهای دیگر درایه صفر دارند، تشکیل پایه‌ای برای $F^{m \times n}$ می‌دهند. اگر A ماتریسی

$m \times n$ باشد، آنگاه بعد فضای جواب A برابر $n - r$ است؛ که در آن r تعداد سطرها

غیر صفر یک ماتریس تحویل شده سطر پلکانی است که هم‌ارز سطری A باشد. به مثال

۱۵ رجوع شود.

اگر V فضای برداری دلخواهی بر روی F باشد زیر فضای صفر V توسط برداره

پدید می آید، ولی مجموعه $\{0\}$ يك پایه نیست، زیرا وابسته خطی است. بدین دلیل، توافق می کنیم که زیر فضای صفر دارای بعد 0 باشد. همچنین با اثبات این مطلب که مجموعه تهی $\{0\}$ را پدید می آورد؛ زیرا اشتراك همه زیر فضاهای شامل مجموعه تهی برابر $\{0\}$ است، و علاوه مجموعه تهی مستقل خطی است، چرا که شامل هیچ برداری نیست.

لم. فرض کنیم S يك زیر مجموعه مستقل خطی از فضای برداری V باشد و بردار β از V در زیر فضای پدید آمده توسط S نباشد. در این صورت، مجموعه حاصل از الحاق β به S مستقل خطی است.

اثبات. فرض کنیم $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ بردارهای متمایزی از S باشند و

$$c_1 \alpha_1 + \dots + c_m \alpha_m + b \beta = 0$$

آنگاه $b = 0$ ؛ زیرا در غیر این صورت

$$\beta = \left(-\frac{c_1}{b}\right) \alpha_1 + \dots + \left(-\frac{c_m}{b}\right) \alpha_m.$$

و β در زیر فضای پدید آمده توسط S قرار می گیرد. از این رو، $c_1 \alpha_1 + \dots + c_m \alpha_m = 0$ و چون S مستقل خطی است همه c_i ها صفرند. \square

قضیه ۵. اگر W زیر فضایی از يك فضای V باشد، هر زیر مجموعه مستقل خطی از W متناهی است و قسمتی از يك پایه (متناهی) W است. اثبات. فرض کنیم S_0 يك زیر مجموعه مستقل خطی W باشد. اگر زیر مجموعه مستقل خطی S از W شامل S_0 باشد، آنگاه S نیز يك زیر مجموعه مستقل خطی V است؛ حال چون V با بعد متناهی است، S شامل بیش از $\dim V$ عنصر نیست.

به طریق زیر، S_0 را به پایه ای برای W گسترش می دهیم. اگر S_0 فضای W را پدید آورد، آنگاه S_0 يك پایه W است و کار تمام است. هر گاه S_0 فضای W را پدید نیاورد، لم قبل را برای یافتن يك بردار β_1 در W به طوری که مجموعه $S_1 = S_0 \cup \{\beta_1\}$ مستقل خطی باشد به کار می گیریم. اگر S_1 فضای W را پدید آورد، مراد حاصل است. در غیر این صورت، لم را برای دست یافتن به يك بردار β_2 در W به طوری که $S_2 = S_1 \cup \{\beta_2\}$ مستقل خطی باشد به کار می بندیم. اگر به همین طریق ادامه دهیم، آنگاه (طی حداکثر $\dim V$ مرحله) به مجموعه

$$S_m = S_0 \cup \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$$

می رسیم که پایه ای برای W است. \square

نتیجه ۱. اگر W زیر فضایی سره از فضای برداری V با بعد متناهی باشد، آنگاه

W با بعد متناهی است و $\dim W < \dim V$.

اثبات. می‌توانیم فرض کنیم W شامل بردار $\alpha \neq 0$ باشد. بنا بر قضیه ۵ و اثبات آن، پایه‌ای برای W شامل α وجود دارد که حاوی بیش از $\dim V$ عنصر نیست؛ از این رو، W با بعد متناهی است و $\dim W \leq \dim V$. چون W زیرفضای سرهای از V است، یک بردار β در V وجود دارد که در W نیست. با الحاق β به پایه W ، یک زیرمجموعه مستقل خطی از V به دست می‌آوریم. پس، $\dim W < \dim V$. \square

نتیجه ۰۲. در فضای برداری با بعد متناهی، هر مجموعه غیرتهی مستقل خطی از بردارها بخشی از یک پایه است.

نتیجه ۰۳. فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ بردی هیأت F باشد و بردارهای سطری A یک مجموعه مستقل خطی از بردارهای F^n را تشکیل دهند. در این صورت، A معکوس-پذیر است.

اثبات. فرض کنیم $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ بردارهای سطری A و W زیرفضای پدید-آمده توسط $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ از فضای F^n باشد. چون $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ مستقل هستند، بعد W برابر n است. حال، نتیجه ۱ نشان می‌دهد که $W = F^n$ ، از این رو، در F^n اسکالرهایی چون B_{ij} وجود دارند که

$$\epsilon_i = \sum_{j=1}^n B_{ij} \alpha_j, \quad 1 \leq i \leq n.$$

در اینجا $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n\}$ پایه استاندارد F^n است. از این رو، برای ماتریس B با درایه‌های B_{ij} داریم

$$BA = I. \quad \square$$

قضیه ۰۶. اگر W_1 و W_2 دو زیرفضای با بعد متناهی از فضای برداری V باشند، آنگاه $W_1 + W_2$ با بعد متناهی است و

$$\text{بعد}(W_1 + W_2) = \text{بعد}(W_1 \cap W_2) + \text{بعد}(W_1) + \text{بعد}(W_2).$$

اثبات. بنا بر قضیه ۵ و نتیجه‌های آن، فضای $W_1 \cap W_2$ یک پایه متناهی $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ دارد که خود بخشی از یک پایه

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m\}$$

برای W_1 و نیز بخشی از یک پایه

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}$$

برای W_2 است. زیرفضای $W_1 + W_2$ توسط بردارهای

$$\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m, \gamma_1, \dots, \gamma_n$$

پدید می‌آید و این بردارها يك مجموعه مستقل خطی تشکیل می‌دهند. زیرا، فرض کنیم

$$\sum x_i \alpha_i + \sum y_j \beta_j + \sum z_r \gamma_r = 0.$$

آنگاه،

$$-\sum z_r \gamma_r = \sum x_i \alpha_i + \sum y_j \beta_j$$

که نشان می‌دهد $\sum z_r \gamma_r$ به W_1 تعلق دارد. چون $\sum z_r \gamma_r$ متعلق به W_2 نیز هست، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای اسکالرهای معین c_1, \dots, c_k

$$\sum z_r \gamma_r = \sum c_i \alpha_i.$$

چون مجموعه

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}$$

مستقل است، هر يك از اسکالرهای z_r برابر صفر است. بنابراین،

$$\sum x_i \alpha_i + \sum y_j \beta_j = 0$$

و چون

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m\}$$

نیز مجموعه‌ای مستقل است، هر x_i و نیز هر y_j برابر صفر است. از این‌رو،

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}$$

پایه‌ای برای $W_1 + W_2$ است. سرانجام

$$(W_1) \text{ بعد} + (W_2) \text{ بعد} = (k+m) + (k+n)$$

$$= k + (m+k+n)$$

$$= (W_1 \cap W_2) \text{ بعد} + (W_1 + W_2) \text{ بعد}. \quad \square$$

این بخش را با تذکری درباره استقلال و وابستگی خطی به‌پایان می‌بریم. این مفاهیم را ما برای مجموعه‌ای از بردارها تعریف کردیم. لازم است که آنها را برای دنباله‌های متناهی (n تایی‌های مرتب) نیز تعریف کنیم. گوییم بردارهای $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ وابسته خطی هستند هرگاه اسکالرهایی مانند c_1, \dots, c_n ، که همگی ۰ نباشند، یافت شوند به‌طوری که $c_1 \alpha_1 + \dots + c_n \alpha_n = 0$. کلاً این اصطلاح چنان طبیعی به‌نظر می‌رسد که خواننده ممکن است گمان کند که تا به‌حال نیز آن را به‌کار برده است. تفاوت بین دنباله متناهی $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ، و مجموعه $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ چیست؟ دو تفاوت هست، یکی همانندی و دیگری ترتیب.

هر گاه مجموعه $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ مورد بحث باشد، معمولاً فرض بر این است که هیچ دوبرداری در بین $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ یکی نیستند. در حالی که دنباله $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ممکن است همه α_i ها یکی باشند. اگر به ازای $i \neq j$ ، $\alpha_i = \alpha_j$ ، آنگاه دنباله $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ وابسته خطی است:

$$\alpha_i + (-1)\alpha_j = 0.$$

از این رو، اگر $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ مستقل خطی باشند، متمایز نیز هستند و می توانیم درباره مجموعه $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ صحبت کنیم و مطمئن باشیم که این مجموعه دارای n بردار است. در این حالت مسلماً هیچ گونه ابهامی در بحث پایه و بعد وجود نخواهد داشت. بعد يك فضای V با بعد متناهی بزرگترین n است که يك n تایی از بردارهای V مستقل خطی باشد و غیره. خواننده ای که فکر کند مطالب این بند جز هیاهو چیزی نیست، خوب است از خورد سؤال کند که آیا دوبردار

$$\alpha_1 = (e^{\pi/2}, 1)$$

$$\alpha_2 = (\sqrt{110}, 1)$$

در R^2 مستقل خطی هستند یا نه.

عناصر يك دنباله به ترتیب معینی شماره گذاری می شوند. در حالی که يك مجموعه دسته ای است از اشیاء بدون هیچ گونه آرایش و ترتیب خاص. البته، برای توصیف يك مجموعه باید اعضای آن را فهرست کنیم و این امر نیاز به انتخاب يك ترتیب دارد. ولی، ترتیب، جزئی از مجموعه نیست. مجموعه های $\{1, 2, 3, 4\}$ و $\{4, 3, 2, 1\}$ یکی هستند، در حالی که دنباله متناهی $1, 2, 3, 4$ با دنباله $4, 3, 2, 1$ کاملاً متفاوت است. جنبه ترتیب دنباله تأثیری بر مفاهیم استقلال، وابستگی، و غیره ندارد، زیرا وابستگی (آن طور که تعریف شد) متأثر از ترتیب نیست. دنباله $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ وابسته است اگر و تنها اگر دنباله $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ وابسته باشد. در بخش بعدی، ترتیب اهمیت خاصی خواهد داشت.

تمرین

۱۰۱. اگر دوبردار وابسته خطی باشند، ثابت کنید یکی از آنها ضرب اسکالری دیگری است.

۱۰۲. آیا بردارهای

$$\alpha_1 = (1, 1, 2, 4), \quad \alpha_2 = (2, -1, -5, 2)$$

$$\alpha_3 = (1, -1, -4, 0), \quad \alpha_4 = (2, 1, 1, 6)$$

در R^4 مستقل خطی هستند؟

۳. پایه‌ای برای زیرفضایی از R^4 که توسط چهار بردار تمرین ۲ پدید می‌آید بیابید.

۴. نشان دهید که بردارهای

$$\alpha_1 = (1, 0, -1), \quad \alpha_2 = (1, 2, 1), \quad \alpha_3 = (0, -3, 2)$$

پایه‌ای برای R^3 تشکیل می‌دهند. هریک از بردارهای پایه‌استانده را به صورت ترکیبی خطی از بردارهای $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ بیان کنید.

۵. سه بردار وابسته خطی در R^3 بیابید که هر جفت از آنها مستقل خطی باشند.

۶. فرض کنید V فضای برداری همهٔ ماتریسهای 2×2 بر روی هیأت F باشد. با یافتن پایه‌ای برای V که ۴ عنصر داشته باشد، ثابت کنید V چهاربعدي است.

۷. فرض کنید V فضای برداری تمرین ۶، W_1 مجموعهٔ ماتریسهای به صورت

$$\begin{bmatrix} x & -x \\ y & z \end{bmatrix}$$

و W_2 مجموعهٔ ماتریسهای به صورت

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -a & c \end{bmatrix}$$

باشند.

(الف) ثابت کنید W_1 و W_2 زیرفضاهای V هستند.

(ب) ابعاد $W_1 + W_2, W_1 \cap W_2$ را بیابید.

۸. مجدداً فرض کنید V فضای ماتریسهای 2×2 بر روی هیأت F باشد. پایه‌ای چون

$$\{A_1, A_2, A_3, A_4\} \text{ برای } V \text{ بیابید به طوری که به ازای هر } j, A_j^2 = A_j.$$

۹. فرض کنید V فضایی برداری بر روی يك زیرهیأت F از اعداد مختلط باشد. فرض

کنید بردارهای α, β, γ در V مستقل خطی باشند. ثابت کنید $(\alpha + \beta), (\beta + \gamma), (\gamma + \alpha)$ دارای استقلال خطی اند.

۱۰. فرض کنید V يك فضای برداری بر روی هیأت F باشد و تعدادی متناهی بردار

چون $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ در V این فضا را پدید آورند. ثابت کنید V با بعد متناهی است.

۱۱. فرض کنید V مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای 2×2 مانند A با درایه‌های مختلط باشد که

$$\text{در شرط } A_{11} + A_{22} = 0 \text{ صدق می‌کنند.}$$

(الف) نشان دهید V با اعمال معمولی جمع ماتریسی و ضرب ماتریس در اسکالر،

فضایی است برداری بروی هیأت اعداد حقیقی.

(ب) پایه‌ای برای این فضای برداری بیابید.

(پ) فرض کنید W مجموعه همه ماتریسهای A در V با شرط $A_{11} = -A_{12}$ باشد (خط زبر نمایشگر مزدوج عددی مختلط است). ثابت کنید W یک زیرفضای V است و پایه‌ای هم برای W بیابید.

۱۲. با یافتن پایه‌ای برای فضای همه ماتریسهای $m \times n$ بروی هیأت F ، ثابت کنید بعد این فضا mn است.

۱۳. تمرین ۹ را درحالتی که V یک فضای برداری بروی هیأت دوعنصری توصیف شده در تمرین ۵ بخش ۱۰.۱ باشد، مورد بحث قرار دهید.

۱۴. فرض کنید V مجموعه اعداد حقیقی باشد. V با اعمال معمولی را به‌عنوان فضایی برداری بروی هیأت اعداد گویا محسوب و ثابت کنید این فضای برداری بعدمتهای ندارد.

۴.۲. مختصات

یکی از جنبه‌های مفید یک پایه \mathcal{B} در فضای n بعدی V این است که اساساً به‌ما امکان می‌دهد در V ، نظیر «مختصات طبیعی» x_i از یک بردار $\alpha = (x_1, \dots, x_n)$ در فضای F^n ، به‌معرفی مختصات بردار α در این طرح، مختصات بردار α از V نسبت به پایه \mathcal{B} اسکالرهای خواهند بود که در بیان α به‌صورت ترکیبی خطی از بردارهای پایه به‌کار می‌روند. از این‌رو، علاقه‌مندیم که مختصات طبیعی بردار α در F^n را به‌عنوان مختصاتی که توسط α و پایه استاندارد F^n تعریف می‌شوند، محسوب کنیم. اما، در پذیرش این دیدگاه باید دقت کافی به‌عمل آوریم. اگر

$$\alpha = (x_1, \dots, x_n) = \sum x_i \epsilon_i$$

و \mathcal{B} پایه استاندارد F^n باشد، دقیقاً چگونه مختصات بردار α توسط \mathcal{B} و α تعیین می‌شوند؟ یک راه پاسخ دادن به این سؤال چنین است. هر بردار مفروض α عبارت یکتایی به‌صورت ترکیبی خطی از بردارهای پایه استاندارد دارد، و i مین مختص x_i از α ضریب ϵ_i در این عبارت است. از این جهت می‌توانیم بگوییم i مین مختص کدام است. زیرا، ترتیبی «طبیعی» برای بردارهای پایه استاندارد وجود دارد؛ یعنی قاعده‌ای در دست هست برای تعیین اینکه در پایه، کدام «اولین» بردار است، کدام «دومین»، والی آخر. اگر \mathcal{B} پایه دلخواهی از فضای n بعدی V باشد، احتمالاً ترتیبی طبیعی برای بردارهای \mathcal{B} نداریم، و از این‌رو، قبل از آنکه بتوانیم « i مین مختص α نسبت به \mathcal{B} » را تعریف کنیم، ضروری است ترتیبی برای این بردارها تحمیل کنیم. به‌تعبیر دیگر، مختصات نسبت به دنباله بردارها و نه مجموعه بردارها

تعریف می‌شوند.

تعریف. اگر V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد، یک پایه مرتب برای V دنباله‌ای متناهی از بردارهای مستقل خطی است که V را پدید آورند.

اگر دنباله $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ پایه مرتبی برای V باشد، آنگاه مجموعه $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V است. در واقع، پایه مرتب مجموعه‌ای است همراه با ترتیبی معین. با مختصر سوءاستفاده از علامت گذاری، همه این مطالب را با ذکر این که

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

پایه مرتبی برای V است، خلاصه می‌کنیم.

حال فرض کنیم V فضایی برداری با بعد متناهی بر روی F و

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

پایه مرتبی برای V باشد. به ازای هر α در V ، n تایی یکتایی چون (x_1, \dots, x_n) از اسکالرها وجود دارد که

$$\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i.$$

این n تایی یکتاست، زیرا اگر همچنین داشته باشیم

$$\alpha = \sum_{i=1}^n z_i \alpha_i$$

آنگاه

$$\sum_{i=1}^n (x_i - z_i) \alpha_i = 0$$

و استقلال خطی بردارهای α_i ایجاب می‌کند که به ازای هر i ، $x_i - z_i = 0$ ، $x_i = z_i$ ، i مین مختص α نسبت به پایه مرتب

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

می‌نامیم. اگر

$$\beta = \sum_{i=1}^n y_i \alpha_i$$

آنگاه

$$\alpha + \beta = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) \alpha_i$$

و بنا براین، z مین مختص $(\alpha + \beta)$ نسبت به این پایه مرتب $(x_i + y_i)$ است. به طور مشابه، z مین مختص $(c\alpha)$ برابر cx_i است. همچنین، روشن است که هر n تایی (x_1, \dots, x_n) در F^n عبارت است از n تایی مختصات برداری در V ، یعنی بردار

$$\sum_{i=1}^n x_i \alpha_i.$$

به طور خلاصه، هر پایه مرتب برای V تناظری يك به يك

$$\alpha \rightarrow (x_1, \dots, x_n)$$

بین مجموعه همه بردارهای V و مجموعه همه n تاییهای F^n برقرار می سازد. این تناظر دارای این خاصیت است که متناظر $(\alpha + \beta)$ همان حاصل جمع متناظرهای دو بردار α و β در F^n است، و همچنین متناظر $(c\alpha)$ برابر است با حاصل ضرب اسکالر c و متناظر بردار α در F^n .

در این مرحله، ممکن است این سؤال مطرح شود که چرا صرفاً پایه مرتبی برای V انتخاب نمی کنیم تا هر بردار V را به وسیله n تایی مختصات متناظرش توصیف نماییم؛ چرا که در این صورت از راحتی کار با n تاییها برخوردار هستیم. این امر به دو دلیل نقض غرض خواهد بود. اولاً، همان طور که تعریف اصل موضوعی فضاهاى برداری نشان می دهد، سعی ما این است که فضاهاى برداری را به عنوان دستگاہهای جبری مجرد بررسی کنیم. ثانیاً، حتی در آن حالاتی که مختصات را به کار می بریم، نتایج مهم از توانایی ما در تغییر دستگاہ مختصات؛ یعنی، در تغییر پایه مرتب، به دست می آیند.

اغلب، راحت تر است که به جای n تایی مختصات (x_1, \dots, x_n) از ماتریس مختصات α نسبت به پایه مرتب \mathcal{B} :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

استفاده کنیم. برای نمایاندن وابستگی این ماتریس مختصات به پایه، علامت

$$[\alpha]_{\mathcal{B}}$$

را برای ماتریس مختصات بردار α نسبت به پایه مرتب \mathcal{B} به کار خواهیم برد. این نماد، در مواردی نظیر این پرسش که در صورت تغییر پایه مرتبی به پایه مرتب دیگر چه تغییری در مختصات برداری چون α روی می دهد، خصوصاً مفید است.

پس، فرض کنیم V فضای n بعدی باشد، و

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \quad \text{و} \quad \mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$$

دوپایه مرتب برای V باشند، در این صورت، اسکالرهای یکتایی چون P_{ij} وجود دارند که

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^n P_{ij} \alpha_i, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (13-2)$$

گیریم x'_1, \dots, x'_n مختصات بردار مفروض α در (نسبت به) پایه مرتب \mathcal{B}' باشند. در این صورت

$$\begin{aligned} \alpha &= x'_1 \alpha'_1 + \dots + x'_n \alpha'_n \\ &= \sum_{j=1}^n x'_j \alpha'_j \\ &= \sum_{j=1}^n x'_j \sum_{i=1}^n P_{ij} \alpha_i \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (P_{ij} x'_j) \alpha_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n P_{ij} x'_j \right) \alpha_i. \end{aligned}$$

پس، رابطه

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n P_{ij} x'_j \right) \alpha_i \quad (14-2)$$

به دست می آید. چون x_1, \dots, x_n مختصات بردار α در پایه مرتب \mathcal{B} ، به طوریکتا تعیین می شوند، از (۱۴-۲) نتیجه می شود که

$$x_i = \sum_{j=1}^n P_{ij} x'_j, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (15-2)$$

گیریم P ماتریس $n \times n$ باشد که درایه i, j آن اسکالر P_{ij} است و گیریم X و X' ماتریسهای مختصات بردار α در پایه های مرتب \mathcal{B} و \mathcal{B}' باشند. در این صورت (۱۵-۲) را می توان به صورت فرمول

$$X = PX' \quad (16-2)$$

نیز نوشت. چون \mathcal{B} و \mathcal{B}' دو مجموعه مستقل خطی هستند، $X = 0$ اگر و تنها اگر $X' = 0$. لذا از (۱۶-۲) و قضیه ۷ از فصل ۱، نتیجه می گیریم که P معکوس پذیر است. از این رو،

$$X' = P^{-1}X. \quad (17-2)$$

اگر نماد معرفی شده فوق را برای ماتریس مختصات یک بردار نسبت به پایه ای مرتب به کار گیریم، آنگاه (۱۶-۲) و (۱۷-۲) بیان می کنند که

$$[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P[\alpha]_{\mathcal{B}}$$

$$[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}}$$

پس، این بحث را می‌توان به شرح زیر خلاصه کرد.

قضیه ۷. فرض کنیم V یک فضای برداری n بعدی بر روی هیأت F باشد، \mathcal{B} و \mathcal{B}' دو پایه مرتب برای V باشند. آنگاه یک ماتریس $n \times n$ یکتا و لزوماً معکوس پذیرمانند P که درایه‌هایش در F هستند وجود دارد به طوری که به ازای هر بردار α در V

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'} \quad (۱)$$

$$[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}} \quad (۲)$$

ستونهای P با روابط

$$P_j = [\alpha'_j]_{\mathcal{B}}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

تعیین می‌شوند.

برای تکمیل تحلیل بالا، نتیجه زیر را نیز اثبات می‌کنیم.

قضیه ۸. فرض کنیم P ماتریسی معکوس پذیر $n \times n$ بر روی هیأت F ، V یک فضای برداری n بعدی بر روی F ، \mathcal{B} و \mathcal{B}' پایه‌ای مرتب برای V باشد. در این صورت، پایه مرتب یکتایی چون \mathcal{B}' برای V وجود دارد که به ازای هر بردار α در V

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'} \quad (۱)$$

$$[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}} \quad (۲)$$

اثبات. گیریم \mathcal{B} متشکل از بردارهای $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ باشد. اگر $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$ پایه مرتبی برای V در مورد آن (۱) معتبر باشد، واضح است که

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^n P_{ij} \alpha_i$$

پس، کافی است نشان دهیم بردارهای α'_j که با این معادلات تعریف می‌شوند، تشکیل یک پایه می‌دهند. فرض کنیم $Q = P^{-1}$ در این صورت،

$$\begin{aligned} \sum_j Q_{jk} \alpha'_j &= \sum_j Q_{jk} \sum_i P_{ij} \alpha_i \\ &= \sum_j \sum_i P_{ij} Q_{jk} \alpha_i \\ &= \sum_i \left(\sum_j P_{ij} Q_{jk} \right) \alpha_i \\ &= \alpha_k. \end{aligned}$$

بنابراین، زیر فضای پدیدآمده توسط مجموعه

$$\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$$

شامل \mathcal{B} و نتیجتاً مساوی با V است. پس، \mathcal{B}' يك پایه است، و بنا بر تعريف پایه و قضیه ۷ واضح است که (۱) معتبر و از آنجا (۲) نیز معتبر می باشد. \square

مثال ۱۸. گیریم F يك هیأت، و

$$\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

برداري از F^n باشد. اگر \mathcal{B} پایه مرتب استاندارد F^n باشد:

$$\mathcal{B} = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$$

آنگاه ماتریس مختصات بردار α در پایه \mathcal{B} به وسیله

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

تعیین می شود.

مثال ۱۹. فرض کنیم R هیأت اعداد حقیقی و θ عدد حقیقی ثابتی باشد. ماتریس

$$P = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

معکوس پذیر است و معکوس آن عبارت است از

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

پس، به ازای هر θ ، مجموعه \mathcal{B}' متشکل از بردارهای $(\cos \theta, \sin \theta)$ و $(-\sin \theta, \cos \theta)$ پایه‌ای برای R^2 است. این پایه را به طور شهودی می توان به عنوان پایه‌ای که از دوران پایه استاندارد به اندازه زاویه θ حاصل می شود، توصیف کرد. اگر α بردار (x_1, x_2) باشد، آنگاه

$$[\alpha]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x'_1 = x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta$$

$$x'_2 = -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta.$$

مثال ۲۰. گیریم F زیرهیاتی از هیأت اعداد مختلط باشد. ماتریس

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

معکوس پذیر است و معکوس آن عبارت است از

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & \frac{11}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{16} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

بنابراین، بردارهای

$$\alpha'_1 = (-1, 0, 0)$$

$$\alpha'_2 = (2, 2, 0)$$

$$\alpha'_3 = (5, -3, 8)$$

پایه‌ای چون \mathcal{B}' را برای F^3 تشکیل می‌دهند. مختصات x'_1, x'_2, x'_3 از بردار $\alpha = (x_1, x_2, x_3)$ در پایه \mathcal{B}' به وسیله

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + 2x_2 + \frac{11}{8}x_3 \\ \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{16}x_3 \\ \frac{1}{8}x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & \frac{11}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{16} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

تعیین می‌شوند. در حالت خاص

$$(3, 2, -8) = -10\alpha_1 - \frac{1}{4}\alpha_2 - \alpha_3.$$

تمرین

۱. نشان دهید که بردارهای

$$\alpha_1 = (1, 1, 0, 0),$$

$$\alpha_2 = (0, 0, 1, 1)$$

$$\alpha_3 = (1, 0, 0, 4),$$

$$\alpha_4 = (0, 0, 0, 2)$$

پایه‌ای برای R^4 تشکیل می‌دهند. مختصات هر یک از بردارهای پایه‌استانده را نسبت به پایه مرتب $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ بیابید.

۲. ماتریس مختصات بردار $(1, 0, 1)$ در پایه‌ای از C^3 را که بترتیب متشکل است از بردارهای $(0, 1, 1)$ ، $(2i, 1, 1)$ ، و $(1-i, 1+i, 0)$ بیابید.

۳. فرض کنید $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ پایه‌ای مرتب برای R^3 متشکل از

$$\alpha_1 = (1, 0, -1), \quad \alpha_2 = (1, 1, 1), \quad \alpha_3 = (1, 0, 0)$$

باشد. مختصات بردار (a, b, c) در پایه مرتب B چیست؟

۴. فرض کنید W زیرفضایی از C^3 باشد که توسط $\alpha_1 = (1, 0, i)$ و $\alpha_2 = (1+i, 1, -1)$ پدید می‌آید.

(الف) نشان دهید که α_1 و α_2 پایه‌ای برای W تشکیل می‌دهند.

(ب) نشان دهید که بردارهای $\beta_1 = (1, 1, 0)$ و $\beta_2 = (1, i, 1+i)$ در W قرار

دارند و پایه دیگری برای W تشکیل می‌دهند.

(پ) مختصات α_1 و α_2 در پایه مرتب $\{\beta_1, \beta_2\}$ از W چه هستند؟

۵. فرض کنید $\alpha = (x_1, x_2)$ و $\beta = (y_1, y_2)$ دو بردار در R^2 باشند که

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = 1.$$

ثابت کنید که $B = \{\alpha, \beta\}$ پایه‌ای برای R^2 است. مختصات بردار (a, b) را در پایه

مرتب $B = \{\alpha, \beta\}$ بیابید. (از نظر هندسی، شرایط روی α و β بیان می‌کنند که α و β

متعامند و هر یک طول ۱ دارند.)

۶. فرض کنید فضای برداری V بر روی اعداد مختلط، متشکل از همه توابع از R در C باشد؛ یعنی، فضای همه توابع (با مقدار) مختلط روی خط حقیقی باشد. فرض کنید

$$f_3(x) = e^{-ix}, f_2(x) = e^{ix}, f_1(x) = 1$$

(الف) ثابت کنید که f_3, f_2, f_1 مستقل خطی هستند.

(ب) فرض کنید $g_1(x) = 1, g_2(x) = \cos x, g_3(x) = \sin x$ ماتریس

3×3 معکوس پذیری چون P بیابید به طوری که

$$g_j = \sum_{i=1}^3 P_{ij} f_i$$

۷. فرض کنید V فضای برداری (حقیقی) همه توابع چندجمله‌ای از R در R از درجه ۲ یا کمتر باشد؛ یعنی، فضای همه توابع f به صورت

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

باشد. فرض کنید t عدد حقیقی ثابتی باشد، و توابع زیر را تعریف کنید:

$$g_1(x) = 1, g_2(x) = x + t, g_3(x) = (x + t)^2.$$

ثابت کنید $\mathcal{B} = \{g_1, g_2, g_3\}$ پایه‌ای برای V است. اگر

$$f(x) = c_0 + C_1 x + C_2 x^2,$$

مختصات f در پایه مرتب \mathcal{B} چه هستند؟

۵.۲. خلاصه هم‌ارزی سطری

در این بخش برای تکمیل بحث هم‌ارزی سطری ماتریسها، چند حکم مقدماتی در مورد پایه و بعد فضاهای برداری با بعد متناهی را مورد استفاده قرار می‌دهیم. یادآوری می‌کنیم که اگر A ماتریس $m \times n$ بر روی هیأت F باشد، بردارهای سطری A عبارتند از بردارهای $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ از F^n که توسط

$$\alpha_i = (A_{i1}, \dots, A_{in})$$

تعریف می‌شوند؛ و نیز یادآور می‌شویم که فضای سطری A زیر فضایی است از F^n که توسط این بردارها پدید می‌آید. رتبه سطری A عبارت است از بعد فضای سطری A .

اگر P ماتریسی $k \times m$ بر روی F باشد، آنگاه حاصل ضرب $B = PA$ ماتریسی $k \times n$ است که بردارهای سطری آن β_1, \dots, β_k ترکیبات خطی

$$\beta_i = P_{i1} \alpha_1 + \dots + P_{im} \alpha_m$$

از بردارهای سطری A هستند. بدین نحو، فضای سطری B زیر فضایی از فضای سطری A است. اگر P ماتریس $m \times m$ معکوس‌پذیری باشد، آنگاه B هم‌ارز سطری A است، و نتیجتاً تقارن هم‌ارزی سطری، یا معادله $A = P^{-1}B$ ، ایجاب می‌کند که فضای سطری A نیز زیر فضایی از فضای سطری B باشد.

قضیه ۹. فضاهای سطری ماتریسهای هم‌ارز سطری یکی هستند.

از این‌رو، می‌بینیم که برای مطالعه فضای سطری A کافی است به مطالعه فضای

سطری يك ماتريس تحويل شدهٔ سطری پلکانی که هم ارز سطری A باشد بردازیم؛ و این همان چیزی است که قصد انجام آن را داریم.

قضیه ۱۰. فرض کنیم R يك ماتريس تحويل شدهٔ سطری پلکانی غیر صفر باشد. در این صورت بردارهای سطری غیر صفر R برای فضای سطری R يك پایه تشکیل می دهند. اثبات. گیریم ρ_1, \dots, ρ_r بردارهای سطری غیر صفر ماتريس R باشند:

$$\rho_i = (R_{i1}, \dots, R_{in}).$$

مطمئنأ این بردارها فضای سطری R را پدید می آورند؛ پس تنها لازم است ثابت کنیم که این بردارها مستقل خطی اند. چون R يك ماتريس تحويل شدهٔ سطری پلکانی است، اعداد صحیح و مثبتی چون k_1, \dots, k_r وجود دارند که به ازای $i \leq r$

$$R(i, j) = 0 \text{ (الف) هر گاه } j < k_i$$

$$R(i, k_j) = \delta_{ij} \text{ (ب) (۱۸-۲)}$$

$$k_1 < \dots < k_r \text{ (پ)}$$

فرض کنیم $\beta = (b_1, \dots, b_n)$ برداری در فضای سطری R باشد:

$$\beta = c_1 \rho_1 + \dots + c_r \rho_r. \quad (۱۹-۲)$$

در این صورت، ادعا می کنیم که $c_j = b_{k_j}$ ، زیرا، بنا بر (۱۸-۲)

$$b_{k_j} = \sum_{i=1}^r c_i R(i, k_j) \quad (۲۰-۲)$$

$$= \sum_{i=1}^r c_i \delta_{ij}$$

$$= c_j.$$

در حالت خاص، اگر $\beta = 0$ ، یعنی $c_1 \rho_1 + \dots + c_r \rho_r = 0$ ، آنگاه c_j باید مختص k_j بردار صفر باشد، و بنابراین، $c_j = 0$ ، $j = 1, \dots, r$. پس، ρ_1, \dots, ρ_r مستقل خطی هستند. \square

قضیه ۱۱. گیریم m و n دو عدد صحیح مثبت و F يك هبات باشد. فرض کنیم W زیرفضایی از F^n باشد و $\dim W \leq m$. در این صورت، تنها يك ماتريس $m \times n$ تحويل-شدهٔ سطری پلکانی بر روی F وجود دارد که فضای سطری آن W باشد.

اثبات. حداقل يك ماتريس تحويل شدهٔ سطری پلکانی $m \times n$ که فضای سطری آن W باشد وجود دارد. چون $\dim W \leq m$ ، می توان m بردار $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ در W انتخاب کرد که W را پدید آورند. گیریم A ماتريس $m \times n$ با بردارهای سطری $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ و R يك ماتريس تحويل شدهٔ سطری پلکانی که هم ارز سطری A است باشد. در این صورت، فضای سطری R همان W است.

حال فرض می‌کنیم R ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی دلخواهی باشد که فضای سطری آن W است. گیریم $\rho_1, \dots, \rho_r, \dots, \rho_n$ بردارهای سطری غیرصفر R باشند، و درایهٔ غیر صفر مقدم ρ_i در ستون $k_i, i=1, \dots, r$ واقع شود. بردارهای ρ_1, \dots, ρ_r پایه‌ای برای W تشکیل می‌دهند. در اثبات قضیهٔ ۱۰ مشاهده کردیم که اگر $\beta = (b_1, \dots, b_n)$ در W باشد، آنگاه

$$\beta = c_1 \rho_1 + \dots + c_r \rho_r,$$

و $c_i = b_{k_i}$ ؛ به بیان دیگر، عبارت یکنای β به صورت ترکیبی خطی از بردارهای ρ_1, \dots, ρ_r عبارت است از

$$\beta = \sum_{i=1}^r b_{k_i} \rho_i. \quad (21-2)$$

بنابراین، هر بردار β با در دست بودن مختصات b_{k_i} آن، $i=1, \dots, r$ ، معین می‌شود. مثلاً ρ_s تنها بردار واقع در W است که مختص k_s آن ۱ و به‌ازای $i \neq s$ مختص k_i آن ۰ است.

فرض کنیم β در W باشد و $\beta \neq 0$. ادعا می‌کنیم که اولین مختص غیرصفر β در یکی از ستونهای k_s واقع می‌شود. چون

$$\beta = \sum_{i=1}^r b_{k_i} \rho_i,$$

و $\beta \neq 0$ ، می‌توان نوشت

$$\beta = \sum_{i=1}^r b_{k_i} \rho_i, \quad b_{k_s} \neq 0. \quad (22-2)$$

اگر $i > s$ و $j \leq k_s$ ، بنا بر شرایط (۱۸-۲) داریم $R_{ij} = 0$. بنابراین

$$\beta = (0, \dots, 0, b_{k_s}, \dots, b_n), \quad b_{k_s} \neq 0$$

و اولین مختص غیر صفر β در ستون k_s قرار می‌گیرد. همچنین توجه باید داشت که به‌ازای هر $k_s, s=1, \dots, r$ ، برداری در W وجود دارد که مختص k_s آن غیر صفر است؛ این بردار همان ρ_s است.

اکنون روشن است که R به‌طور یکتا توسط W تعیین می‌شود. توصیف R بر حسب W به شرح زیر است. همهٔ بردارهای $\beta = (b_1, \dots, b_n)$ واقع در W را در نظر می‌گیریم. اگر $\beta \neq 0$ ، اولین مختص غیر صفر β باید در ستونی چون i قرار گیرد:

$$\beta = (0, \dots, 0, b_i, \dots, b_n), \quad b_i \neq 0.$$

گیریم k_1, \dots, k_r آن اعداد صحیح مثبت i باشند که به‌ازای هر یک برداری چون $\beta \neq 0$ در W وجود داشته باشد به‌طوری که اولین مختص غیرصفرش در ستون i واقع

شود. اعداد k_1, \dots, k_r را با ترتیب $k_1 < k_2 < \dots < k_r$ مرتب می‌کنیم. به ازای هر یک از اعداد صحیح مثبت k_s ، یک و تنها یک بردار ρ_s در W وجود دارد به طوری که مختص k_s بردار ρ_s برابر ۱، و به ازای $i \neq s$ مختص k_i آن صفر باشد. در این صورت R ماتریسی است $m \times n$ با بردارهای سطری $\rho_1, \dots, \rho_r, 0, \dots, 0$. \square

نتیجه. هر ماتریس $m \times n$ مانند A هم از سطری یک و تنها یک ماتریس تحویل-شدهٔ سطری پلکانی است.

اثبات. می‌دانیم که A حداقل با یک ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی R هم‌ارز سطری است. اگر A هم‌ارز سطری یکی دیگر از این گونه ماتریسها، مثلاً R' ، باشد؛ آنگاه R هم‌ارز سطری R' است؛ و از این رو، R و R' دارای فضاهای سطری مساوی‌اند و باید یکی باشند. \square

نتیجه. فرض کنیم A و B دو ماتریس $m \times n$ بر روی هیأت F باشند. در این صورت A و B هم‌ارز سطری‌اند اگر و تنها اگر دارای فضاهای سطری مساوی باشند. اثبات. می‌دانیم که اگر A و B هم‌ارز سطری باشند، آنگاه دارای فضاهای سطری مساوی هستند. لذا فرض می‌کنیم که A و B دارای فضاهای سطری مساوی باشند، در این صورت، A هم‌ارز سطری یک ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی R ، و B هم‌ارز سطری یک ماتریس تحویل شدهٔ سطری پلکانی R' است. چون A و B دارای فضاهای سطری مساوی‌اند، R و R' نیز فضای سطری مساوی‌دارند. بنابراین، $R = R'$ ، A هم‌ارز سطری B است. \square خلاصه آنکه: اگر A و B دو ماتریس $m \times n$ بر روی هیأت F باشند، احکام زیر هم‌ارزند:

۱. A و B هم‌ارز سطری‌اند.

۲. A و B دارای فضاهای سطری مساوی‌اند.

۳. $B = PA$ ، که در آن P یک ماتریس $m \times m$ معکوس‌پذیر است.

یک حکم هم‌ارز چهارم هم این است که دودستگاه همگن $AX = 0$ و $BX = 0$ دارای جوابهای مساوی‌اند؛ اما، با اینکه می‌دانیم هم‌ارزی سطری A و B ایجاب می‌کند که این دو دستگاه دارای جوابهای مساوی باشند، به نظر می‌رسد بهتر است اثبات عکس آن را به بعد موکول کنیم.

۶.۲. محاسبات مربوط به زیر فضاها

اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که چگونه اعمال سطری مقدماتی روشی استازنده شده را برای پاسخگویی به پرسشهای واقعی معینی در رابطه با زیرفضاهای F^n به دست می‌دهند. قبلاً احکام مورد نیاز را فراهم کرده‌ایم و برای راحتی خواننده آنها را در اینجا گرد می‌آوریم. این بحث در مورد هر فضای برداری n بعدی بر روی هیأت F در صورتی

صادق است که يك پایه مرتب ثابت \mathcal{B} انتخاب شود و هر بردار α از V به وسیله يك n تایی (x_1, \dots, x_n) که مختصات α را در پایه مرتب \mathcal{B} به دست می‌دهد، توصیف شود. فرض کنیم m بردار $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ از F^n مفروض باشند. پرسشهای زیر را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۱. چگونه معلوم می‌شود که بردارهای $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ مستقل خطی اند؟ یا به طور کلی، چگونه می‌توان بعد W ، زیر فضای پدید آمده توسط این بردارها، را یافت؟
۲. با مفروض بودن β در F^n ، چگونه می‌توان معلوم کرد که آیا β ترکیبی خطی از بردارهای $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ هست یا نه؛ یعنی، β در زیر فضای W قرار دارد یا نه؟
۳. چگونه می‌توان توصیفی صریح از زیر فضای W به دست داد؟

سومین سؤال قدری مبهم است، زیرا مشخص نیست که منظور از «توصیف صریح» چیست؛ به هر حال، ابتدا نوع توصیفی را که در ذهن داریم ارائه می‌دهیم. با این توصیف، فوراً می‌توان به پرسشهای (۱) و (۲) پاسخ داد.

گیریم A ماتریسی $m \times n$ با بردارهای سطری α_i باشد:

$$\alpha_i = (A_{i1}, \dots, A_{in}).$$

دنباله‌ای از اعمال سطری مقدماتی را به کار گیرید که از A آغاز و به يك ماتریس تحویل شده سطری بلکانی R ختم شود. قبلاً چگونگی انجام این کار را توضیح داده‌ایم. در این مرحله، بعد W (فضای سطری A) مشخص است، چرا که این بعد چیزی نیست جز تعداد بردارهای سطری غیر صفر R . اگر ρ_1, \dots, ρ_r بردارهای سطری غیر صفر R باشند، آنگاه $\mathcal{B} = \{\rho_1, \dots, \rho_r\}$ پایه‌ای برای W است. اگر اولین مختص غیر صفر ρ_i مختص k_i باشد، آنگاه به ازای $i \leq r$ داریم

$$\text{(الف)} \quad R(i, j) = 0, \text{ هر گاه } j < k_i$$

$$\text{(ب)} \quad R(i, k_i) = \delta_{ii}$$

$$\text{(پ)} \quad k_1 < \dots < k_r$$

زیر فضای W متشکل است از همه بردارهای

$$\begin{aligned} \beta &= c_1 \rho_1 + \dots + c_r \rho_r \\ &= \sum_{i=1}^r c_i (R_{i1}, \dots, R_{in}). \end{aligned}$$

در این صورت، مختصات b_1, \dots, b_n يك چنین بردار β عبارتند از

$$b_j = \sum_{i=1}^r c_i R_{ij}. \quad (23-2)$$

بخصوص $c_j = b_j$ ، و از این رو اگر $\beta = (b_1, \dots, b_n)$ ترکیبی خطی از ρ_i ها باشد، باید به صورت ترکیب خطی خاص

$$\beta = \sum_{i=1}^r b_{k_i} \rho_i \quad (24-2)$$

باشد. شرایط روی β برای برقراری (۲۴-۲) عبارتند از

$$b_j = \sum_{i=1}^r b_{k_i} R_{ij}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (25-2)$$

حال (۲۵-۲) توصیف صریح W ، زیرفضای پدیدآمده توسط $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ است؛ یعنی این زیرفضا متشکل است از همه بردارهای β در F^n که مختصاتشان در (۲۵-۲) صدق می‌کنند. (۲۵-۲) چه نوع توصیفی است؟ عمده‌تاً این توصیف W را به‌عنوان همه جوابهای معادلات، از طبیعت بسیار ویژه‌ای برخوردار است؛ زیرا، $(n-r)$ مختص را به‌صورت ترکیبات خطی r مختص مشخص b_{k_1}, \dots, b_{k_r} به‌دست می‌دهد. در انتخاب مختصات b_{k_i} آزادی کامل وجود دارد؛ یعنی اگر c_1, \dots, c_r اسکالرهایی دلخواه باشند، یک و تنها یک بردار β در W وجود دارد که c_i مختص k_i آن است.

نکته قابل توجه در اینجا این است: با مفروض بودن بردارهای α_i ، تحویل سطری روشی است سرراست برای تعیین اعداد صحیح c_1, \dots, c_r و اسکالرهای R_{ij} که توصیف (۲۵-۲) از زیرفضای پدیدآمده توسط $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ را به‌دست می‌دهند. همان‌طور که در قضیه ۱۱ نشان دادیم، مشاهده می‌شود که هر زیرفضای W از F^n دارای توصیفی از نوع (۲۵-۲) است. درباره سؤال (۲) نیز به‌نکاتی اشاره می‌کنیم. قبلاً، در بخش ۴.۱، بیان کرده‌ایم که چگونه می‌توان یک ماتریس معکوس‌پذیر $m \times m$ مانند P یافت به‌طوری که $R = PA$. با اطلاع از P در صورت امکان می‌توان اسکالرهای مانند x_1, \dots, x_n را یافت به‌طوری که

$$\beta = x_1 \alpha_1 + \dots + x_m \alpha_m.$$

زیرا، بردارهای سطری R از معادله

$$\rho_i = \sum_{j=1}^m P_{ij} \alpha_j$$

به‌دست می‌آیند و بنابراین، اگر β ترکیبی خطی از α_j ها باشد، لازیم

$$\begin{aligned} \beta &= \sum_{i=1}^r b_{k_i} \rho_i \\ &= \sum_{i=1}^r b_{k_i} \sum_{j=1}^m P_{ij} \alpha_j \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^r b_{k_i} P_{ij} \alpha_j \end{aligned}$$

و از این‌رو

$$x_j = \sum_{i=1}^r b_{k_i} P_{ij}$$

یکی از انتخابهای ممکن برای x_j است (ممکن است امکانات دیگری هم باشد). همچنین این سؤال را که آیا $\beta = (b_1, \dots, b_n)$ ترکیبی خطی از α_i ها هست یا نه، و اگر هست، اسکالرهای x_i چه هستند، می توان به صورت این پرسش که آیا دستگاه معادلات

$$\sum_{i=1}^m A_{ij} x_i = b_j, \quad j = 1, \dots, n$$

جواب دارد و در صورت وجود، جوابها چه هستند، مطرح کرد. ماتریس ضرایب این دستگاه معادلات، ماتریسی $n \times m$ مانند B با بردارهای ستونی $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ است. در فصل ۱ کار بردارهای سطر و مقدماتی در حل دستگاه معادلات $BX = Y$ را مورد بحث قرار دادیم. اکنون مثالی را مطرح می کنیم که در آن در پاسخگویی به سؤالات مربوط به زیرفضاهای F^n هر دو نقطه نظر اعمال می شود.

مثال ۲۱. در این مثال مسئله زیر را مطرح می کنیم. فرض کنیم W زیرفضایی از R^4 باشد که توسط بردارهای

$$\alpha_1 = (1, 2, 2, 1)$$

$$\alpha_2 = (0, 2, 0, 1)$$

$$\alpha_3 = (-2, 0, -4, 3)$$

پدید آید.

(الف) ثابت کنید که $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ پایه ای برای W تشکیل می دهند؛ یعنی، ثابت کنید این بردارها مستقل خطی هستند.

(ب) بگیریم $\beta = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ برداری در W باشد. مختصات β نسبت به پایه مرتب $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ چیست؟

(پ) فرض کنید

$$\alpha'_1 = (1, 0, 2, 0)$$

$$\alpha'_2 = (0, 2, 0, 1)$$

$$\alpha'_3 = (0, 0, 0, 3)$$

نشان دهید $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ پایه ای برای W تشکیل می دهند.

(ت) اگر β در W باشد، فرض کنید X ماتریس مختصات β در α - پایه و X' ماتریس مختصات β در α' - پایه را نشان دهد. ماتریسی 3×3 مانند P را که به ازای هر چنین β ، $X = PX'$ برآید.

برای پاسخگویی به این سؤالات با روش اول، ماتریس A با بردارهای سطر

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ را تشکیل می‌دهیم، ماتریس تحویل‌شده سطری پلکانی R را که هم‌ارز سطری A است، می‌یابیم، و هم‌زمان همان اعمال را روی ماتریس همانسی به‌کار می‌بریم تا به ماتریس معکوس پدیر Q که $R = QA$ دست یابیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow Q = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

(الف) واضح است که R دارای رتبه ۳ است، و لذا $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ مستقل خطی هستند.

(ب) از بردارهای $\beta = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ کدام در W قرار دارند؟ پایه‌ای برای W داریم که توسط ρ_1, ρ_2 و ρ_3, ρ_4 ، یعنی بردارهای سطری R ، معین می‌شود. با یک نظر می‌توان دید که زیر فضای پدیدآمده توسط بردارهای ρ_1, ρ_2, ρ_3 متشکل است از بردارهایی چون β که به‌ازای آنها $b_3 = 2b_1$. برای چنین بردار β داریم

$$\begin{aligned} \beta &= b_1 \rho_1 + b_2 \rho_2 + b_4 \rho_3 \\ &= [b_1 b_2 b_4] R \\ &= [b_1 b_2 b_4] QA \\ &= x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + x_3 \alpha_3 \end{aligned}$$

که در آن $x_i = [b_1 \ b_2 \ b_4] Q_i$

$$x_1 = b_1 - \frac{1}{3} b_2 + \frac{2}{3} b_4$$

$$x_2 = -b_1 + \frac{5}{6} b_2 - \frac{2}{3} b_4 \quad (2-26)$$

$$x_3 = -\frac{1}{6} b_2 + \frac{1}{3} b_4$$

(پ) بردارهای $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ همگی به‌شکل (y_1, y_2, y_3, y_4) باشروط $y_3 = 2y_1$ هستند، و از این‌رو در W قرار دارند. با یک نظر می‌توان دید که این بردارها مستقل خطی هستند.

(ت) ماتریس P دارای ستونهای

$$P_j = [\alpha'_j]_{\mathbb{R}}$$

است که در آن $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ معادلات (۲-۲۶) به ما نشان می دهند که ماتریسهای مختصات $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ را چگونه پیدا کنیم. مثلاً، به ازای $\beta = \alpha'_1$ داریم $b_1 = 1$ ، $b_2 = 0$ ، $b_3 = 2$ ، $b_4 = 0$ و

$$x_1 = 1 - \frac{1}{3}(0) + \frac{2}{3}(0) = 1$$

$$x_2 = -1 + \frac{5}{6}(0) - \frac{2}{3}(0) = -1$$

$$x_3 = -\frac{1}{6}(0) + \frac{1}{3}(0) = 0.$$

پس، $\alpha'_1 = \alpha_1 - \alpha_2$ ، به طور مشابه به دست می آوریم $\alpha'_2 = \alpha_2$ و $\alpha'_3 = 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3$ بنا بر این

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

اکنون بینیم با روش دومی که تشریح کردیم چگونه به این پرسشها پاسخ می دهیم. ماتریسی 4×3 مانند B را با بردارهای ستونی $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ تشکیل می دهیم:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

تحقیق می کنیم که به ازای کدام اسکالرهای y_1, y_2, y_3, y_4 دستگاه $BX = Y$ دارای جواب است.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & y_1 \\ 2 & 2 & 0 & y_2 \\ 2 & 0 & -4 & y_3 \\ 1 & 1 & 3 & y_4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & y_1 \\ 0 & 2 & 4 & y_2 - 2y_1 \\ 0 & 0 & 0 & y_3 - 2y_1 \\ 0 & 1 & 5 & y_4 - y_1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & y_1 \\ 0 & 0 & -6 & y_2 - 2y_1 \\ 0 & 1 & 5 & y_3 - y_1 \\ 0 & 0 & 0 & y_4 - 2y_1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & y_1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6}(2y_3 - y_2) \\ 0 & 1 & 0 & -y_1 + \frac{5}{6}y_2 - \frac{2}{3}y_3 \\ 0 & 0 & 0 & y_4 - 2y_1 \end{bmatrix}$$

بنابراین، شرط جواب داشتن دستگاه $BX=Y$ ، این است که $y_3 = 2y_1$. لذا $\beta = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ در W قرار دارد اگر و تنها اگر $b_3 = 2b_1$. اگر β در W باشد، آنگاه مختصات (x_1, x_2, x_3) در پایه مرتب $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ را می‌توان از آخرین ماتریس بالا خواند و یک بار دیگر، فرمولهای (۲-۲۶) را برای این مختصات به دست آورد. اکنون به پرسشهای (پ) و (ت) مثل قبل پاسخ می‌دهیم.

مثال ۰۴۴. ماتریس 5×5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- و مسائل زیر درباره آن را در نظر می‌گیریم.
- (الف) یک ماتریس معکوس پذیر P بیابید به طوری که PA یک ماتریس تحویل-شده سطری پلکانی مانند R باشد.
- (ب) پایه‌ای برای W ، فضای سطری A ، بیابید.
- (پ) تعیین کنید کدام یک از بردارهای $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ در W قرار دارند.

(ت) ماتریس مختصات هر بردار از W را در پایه مرتب انتخاب شده در (ب) بیابید.

(ث) هر بردار $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ از W را به صورت ترکیبی خطی از سطرهای A بنویسید.

(ج) توصیف صریحی از V ، فضای برداری همه ماتریسهای ستونی 5×1 مانند X با شرط $AX = 0$ را به دست دهید.

(ج) پایه‌ای برای V بیابید.

(ح) به ازای کدام يك از ماتریسهای ستونی 5×1 مانند Y ، معادله $AX = Y$ ، دارای جواب X است؟

برای حل این مسائل ماتریس افزوده A' از دستگاه $AX = Y$ را تشکیل می‌دهیم و دنباله‌ای مناسب از اعمال سطری روی A' به کار می‌بندیم.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & y_1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & y_3 \\ 2 & 4 & 1 & 10 & 1 & y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_5 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & -y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & -2y_1 + y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_5 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & y_1 - y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_1 + y_2 + y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3y_1 + y_2 + y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_5 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & y_1 - y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_1 + y_2 + y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3y_1 + y_2 + y_4 - y_5 \end{bmatrix}$$

(الف) اگر به ازای هر Y

$$PY = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 - y_2 \\ y_5 \\ -y_1 + y_2 + y_3 \\ -3y_1 + y_2 + y_4 - y_5 \end{bmatrix}$$

آنگاه

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

و از این رو، PA ماتریس تحویل شده سطری پلکانی

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

است. باید تأکید کرد که ماتریس P یکتا نیست. در واقع، تعداد زیادی ماتریس معکوس پذیر P (که از انتخابهای گوناگون اعمال مورد استفاده جهت تحویل A' ناشی می شوند) وجود دارند که $PA = R$.

(ب) به عنوان پایه‌ای برای W ، می‌توان بردارهای سطری غیر صفر

$$\rho_1 = (1, 2, 0, 3, 0)$$

$$\rho_2 = (0, 0, 1, 4, 0)$$

$$\rho_3 = (0, 0, 0, 0, 1)$$

از ماتریس R را انتخاب کرد.

(پ) فضای سطری W متشکل از همه بردارهای به صورت

$$\begin{aligned} \beta &= c_1 \rho_1 + c_2 \rho_2 + c_3 \rho_3 \\ &= (c_1, 2c_1, c_2, 3c_1 + 4c_2, c_3) \end{aligned}$$

است که در آن c_1, c_2, c_3 اسکالرهایی دلخواهی هستند. پس، $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ در W است اگر و تنها اگر

$$(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) = b_1 \rho_1 + b_2 \rho_2 + b_3 \rho_3$$

و این تساوی برقرار است اگر و تنها اگر

$$b_2 = 2b_1$$

$$b_4 = 3b_1 + 4b_2.$$

این معادلات نمونه‌هایی از دستگاه عمومی (۲-۲۵) هستند که با استفاده از آنها با یک نگاه می‌توان گفت که آیا برداری مقروض در W هست یا خیر. بنابراین، $(-5, -10, 1, -11, 20)$ ترکیبی خطی از سطرهای A هست، اما $(1, 2, 3, 4, 5)$ چنین نیست.

(ت) ماتریس مختصات بردار $(b_1, 2b_1, b_3, 3b_1 + 4b_2, b_5)$ در پایه $\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$ ، مسلماً عبارت است از

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_5 \end{bmatrix}.$$

(ث) طرق بسیاری برای نوشتن بردارهای W به صورت ترکیبات خطی سطرهای A وجود دارد. شاید آسانترین راه آن باشد که از نخستین شیوه بیان شده قبل از مثال ۲۱ پیروی کنیم:

$$\begin{aligned}\beta &= (b_1, 2b_1, b_2, 3b_1 + 2b_2, b_3) \\ &= [b_1, b_2, b_3, 0, 0] \cdot R \\ &= [b_1, b_2, b_3, 0, 0] \cdot PA\end{aligned}$$

$$= [b_1, b_2, b_3, 0, 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot A$$

$$= [b_1 + b_2, -b_2, 0, 0, b_3] \cdot A.$$

در حالت خاص، در ازای $\beta = (-5, -10, 1, -11, 20)$ داریم

$$\beta = [-4, -1, 0, 0, 20] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ج) معادلات دستگاه $RX = 0$ عبارتند از

$$x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0$$

$$x_2 + 4x_4 = 0$$

$$x_3 = 0.$$

از این رو، V متشکل از همه ستونهای به شکل

$$X = \begin{bmatrix} -2x_2 - 3x_4 \\ x_2 \\ -4x_4 \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

است که در آن x_4 و x_5 دلخواه هستند.
(ج) دو ستون

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

پایه‌ای برای V تشکیل می‌دهند. این پایه مثالی است از پایه توصیف شده در مثال ۱۵.
(ح) معادله $AX=Y$ دارای جوابهای X است اگر و تنها اگر

$$-y_1 + y_2 + y_3 = 0$$

$$-3y_1 + y_2 + y_4 - y_5 = 0.$$

تمرین

۰۱ فرض کنید $n < s$ و A ماتریسی $s \times n$ باشد که درایه‌هایش متعلق به هیأت F هستند. از قضیه ۴ (و نه اثبات آن) استفاده کنید تا نشان دهید که یک X غیر صفر در $F^n \times 1$ وجود دارد که $AX=0$.

۰۴ فرض کنید

$$\alpha_1 = (1, 1, -2, 1), \quad \alpha_2 = (3, 0, 4, -1), \quad \alpha_3 = (-1, 2, 5, 2)$$

و

$$\alpha = (4, -5, 9, -7), \quad \beta = (3, 1, -4, 4), \quad \gamma = (-1, 1, 0, 1).$$

(الف) کدام یک از بردارهای α, β, γ در زیرفضایی از R^4 که توسط α_i ها پدید می‌آید قرار دارد؟

(ب) کدام یک از بردارهای α, β, γ در زیرفضایی از C^4 پدید آمده توسط α_i ها قرار دارد؟

(پ) آیا این مطلب قضیه‌ای را به یاد نمی‌آورد؟

۰۳ بردارهای

$$\alpha_1 = (-1, 0, 1, 2), \quad \alpha_2 = (3, 4, -2, 5), \quad \alpha_3 = (1, 4, 0, 9)$$

از R^4 را در نظر بگیرید. دستگاهی از معادلات خطی همگن بیابید که فضای جواب آن

دقیقاً زیر فضای پدید آمده توسط این سه بردار از R^4 باشد.

۴. فرض کنید

$$\alpha_1 = (1, 0, -i), \quad \alpha_2 = (1+i, 1-i, 1), \quad \alpha_3 = (i, i, i)$$

از C^3 باشند. ثابت کنید که این بردارها پایه‌ای برای C^3 تشکیل می‌دهند. مختصات بردار (a, b, c) در این پایه کدامند؟

۵. توصیفی صریح از نوع $(2-25)$ برای بردارهای

$$\beta = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$$

در R^5 ، که ترکیبهای خطی بردارهای

$$\alpha_1 = (1, 0, 2, 1, -1),$$

$$\alpha_2 = (-1, 2, -4, 2, 0)$$

$$\alpha_3 = (2, -1, 5, 2, 1),$$

$$\alpha_4 = (2, 1, 3, 5, 2)$$

هستند ارائه کنید.

۶. فرض کنید V فضای برداری حقیقی پدید آمده توسط سطرهای ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 21 & 0 & 9 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 14 & 0 & 6 & 1 \\ 6 & 42 & -1 & 13 & 0 \end{bmatrix}$$

باشد.

(الف) پایه‌ای برای V بیابید.

(ب) کدام یک از بردارهای $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ عناصری از V هستند؟

(پ) اگر $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ در V باشد، مختصات آن در پایه مطلوب

بند (الف) چیست؟

۷. A را ماتریسی $m \times n$ بردوی هیأت F فرض کنید و دستگاه معادلات $AX = Y$ را در

نظر بگیرید. ثابت کنید این دستگاه معادلات دارای جواب است. اگر و تنها اگر رتبه

سطری ماتریس A با رتبه سطری ماتریس افزوده دستگاه برابر باشد.

تبدیل‌های خطی

۱.۳. تبدیل‌های خطی

اکنون به معرفی تبدیل خطی، یعنی مفهومی که در اکثر مطالب باقیمانده این کتاب مورد مطالعه است، می‌پردازیم. چون از این پس اصطلاحات مبحث توابع مندرج در ضمیمه را آزادانه به کار می‌بریم، مطالعه (یا مطالعه مجدد) این مبحث را به خواننده توصیه می‌کنیم.

تعریف. فرض کنیم V و W دو فضای برداری برداری هیأت F باشند. یک تبدیل خطی از V در W تابعی از V در W است که به ازای همه α ها و β ها از V و همه اسکالرهایی c از F

$$T(c\alpha + \beta) = c(T\alpha) + T\beta.$$

مثال ۱. اگر V فضای برداری دلخواهی باشد، تبدیل همانی I که با $I\alpha = \alpha$ تعریف می‌شود تبدیلی خطی از V در V است. تبدیل صفر 0 که با $0\alpha = 0$ تعریف می‌شود نیز تبدیلی خطی از V در V است.

مثال ۲. فرض کنیم F یک هیأت و V فضای توابع چندجمله‌ای f از F در F باشد که به صورت

$$f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_kx^k$$

هستند. بنا بر تعریف قرار می دهیم

$$(Df)(x) = c_1 + 2c_2x + \dots + kc_nx^{k-1}.$$

در این صورت، D تبدیلی خطی از V در V - به نام تبدیل مشتق گیری - است.

مثال ۳. فرض کنیم A یک ماتریس $m \times n$ ثابت با درایه های متعلق به هیأت F باشد. تابع T که با $T(X) = AX$ تعریف می شود تبدیلی خطی از $F^{n \times 1}$ در $F^{m \times 1}$ ، و تابع U که با $U(\alpha) = \alpha A$ تعریف می شود تبدیلی خطی از F^m در F^n است.

مثال ۴. فرض کنیم ماتریس $m \times m$ ثابت P با درایه های متعلق به هیأت F و ماتریس $n \times n$ ثابت Q بسروی F داده شده باشند. تابع T از فضای $F^{m \times n}$ در خودش را با $T(A) = PAQ$ تعریف می کنیم. در این صورت، T تبدیلی خطی از $F^{m \times n}$ در $F^{m \times n}$ است، زیرا

$$\begin{aligned} T(cA+B) &= P(cA+B)Q \\ &= (cPA+PB)Q \\ &= cPAQ+PBQ \\ &= cT(A)+T(B). \end{aligned}$$

مثال ۵. فرض کنیم R هیأت اعداد حقیقی، و V فضای همه توابع پیوسته از R در R باشد. اگر T را با

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t) dt$$

تعریف کنیم، آنگاه T تبدیلی خطی از V در V است. تابع Tf نه تنها پیوسته است بلکه دارای مشتق اول پیوسته نیز هست. خطی بودن انتگرال یکی از خواص اساسی آن به شمار می آید.

خواننده در نشان دادن این حکم که تبدیلهای تعریف شده در مثالهای ۱، ۲، ۳، و ۵ تبدیلهایی خطی هستند، به مشکلی برخورد خواهد خورد. همچنان که مطالب بیشتری درباره تبدیلهای خطی می آموزیم. فهرست مثالها را نیز به طور قابل ملاحظه ای گسترش می دهیم. تذکر این نکته مهم است که اگر T تبدیلی خطی از V در W باشد، آنگاه $T(0) = 0$ ؛ این مطلب را می توان از تعریف فهمید، زیرا

$$T(0) = T(0+0) = T(0) + T(0).$$

این نکته برای کسی که برای اولین بار جبر خطی را مطالعه می کند، غالباً گیج کننده است، زیرا، احتمالاً وی قبلاً اصطلاح «تابع خطی» را به طور متفاوتی به کار برده است. توضیحی

کوتاه سبب رفع این گیجی می شود. فرض کنیم V فضای برداری R^1 باشد. در این صورت، یک تبدیل خطی از V در V نوع خاصی تابع (با مقدار) حقیقی دوی خط حقیقی R است. در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال، چنین تابعی احتمالاً خطی نامیده می شود هرگاه نمودار آن یک خط راست باشد. حال آنکه بنا بر تعریف ما، یک تبدیل خطی از R^1 در R^1 ، تابعی است از R در R که نمودار آن یک خط راست ما بر مبدأ باشد.

تبدیل خطی عمومی T علاوه بر خاصیت $T(0) = 0$ خاصیت دیگری هم دارد. چنین تبدیلی، ترکیبات خطی را «حفظ» می کند؛ یعنی، اگر $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ بردارهایی از V و c_1, \dots, c_n اسکالرهای داده شده ای باشند، آنگاه

$$T(c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n) = c_1(T\alpha_1) + \dots + c_n(T\alpha_n).$$

این رابطه فوراً از تعریف نتیجه می شود. مثلاً،

$$\begin{aligned} T(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2) &= c_1(T\alpha_1) + T(c_2\alpha_2) \\ &= c_1(T\alpha_1) + c_2(T\alpha_2). \end{aligned}$$

قضیه ۱. فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد متناهی بر دوی هیأت F ، و $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه ای مرتب برای V باشد. همچنین فرض کنیم W فضایی برداری بر دوی همان هیأت F و β_1, \dots, β_n بردارهای دلخواهی از W باشند. در این صورت، تنها یک تبدیل خطی T از V در W وجود دارد که

$$T\alpha_j = \beta_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

اثبات. برای اثبات وجود تبدیلی خطی مانند T با شرط $T\alpha_j = \beta_j$ ، به صورت زیر عمل می کنیم. به ازای هر α در V ، یک n تایی (x_1, \dots, x_n) وجود دارد به طوری که

$$\alpha = x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n.$$

به ازای این بردار α ، چنین تعریف می کنیم

$$T\alpha = x_1\beta_1 + \dots + x_n\beta_n.$$

در این صورت، T قاعده ای است خوش تعریف برای مربوط ساختن هر بردار α از V با بردار $T\alpha$ از W . بنا به تعریف، روشن است که به ازای هر j ، $T\alpha_j = \beta_j$. برای اینکه ببینیم T خطی است، فرض می کنیم

$$\beta = y_1\alpha_1 + \dots + y_n\alpha_n$$

برداری در V و c اسکالر دلخواهی باشد. حال

$$c\alpha + \beta = (cx_1 + y_1)\alpha_1 + \dots + (cx_n + y_n)\alpha_n$$

و لذا بنا بر تعریف

$$T(c\alpha + \beta) = (cx_1 - y_1)\beta_1 + \cdots + (cx_n + y_n)\beta_n.$$

از سوی دیگر

$$\begin{aligned} c(T\alpha) + T\beta &= c \sum_{i=1}^n x_i \beta_i + \sum_{i=1}^n y_i \beta_i \\ &= \sum_{i=1}^n (cx_i + y_i) \beta_i \end{aligned}$$

و از این رو

$$T(c\alpha + \beta) = c(T\alpha) + T\beta.$$

اگر U تبدیلی خطی از V در W با خاصیت $U\alpha_j = \beta_j$ ، $j = 1, \dots, n$ باشد

$$\text{آنگاه به ازای بردار } \alpha = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i \text{ داریم}$$

$$\begin{aligned} U\alpha &= U\left(\sum_{i=1}^n x_i \alpha_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i (U\alpha_i) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \beta_i \end{aligned}$$

و بنا بر این U دقیقاً همان قاعده T است که در بالا تعریف کردیم. این مطلب نشان می‌دهد که تبدیل خطی T ، با خاصیت $T\alpha_j = \beta_j$ ، یکتاست. \square

گرچه قضیه ۱ بسیار ابتدایی است، اما چنان اساسی است که لازم دیدیم آن را به طور رسمی بیان کنیم. مفهوم تابع بسیار عمومی است. اگر V و W دو فضای برداری (غیر صفر) باشند، تعداد زیادی تابع از V در W وجود دارد. قضیه ۱ در تأکید بر این واقعیت که توابع خطی بیش از حد، خاص هستند به ما کمک می‌کند.

مثال ۶. بردارهای

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1, 2) \\ \alpha_2 &= (3, 4) \end{aligned}$$

مستقل خطی اند و بنا بر این پایه‌ای برای R^2 تشکیل می‌دهند. بنا بر قضیه ۱ تبدیل خطی یکتایی از R^2 در R^2 وجود دارد که

$$\begin{aligned} T\alpha_1 &= (3, 2, 1) \\ T\alpha_2 &= (6, 5, 4). \end{aligned}$$

در چنین حالتی باید بتوانیم $T(\epsilon_1)$ را بیابیم. اسکالرهای c_1 و c_2 را که $\epsilon_1 = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ می‌یابیم و سپس از این مطلب استفاده می‌کنیم که $T\epsilon_1 = c_1T\alpha_1 + c_2T\alpha_2$. اگر

$$(1, 0) = c_1(1, 2) + c_2(3, 4) \quad \text{و} \quad c_2 = 1 \quad \text{و} \quad c_1 = -2$$

از این رو

$$\begin{aligned} T(1, 0) &= -2(3, 2, 1) + (6, 5, 4) \\ &= (0, 1, 2). \end{aligned}$$

مثال ۷. فرض کنیم T تبدیل خطی از فضای m تاییهای F^m در فضای n تاییهای F^n باشد. قضیه ۱ می‌گوید که T به‌طور یکتا توسط دنباله بردارهای β_1, \dots, β_m با خاصیت

$$\beta_i = T\epsilon_i, \quad i = 1, \dots, m$$

تعیین می‌شود. به‌طور خلاصه، T توسط نگاره‌های بردارهای پایه استاندارد به‌طور یکتا تعیین می‌شود. روش کار چنین است:

$$\alpha = (x_1, \dots, x_m)$$

$$T\alpha = x_1\beta_1 + \dots + x_m\beta_m.$$

اگر B ماتریس $m \times n$ باشد که بردارهای سطری آن β_1, \dots, β_m هستند، این رابطه بیان می‌کند که

$$T\alpha = \alpha B.$$

به بیان دیگر، اگر $\beta_i = (B_{i1}, \dots, B_{in})$ آنگاه

$$T(x_1, \dots, x_m) = [x_1 \dots x_m] \begin{bmatrix} B_{11} & \dots & B_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{m1} & \dots & B_{mn} \end{bmatrix}.$$

این توصیفی بسیار صریح از تبدیل خطی است. در بخش ۴.۳ به مطالعه‌ای عمیق در مورد رابطه بین تبدیلهای خطی و ماتریسها می‌پردازیم و از این توصیف خاص $T\alpha = \alpha B$ هم استفاده نمی‌کنیم، زیرا در این رابطه ماتریس B در سمت راست α واقع است و این مطلب ممکن است به‌اشتباه‌کاریهایی بینجامد. نکته اصلی در این مثال این است که می‌توانیم توصیفی صریح و نسبتاً ساده از همه تبدیلهای خطی از F^m در F^n به‌دست‌دهیم. اگر T تبدیلی خطی از V در W باشد، آنگاه برد T نه تنها زیر مجموعه‌ای از

W بلکه زیرفضایی از آن است. گیریم R_T برد T ، یعنی مجموعه همه بردارهای β در W باشد که به‌ازای آن عنصری مانند α در V هست که $\beta = T\alpha$. فرض کنیم β_1 و β_2 در R_T باشند و یک اسکالر بردارهایی مانند α_1 و α_2 در V وجود دارند به‌طوری که $T\alpha_1 = \beta_1$ و $T\alpha_2 = \beta_2$ به علت خطی بودن T

$$\begin{aligned} T(c\alpha_1 + \alpha_2) &= cT\alpha_1 + T\alpha_2 \\ &= c\beta_1 + \beta_2 \end{aligned}$$

که نشان می‌دهد $c\beta_1 + \beta_2$ نیز در R_T است.

زیر فضای جالب دیگر وابسته به تبدیل خطی T ، مجموعه N متشکل از بردارهای α در V با شرط $T\alpha = 0$ است. این مجموعه زیرفضایی از V است، زیرا

(الف) $T(0) = 0$ ، بنابراین N غیرتهی است؛

(ب) اگر $T\alpha_1 = T\alpha_2 = 0$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} T(c\alpha_1 + \alpha_2) &= cT\alpha_1 + T\alpha_2 \\ &= c \cdot 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

و بنابراین $c\alpha_1 + \alpha_2$ در N قرار دارد.

تعریف. فرض کنیم V و W دو فضای برداری برداری بردی هیات F ، و T تبدیلی خطی از V در W باشد. فضای پوچ T عبارت است از مجموعه همه بردارهای α از V با شرط $T\alpha = 0$.

هرگاه بعد V متناهی باشد، رتبه T بعد برد T است و پوچی T بعد فضای پوچ T . قضیه زیر یکی از مهمترین قضایای جبر خطی است.

قضیه ۲. فرض کنیم V و W دو فضای برداری بردی هیات F ، و T تبدیلی خطی از V در W باشد. اگر بعد V متناهی باشد، آنگاه

$$\text{بعد}(V) = \text{پوچی}(T) + \text{رتبه}(T)$$

اثبات. گیریم $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ پایه‌ای برای N ، فضای پوچ T ، باشد. بردارهایی چون $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}$ در V وجود دارند به طوری که $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V باشد. اکنون ثابت می‌کنیم $\{T\alpha_{k+1}, \dots, T\alpha_n\}$ پایه‌ای برای برد T است. بردارهای $T\alpha_1, \dots, T\alpha_n$ یقیناً برد T را پدید می‌آورند؛ و چون به ازای هر $z \leq k$ ، $T\alpha_z = 0$ ، می‌بینیم که پدید آورنده برد $T\alpha_{k+1}, \dots, T\alpha_n$ هستند. برای اثبات استقلال خطی این بردارها، فرض کنیم اسکلرهایی چون c_i وجود دارند که

$$\sum_{i=k+1}^n c_i(T\alpha_i) = 0.$$

این رابطه بیان می‌کند که

۱. این فضا را هسته T هم می‌نامند. — م.

۲. پوچی را بعد هسته هم می‌نامند. — م.

$$T\left(\sum_{i=k+1}^n c_i \alpha_i\right) = 0,$$

و در نتیجه بردار $\alpha = \sum_{i=k+1}^n c_i \alpha_i$ در فضای پوچ T است. چون $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ پایه‌ای برای N تشکیل می‌دهند، باید اسکالرهایی مانند b_1, \dots, b_k وجود داشته باشند به طوری که

$$\alpha = \sum_{i=1}^k b_i \alpha_i.$$

پس

$$\sum_{i=1}^k b_i \alpha_i - \sum_{j=k+1}^n c_j \alpha_j = 0$$

و چون $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ مستقل خطی هستند، باید داشته باشیم

$$b_1 = \dots = b_k = c_{k+1} = \dots = c_n = 0.$$

اگر r رتبه T باشد، این واقعیت که $T\alpha_{k+1}, \dots, T\alpha_n$ پایه‌ای برای برد T تشکیل می‌دهند، تصریح می‌کند که $r = n - k$ حال چون k پوچی T ، و n بعد V است، اثبات تمام است. \square

قضیه ۳. اگر A ماتریسی $m \times n$ با درایه‌های متعلق به هیأت F باشد، آنگاه

$$\text{رتبه ستونی}(A) = \text{رتبه سطری}(A).$$

اثبات. فرض کنیم T تبدیل خطی از $F^{n \times 1}$ در $F^{m \times 1}$ تعریف شده با $T(X) = AX$ باشد. فضای پوچ T عبارت است از فضای جواب دستگاه $AX = 0$ ؛ یعنی مجموعه همه ماتریسهای ستونی X به طوری که $AX = 0$ برد T مجموعه همه ماتریسهای ستونی $m \times 1$ مانند Y ، است که $AX = Y$ جوابی برای مجهول X داشته باشد. اگر A_1, \dots, A_n ستونهای ماتریس A باشند، آنگاه

$$AX = x_1 A_1 + \dots + x_n A_n.$$

بنابراین، برد T عبارت است از زیر فضای پدید آمده توسط ستونهای A . به بیان دیگر، برد T فضای ستونی A است. بنابراین،

$$\text{رتبه ستونی}(A) = \text{رتبه}(T).$$

قضیه ۲ بیان می‌کند که اگر S فضای جواب دستگاه $AX = 0$ ، باشد آنگاه

$$n = \text{رتبه ستونی}(A) + \text{بعد}(S).$$

اکنون به مثال ۱۵ از فصل ۲ رجوع می‌کنیم. در آنجا بررسی‌مان نشان داد که اگر r بعد فضای سطری A باشد، آنگاه فضای جواب S پایه‌ای متشکل از $n - r$ بردار دارد:

$$(S) \text{ رتبه سطری } = n - (A) \text{ بعد}$$

اکنون واضح است که

$$(A) \text{ رتبه ستونی } = (A) \text{ رتبه سطری} \quad \square$$

اثبات قضیه ۳ که هم اکنون ارائه شد، بستگی به محاسباتی صریح درباره دستگایهای معادلات خطی دارد. اثباتی بیشتر ادراکی هم وجود دارد که بر این گونه محاسبات متکی نیست. چنین اثباتی را در بخش ۷.۳ عرضه می‌کنیم.

تمرین

۰۱. کدام یک از توابع T از R^2 در R^2 که در زیر آمده‌اند تبدیلی خطی است؟

$$T(x_1, x_2) = (1 + x_1, x_2) \quad (\text{الف})$$

$$T(x_1, x_2) = (x_2, x_1) \quad (\text{ب})$$

$$T(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2) \quad (\text{پ})$$

$$T(x_1, x_2) = (\sin x_1, x_2) \quad (\text{ت})$$

$$T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 0) \quad (\text{ث})$$

۰۲. برد، رتبه، فضای پوچ، و پوچی تبدیل صفر و همچنین تبدیل همانی روی فضای برداری V با بعد متناهی را بیابید.

۰۳. برد و فضای پوچ تبدیل مشتق‌گیری در مثال ۲ را توصیف کنید. همین کار را برای تبدیل انتگرال‌گیری در مثال ۵ انجام دهید.

۰۴. آیا تبدیلی خطی مانند T از R^3 در R^2 وجود دارد که $T(1, -1, 1) = (1, 0)$ و $T(1, 1, 1) = (0, 1)$ ؟

۰۵. اگر

$$\alpha_1 = (1, -1), \quad \beta_1 = (1, 0)$$

$$\alpha_2 = (2, -1), \quad \beta_2 = (0, 1)$$

$$\alpha_3 = (-3, 2), \quad \beta_3 = (1, 1)$$

آیا تبدیلی خطی مانند T از R^3 در R^2 وجود دارد به طوری که به ازای $i = 1, 2, 3$

$$T\alpha_i = \beta_i$$

۰۶. تبدیل خطی T از F^2 در F^2 را که توسط $T\epsilon_1 = (a, b)$ و $T\epsilon_2 = (c, d)$ تعریف

می‌شود به‌طور صریح (نظیر تمرین‌های ۱ و ۲) توصیف کنید.

۷. فرض کنیم F زیرهیاتی از اعداد مختلط و T تابعی از F^3 در F^3 باشد که توسط

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2, -x_1 - 2x_2 + 2x_3)$$

تعریف می‌شود.

(الف) نشان دهید که T تبدیلی خطی است.

(ب) اگر (a, b, c) برداری در F^3 باشد، تحت چه شرایطی روی a, b, c و

این بردار در برد T قرار دارد؟ رتبه T چیست؟

(پ) a, b, c و چه شرایطی داشته باشند تا بردار (a, b, c) در فضای پوچ

قرار گیرد؟ پوچی T چیست؟

۸. تبدیلی خطی از R^3 در R^3 را که زیرفضای پدید آمده توسط $(1, 0, -1)$ و

$(1, 2, 2)$ بردش باشد، به‌طور صریح توصیف کنید.

۹. فرض کنید V فضای برداری همه ماتریسهای $n \times n$ بر روی هیأت F ، و B ماتریس

$n \times n$ ثابتی باشد. اگر

$$T(A) = AB - BA,$$

نشان دهید T تبدیلی خطی از V در V است.

۱۰. فرض کنید V مجموعه همه اعداد مختلط باشد و به‌عنوان یک فضای برداری بر روی

هیأت اعداد حقیقی (با اعمال معمولی) در نظر گرفته شود. تابعی از V در V بیابید

که یک تبدیل خطی روی این فضای برداری باشد، اما تبدیلی خطی روی $C \setminus V$ نباشد،

یعنی خطی مختلط نباشد.

۱۱. فرض کنید V فضای ماتریسهای $n \times 1$ بر روی هیأت F ، و W فضای ماتریسهای

$m \times 1$ بر روی همین هیأت باشد. فرض کنید A ماتریس $m \times n$ ثابتی بر روی F ،

و T تبدیل خطی از V در W تعریف شده توسط $T(X) = AX$ باشد. ثابت کنید T

تبدیل صفر است اگر و تنها اگر A ماتریس صفر باشد.

۱۲. فرض کنید V یک فضای برداری n -بعدی بر روی هیأت F باشد و T یک تبدیل

خطی از V در V با برد و فضای پوچ مساوی. ثابت کنید n زوج است. (آیا می‌توانید

مثالی از چنین تبدیل خطی بیابارید؟)

۱۳. فرض کنید V فضایی برداری و T تبدیلی خطی از V در V باشد. ثابت کنید دو حکم

زیر درباره T هم‌ارزند.

- (الف) اشتراك برد T و فضای پوچ T زیر فضای صفر V است.
 (ب) اگر $T\alpha = 0$ ، آنگاه $T(T\alpha) = 0$.

۲.۳. جبر تبدیلهای خطی

در مطالعه تبدیلهای خطی از V در W ، این مطلب اهمیت اساسی دارد که مجموعه این تبدیلهای ساختار عادی یک فضای برداری را به ارث می برد. ساختار جبری مجموعه تبدیلهای خطی از فضای V در خودش، از این هم غنی تر است؛ زیرا ترکیب عادی توابع، عمل «ضریبی» هم برای این گونه تبدیلهای فراهم می آورد. در این بخش، به تجسس این مفاهیم می پردازیم.

قضیه ۴. فرض کنیم V و W دو فضای برداری بر روی هیأت F ، و T و U دو تبدیل خطی از V در W باشند. تابع $(T+U)$ که با

$$(T+U)(\alpha) = T\alpha + U\alpha$$

تعریف می شود تبدیلی خطی از V در W است. اگر c عنصری دلخواه از F باشد، تابع (cT) که با

$$(cT)(\alpha) = c(T\alpha)$$

تعریف می شود نیز تبدیلی خطی از V در W است. مجموعه همه تبدیلهای خطی از V در W همراه با اعمال جمع و ضرب اسکالری که در بالا تعریف شد، فضایی برداری بر روی هیأت F تشکیل می دهند.

اثبات. فرض می کنیم T و U دو تبدیل خطی از V در W باشند، و $(T+U)$ مانند بالا تعریف شده باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} (T+U)(c\alpha + \beta) &= T(c\alpha + \beta) + U(c\alpha + \beta) \\ &= c(T\alpha) + T\beta + c(U\alpha) + U\beta \\ &= c(T\alpha + U\alpha) + (T\beta + U\beta) \\ &= c(T+U)(\alpha) + (T+U)(\beta) \end{aligned}$$

که نشان می دهد $(T+U)$ تبدیلی خطی است. به طور مشابه

$$\begin{aligned} (cT)(d\alpha + \beta) &= c[T(d\alpha + \beta)] \\ &= c[d(T\alpha) + T\beta] \\ &= cd(T\alpha) + c(T\beta) \\ &= d[c(T\alpha)] + c(T\beta) \\ &= d[(cT)\alpha] + (cT)\beta \end{aligned}$$

که نشان می‌دهد (cT) نیز تبدیلی خطی است.

برای این که نشان دهیم مجموعه تبدیلیهای خطی از V در W (همراه با دو عمل مذکور) فضایی برداری است، باید هر یک از شرایط جمع برداری و ضرب اسکالری را مستقیماً بررسی کنیم. این کار را به خواننده واگذار می‌کنیم، و خود به این توضیح بسنده می‌کنیم که: بردار صفر در این فضا تبدیل صفر است که هر بردار V را به بردار صفر W می‌فرستد؛ بعلاوه، هر یک از خواص این دو عمل از خاصیت متناظر مربوط به اعمال فضای W نتیجه می‌شود. \square

شاید بهتر باشد راه دیگر نگرش به این قضیه را هم ذکر کنیم. اگر جمع و ضرب اسکالری را مانند بالا تعریف کنیم، آنگاه مجموعه همه توابع از V در W فضایی است برداری بر روی هیأت F . این مطلب ربطی به این که V فضای برداری است ندارد؛ کافی است V مجموعه‌ای غیر تهی باشد. هر گاه V فضایی برداری باشد، می‌توانیم تبدیلیهای خطی از V در W را هم تعریف کنیم، و در این صورت قضیه ۴ حکم می‌کند که تبدیلیهای خطی زیر فضایی از فضای همه توابع از V در W هستند.

فضای تبدیلیهای خطی از V در W را با $L(V, W)$ نشان می‌دهیم. یادآوری می‌کنیم که $L(V, W)$ تنها زمانی تعریف می‌شود که V و W فضاهایی برداری بر روی هیأتی واحد باشند.

قضیه ۵. فرض کنیم V و W دو فضای برداری بر روی هیأت F ، بترتیب، با ابعاد n و m باشند. در این صورت بعد فضای $L(V, W)$ متناهی و برابر mn است. اثبات. فرض کنیم

$$\mathcal{B}' = \{\beta_1, \dots, \beta_m\} \quad \text{و} \quad \mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

بترتیب، پایه‌های مرتبی برای V و W باشند. به ازای هر جفت از اعداد صحیح (p, q) با شرایط $1 \leq p \leq m$ و $1 \leq q \leq n$ ، تبدیل خطی $E^{p,q}$ از V در W را با

$$E^{p,q}(\alpha_i) = \begin{cases} 0 & \text{هر گاه } i \neq q \\ \beta_p & \text{هر گاه } i = q \end{cases}$$

$$= \delta_{iq} \beta_p$$

تعریف می‌کنیم. بنا بر قضیه ۱، تبدیل خطی یکتایی از V در W هست که در این شرایط صدق می‌کند. ادعا این است که mn تبدیل $E^{p,q}$ پایه‌ای را برای $L(V, W)$ تشکیل می‌دهند.

فرض کنیم T تبدیلی خطی از V در W باشد. به ازای هر j که $1 \leq j \leq n$ ، گیریم A_{mj}, \dots, A_{1j} مختصات بردار $T\alpha_j$ در پایه \mathcal{B}' مرتب باشند؛ یعنی

$$T\alpha_j = \sum_{p=1}^m A_{pj} \beta_p. \quad (1-3)$$

می‌خواهیم نشان دهیم

$$T = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{pq} E^{p,q} . \quad (2-3)$$

فرض کنیم U تبدیل خطی موجود در سمت راست تساوی (۲-۳) باشد. آنگاه، به ازای هر j

$$\begin{aligned} U\alpha_j &= \sum_p \sum_q A_{pq} E^{p,q}(\alpha_j) \\ &= \sum_p \sum_q A_{pq} \delta_{jq} \beta_p \\ &= \sum_{p=1}^m A_{pj} \beta_p \\ &= T\alpha_j \end{aligned}$$

و از اینجا $U = T$. حال (۲-۳) نشان می‌دهد که $E^{p,q}$ ها $L(V, W)$ را پدید می‌آورند. باید ثابت کنیم که اینها مستقل خطی نیز هستند. اما، این مطلب از آنچه در بالا انجام شد روشن است؛ زیرا، اگر تبدیل

$$U = \sum_p \sum_q A_{pq} E^{p,q}$$

تبدیل صفر باشد، آنگاه به ازای همه j ها، $U\alpha_j = 0$ پس

$$\sum_{p=1}^m A_{pj} \beta_p = 0 .$$

حال استقلال β_p ها ایجاب می‌کند که به ازای هر p و j ، $A_{pj} = 0$. \square

قضیه ۶. فرض کنیم V, W, Z سه فضای برداری برداری هیأت F باشند. اگر T تبدیلی خطی از V در W و U تبدیلی خطی از W در Z باشد، آنگاه تابع مرکب UT که با $(UT)(\alpha) = U(T(\alpha))$ تعریف می‌شود، تبدیلی خطی از V در Z است. اثبات.

$$\begin{aligned} (UT)(c\alpha + \beta) &= U[T(c\alpha + \beta)] \\ &= U(cT\alpha + T\beta) \\ &= c[U(T\alpha)] + U(T\beta) \\ &= c(UT)(\alpha) + (UT)(\beta) . \quad \square \end{aligned}$$

در آنچه که به دنبال می‌آید عمدتاً سروکار ما با تبدیلهای خطی از فضایی برداری

در خودش است. چون مکرراً ناگزیر از نوشتن « T تبدیلی خطی از V در V است» هستیم، به جای آن عبارت « T عملگری خطی روی V است» را می نویسیم.

تعریف. اگر V فضایی برداری بردوی هیأتی چون F باشد، یک عملگر خطی روی V عبارت است از تبدیلی خطی از V در V .

در مورد قضیه ۶، در حالتی که $V = W = Z$ و در نتیجه U و T دو عملگر خطی روی فضای V هستند، دیده می شود که ترکیب UT هم عملگری خطی روی V است. بنا بر این فضای $L(V, V)$ یک «عمل ضرب» هم دارد که توسط عمل ترکیب روی آن تعریف می شود. در این حالت، عملگر TU نیز تعریف می شود، ولی باید توجه داشت که عموماً $UT \neq TU$ ؛ یعنی، $UT - TU \neq 0$. این نکته هم باید مورد توجه خاص قرار بگیرد که اگر T عملگری خطی روی V باشد، آنگاه می توان T را با T ترکیب کرد. لذا نماد $T^2 = TT$ ، و در حالت کلی به ازای $n = 1, 2, 3, \dots$ ، نماد: $T^n = T \circ \dots \circ T$ (بار n)، بنا بر تعریف قرار می دهیم $T^0 = I$.
برد و اگر $T \neq 0$ ، بنا بر تعریف قرار می دهیم $T^0 = I$.

لم. فرض کنیم V فضایی برداری بردوی هیأت F باشد. اگر U, T_1, T_2 عملگرهایی خطی روی V و c عضوی از F باشد، آنگاه

$$IU = UI = U \quad (\text{الف})$$

$$(T_1 + T_2)U = T_1U + T_2U; U(T_1 + T_2) = UT_1 + UT_2 \quad (\text{ب})$$

$$c(UT_1) = (cU)T_1 = U(cT_1) \quad (\text{پ})$$

اثبات. (الف) این خاصیت تابع همانی، بدیهی است و بیان آن در اینجا صرفاً برای تأکید است.

$$[U(T_1 + T_2)](\alpha) = U[(T_1 + T_2)(\alpha)] \quad (\text{ب})$$

$$= U(T_1\alpha + T_2\alpha)$$

$$= U(T_1\alpha) + U(T_2\alpha)$$

$$= (UT_1)(\alpha) + (UT_2)(\alpha)$$

و بنا بر این $U(T_1 + T_2) = UT_1 + UT_2$. همچنین

$$[(T_1 + T_2)U](\alpha) = (T_1 + T_2)(U\alpha)$$

$$= T_1(U\alpha) + T_2(U\alpha)$$

$$= (T_1U)(\alpha) + (T_2U)(\alpha).$$

پس، $(T_1 + T_2)U = T_1U + T_2U$. (خواننده ممکن است توجه کرده باشد که در اثبات این دو قانون بخش پذیری، از خطی بودن T_1 و T_2 استفاده نشد؛ در اثبات (ب) هم خطی

بودن U به کار نمی رود.)

(پ) اثبات این قسمت به خواننده واگذار می شود. \square

مضمون این لم ومضمون قسمتی از قضیه ۵ نشان می دهند که فضای برداری $L(V, V)$ همراه با عمل ترکیب همان چیزی است که به جبر خطی با عنصرهمانی مشهور است. این مطلب را در فصل ۴ مورد بحث قرار خواهیم داد.

مثال ۸. اگر ماتریسی $m \times n$ با درایه های متعلق به F باشد، تبدیلی خطی T از $F^{n \times 1}$ در $F^{m \times 1}$ را داریم که با $T(X) = AX$ تعریف می شود؛ و اگر B ماتریسی $p \times m$ باشد، تبدیل خطی U از $F^{m \times 1}$ در $F^{p \times 1}$ را هم داریم که توسط $U(Y) = BY$ تعریف می شود. ترکیب UT بسادگی قابل توصیف است:

$$\begin{aligned}(UT)(X) &= U(T(X)) \\ &= U(AX) \\ &= B(AX) \\ &= (BA)X.\end{aligned}$$

پس، UT عبارت است از «عمل ضرب چپ در ماتریس حاصل ضرب BA ».

مثال ۹. فرض کنیم F یک هیأت و V فضای برداری همه توابع چندجمله ای از F در F باشد. گیریم D عملگر مشتق گیری تعریف شده در مثال ۲ و T عملگر خطی «ضرب در x »:

$$(Tf)(x) = xf(x)$$

باشد. در این صورت، $DT \neq TD$. در واقع، اگر I عملگرهمانی باشد، خواننده باید بتواند $DT - TD = I$ را باسانی اثبات کند.

هرچند «ضرب» تعریف شده روی $L(V, V)$ جابجایی نیست، اما با اعمال فضای برداری $L(V, V)$ رابطه زیبایی دارد.

مثال ۱۰. فرض کنیم $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه مرتبی برای فضای برداری V باشد. عملگرهای خطی $E^{p,q}$ را که در اثبات قضیه ۵ پدید آمدند، در نظر می گیریم:

$$E^{p,q}(\alpha_i) = \delta_{iq} \alpha_p.$$

این n^2 عملگر خطی پایه ای برای فضای عملگرهای خطی روی V تشکیل می دهند. $E^{p,q}$ چیست؟ داریم

$$\begin{aligned}(E^{p,q} E^{r,s})(\alpha_i) &= E^{p,q}(\delta_{i,r} \alpha_r) \\ &= \delta_{i,r} E^{p,q}(\alpha_r) \\ &= \delta_{i,r} \delta_{r,q} \alpha_p.\end{aligned}$$

بنابراین،

$$E^{p,q} E^{r,s} = \begin{cases} 0 & \text{هرگاه } r \neq q \\ E^{p,s} & \text{هرگاه } r = q \end{cases}$$

گیریم T عملگری خطی روی V باشد. در اثبات قضیه ۵ نشان دادیم که اگر

$$\begin{aligned}A_j &= [T\alpha_j]_{\mathcal{B}} \\ A &= [A_1, \dots, A_n]\end{aligned}$$

آنگاه

$$T = \sum_p \sum_q A_{pq} E^{p,q}.$$

اگر

$$U = \sum_r \sum_s B_{rs} E^{r,s}$$

عملگر خطی دیگری روی V باشد، آنگاه آخرین لم ایجاب می‌کند که

$$\begin{aligned}TU &= \left(\sum_p \sum_q A_{pq} E^{p,q} \right) \left(\sum_r \sum_s B_{rs} E^{r,s} \right) \\ &= \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s A_{pq} B_{rs} E^{p,q} E^{r,s}.\end{aligned}$$

همچنان که مشاهده کرده‌ایم، تنها جملاتی که در این مجموع بسیار بزرگ باقی می‌مانند جملاتی هستند که برای آنها $r = q$ ، که در این صورت چون $E^{p,r} E^{r,s} = E^{p,s}$ داریم

$$\begin{aligned}TU &= \sum_p \sum_q \left(\sum_r A_{pr} B_{rs} \right) E^{p,s} \\ &= \sum_p \sum_q (AB)_{pq} E^{p,s}.\end{aligned}$$

پس، نتیجه عمل ترکیب T و U ضرب ماتریسهای A و B است.

در بحث راجع به اعمال جبری روی تبدیلهای خطی، تاکنون چیزی در مورد معکوس پذیری نگفته‌ایم. در این مورد يك پرسش مشخص و جالب این است: برای کدام عملگر خطی T روی فضای V ، عملگری خطی چون T^{-1} وجود دارد که

$$?TT^{-1} = T^{-1}T = I$$

تابع T از V در W معکوس پذیر نامیده می شود، هرگاه يك تابع U از W در V یافت شود به طوری که UT تابع همانی روی V ، و TU تابع همانی روی W باشد. اگر T معکوس پذیر باشد، تابع U یکتا است و با T^{-1} نشان داده می شود. (ر. ک. ضمیمه.) بعلاوه، T معکوس پذیر است اگر و تنها اگر

۱. T يك به يك باشد؛ یعنی از $T\alpha = T\beta$ نتیجه بشود که $\alpha = \beta$ ؛

۲. T پوشا باشد؛ یعنی برد T (تمام) W باشد.

قضیه ۷. فرض کنیم V و W دو فضای برداری بردی های F و T تبدیلی خطی از V در W باشد. اگر T معکوس پذیر باشد، آنگاه تابع معکوس آن، T^{-1} ، تبدیلی خطی از W بروی V است.

اثبات. حرفهایمان را برای تأکید بريك نکته تکرار می کنیم. وقتی T يك به يك و پوشا باشد، يك تابع معکوس T^{-1} وجود دارد که به طور یکتا تعیین می شود و W را بروی V چنان می نگارد که $T^{-1}T$ تابع همانی روی V ، و TT^{-1} تابع همانی روی W باشد. مطلبی که در اینجا باید ثابت کنیم این است که اگر تابع خطی T معکوس پذیر باشد، آنگاه معکوسش T^{-1} نیز خطی است.

گیریم β_1 و β_2 بردارهایی از W ، و c يك اسکالر باشد. می خواهیم نشان دهیم که

$$T^{-1}(c\beta_1 + \beta_2) = cT^{-1}\beta_1 + T^{-1}\beta_2.$$

فرض کنیم به ازای $i = 1, 2$ ؛ $\alpha_i = T^{-1}\beta_i$ ؛ یعنی، α_i یکتا بردار در V باشد که $T\alpha_i = \beta_i$. چون T خطی است

$$\begin{aligned} T(c\alpha_1 + \alpha_2) &= cT\alpha_1 + T\alpha_2 \\ &= c\beta_1 + \beta_2. \end{aligned}$$

پس، $c\alpha_1 + \alpha_2$ یکتا بردار در V است که توسط T به $c\beta_1 + \beta_2$ فرستاده می شود، لذا

$$\begin{aligned} T^{-1}(c\beta_1 + \beta_2) &= c\alpha_1 + \alpha_2 \\ &= c(T^{-1}\beta_1) + T^{-1}\beta_2 \end{aligned}$$

و T^{-1} خطی است. \square

فرض کنیم تبدیلی خطی معکوس پذیر T از V بروی W و تبدیلی خطی معکوس پذیر U از W بروی Z داده شده اند. آنگاه، UT معکوس پذیر است و $(UT)^{-1} = T^{-1}U^{-1}$. این حکم، نه نیازی به خطی بودن UT دارد و نه مستلزم بررسی جداگانه يك به يك و پوشا بودن آن است. فقط لازم است نشان دهیم که $T^{-1}U^{-1}$ هم معکوس چپ و هم معکوس راست UT است.

اگر T خطی باشد، آنگاه $T(\alpha - \beta) = T\alpha - T\beta$ ؛ از این رو، اگر و

تنها اگر $T(\alpha - \beta) = 0$ این مطلب، تحقیق یک به یک بودن T را بسیار ساده می کند. تبدیل خطی T را نامنفرد نامیم، هرگاه $T\gamma = 0$ ایجاب کند که $\gamma = 0$ ؛ یعنی هرگاه فضای پوچ T برابر با $\{0\}$ باشد. بدیهی است که T ، یک به یک است اگر و تنها اگر T نامنفرد باشد. تعمیم این تذکر این است که تبدیلیهای خطی نامنفرد، آنهایی هستند که استقلال خطی را حفظ می کنند.

قضیه ۸. فرض کنیم T تبدیلی خطی از V در W باشد. آنگاه، T نامنفرد است اگر و تنها اگر T هر زیر مجموعه مستقل خطی از V را بروی یک زیر مجموعه مستقل خطی از W ببرد.

اثبات. ابتدا فرض می کنیم T نامنفرد باشد و S را یک زیر مجموعه مستقل خطی از V می گیریم. اگر $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ بردارهایی از S باشند، آنگاه $T\alpha_1, \dots, T\alpha_k$ مستقل خطی هستند؛ زیرا اگر

$$c_1(T\alpha_1) + \dots + c_k(T\alpha_k) = 0$$

آنگاه

$$T(c_1\alpha_1 + \dots + c_k\alpha_k) = 0$$

و چون T نامنفرد است،

$$c_1\alpha_1 + \dots + c_k\alpha_k = 0$$

که از آن به علت مستقل بودن مجموعه S نتیجه می شود هر c_i برابر صفر است. این استدلال نشان می دهد که نگاره S تحت T مجموعه ای است مستقل خطی.

فرض کنیم T هر زیر مجموعه مستقل خطی را بروی یک زیر مجموعه مستقل خطی ببرد. گیریم α برداری غیر صفر از V باشد. آنگاه، مجموعه S متشکل از بردار α مستقل است. نگاره S مجموعه ای است متشکل از بردار $T\alpha$ و این مجموعه نیز مستقل است. بنا بر این، $T\alpha \neq 0$ ، زیرا مجموعه T متشکل از بردار صفر و این مطلب نشان می دهد که فضای پوچ T همان زیر فضای صفر است؛ یعنی، T نامنفرد است. \square

مثال ۱۱. فرض کنیم F زیر هیتاتی از اعداد مختلط (یا هیتاتی با سرشت نمای صفر)، و V فضای توابع چند جمله ای بر روی F باشد. دو عملگر مشتق گیری، D ، و «ضرب در x »، T ، در مثال ۹ را در نظر می گیریم. چون D همه ثابتها را به ۰ می فرستد، منفرد است. گرچه بعد V متناهی نیست، اما برد D تمام V است، و این امکان هست که معکوسی راست برای D تعریف شود. مثلاً، اگر E عملگر انتگرال گیری نامعین باشد:

$$E(c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n) = c_0x + \frac{1}{2}c_1x^2 + \dots + \frac{1}{n+1}c_nx^{n+1}$$

آنگاه E عملگری خطی روی V است و $DE = I$. از طرف دیگر $ED \neq I$ ، زیرا ED همهٔ ثابتها را به 0 می‌فرستد. عملگر T حالتی شبیه به عکس این حالت را دارد. اگر به ازای همهٔ x ها $xf(x) = 0$ ، آنگاه $f = 0$. از این رو، T نامنفرد است، و یافتن معکوسی چپ برای T ممکن. مثلاً، اگر U عملگر «حذف جملهٔ ثابت و تقسیم آن بر x » باشد:

$$U(c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n) = c_1 + c_2x + \dots + c_nx^{n-1}$$

آنگاه، U عملگری خطی روی V است و $UT = I$ ولی $TU \neq I$ ، زیرا هر تابع واقع در برد TU ، در برد T یعنی در فضای توابع چندجمله‌ای f با شرط $f(0) = 0$ نیز هست.

مثال ۱۲. فرض کنیم F یک هیأت T عملگر خطی روی F^2 تعریف شده با

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1)$$

باشد. در این صورت، T نامنفرد است، زیرا اگر $T(x_1, x_2) = 0$ داریم

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 = 0$$

و بنا بر این $x_1 = x_2 = 0$. همچنین مشاهده می‌شود که T پوشاست؛ زیرا، فرض کنیم (z_1, z_2) بردار دلخواهی از F^2 باشد. برای اینکه نشان دهیم (z_1, z_2) در برد T است، باید اسکالرهایی چون x_1 و x_2 بیابیم که

$$x_1 + x_2 = z_1$$

$$x_1 = z_2.$$

واضح است که جواب عبارت است از $x_1 = z_2$ و $x_2 = z_1 - z_2$. محاسبهٔ اخیر فرمول صریحی برای T^{-1} به دست می‌دهد، که چنین است:

$$T^{-1}(z_1, z_2) = (z_2, z_1 - z_2).$$

در مثال ۱۱ دیدیم که یک تبدیل خطی ممکن است بدون پوشا بودن نامنفرد، و نیز بدون نامنفرد بودن پوشا باشد. مثال اخیر حالت مهمی را نشان می‌دهد که در آن این واقعه نمی‌تواند روی دهد.

قضیهٔ ۹. فرض کنیم V و W دو فضای برداری با بعد متناهی بردوی هیأت F باشند و $\dim V = \dim W$. اگر T تبدیلی خطی از V در W باشد، احکام زیر هم‌ارزند:

(۱) T معکوس‌پذیر است.

(۲) T نامنفرد است.

(۳) T پوشا است؛ یعنی برد T برابر با W است.

اثبات. بگیریم بعد $(W) = \text{بعد}(V) = n$. بنا بر قضیهٔ ۲

$$n = \text{پوچی}(T) + \text{رتبه}(T)$$

اکنون T نامفرد است اگر و تنها اگر $\text{پوچی}(T) = 0$ ، و (چون $n = \dim W$) برد T برابر با W است اگر و تنها اگر $n = \text{رتبه}(T)$. چون مجموع رتبه و پوچی برابر n است، پوچی دقیقاً وقتی 0 است که رتبه برابر n باشد. بنا براین، T نامفرد است اگر و تنها اگر $W(V) = W$. لذا، اگر یکی از شرایط (۲) یا (۳) برقرار باشد، دیگری هم برقرار و T معکوس پذیر است. \square

به خواننده هشدار می‌دهیم که قضیه ۹ را جز در حالت متناهی بودن بعد و جز با شرط $\dim V = \dim W$ به کار نیندد. تحت فرضهای قضیه ۹، شرایط (۱)، (۲) و (۳) با احکام زیر نیز هم‌ارزند:

(۴) اگر $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V باشد، آنگاه $\{T\alpha_1, \dots, T\alpha_n\}$ پایه‌ای برای W است.

(۵) پایه‌ای چون $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ برای V وجود دارد که $\{T\alpha_1, \dots, T\alpha_n\}$ پایه‌ای برای W است.

ذیلاً اثباتی برای هم‌ارز بودن این پنج شرط ارائه می‌کنیم. این اثبات شامل اثبات تازه‌ای از هم‌ارز بودن (۱) و (۲) و (۳) هم هست.

(۲) \rightarrow (۱). اگر T معکوس پذیر باشد، T نامفرد است. (۳) \rightarrow (۲). فرض کنیم T نامفرد و $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V باشد. بنا بر قضیه ۸، $\{T\alpha_1, \dots, T\alpha_n\}$ یک مجموعه مستقل خطی از بردارهای W است؛ و چون بعد W نیز n است، این مجموعه از بردارها پایه‌ای برای W است. حال گیریم β برداری دلخواه از W باشد. اسکالرهای c_1, \dots, c_n وجود دارند که

$$\begin{aligned} \beta &= c_1(T\alpha_1) + \dots + c_n(T\alpha_n) \\ &= T(c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n) \end{aligned}$$

و این خود نشان می‌دهد که β در برد T است. (۴) \rightarrow (۳). اکنون فرض می‌کنیم T پوشا باشد. اگر $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V باشد، بردارهای $T\alpha_1, \dots, T\alpha_n$ برد T را، که بنا به فرض تمام W است، پدید می‌آورند. چون بعد W برابر n است، این n بردار باید مستقل خطی باشند؛ یعنی، باید پایه‌ای را برای W تشکیل بدهند. (۴) \rightarrow (۵). این حکم نیازی به توضیح ندارد. (۵) \rightarrow (۴). فرض کنیم پایه‌ای چون $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ برای V وجود داشته باشد که $\{T\alpha_1, \dots, T\alpha_n\}$ هم پایه‌ای برای W باشد. چون $T\alpha_i$ ها W را پدید می‌آورند، واضح است که برد T تمام W است. اگر $\alpha = c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n$ در فضای پوچ T باشد، آنگاه

$$T(c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n) = 0$$

$$c_1(T\alpha_1) + \dots + c_n(T\alpha_n) = 0$$

و چون $T\alpha_i$ ها مستقل هستند، هر c_i برابر صفر است، و لذا $\alpha = 0$. تا اینجا نشان داده ایم که برد T برابر با W است و T نامنفرد؛ بنا بر این، T معکوس پذیر است. مجموعه عملگرهای خطی معکوس پذیر روی یک فضای V همراه با عمل ترکیب، مثال خوبی برای چیزی که در جبر به «گروه» معروف است، به دست می دهد. گرچه فرصت آن را نداریم که بتفصیل در مورد گروهها به بحث بپردازیم، مع هذا تعریف آن را ذیلاً ارائه می کنیم.

تعریف. یک گروه متشکل است از

۱. یک مجموعه G ؛

۲. یک قاعده (یا عمل) که به هر جفت x و y از عناصر G ، عنصر xy از G را بسازد. شرایط زیر وابسته می سازد:

(الف) به ازای هر x, y, z از G ، $x(yz) = (xy)z$ (شرکت پذیری)؛

(ب) یک عنصر e در G وجود دارد، به طوری که به ازای هر x از G ، $ex = xe = x$ ؛

(پ) به هر عنصر x از G ، عنصری چون x^{-1} از G متناظر است به طوری که

$$xx^{-1} = x^{-1}x = e$$

قبلاً دیده ایم که ترکیب $UT \rightarrow (U, T)$ به هر جفت عملگر خطی معکوس پذیر روی فضای V ، عملگر معکوس پذیر دیگری روی V را متناظر می سازد. ترکیب، یک عمل شرکت پذیر است. به ازای هر T ، عملگر همانی I در $IT = TI$ صدق می کند، و به ازای هر عملگر معکوس پذیر T (بنا بر قضیه ۷) عملگر خطی معکوس پذیر T^{-1} وجود دارد که $TT^{-1} = T^{-1}T = I$. از این رو، مجموعه عملگرهای خطی معکوس پذیر روی V همراه با این عمل یک گروه است. مجموعه ماتریسهای $n \times n$ معکوس پذیر، همراه با ضرب ماتریسی به عنوان عمل، مثال دیگری از یک گروه است. یک گروه جابجایی نامیده می شود، هرگاه شرط $xy = yx$ به ازای هر x و y برقرار باشد. هیچ یک از دو مثالی را که در بالا ذکر کردیم در حالت کلی گروه جابجایی نیست. عمل یک گروه جابجایی غالباً به صورت $x + y \rightarrow (x, y)$ نوشته می شود و نه به صورت $xy \rightarrow (x, y)$ ، و در این حالت به جای عنصر «همانی» e از نماد 0 استفاده می شود. مجموعه بردارهای یک فضای برداری همراه با عمل جمع برداری، یک گروه جابجایی است. یک هیأت رامی توان به صورت مجموعه ای با دو عمل به نامهای جمع و ضرب توصیف کرد که تحت عمل جمع، گروهی جابجایی است، عناصر غیر صفرش تحت عمل ضرب، گروهی جابجایی تشکیل می دهند، و قانون بخش پذیری $x(y+z) = xy + xz$ نیز در آن برقرار است.

تمرین

۱. فرض کنید T و U دو عملگر خطی روی R^2 باشند که با

$$T(x_1, x_2) = (x_2, x_1) \quad \text{و} \quad U(x_1, x_2) = (x_1, 0)$$

تعریف می‌شوند.

(الف) T و U به‌طور هندسی چگونه توصیف می‌شوند؟

(ب) برای هر یک از تبدیلیهای TU ، UT ، $(U+T)$ ، T^2 و U^2 قواعدی شبیه به تعریف T و U به‌دست آورید.

۲. فرض کنید T (یکتا) عملگر خطی روی C^3 باشد که برای آن

$$T\epsilon_1 = (1, 0, i), \quad T\epsilon_2 = (0, 1, 1), \quad T\epsilon_3 = (i, 1, 0).$$

آیا T معکوس پذیر است؟

۳. عملگر خطی T روی R^3 با

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2 + x_3)$$

تعریف می‌شود. آیا T معکوس پذیر است؟ اگر چنین باشد، قاعده‌ای برای T^{-1} ، شبیه به آنکه T را تعریف می‌کند، بیابید.

۴. برای عملگر خطی T تمرین ۳ ثابت کنید

$$(T^2 - I)(T - 3I) = 0.$$

۵. فرض کنید $C^{2 \times 2}$ فضای برداری مختلط ماتریسهای 2×2 با درایه‌های مختلط باشد. با فرض

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

T را عملگر خطی روی $C^{2 \times 2}$ بگیرد که با $T(A) = BA$ تعریف می‌شود. رتبه T چیست؟ آیا می‌توانید T^2 را توصیف کنید؟

۶. فرض کنید T تبدیلی خطی از R^3 در R^2 و U تبدیلی خطی از R^2 در R^3 باشد. ثابت کنید تبدیل UT معکوس پذیر نیست. این قضیه را تعمیم بدهید.

۷. دو عملگر خطی T و U روی R^2 بیابید که $TU = 0$ ولی $UT \neq 0$.

۸. فرض کنید V فضایی برداری بر روی F هیأت F و T عملگری خطی روی V باشد. اگر $T^2 = 0$ درباره رابطه T و فضای پوچ T چه می‌توانید بگویید؟ یک عملگر

خطی T روی R^2 مثال بزنید که $T^2 = 0$ ولی $T \neq 0$.

۹. فرض کنید T عملگری خطی روی فضای V با بعد متناهی باشد و فرض کنید عملگری خطی چون U روی V وجود داشته باشد که $TU = I$. ثابت کنید T معکوس پذیر است و $U = T^{-1}$. مثالی بیابید که نشان دهد وقتی V با بعد متناهی نباشد این مطلب صحیح نیست. (دانهمایی: فرض کنید $D = T$. D عملگر مشتق گیری روی فضای توابع چند جمله ای است.)

۱۰. فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ با درایه های متعلق به هیأت F و T تبدیلی خطی از $F^{n \times 1}$ در $F^{m \times 1}$ باشد که با $T(X) = AX$ تعریف می شود. هرگاه $m < n$ نشان دهید ممکن است T پوشا باشد و درعین حال نامنفرد نباشد. به طور مشابه، نشان دهید که اگر $m > n$ ، ممکن است T نامنفرد باشد ولی پوشا نباشد.

۱۱. فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی و T عملگری خطی روی V باشد. اگر رتبه $(T^2) =$ رتبه (T) ، ثابت کنید برد و فضای بوج T مجزا هستند؛ یعنی، تنها بردار صفر مشترکند.

۱۲. فرض کنید p, m ، و n اعدادی صحیح و مثبت باشند و F یک هیأت باشد. فرض کنید V فضای ماتریسهای $m \times n$ بر روی F و W فضای ماتریسهای $p \times n$ بر روی F باشد. اگر B ماتریسی $p \times m$ و ثابت و T تبدیلی خطی از V در W تعریف شده توسط $T(A) = BA$ باشد، ثابت کنید T معکوس پذیر است اگر و تنها اگر $m = p$ و B ماتریسی $m \times m$ و معکوس پذیر باشد.

۳.۳. یکرخی

اگر V و W دو فضای برداری بر روی هیأت F باشند، هر تبدیل خطی T از V بروی W ، یک یکرخی از V بروی W نامیده می شود. هرگاه یک یکرخی از V بروی W موجود باشد، گوئیم V با W یکرخت است.

واضح است که V با V یکرخت است، زیرا عملگر همانی یک یکرخی از V بروی V است. همچنین، اگر V تحت یکرخی T با W یکرخت باشد، آنگاه W نیز با V یکرخت است، زیرا T^{-1} یک یکرخی از W بروی V است. خواننده باید باسانی بتواند نشان دهد که اگر V با W و W با Z یکرخت باشد، آنگاه V با Z هم یکرخت است. به طور خلاصه، یکرخی یک رابطه هم ارزی روی رده فضاهای برداری است. اگر یک یکرخی از V بروی W موجود باشد، گاهی به جای اینکه بگوئیم V با W

یکریخت است، می‌گوییم، V و W یکریخت‌اند. این موضوع اشکالی ایجاد نمی‌کند، زیرا V با W یکریخت است اگر و تنها اگر W با V یکریخت باشد.

قضیه ۱۰. هر فضای برداری n بعدی بردوی هیأت F با فضای F^n یکریخت است. اثبات. فرض کنیم V یک فضای برداری n بعدی بردوی هیأت F ، و $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه مرتبی برای آن باشد. تابع T از V در F^n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: اگر α در V باشد، $T\alpha$ را n تایی مختصات (x_1, \dots, x_n) بردار α نسبت به پایه مرتب \mathcal{B} می‌گیریم؛ یعنی، n تایی ای که

$$\alpha = x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n.$$

در بحث مختصات از فصل ۲ نشان دادیم که این T خطی و یک به یک است و V را بروی F^n می‌نگارد. \square

با وجودی که بردارها و اعمال در فضاهای برداری یکریخت ممکن است کاملاً متفاوت باشند، به منظورهای گوناگون، غالباً آنها را «یکی» تلقی می‌کنیم؛ یعنی، فضاهای یکریخت را غالباً یکی می‌گیریم. در حال حاضر در باره این ایده به بحثی طولانی نمی‌پردازیم، زیرا مایلیم درک مفهوم یکریختی و احساس «یکی» بودن فضاهای یکریخت با به پای تداوم مطالعه فضاهای برداری تقویت شوند.

اکنون به چند توضیح کوتاه می‌پردازیم. فرض کنیم T یک یکریختی از V بروی W باشد. اگر S زیرمجموعه‌ای از V باشد، آنگاه بنا بر قضیه ۸، S مستقل خطی است اگر و تنها اگر زیرمجموعه $T(S)$ از W مستقل باشد. از این رو، در تصمیم‌گیری راجع به مستقل بودن S می‌توان به جای S به بررسی $T(S)$ پرداخت. از این مطلب مشهود است که یکریختی، «حافظ بعد» است؛ بدین معنی که بعد هر زیر فضای V با بعد نگارهایش تحت T مساوی است. به تشریحی ساده از این ایده توجه کنید. فرض کنیم A ماتریس $m \times n$ بردوی هیأت F باشد. در واقع ما تاکنون دو تعریف برای فضای جواب ماتریس A ارائه کرده‌ایم. اولی عبارت است از مجموعه همه n تاییهای (x_1, \dots, x_n) از F^n که در هر یک از معادلات دستگاه $AX = 0$ صدق کنند. دومی مجموعه همه ماتریسهای ستونی $1 \times n$ مانند X است که $AX = 0$. بدین لحاظ، اولین فضای جواب زیر فضایی از F^n است، در حالی که دومی زیر فضایی از فضای همه ماتریسهای $1 \times n$ بردوی هیأت F . اما یک یکریختی کاملاً واضح بین F^n و $F^{n \times 1}$ دیده می‌شود و آن

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

است. تحت این یکریختی، اولین فضای جواب A بروی دومین فضای جواب برده می‌شود.

بعد این فضاها مساوی است، و از این رو اگر بخواهیم قضیه‌ای دربارهٔ بعد فضای جواب اثبات کنیم، اهمیتی ندارد که کدام فضا را برای بحث انتخاب کنیم. در واقع، اگر تصمیم می‌گیریم F^n فضای ماتریسهای $n \times 1$ را یکی بگیریم، احتمالاً خواننده مانع نمی‌شود. این کار را جز در مواردی که مناسب باشد انجام نخواهیم داد.

تمرین

۰۱. فرض کنید V مجموعهٔ اعداد مختلط F هیأت اعداد حقیقی باشد. مجموعهٔ V با اعمال معمولی فضایی برداری بر روی F است. يك یکرختی از این فضا بر روی R^2 را به‌طور صریح توصیف کنید.

۰۲. V را فضایی برداری بر روی هیأت اعداد مختلط بگیرید، و فرض کنید يك یکرختی T از V بر روی C^3 وجود داشته باشد. فرض کنید $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ بردارهایی از V باشند که

$$\begin{aligned} T\alpha_1 &= (1, 0, i), & T\alpha_2 &= (-2, 1+i, 0), \\ T\alpha_3 &= (-1, 1, 1), & T\alpha_4 &= (\sqrt{2}, i, 3). \end{aligned}$$

(الف) آیا α_1 در زیر فضای پدیدآمده توسط α_2 و α_3 قرار دارد؟
 (ب) اگر W_1 زیر فضای پدیدآمده توسط α_1 و α_2 ، و W_2 زیر فضای پدیدآمده توسط α_2 و α_3 باشد، اشتراك W_1 و W_2 را به‌دست آورید.
 (پ) پایه‌ای برای زیر فضای V که توسط چهار بردار α_j پدید می‌آید، بیابید.

۰۳. فرض کنید W مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای هرمیتی مختلط 2×2 یعنی مجموعهٔ ماتریسهای مختلط 2×2 چون A ، با شرط $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$ باشد (خط زبرنمایشگر مزدوج عددی مختلط است). همان‌طور که در مثال ۶ از فصل ۲ اشاره شد، W با اعمال معمولی، فضایی است برداری بر روی هیأت اعداد حقیقی. نشان دهید

$$(x, y, z, t) \rightarrow \begin{bmatrix} t+x & y+iz \\ y-iz & t-x \end{bmatrix}$$

يك یکرختی از R^4 بر روی W است.

۰۴. نشان دهید $F^{m \times n}$ با $F^{m \times n}$ یکرخت است.

۰۵. فرض کنید مجموعهٔ اعداد مختلط V به‌عنوان يك فضای برداری بر روی هیأت اعداد حقیقی در نظر گرفته شده باشد (تمرین ۱). تابع T از V در فضای ماتریسهای حقیقی 2×2 را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: اگر $z = x + iy$ و x و y حقیقی باشند،

$$T(z) = \begin{bmatrix} x + \gamma y & \delta y \\ -\gamma y & x - \gamma y \end{bmatrix}.$$

(الف) نشان دهید T یک تبدیل خطی (حقیقی) یک به یک از V در فضای ماتریسهای حقیقی 2×2 است.

(ب) نشان دهید $T(z_1 z_2) = T(z_1) T(z_2)$.

(پ) برد T را چگونه توصیف می‌کنید؟

۶. دوفضای برداری V و W با بعد متناهی بر روی هیأت F را در نظر بگیرید و ثابت کنید W و V یکرخت‌اند اگر و تنها اگر $\dim V = \dim W$.

۷. فرض کنید V و W دوفضای برداری بر روی هیأت F باشند، و U یک یکرختی از V بروی W باشد. ثابت کنید $T \rightarrow UTU^{-1}$ یک یکرختی از $L(V, V)$ بروی $L(W, W)$ است.

۳.۳. نمایش ماتریسی تبدیلهای

فرض کنیم V یک فضای بردار n بعدی و W یک فضای برداری m بعدی بر روی هیأت F باشند. همچنین فرض کنیم $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه مرتبی برای V و $\mathcal{B}' = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ پایه مرتبی برای W باشد. اگر T تبدیل خطی دلخواهی از V در W باشد، آنگاه T با عملکردش روی بردارهای α_j تعیین می‌شود. هر یک از n بردار $T\alpha_j$ به طور یکتا به صورت یک ترکیب خطی

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^m A_{ij} \beta_i \quad (3-3)$$

از β_i ها، که در آن اسکالرهایی A_{1j}, \dots, A_{mj} ، مختصات $T\alpha_j$ در پایه مرتب \mathcal{B}' می‌باشند، قابل بیان است. از این رو، تبدیل T از طریق فرمولهای (۳-۳) با mn اسکالر A_{ij} تعیین می‌شود. ماتریس A $m \times n$ که با $A(i, j) = A_{ij}$ تعریف می‌شود، ماتریس T نسبت به دو پایه مرتب \mathcal{B}' و \mathcal{B} نامیده می‌شود. کاربرد ما این است که به طور واضح بفهمیم چگونه ماتریس A تبدیل خطی T را تعیین می‌کند.

اگر $\alpha = x_1 \alpha_1 + \dots + x_n \alpha_n$ برداری از V باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} T\alpha &= T\left(\sum_{j=1}^n x_j \alpha_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j (T\alpha_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m A_{ij} \beta_i \\
 &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n A_{ij} x_j \right) \beta_i
 \end{aligned}$$

و اگر X ماتریس مختصات α در پایه \mathcal{B} باشد، محاسبه بالا نشان می‌دهد که AX ماتریس مختصات بردار $T\alpha$ در پایه \mathcal{B}' است، زیرا اسکالر

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} X_j$$

در پایه \mathcal{B}' سطر ماتریس ستونی AX است. همچنین مشاهده می‌شود که اگر A ماتریس $m \times n$ دلخواهی بر روی هیأت F باشد، آنگاه

$$T\left(\sum_{j=1}^n x_j \alpha_j\right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n A_{ij} x_j\right) \beta_i \quad (4-3)$$

تبدیل خطی T از V در W را تعریف می‌کند که ماتریس آن نسبت به \mathcal{B}' و \mathcal{B} عبارت است از A . این مطلب را به‌طور رسمی خلاصه می‌کنیم:

قضیه ۱۱. فرض کنیم V یک فضای برداری n بعدی بر روی هیأت F و W یک فضای برداری m بعدی بر روی F باشد. و نیز فرض کنیم \mathcal{B} پایه مرتبی برای V ، و \mathcal{B}' پایه مرتبی برای W باشد. برای هر تبدیل خطی T از V در W یک ماتریس $m \times n$ ، مانند A ، که در پایه‌های F هستند، یافت می‌شود به طوری که به ازای هر بردار α از V ،

$$[T\alpha]_{\mathcal{B}'} = A[\alpha]_{\mathcal{B}}$$

بعلاوه، $A \rightarrow T$ یک تناظر یک به یک بین مجموعه همه تبدیلهای خطی از V در W و مجموعه همه ماتریسهای $m \times n$ بر روی هیأت F است.

ماتریس A ، که بنا بر قضیه ۱۱ با T در تناظر است، ماتریس T نسبت به پایه‌های مرتب \mathcal{B}' و \mathcal{B} نام دارد. به خاطر داشته باشیم تساوی (۳-۳) بیان می‌کند A ماتریسی است که ستونهایش A_1, \dots, A_n توسط

$$A_j = [T\alpha_j]_{\mathcal{B}'}, \quad j = 1, \dots, n$$

تعیین می‌شوند. اگر U تبدیل خطی دیگری از V در W ، و $B = [B_1, \dots, B_n]$ ماتریس U نسبت به پایه‌های مرتب \mathcal{B}' و \mathcal{B} باشد، آنگاه $cA + B$ ماتریس $cT + U$ نسبت به \mathcal{B}' و \mathcal{B} است. این مطلب واضح است، زیرا

$$\begin{aligned}
 cA_j + B_j &= c[T\alpha_j]_{\mathcal{B}'} + [U\alpha_j]_{\mathcal{B}'} \\
 &= [cT\alpha_j + U\alpha_j]_{\mathcal{B}'} \\
 &= [(cT + U)\alpha_j]_{\mathcal{B}'}
 \end{aligned}$$

قضیه ۱۲. فرض کنیم V فضای برداری n بعدی و W یک فضای برداری m بعدی بردوی هیأت F باشند. به ازای هر جفت پایه مرتب \mathcal{B} و \mathcal{B}' ، بترتیب برای V و W ، تابعی که به هر تبدیل خطی T ، ماتریسش نسبت به \mathcal{B}' و \mathcal{B} را تخصیص می‌دهد، یک یکریختی بین فضای $L(V, W)$ و فضای همه ماتریسهای $m \times n$ بردوی هیأت F است.

اثبات. قبلاً ملاحظه کردیم که تابع مورد نظر خطی است؛ همچنان که در قضیه ۱۱ بیان شد، این تابع یک به یک نیز هست و $L(V, W)$ را بروی مجموعه ماتریسهای $m \times n$ می‌نگارد. \square

در این بررسی، بخصوص به نمایش ماتریسی تبدیلهای خطی از یک فضا در خودش، یعنی به عملگرهای خطی روی یک فضای V ، علاقه‌مند هستیم. در این حالت بسیار مناسب است که در هر مورد از پایه‌های یکسان استفاده کنیم؛ یعنی، فرض کنیم که $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$. در این صورت، ماتریس نمایش را به طور ساده ماتریس T نسبت به پایه مرتب \mathcal{B} می‌نامیم. چون این مفهوم برایمان بسیار مهم است، تعریف آن را دوباره بیان می‌کنیم. اگر T تبدیلی خطی روی فضای برداری با بعد متناهی V و $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه مرتبی برای V باشد، ماتریس T نسبت به \mathcal{B} (یا، ماتریس T در پایه مرتب \mathcal{B}) عبارت است از ماتریس $n \times n$ A مانند A که درایه‌هایش، A_{ij} ، با معادلات

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^n A_{ij}\alpha_i, \quad j = 1, \dots, n \quad (5-3)$$

تعریف می‌شوند. همواره باید به خاطر داشت که این ماتریس که T را نمایش می‌دهد به پایه مرتب \mathcal{B} وابسته است، و بعلاوه در هر پایه مرتب V نمایشی ماتریسی برای T موجود است. (برای تبدیلهای از یک فضا در فضای دیگر، این ماتریس به دو پایه مرتب، یکی برای V و دیگری از آن W ، وابسته است.) برای آنکه این وابستگی را از یاد نبریم، برای ماتریس عملگر خطی T در پایه مرتب \mathcal{B} از نماد

$$[T]_{\mathcal{B}}$$

استفاده می‌کنیم. طریقه‌ای که با آن این ماتریس و این پایه مرتب T را توصیف می‌کنند، این است که به ازای هر α در

$$[T\alpha]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[\alpha]_{\mathcal{B}}$$

مثال ۱۳. فرض کنیم V فضای ماتریسهای ستونی $n \times 1$ بردوی هیأت F ، W فضای ماتریسهای $m \times 1$ بردوی همین هیأت، و A ماتریس $m \times n$ ثابتی بردوی F باشد. همچنین فرض کنیم T تبدیل خطی از V در W تعریف شده با $T(X) = AX$ باشد. \mathcal{B} را پایه مرتبی برای V می‌گیریم که نظیر پایه استاندارد F^n باشد، یعنی i مین بردار در \mathcal{B} همان ماتریس $n \times 1$ X_i باشد با درایه ۱ در سطر i م و درایه ۰ در سطرهای دیگر. فرض کنیم

\mathcal{B}' پایه مرتب متناظر آن برای W باشد، یعنی زمین بردار \mathcal{B}' ماتریس $1 \times m$ Y_j با درایه ۱ در سطر j م و درایه ۰ در سایر سطرها باشد. در این صورت، ماتریس T نسبت به جفت \mathcal{B} و \mathcal{B}' ، خود ماتریس A است. این مطلب واضح است، زیرا ماتریس AX_j زمین ستون ماتریس A است.

مثال ۱۴. گیریم F یک هیأت، و T عملگری روی F^2 باشد که با

$$T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$$

تعریف می شود. سهولت دیده می شود که T عملگری خطی روی F^2 است. فرض کنیم $\mathcal{B} = \{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ پایه مرتب استاندارد F^2 باشد. حال

$$T\epsilon_1 = T(1, 0) = (1, 0) = 1\epsilon_1 + 0\epsilon_2$$

$$T\epsilon_2 = T(0, 1) = (0, 0) = 0\epsilon_1 + 0\epsilon_2$$

ولذا ماتریس T در پایه مرتب \mathcal{B} عبارت است از

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

مثال ۱۵. فرض کنیم V فضای همه توابع چندجمله ای از R در R به شکل

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$$

یعنی، فضای توابع چندجمله ای از درجه سه یا کمتر باشد. عملگر مشتق گیری D در مثال ۲، V را در V می نگارد، زیرا D «کاهش دهنده درجه» است. فرض کنیم پایه مرتب \mathcal{B} برای V متشکل از چهار تابع f_1, f_2, f_3, f_4 و f_4 باشد که با $f_j(x) = x^{j-1}$ تعریف می شوند. در این صورت،

$$(Df_1)(x) = 0, \quad Df_1 = 0f_1 + 0f_2 + 0f_3 + 0f_4$$

$$(Df_2)(x) = 1, \quad Df_2 = 1f_1 + 0f_2 + 0f_3 + 0f_4$$

$$(Df_3)(x) = 2x, \quad Df_3 = 0f_1 + 2f_2 + 0f_3 + 0f_4$$

$$(Df_4)(x) = 3x^2, \quad Df_4 = 0f_1 + 0f_2 + 3f_3 + 0f_4$$

و بنابراین ماتریس D در پایه مرتب \mathcal{B} عبارت است از

$$[D]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

قبلاً دیدیم که هنگام جمع تبدیلهای، چیزی که برای ماتریسهای نمایش اتفاق می افتد این است که آنها هم جمع می شوند. اکنون می خواهیم بدانیم هنگام ترکیب تبدیلهای چه اتفاق می افتد. به صورت دقیقتر، فرض کنید V, W, Z فضاهایی برداری بر روی هیأت F ، و بترتیب، با ابعاد m, n, p باشند. T را تبدیلی خطی از V در W ، و U را تبدیلی خطی از W در Z می گیریم. فرض کنیم پایه های مرتب

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \quad \mathcal{B}' = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}, \quad \mathcal{B}'' = \{\gamma_1, \dots, \gamma_p\}$$

بترتیب، برای فضاهای V, W, Z داده شده اند و A ماتریس T نسبت به جفت \mathcal{B}' و \mathcal{B} ، و B ماتریس U نسبت به جفت \mathcal{B}'' و \mathcal{B}' است. در این صورت، بسادگی دیده می شود که C ، ماتریس تبدیل UT نسبت به جفت \mathcal{B}'' و \mathcal{B} عبارت است از حاصل ضرب A و B . زیرا، اگر α برداری دلخواه از V باشد، آنگاه

$$[T\alpha]_{\mathcal{B}'} = A[\alpha]_{\mathcal{B}}$$

$$[U(T\alpha)]_{\mathcal{B}''} = B[T\alpha]_{\mathcal{B}'}$$

پس

$$[(UT)(\alpha)]_{\mathcal{B}''} = BA[\alpha]_{\mathcal{B}}$$

و از این رو، بنا بر تعریف و یکتا بودن ماتریس نمایش، باید داشته باشیم $C = BA$. با انجام محاسبه ذیل نیز می توان به این نتیجه دست یافت

$$(UT)(\alpha_j) = U(T\alpha_j)$$

$$= U\left(\sum_{k=1}^m A_{kj}\beta_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^m A_{kj}(U\beta_k)$$

$$= \sum_{k=1}^m A_{kj} \sum_{i=1}^p B_{ik}\gamma_i$$

$$= \sum_{i=1}^p \left(\sum_{k=1}^m B_{ik}A_{kj}\right)\gamma_i$$

و بنا بر این باید داشته باشیم

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^m B_{ik}A_{kj} \quad (۶-۳)$$

اعمال روی سطرهای ماتریسها موجب ایجاد انگیزه برای تعریف (۶-۳) ضرب ماتریسی شدند. در اینجا دیده می شود که ترکیب تبدیلهای خطی هم انگیزه ای بسیار قوی برای این تعریف است. خلاصه این مطالب به طور رسمی چنین است.

قضیه ۱۳. فرض کنیم V, W, Z سه فضای برداری با بعدمتناهی بردوی هیات F ، تبدیلی خطی از V در W و U تبدیلی خطی از W در Z باشند. اگر \mathcal{B}' ، \mathcal{B} و \mathcal{B}'' پایه‌هایی مرتب، بترتیب، برای V, W, Z باشند و اگر A ماتریس T نسبت به جفت \mathcal{B} و \mathcal{B}' ، و B ماتریس U نسبت به جفت \mathcal{B}'' و \mathcal{B}' باشد، آنگاه ماتریس ترکیب UT نسبت به جفت \mathcal{B} و \mathcal{B}'' عبارت است از ماتریس حاصل ضرب $C = BA$.

ملاحظه می‌کنیم که قضیه ۱۳، اثباتی از شرکت پذیری ضرب ماتریسی به دست می‌دهد. اثباتی که نیازی به محاسبه ندارد، و مستقل از اثباتی است که در فصل ۱ ارائه شد. بعلاوه، خاطر نشان می‌کنیم که حالت خاصی از قضیه ۱۳ را در مثال ۱۲ هم اثبات کردیم. تذکر این مطلب مهم است که اگر T و U عملگرهایی خطی روی فضای V باشند و نمایش ماتریسی را نسبت به پایه واحدی چون \mathcal{B} انجام دهیم، آنگاه قضیه ۱۳ شکل ساده و ماتریسها برقرار می‌کند، نه تنها یک یکریختی فضای برداری است، بلکه ضربها را نیز حفظ می‌کند. نتیجه‌ای ساده از این مطلب این است که عملگر خطی T معکوس پذیر است اگر و تنها اگر $[T]_{\mathcal{B}}$ ماتریسی معکوس پذیر باشد. زیرا، عملگر همانی I در هر پایه مرتب دلخواه توسط ماتریس همانی نمایش داده می‌شود، و از این رو

$$UT = TU = I$$

هم ارز است با

$$[U]_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[U]_{\mathcal{B}} = I.$$

البته، وقتی T معکوس پذیر باشد

$$[T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{-1}$$

اکنون می‌خواهیم بدانیم هنگامی که پایه تغییر کند، چه تغییری در ماتریسهای نمایش رخ می‌دهد. به منظور سادگی، این پرسش را تنها برای عملگرهای خطی روی یک فضای V مطرح می‌کنیم تا بتوانیم از پایه مرتب واحدی استفاده کنیم. سؤال به طور مشخص چنین است: فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای V با بعد متناهی و

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \quad \mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$$

دوپایه مرتب برای V باشند. ارتباط ماتریسهای $[T]_{\mathcal{B}}$ و $[T]_{\mathcal{B}'}$ چیست؟ همان گونه که در فصل ۲ مشاهده کردیم، یک ماتریس $n \times n$ (معکوس پذیر) یکتای P وجود دارد، به طوری که به ازای هر بردار α از V ،

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'}. \quad (۷-۳)$$

این ماتریس عبارت است از $P = [P_1, \dots, P_n]$ که در آن $P_j = [\alpha'_j]_{\mathcal{B}}$ بنا به تعریف

$$[T\alpha]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[\alpha]_{\mathcal{B}}. \quad (۸-۳)$$

اگر (۷-۳) را بر بردار $T\alpha$ به کار بندیم، داریم

$$[T\alpha]_{\mathcal{B}} = P[T\alpha]_{\mathcal{B}'}. \quad (۹-۳)$$

از ترکیب (۷-۳)، (۸-۳)، و (۹-۳) به دست می آوریم

$$[T] P[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P[T\alpha]_{\mathcal{B}'}$$

یا

$$P^{-1}[T] P[\alpha]_{\mathcal{B}'} = [T\alpha]_{\mathcal{B}'}$$

و از این رو باید داشته باشیم

$$[T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P. \quad (۱۰-۳)$$

این رابطه به پرسش ما پاسخ می گوید.

قبل از آنکه این نتیجه را رسماً بیان کنیم، به مشاهده مطلب زیر می پردازیم. عملگر خطی یکتایی چون U وجود دارد که با

$$U\alpha_j = \alpha'_j, \quad j = 1, \dots, n$$

تعریف می شود و \mathcal{B} را بروی \mathcal{B}' انتقال می دهد. عملگر U معکوس پذیر است، زیرا پایه ای از V را بروی پایه ای از V می برد. ماتریس P (بالا) دقیقاً ماتریس عملگر U در پایه مرتب \mathcal{B} است. زیرا P با

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^n P_{ij}\alpha_i$$

تعریف می شود و چون $U\alpha_j = \alpha'_j$ ، این تساوی می تواند به صورت

$$U\alpha_j = \sum_{i=1}^n P_{ij}\alpha_i$$

نیز نوشته شود. پس، طبق تعریف $P = [U]_{\mathcal{B}}$.

قضیه ۱۴. فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد منتهای بردوی هیات F ،

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \quad \mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$$

دو پایه مرتب برای V و T عملگری خطی «دی V باشد. اگر $P = [P_1, \dots, P_n]$ ماتریس $n \times n$ با ستونهای $P_j = [\alpha'_j]_{\mathcal{B}}$ باشد، آنگاه

$$[T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P.$$

در نتیجه، اگر U عملگر معکوس پذیر تعریف شده با $U\alpha_j = \alpha'_j$ ، $j = 1, \dots, n$ ، «دی V

باشد، آنگاه

$$[T]_{\mathcal{B}'} = [U]_{\mathcal{B}}^{-1} [T]_{\mathcal{B}} [U]_{\mathcal{B}}.$$

مثال ۰۱۶ فرض کنیم عملگر خطی T روی R^2 با $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$ تعریف شود. در مثال ۱۴ نشان دادیم که ماتریس T در پایه مرتب استاندارد $\mathcal{B} = \{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ برابر

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

است. اگر پایه مرتب \mathcal{B}' برای R^2 مشکل از بردارهای $\epsilon'_1 = (1, 1)$ و $\epsilon'_2 = (2, 1)$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \epsilon'_1 &= \epsilon_1 + \epsilon_2 \\ \epsilon'_2 &= 2\epsilon_1 + \epsilon_2 \end{aligned}$$

ولذا P عبارت است از ماتریس

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

با محاسبه کوتاهی نتیجه می شود

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

از این رو

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{B}'} &= P^{-1} [T]_{\mathcal{B}} P \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

سادگی می توانیم صحت این نتیجه را بررسی کنیم، زیرا

$$T\epsilon'_1 = (1, 0) = -\epsilon'_1 + \epsilon'_2$$

$$T\epsilon'_2 = (2, 0) = -2\epsilon'_1 + 2\epsilon'_2$$

مثال. فرض کنیم V فضای توابع چندجمله‌ای از R در R با «درجه» کمتر از ۳ یا مساوی با آن باشد. نظیر مثال ۱۵، D را عملگر مشتق‌گیری روی V می‌گیریم، و فرض می‌کنیم

$$\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$$

پایه مرتب تعریف شده با $f_i(x) = x^{i-1}$ برای V باشد. عدد حقیقی t را در نظر می‌گیریم و تعریف می‌کنیم $g_i(x) = (x+t)^{i-1}$ ، به عبارت دیگر

$$g_1 = f_1$$

$$g_2 = tf_1 + f_2$$

$$g_3 = t^2f_1 + 2tf_2 + f_3$$

$$g_4 = t^3f_1 + 3t^2f_2 + 3tf_3 + f_4.$$

همان گونه که بسادگی دیده می‌شود چون ماتریس

$$P = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ 0 & 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

معکوس پذیر، و معکوسش

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -t & t^2 & -t^3 \\ 0 & 1 & -2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

است، نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{B}' = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ پایه مرتبی برای V است. در مثال ۱۵، معلوم شد که ماتریس D در پایه مرتب \mathcal{B} عبارت است از

$$[D]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

پس، ماتریس D در پایه مرتب \mathcal{B}' عبارت است از

$$P^{-1}[D]_{\mathcal{B}}P = \begin{bmatrix} 1 & -t & t^2 & -t^3 \\ 0 & 1 & -2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ 0 & 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -t & t^2 & -t^3 \\ 0 & 1 & -2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6t \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

بنابراین، D در پایه‌های مرتب \mathcal{B} و \mathcal{B}' با یک ماتریس نمایش داده می‌شود. البته این نتیجه را می‌توان به نحو مستقیم‌تری هم مشاهده کرد، زیرا

$$Dg_1 = 0$$

$$Dg_2 = g_1$$

$$Dg_3 = 2g_2$$

$$Dg_4 = 3g_3.$$

این مثال نکته خوبی را نشان می‌دهد. اگر ماتریس عملگری خطی را در یک پایه مرتب \mathcal{B} بشناسیم و بخواهیم ماتریس آن را در پایه مرتب دیگر \mathcal{B}' بیابیم، هر چند ممکن است یافتن ماتریس نمایش با توسل مستقیم به تعریف کار بسیار ساده‌ای باشد، اما غالباً تغییر مختصات با استفاده از ماتریس معکوس پذیر P خیلی مناسب‌تر است.

تعریف. فرض کنیم A و B دو ماتریس $n \times n$ (هرچی) بردوی هیأت F باشند. گوییم B متشابه با A بر روی F است، هرگاه یک ماتریس $n \times n$ معکوس پذیر P یافت شود به طوری که $B = P^{-1}AP$.

بنابرقضیه ۱۴، نتیجه زیر را داریم: اگر V یک فضای برداری n بعدی بر روی F و \mathcal{B} و \mathcal{B}' دو پایه مرتب برای V باشند، آنگاه به ازای هر عملگر خطی T روی V ، ماتریس $B = [T]_{\mathcal{B}'}$ متشابه با ماتریس $A = [T]_{\mathcal{B}}$ است. عکس این حکم نیز صادق است. فرض کنیم A و B دو ماتریس $n \times n$ ، و B متشابه با A باشد. همچنین فرض کنیم V فضای n بعدی دلخواهی بر روی F ، و \mathcal{B} پایه مرتبی برای V باشد. T را آن عملگر خطی روی V می‌گیریم که در پایه \mathcal{B} با A نمایش داده می‌شود. اگر $B = P^{-1}AP$ ، \mathcal{B}' را پایه مرتبی برای V می‌گیریم که از \mathcal{B} توسط P حاصل می‌شود، یعنی

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^n P_{ij} \alpha_i.$$

در این صورت، ماتریس T در پایه \mathcal{B}' همان B خواهد بود.

پس، این گفته که B متشابه با A است، بدین معنی است که روی هر فضای n بعدی F ، ماتریسهای A و B یک تبدیل خطی در دو پایه مرتب (احیاناً) مختلف را نمایش می‌دهند.

توجه کنید که با به کار گرفتن $P = I$ ، هر ماتریس $n \times n$ مانند A متشابه با خودش است. اگر B متشابه با A باشد، آنگاه A نیز متشابه با B است، زیرا $B = P^{-1}AP$ ایجاب می‌کند که $A = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$. اگر B متشابه با A و C متشابه با B باشد، آنگاه C متشابه با A است، چرا که $B = P^{-1}AP$ و $C = Q^{-1}BQ$ ایجاب می‌کنند که $C = (PQ)^{-1}A(PQ)$. پس، تشابه رابطه‌ای هم‌ارزی روی مجموعه ماتریسهای $n \times n$ بر روی هیأت F است. همچنین توجه کنید که تنها ماتریس متشابه با ماتریس همانی I خود I است، و تنها ماتریس متشابه با ماتریس صفر، خود ماتریس صفر است.

تمرین

۱. فرض کنید T عملگر خطی روی C^2 تعریف شده با $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$ باشد. فرض کنید \mathcal{B} پایه مرتب استاندارد C^2 ، و $\mathcal{B}' = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ پایه مرتب تعریف شده با $\alpha_1 = (1, i)$ و $\alpha_2 = (-i, 2)$ باشد.

(الف) ماتریس T نسبت به جفت \mathcal{B} و \mathcal{B}' چیست؟

(ب) ماتریس T نسبت به جفت \mathcal{B}' و \mathcal{B} کدام است؟

(پ) ماتریس T در پایه مرتب \mathcal{B}' چیست؟

(ت) ماتریس T در پایه مرتب $\{\alpha_2, \alpha_1\}$ کدام است؟

۲. فرض کنید T تبدیل خطی از R^3 در R^3 تعریف شده با

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_3 - x_1)$$

باشد.

(الف) اگر \mathcal{B} پایه مرتب استاندارد R^3 و \mathcal{B}' پایه مرتب استاندارد R^3 باشد، ماتریس T نسبت به جفت \mathcal{B} و \mathcal{B}' کدام است؟

(ب) اگر $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ و $\mathcal{B}' = \{\beta_1, \beta_2\}$ و در آنها

$$\alpha_1 = (1, 0, -1), \alpha_2 = (1, 1, 1), \alpha_3 = (1, 0, 0),$$

$$\beta_1 = (0, 1), \beta_2 = (1, 0)$$

ماتریس T نسبت به جفت \mathcal{B} و \mathcal{B}' کدام است؟

۳. فرض کنید T عملگری خطی روی F^n و A ماتریس T در پایه مرتب استاندارد F^n باشد. فرض کنید W زیرفضای F^n پدید آمده با بردارهای ستونی A باشد. رابطه W با T چیست؟

۴. فرض کنید V یک فضای برداری ۲ بعدی بر روی F و \mathcal{B} پایه مرتبی برای V باشد. اگر T عملگری خطی روی V باشد و

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ثابت کنید $T^2 - (a+d)T + (ad-bc)I = 0$

۵. فرض کنید T عملگری خطی روی R^3 باشد که ماتریس در پایه مرتب استاندارد برابر با

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

است. پایه‌ای برای برد T و پایه‌ای برای فضای بوج T بیابید.

۶. فرض کنید T عملگر خطی روی R^2 تعریف شده با

$$T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$$

باشد.

(الف) ماتریس T در پایه مرتب استاندارد R^2 چیست؟

(ب) ماتریس T در پایه مرتب $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ ، که در آن $\alpha_1 = (1, 2)$ و

$$\alpha_2 = (1, -1)$$
 چیست؟

(پ) ثابت کنید به ازای هر عدد حقیقی c عملگر $(T - cI)$ معکوس پذیر است.

(ت) اگر \mathcal{B} پایه مرتب دلخواهی برای R^2 باشد و $[T]_{\mathcal{B}} = A$ ، ثابت کنید که

$$A_{12}A_{21} \neq 0$$

۷. فرض کنید T عملگر خطی روی R^3 تعریف شده با

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_3, -2x_1 + x_2, -x_1 + 2x_2 + 4x_3)$$

باشد.

(الف) ماتریس T در پایه مرتب استاندارد R^3 چیست؟

(ب) ماتریس T در پایه مرتب

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$$

که در آن $\alpha_1 = (1, 0, 1)$ ، $\alpha_2 = (-1, 2, 1)$ و $\alpha_3 = (2, 1, 1)$ چیست؟

(پ) ثابت کنید T معکوس پذیر است و قاعده‌ای شبیه آنکه T را تعریف می‌کند، برای

$$T^{-1}$$
 به دست آورید.

۸. اگر θ عددی حقیقی باشد، ثابت کنید دو ماتریس

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix}$$

بر روی هیأت اعداد مختلط متشابه‌اند. (داهنمایی: فرض کنید T عملگر خطی روی

C^2 باشد که در پایه مرتب استاندارد با ماتریس اول نمایش داده می‌شود. آنگاه دو

بردار α_1 و α_2 بیابید که $T\alpha_1 = e^{i\theta}\alpha_1$ و $T\alpha_2 = e^{-i\theta}\alpha_2$ و $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ یک پایه

باشد.)

۹. فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأت F و T و S عملگرهایی

خطی روی V باشند. سؤال: چه وقت پایه‌های مرتب \mathcal{B}' و \mathcal{B} برای V یافت می‌شوند که

$[S]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}$ ؟ ثابت کنید چنین پایه‌هایی وجود دارند اگر و تنها اگر یک عملگر خطی معکوس پذیر U روی V یافت شود که $T = USU^{-1}$. (طرح اثبات: اگر، $[S]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}$ ، بعکس، آنگاه U را عملگری بگیرد که \mathcal{B} را بر روی \mathcal{B}' ببرد و نشان دهید که $S = UTU^{-1}$. بعکس، اگر به ازای عملگر معکوس پذیر U چون $T = USU^{-1}$ داشته باشیم، آنگاه \mathcal{B} را پایه مرتب دلخواهی برای V و \mathcal{B}' را نگاره آن تحت U فرض کنید. سپس نشان دهید $[S]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}$.)

۱۰. قبلاً دیده‌ایم که عملگر خطی T روی R^2 تعریف شده با $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$ در پایه مرتب استاندارد با ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. این عملگر در رابطه $T^2 = T$ صدق می‌کند. ثابت کنید اگر S عملگری خطی روی R^2 باشد به طوری که $S^2 = S$ ، آنگاه یا $S = 0$ یا $S = I$ ، و یا پایه‌ای مرتب چون \mathcal{B} برای R^2 وجود دارد که $[S]_{\mathcal{B}} = A$ (منظور از A همان ماتریس فوق است).

۱۱. فرض کنید W فضای همه ماتریسهای ستونی $n \times 1$ بر روی هیأت F باشد. اگر A

ماتریسی $n \times n$ بر روی F باشد، آنگاه A با ضرب از چپ، عملگر خطی L_A را روی W تعریف می‌کند: $L_A(X) = AX$. ثابت کنید هر عملگر خطی روی W ، یک ضرب از چپ در ماتریسی $n \times n$ است؛ یعنی به ازای ماتریسی چون A یک L_A است.

حال فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی بر روی هیأت F و \mathcal{B} پایه مرتبی برای V باشد. به ازای هر α در V ، تعریف می‌کنیم $U\alpha = [\alpha]_{\mathcal{B}}$. ثابت کنید U یک یکریختی از V بروی W است. اگر T عملگری خطی روی V باشد، آنگاه UTU^{-1} عملگری خطی روی W است. در نتیجه، UTU^{-1} ضرب از چپ در ماتریسی $n \times n$ مانند A است. A کدام ماتریس است؟

۱۲. فرض کنید V یک فضای برداری n بعدی بر روی هیأت F و $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه مرتبی برای V باشد.

(الف) بنا بر قضیه ۱ عملگر خطی یکتایی چون T روی V وجود دارد به طوری که

$$T\alpha_j = \alpha_{j+1}, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad T\alpha_n = 0.$$

ماتریس A مربوط به عملگر T در پایه \mathcal{B} چیست؟

(ب) ثابت کنید $T^n = 0$ ولی $T^{n-1} \neq 0$.

(پ) فرض کنید S عملگری خطی روی V باشد که $S^n = 0$ ولی $S^{n-1} \neq 0$.

ثابت کنید پایه مرتبی چون \mathcal{B}' برای V وجود دارد که ماتریس S در پایه مرتب \mathcal{B}' همان ماتریس A در قسمت (الف) باشد.

(ت) ثابت کنید اگر M و N ماتریسهایی $n \times n$ بر روی F باشند که $M^n = N^n = 0$ ولی $M^{n-1} \neq 0 \neq N^{n-1}$ ، آنگاه M و N متشابه اند.

۱۳. فرض کنید V و W دو فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأت F و T تبدیلی خطی از V در W باشد.

اگر

$$\mathcal{B}' = \{\beta_1, \dots, \beta_m\} \text{ و } \mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

بترتیب، دو پایه مرتب برای V و W باشند، تبدیلهای $E^{p,q}$ را به صورتی که در اثبات قضیه ۵ تعریف شدند در نظر بگیرید: $E^{p,q}(\alpha_i) = \delta_{iq}\beta_p$. آنگاه $E^{p,q}$ ها، $1 \leq p \leq m$ ، $1 \leq q \leq n$ ، پایه ای برای $L(V, W)$ تشکیل می دهند و لذا به ازای اسکالرهایی معین A_{pq} (مختصات T در این پایه از $L(V, W)$)

$$T = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n A_{pq} E^{p,q}.$$

نشان دهید ماتریس A با درایه های $A_{pq} = A(p, q)$ دقیقاً همان ماتریس T نسبت به جفت \mathcal{B} و \mathcal{B}' است.

۵.۴. تابعکهای خطی

اگر V فضایی برداری بر روی هیأت F باشد، یک تبدیل خطی f از V در هیأت اسکالرهایی F یک تابعک خطی روی V نامیده می شود. با توجه به مفهوم تبدیل خطی، این بدان معنی است که f تابعی است از V در F که به ازای همه بردارهای α و β از V و همه اسکالرهایی c از F

$$f(c\alpha + \beta) = cf(\alpha) + f(\beta).$$

مفهوم تابعک خطی در مطالعه فضاهای با بعد متناهی مهم است، زیرا در سازمان دادن و روشن کردن مبحث زیرفضاها، معادلات خطی، و مختصات یاری دهنده است.

مثال ۱۸. بگیریم F یک هیأت باشد و a_1, \dots, a_n اسکالرهایی از F باشند. تابع f روی F^n را با

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

تعریف می کنیم. در این صورت، f تابعکی خطی روی F^n است. این همان تابعک خطی است که توسط ماتریس $[a_1 \dots a_n]$ نسبت به پایه مرتب استاندارد F^n و پایه $\{1\}$ برای F

نمایش داده می‌شود:

$$a_j = f(\epsilon_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

هر تابع خطی دلخواه روی F^n نیز به ازای اسکارهایی چون a_1, a_2, \dots, a_n به همین شکل است. این مطلب بلافاصله از تعریف تابع خطی نتیجه می‌شود، زیرا با تعریف $a_j = f(\epsilon_j)$ استفاده از خطی بودن، داریم

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= f(\sum_j x_j \epsilon_j) \\ &= \sum_j x_j f(\epsilon_j) \\ &= \sum_j a_j x_j. \end{aligned}$$

مثال ۱۹. اینک به مثالی مهم از تابعهای خطی می‌پردازیم. فرض کنیم n عددی صحیح مثبت و F یک هیأت باشد. اگر A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های متعلق به F باشد، $\text{tr} A$ عبارت است از اسکار

$$\text{tr} A = A_{11} + A_{22} + \dots + A_{nn}.$$

تابع رد تابعی خطی روی فضای ماتریسی $F^{n \times n}$ است، زیرا

$$\begin{aligned} \text{tr}(cA + B) &= \sum_{i=1}^n (cA_{ii} + B_{ii}) \\ &= c \sum_{i=1}^n A_{ii} + \sum_{i=1}^n B_{ii} \\ &= c \text{tr}(A) + \text{tr} B. \end{aligned}$$

مثال ۲۰. فرض کنیم V فضای همه توابع چندجمله‌ای از هیأت F در خودش و t عنصری از F باشد. اگر تعریف کنیم

$$L_t(p) = p(t)$$

آنگاه، L_t تابعی خطی روی V است. معمولاً این مطلب به این صورت توصیف می‌شود که به ازای هر t «تعیین مقدار در t » تابعی خطی روی فضای توابع چندجمله‌ای است. لازم است این نکته را متذکر شویم که چندجمله‌ای بودن توابع، نقشی در این مثال ندارد. تعیین مقدار در t ، تابعی خطی روی فضای همه توابع از F در F است.

مثال ۲۱. تابع زیر ممکن است مهم‌ترین تابع خطی در ریاضیات باشد. گیریم $[a, b]$ فاصله‌ای بسته روی خط حقیقی و $C([a, b])$ فضای توابع (با مقدار) حقیقی

پیوسته روی $[a, b]$ باشد. در این صورت،

$$L(g) = \int_a^b g(t) dt$$

تابع خطی L روی $C[a, b]$ را تعریف می‌کند.

اگر V فضای برداری باشد، دسته همه تابعهای خطی روی V ، به طریقی طبیعی فضای برداری تشکیل می‌دهد. این فضا همان $L(V, F)$ است. ما این فضا را با V^* نشان می‌دهیم و آن را فضای دوگان V می‌نامیم:

$$V^* = L(V, F).$$

اگر بعد V متناهی باشد، می‌توانیم توصیفی نسبتاً صریح از V^* فضای دوگان V به دست آوریم. در مورد فضای V^* طبق قضیه ۵ مطلبی می‌دانیم، و آن این است که

$$\text{بعد}(V^*) = \text{بعد}(V).$$

فرض کنیم $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V باشد. بنا بر قضیه ۱ (به ازای هر i) یک تابع خطی یکتای f_i روی V وجود دارد که

$$f_i(\alpha_j) = \delta_{ij}. \quad (11-3)$$

بدین طریق، از \mathcal{B} مجموعه‌ای از n تابع خطی متمایز f_1, \dots, f_n روی V به دست می‌آوریم. این تابعها دارای استقلال خطی نیز هستند. زیرا، فرض کنیم

$$f = \sum_{i=1}^n c_i f_i \quad (12-3)$$

در این صورت

$$\begin{aligned} f(\alpha_j) &= \sum_{i=1}^n c_i f_i(\alpha_j) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \delta_{ij} \\ &= c_j. \end{aligned}$$

بخصوص، اگر f تابع صفر باشد، به ازای هر j داریم $f(\alpha_j) = 0$ ، و لذا اسکالرهایی c_j همگی ۰ هستند. حال n تابع f_1, \dots, f_n مستقل خطی هستند و چون می‌دانیم که بعد V^* برابر n است، مجموعه $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ لزوماً باید پایه‌ای برای V^* باشد. این پایه، پایه دوگان \mathcal{B} نامیده می‌شود.

قضیه ۱۵. فرض کنیم V فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأت F ، و $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V باشد. در این صورت، یک پایه دوگان یکتای

خطی f روی V داریم $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ برای V^* وجود دارد به طوری که $f_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$. به ازای هر تابع

$$f = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) f_i \quad (۱۳-۳)$$

و به ازای هر بردار α از V داریم

$$\alpha = \sum_{i=1}^n f_i(\alpha) \alpha_i \quad (۱۴-۳)$$

اثبات. قبلاً نشان دادیم که پایه‌ای یکتا که «دوگان» \mathcal{B} است وجود دارد. اگر f تابعی خطی روی V باشد، آنگاه f ترکیبی خطی همچون (۱۲-۳) از f_i هاست، و همان طور که بعد از تساوی (۱۲-۳) ملاحظه کردیم اسکالرهای c_j باید از $c_j = f(\alpha_j)$ به دست آیند. به طور مشابه، اگر

$$\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i$$

برداری از V باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} f_j(\alpha) &= \sum_{i=1}^n x_i f_j(\alpha_i) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \delta_{ij} \\ &= x_j. \end{aligned}$$

بدین نحو، عبارت یکتای α به عنوان ترکیبی خطی از α_i ها

$$\alpha = \sum_{i=1}^n f_i(\alpha) \alpha_i$$

است. \square

معادله (۱۴-۳) روش خوبی جهت توصیف ماهیت پایه‌دوگان برایمان فراهم می‌کند. این معادله می‌گوید که اگر $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌مترتی برای V و $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ پایه‌دوگان آن باشد، آنگاه f_i دقیقاً تابعی است که به هر بردار α از V ، زمین مختص α نسبت به پایه مرتب \mathcal{B} را تخصیص می‌دهد. از این رو، می‌توانیم f_i ها را توابع مختصی برای \mathcal{B} نیز بنامیم. فرمول (۱۳-۳) وقتی با (۱۴-۳) ترکیب شود می‌گوید که: اگر f در V^* با فرض $f(\alpha_i) = a_i$ باشد، آنگاه وقتی

$$\alpha = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$$

داریم

$$f(\alpha) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n. \quad (15-3)$$

به بیان دیگر، هرگاه پایه مرتبی برای V انتخاب کنیم، و هر بردار V را توسط n تایی مختصاتش نسبت به \mathcal{B} ، یعنی (x_1, \dots, x_n) ، توصیف کنیم، آنگاه هر تابع خطی روی V به صورت (۱۵-۳) است. این مطلب تعمیم طبیعی مثال ۱۸ است که حالت خاص $\mathcal{B} = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ ، $V = F^n$ است.

مثال ۲۲. فرض کنیم V فضای برداری همه توابع چند جمله‌ای از R در R درجه ۲ یا کمتر باشد. گیریم t_1, t_2, t_3 سه عدد حقیقی متمایز دلخواه باشند و

$$L_i(p) = p(t_i).$$

در این صورت، L_1, L_2, L_3 و L_3 تابعهایی خطی روی V هستند. این تابعها مستقل خطی هستند؛ زیرا، فرض کنیم

$$L = c_1 L_1 + c_2 L_2 + c_3 L_3.$$

اگر $L = 0$ ؛ یعنی، به ازای هر p از V ، $L(p) = 0$ ، آنگاه با سه کار بستن L بر «توابع» چند جمله‌ای خاص x, x^2 و x^3 به دست می‌آوریم

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

$$t_1 c_1 + t_2 c_2 + t_3 c_3 = 0$$

$$t_1^2 c_1 + t_2^2 c_2 + t_3^2 c_3 = 0.$$

از این معادلات نتیجه می‌شود که $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ ، زیرا (همان‌طور که محاسبه کوتاهی نشان می‌دهد) ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \end{bmatrix}$$

وقتی t_1, t_2, t_3 و t_3 متمایز باشند، معکوس پذیر است. پس L_i ها مستقل‌اند و چون بعد V برابر ۳ است، این تابعها پایه‌ای برای V^* تشکیل می‌دهند. این، پایه دوگان کدام پایه از V است؟ یک چنین پایه $\{p_1, p_2, p_3\}$ از V باید در شرط

$$L_i(p_j) = \delta_{ij}$$

یا

$$p_j(t_i) = \delta_{ij}$$

صدق کند. نسبتاً به‌سخت دیده می‌شود که این توابع چندجمله‌ای عبارتند از

$$p_1(x) = \frac{(x-t_2)(x-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)}$$

$$p_2(x) = \frac{(x-t_1)(x-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)}$$

$$p_3(x) = \frac{(x-t_1)(x-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}$$

پایه $\{p_1, p_2, p_3\}$ از V جالب است، زیرا بنابر (۱۴-۳) به ازای هر p در V داریم

$$p = P(t_1)p_1 + P(t_2)p_2 + P(t_3)p_3.$$

از این رو، اگر c_1, c_2, c_3 سه عدد حقیقی دلخواه باشند، دقیقاً يك تابع چندجمله‌ای p بر روی R وجود دارد که درجه اش حداکثر ۲ باشد و در شرایط $p(t_j) = c_j$ ، $j = 1, 2, 3$ ، صدق کند. این تابع چندجمله‌ای عبارت است از $p = c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3$.

اکنون دربارهٔ رابطهٔ بین تابعهای خطی و زیرفضاها به بحث می‌پردازیم. اگر f تابع خطی غیر صفری باشد، آنگاه رتبهٔ f يك است، زیرا برد f زیرفضایی غیر صفر از هیأت اسکلرهاست و (بنابراین) باید همان هیأت اسکلرها باشد. اگر بعد فضای زمینه، V ، متناهی باشد، قضیهٔ رتبه باضافهٔ پوچی (قضیهٔ ۲) به ما می‌گوید که بعد فضای پوچ N_f عبارت است از

$$1 - \text{بعد}(V) = \text{بعد}(N_f).$$

در هر فضای برداری با بعد n ، زیرفضایی با بعد $n-1$ يك ابرفضا نامیده می‌شود. چنین زیرفضایی گاهی ابر صفحه یا زیرفضای با همبند ۱ نیز نامیده می‌شود. آیا هر ابرفضا، فضای پوچ تابعی خطی است؟ بسادگی دیده می‌شود که جواب مثبت است. نشان دادن این مطلب چندان مشکل نیست که هر زیرفضای d بعدی از فضای n بعدی اشتراك فضاهای پوچ $(n-d)$ تابع خطی است (قضیهٔ ۱۶ زیر).

تعریف. اگر V فضایی برداری بر روی هیأت F و S زیرمجموعه‌ای از V باشد، پوچساز S عبارت است از مجموعهٔ S° متشکل از تابعهای خطی f روی V که به ازای هر $\alpha \in S$ ، $f(\alpha) = 0$.

این مطلب باید روشن باشد که خواه S زیرفضایی از V باشد خواه نباشد، S° همواره زیرفضایی از V^* است. اگر مجموعهٔ S تنها متشکل از بردار صفر باشد، آنگاه $S^\circ = V^*$ ، و اگر $S = V$ آنگاه S° زیرفضای صفر V^* است. (وقتی بعد V متناهی باشد، مشاهدهٔ این مطلب ساده است.)

قضیهٔ ۱۶. فرض کنیم V فضایی برداری با بعد متناهی بر روی هیأت F ، W زیرفضایی از V باشد. در این صورت،

$$\text{بعد}(W) + \text{بعد}(W^\circ) = \text{بعد}(V).$$

اثبات. گیریم k بعد W و $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ پایه ای برای آن باشد. بردارهای $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n$ از V را طوری انتخاب می کنیم که $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه ای برای V گردد. فرض کنیم دوگان این پایه از V پایه $\{f_1, \dots, f_n\}$ برای V^* باشد. ادعا این است که $\{f_{k+1}, \dots, f_n\}$ پایه ای برای پوچساز W° است. مسلماً به ازای هر $i, i \geq k+1$ ، f_i به W° تعلق دارد، زیرا

$$f_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$$

و هرگاه $i \geq k+1$ و $j \leq k$ ، $\delta_{ij} = 0$. از این مطلب نتیجه می شود که به ازای $i \geq k+1$ ، $f_i(\alpha) = 0$. البته با این شرط که α ترکیبی خطی از $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ باشد. تابعهای f_{k+1}, \dots, f_n مستقل خطی هستند، از این رو تنها چیزی که باید نشان دهیم این است که آنها W° را پدید می آورند. فرض کنیم f در V^* باشد. حال

$$f = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) f_i$$

و اگر f در W° باشد، به ازای $i \leq k$ داریم $f(\alpha_i) = 0$ و

$$f = \sum_{i=k+1}^n f(\alpha_i) f_i.$$

پس نشان داده ایم که اگر $\dim W = k$ و $\dim V = n$ ، آنگاه $\dim W^\circ = n - k$.

نتیجه. اگر W زیرفضایی k بعدی از یک فضای برداری n بعدی V باشد، آنگاه اشتراک $(n - k)$ ابر فضا از V است.

اثبات. این مطلب بیشتر نتیجه ای از اثبات قضیه ۱۶ است تا از صورت آن. در نمادگذاری اثبات، W دقیقاً مجموعه بردارهای α است که $f_i(\alpha) = 0$ ، $i = k+1, \dots, n$. در حالت $k = n - 1$ ، W فضای پوچ f_n است. □

نتیجه. اگر W_1 و W_2 زیرفضاهای یک فضای برداری با بعد متناهی باشند، آنگاه $W_1^\circ = W_2^\circ$ اگر و تنها اگر $W_1 = W_2$.

اثبات. اگر $W_1 = W_2$ ، آنگاه مسلماً $W_1^\circ = W_2^\circ$. اما اگر $W_1 \neq W_2$ ، آنگاه یکی از این دو زیر فضا شامل برداری است که در زیرفضای دیگر نیست. فرض کنیم برداری چون α در W_2 هست که در W_1 نیست. بنا بر نتیجه قبل (یا اثبات قضیه ۱۶) تابعی خطی چون f موجود است که به ازای هر بردار β از W_1 ، $f(\beta) = 0$ ، اما $f(\alpha) \neq 0$. در این صورت f در W_1° هست ولی در W_2° نیست و لذا $W_1^\circ \neq W_2^\circ$. □

در بخش بعد اثباتهای مختلفی برای این دو نتیجه خواهیم آورد. نتیجه اول می گوید که: اگر پایه مرتبی برای فضا انتخاب کنیم، هر زیرفضای k بعدی می تواند با وضع $(n - k)$ شرط خطی همگن روی مختصات نسبت به آن پایه توصیف شود. اکنون به طور اجمال، ازدیدگاه تابعهای خطی، نظری به دستگاههای معادلات خطی

همگن می‌افکنیم. فرض کنیم دستگاه معادلات خطی

$$A_{11}x_1 + \dots + A_{1n}x_n = 0$$

$$\vdots$$

$$A_{m1}x_1 + \dots + A_{mn}x_n = 0$$

داده شده و بخواهیم جوابهای آن را بیابیم. اگر فرض کنیم f_i ها، $i = 1, \dots, m$ ، تابعهایی خطی روی F^n باشند که با

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = A_{i1}x_1 + \dots + A_{in}x_n$$

تعریف می‌شوند، آنگاه زیرفضایی از F^n متشکل از همه α هایی را می‌جوئیم که

$$f_i(\alpha) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

به بیان دیگر، زیرفضایی را جستجوی کنیم که توسط f_1, \dots, f_m پوچ می‌شود. عمل تحویل سطری ماتریس ضرایب، روشی با نظام جهت یافتن این زیرفضا در اختیار ما می‌گذارد. n تایی (A_{i1}, \dots, A_{in}) ، مختصات تابع خطی f_i نسبت به پایه‌ای که دوگان پایه استانده F^n است را به دست می‌دهد. لذا، فضای سطری ماتریس ضرایب را می‌توان به عنوان فضای تابعهای خطی پدید آمده توسط f_1, \dots, f_m به حساب آورد. فضای جواب، زیرفضای پوچ شده توسط این فضا از تابعها است.

اکنون می‌توان از دیدگاه «دوگان» به دستگاه معادلات نظر کرد. به این معنی که فرض

کنیم m بردار

$$\alpha_i = (A_{i1}, \dots, A_{in})$$

از F^n به ما داده شده باشند و بخواهیم پوچساز زیرفضای پدید آمده توسط این بردارها را بیابیم. چون هر تابع خطی روی F^n نوعاً به صورت

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

است، شرط بودن f در این پوچساز این است که

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}c_j = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

یعنی، این است که (c_1, \dots, c_n) جوابی از دستگاه $AX = 0$ باشد. با این دید، عمل تحویل سطری، روشی بانظام برای یافتن پوچساز زیرفضای پدید آمده توسط مجموعه متناهی مفروضی از بردارهای F^n به دست می‌دهد.

مثال ۲۳. ذیلاً سه تابع خطی روی R^4 داده شده است:

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_2 + x_4$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = -2x_1 - 2x_3 + 3x_4.$$

زیر فضایی که توسط این تابعها پوچ می شود، با یافتن شکل تحویل شده سطری پلکانی ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

به طور صریح به دست می آید. محاسبه ای کوتاه یا نظری به مثال ۲۱ از فصل ۲ نشان می دهد که

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

بنابراین، تابعهای خطی

$$g_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_3$$

$$g_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2$$

$$g_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4$$

همان زیر فضایی از $(R^4)^*$ را پدید می آورند که تابعهای f_1, f_2, f_3 و f_4 و همان زیر-فضایی از R^4 را پوچ می سازند که f_1, f_2, f_3 و f_4 . زیر فضای پوچ شده، متشکل از بردارهایی است که در شرایط

$$x_1 = -2x_3$$

$$x_2 = x_4 = 0$$

صدق می کنند.

مثال ۲۴. فرض کنیم W زیر فضایی از R^5 باشد که توسط بردارهای

$$\alpha_1 = (2, -2, 3, 2, -1) \quad \alpha_3 = (0, 0, -1, -2, 3)$$

$$\alpha_2 = (-1, 1, 2, 5, 2) \quad \alpha_4 = (1, -1, 2, 3, 0)$$

پدید می آید. چگونه می توان W° ، پوچساز W را توصیف کرد؟ ماتریسی 5×4 ، مانند A ، با بردارهای سطری $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ را تشکیل می دهیم و ماتریس تحویل شده سطری پلکانی R را که هم ارز سطری A است می یابیم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

اگر f تابعکی خطی روی R^5 باشد:

$$f(x_1, \dots, x_5) = \sum_{j=1}^5 c_j x_j$$

آنگاه f در W^0 قرار دارد اگر و تنها اگر $f(\alpha_i) = 0$ ، به ازای $i = 1, 2, 3, 4$ ؛ یعنی،
اگر و تنها اگر

$$\sum_{j=1}^5 A_{ij} c_j = 0, \quad 1 \leq i \leq 4.$$

و این خود هم ارز است با

$$\sum_{j=1}^5 R_{ij} c_j = 0, \quad 1 \leq i \leq 3$$

یا

$$c_1 - c_2 - c_4 = 0$$

$$c_3 + 2c_4 = 0$$

$$c_5 = 0.$$

همه این گونه تابعکهای خطی f را با تخصیص مقادیری دلخواه به c_2 و c_4 ، مثلاً $c_2 = a$ و $c_4 = b$ ، و سپس یافتن مقادیر متناظر $c_1 = a + b$ ، $c_3 = -2b$ ، و $c_5 = 0$ به دست می آوریم. بنا بر این W^0 مشکل از همه تابعکهای خطی f به صورت

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (a+b)x_1 + ax_2 - 2bx_3 + bx_4$$

است. بعد W^0 دواست و پایه $\{f_1, f_2\}$ برای W^0 از قرارداد $a = 1$ و $b = 0$ در ابتدا، و سپس $a = 0$ و $b = 1$ به دست می آید:

$$f_1(x_1, \dots, x_5) = x_1 + x_2$$

$$f_2(x_1, \dots, x_5) = x_1 - 2x_3 + x_4.$$

تابع نوعی f از W^0 عبارت است از: $f = af_1 + bf_2$

تمرین

۰۱ در R^3 بردارهای $\alpha_1 = (1, 0, 1)$ ، $\alpha_2 = (0, 1, -2)$ و $\alpha_3 = (-1, -1, 0)$ را انتخاب می کنیم

(الف) هرگاه تابع خطی f روی R^3 با شرایط

$$f(\alpha_1) = 1, \quad f(\alpha_2) = -1, \quad f(\alpha_3) = 3$$

باشد و $\alpha = (a, b, c)$ در این صورت $f(\alpha)$ را بیابید.
(ب) تابع خطی f روی R^3 را که

$$f(\alpha_r) \neq 0 \text{ ولی } f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = 0$$

به طور صریح توصیف کنید.

(ب) فرض کنید تابع خطی f با خواص

$$f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = 0, \quad f(\alpha_r) \neq 0$$

باشد و $\alpha = (2, 3, -1)$. نشان دهید $f(\alpha) \neq 0$.

۳. فرض کنید پایه $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ برای C^3 به صورت

$$\alpha_1 = (1, 0, -1), \quad \alpha_2 = (1, 1, 1), \quad \alpha_3 = (2, 2, 0)$$

تعریف شده است. پایه دوگان \mathcal{B} را بیابید.

۴. اگر A و B دو ماتریس $n \times n$ بر روی هیأت F باشند، نشان دهید $tr(AB) = tr(BA)$. سپس نشان دهید ماتریسهای متشابه، ردهای متساوی دارند.

۵. فرض کنید V فضای برداری همه توابع چند جمله‌ای p از R در R با درجه ≤ 2 یا کمتر باشد:

$$p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2.$$

سه تبدیل خطی توسط

$$f_1(p) = \int_0^1 p(x) dx, \quad f_2(p) = \int_0^2 p(x) dx,$$

$$f_3(p) = \int_0^{-1} p(x) dx$$

روی V تعریف می‌کنیم. با ارائه پایه‌ای برای V که $\{f_1, f_2, f_3\}$ دوگان آن باشد، نشان دهید $\{f_1, f_2, f_3\}$ پایه‌ای برای V^* است.

۶. اگر A و B دو ماتریس مختلط $n \times n$ باشند، نشان دهید که تساوی $AB - BA = I$ غیر ممکن است.

۷. فرض کنید m و n دو عدد صحیح مثبت و F یک هیأت باشد، و f_1, \dots, f_m تابعه‌هایی خطی روی F^n باشند. به ازای هر α در F^n تعریف می‌کنیم

$$T\alpha = (f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)).$$

نشان دهید T تبدیلی خطی از F^n در F^m است. سپس نشان دهید هر تبدیل خطی از F^n در F^m ، به ازای f_1, \dots, f_m ‌هایی، به شکل بالاست.

۷. فرض کنید $\alpha_1 = (1, 0, -1, 2)$ و $\alpha_2 = (2, 3, 1, 1)$ و W زیرفضای پدیدآمده توسط α_1 و α_2 از R^4 باشد. از تابعهای خطی مانند f به صورت

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4$$

کدام در پوچساز W قرار دارد؟

۸. فرض کنید W زیرفضایی از R^5 باشد که توسط بردارهای

$$\alpha_1 = \epsilon_1 + 2\epsilon_2 + \epsilon_3,$$

$$\alpha_2 = \epsilon_2 + 3\epsilon_3 + 3\epsilon_4 + \epsilon_5$$

$$\alpha_3 = \epsilon_1 + 4\epsilon_2 + 6\epsilon_3 + 4\epsilon_4 + \epsilon_5$$

پدید می آید. پایه ای برای W° بیابید.

۹. فرض کنید V فضای برداری همه ماتریسهای 2×2 بر روی هیأت اعداد حقیقی باشد، و

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

فرض کنید W زیرفضای متشکل از همه A های با شرط $AB = 0$ از V ، و تابع خطی f روی V متعلق به پوچساز W باشد. اگر $f(I) = 0$ و $f(C) = 3$ ، ماتریس همانی 2×2 و

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

باشند، $f(B)$ را بیابید.

۱۰. فرض کنید F زیرهیأتی از اعداد مختلط باشد. n تابع خطی روی F^n ($n \geq 2$) توسط

$$f_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n (k-j)x_j, \quad 1 \leq k \leq n$$

تعریف می کنیم. بعد زیرفضای پوچ شده توسط f_1, \dots, f_n چیست؟

۱۱. فرض کنید W_1 و W_2 دوزیرفضا از یک فضای برداری با بعد متناهی V باشند.

$$(W_1 + W_2)^\circ = W_1^\circ \cap W_2^\circ \text{ ثابت کنید}$$

$$(W_1 \cap W_2)^\circ = W_1^\circ + W_2^\circ \text{ ثابت کنید}$$

۱۲. فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأت F و W زیرفضایی از V باشد. اگر f تابعکی خطی روی W باشد، ثابت کنید یک تابع خطی g روی V

یافت می‌شود به طوری که به ازای هر α در زیر فضای W ، $g(\alpha) = f(\alpha)$.

۱۳. فرض کنید F زیرهائی از هیأت اعداد مختلط و V فضای برداری دلخواهی بر روی F باشد. f و g را تابعهایی خطی روی V می‌گیریم به قسمی که تابع h تعریف شده توسط $h(\alpha) = f(\alpha)g(\alpha)$ نیز تابعی خطی روی V شود. ثابت کنید $f = 0$ یا $g = 0$.

۱۴. فرض کنید F هیأتی با سرشت نمای صفر و V فضای برداری با بعد متناهی بر روی F باشد. اگر $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ تعدادی متناهی بردار از V باشند، و همه مخالف بردار صفر، ثابت کنید يك تابع f روی V یافت می‌شود به طوری که

$$f(\alpha_i) \neq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

۱۵. بنا بر تمرین ۳، ماتریسهای متشابه دارای ردهای متساوی‌اند. از این رو، می‌توانیم رد يك عملگر خطی روی يك فضای با بعد متناهی را رد هر ماتریسی که آن عملگر را در يك پایه مرتب نمایش دهد تعریف کنیم. این مفهوم خوش تعریف است، چرا که همه این گونه ماتریسهای نمایش برای يك عملگر با هم متشابه‌اند.

حال فرض کنید V فضای همه ماتریسهای 2×2 بر روی هیأت F و P ماتریس 2×2 ثابتی باشد. فرض کنید T عملگر خطی تعریف شده توسط $T(A) = PA$ روی V باشد. ثابت کنید $\text{tr}(A) = 2 \text{tr}(P)$.

۱۶. نشان دهید تابع رد روی ماتریسهای $n \times n$ ، به مفهوم زیر، یکنواست. اگر W فضای ماتریسهای $n \times n$ بر روی هیأت F ، و f تابعی خطی روی W باشد که به ازای هر A و B از W ، $f(AB) = f(BA)$ ، آنگاه f ضربی اسکالری از تابع رد است. اگر علاوه بر این $f(I) = n$ ، آنگاه f خود تابع رد می‌باشد.

۱۷. فرض کنید W فضای ماتریسهای $n \times n$ بر روی هیأت F و W_0 زیر فضای پدید آمده توسط ماتریسهای C به صورت $C = AB - BA$ باشد. ثابت کنید W_0 دقیقاً زیر فضای متشکل از ماتریسهایی است که دارای رد صفر هستند. (دهنمایی: بعد فضای ماتریسهای با رد صفر چیست؟ از «واحدهای» ماتریسی، یعنی از ماتریسهایی که تنها يك درایه غیر صفر دارند برای ساختن تعداد کافی ماتریس مستقل خطی به صورت $AB - BA$ استفاده کنید.)

۶.۳. دوگان مضاعف

يك پرسش درباره پایه‌های دوگان که در بخش قبل بدان پاسخ ندادیم، این برد که آیا هر پایه برای V^* دوگان پایه‌ای برای V هست یا نه. روشی برای پاسخگویی به این

پرسش این است که V^{**} ، فضای دوگان V را بررسی کنیم.
اگر α برداری از V باشد، آنگاه α تبدیل خطی L_α را که با

$$L_\alpha(f) = f(\alpha) \quad \text{به‌ازای هر } f \text{ در } V^*$$

تعریف می‌شود، روی V^* القا می‌کند. اثبات این که L_α خطی است، چیزی نیست جز فرمولبندی مجدد تعریف اعمال خطی در V^* :

$$\begin{aligned} L_\alpha(cf + g) &= (cf + g)(\alpha) \\ &= (cf)(\alpha) + g(\alpha) \\ &= cf(\alpha) + g(\alpha) \\ &= cL_\alpha(f) + L_\alpha(g). \end{aligned}$$

اگر V با بعد منتهای باشد و $\alpha \neq 0$ ، آنگاه $L_\alpha \neq 0$ ؛ به بیان دیگر، يك تابع خطی f وجود دارد که $f(\alpha) \neq 0$. اثبات این مطلب بسیار ساده است و در بخش ۵.۳ آمده است: پایه مرتب $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ با شرط $\alpha_1 = \alpha$ را برای V انتخاب کنید و f را تابعی خطی بگیرید که به هر بردار V ، اولین مختصش در پایه مرتب \mathcal{B} را نسبت دهد.

قضیه ۱۷. فرض کنیم V يك فضای برداری با بعد منتهای بردوی هیات F باشد. به‌ازای هر بردار α از V تعریف می‌کنیم

$$L_\alpha(f) = f(\alpha) \quad \text{به‌ازای هر } f \text{ در } V^*$$

در این صورت، نگاشت $\alpha \rightarrow L_\alpha$ يك یکره‌یختی از V بروی V^{**} است. اثبات. نشان دادیم که به‌ازای هر α تابع L_α خطی است. فرض کنیم α و β در V و c در F باشد، همچنین $\gamma = c\alpha + \beta$. در این صورت، به‌ازای هر f در V^* ،

$$\begin{aligned} L_\gamma(f) &= f(\gamma) \\ &= f(c\alpha + \beta) \\ &= cf(\alpha) + f(\beta) \\ &= cL_\alpha(f) + L_\beta(f) \end{aligned}$$

و از این رو

$$L_\gamma = cL_\alpha + L_\beta.$$

این نشان می‌دهد که نگاشت $\alpha \rightarrow L_\alpha$ ، تبدیلی خطی از V در V^{**} است. این تبدیل نامنفرد است؛ زیرا، بنا بر ملاحظات فوق، $L_\alpha = 0$ اگر و تنها اگر $\alpha = 0$. پس $\alpha \rightarrow L_\alpha$ تبدیل خطی نامنفردی از V در V^{**} است و چون

$$\text{بعد}(V) = \text{بعد}(V^*) = \text{بعد}(V^{**})$$

قضیه ۹ بیان می‌کند که این تبدیل معکوس پذیر، و بنابراین يك يکریختی از V بروی V^{**} است. \square

نتیجه. فرض کنیم V يك فضای برداری با بعد متناهی بردوی هیأت F باشد. اگر L تابعکی خطی روی V^* ، فضای دوگان V ، باشد، آنگاه يك بردار یکنای α در V موجود است به طوری که به ازای هر f در V^*

$$L(f) = f(\alpha).$$

نتیجه. فرض کنیم V يك فضای برداری با بعد متناهی بردوی هیأت F باشد. هر پایه از V^* دوگان پایهای از V است.

اثبات. گیریم $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ پایه ای برای V^* باشد. بنا بر قضیه ۱۵، پایه ای چون $\{L_1, \dots, L_n\}$ برای V^{**} با این خاصیت یافت می‌شود که

$$L_i(f_j) = \delta_{ij}.$$

با استفاده از نتیجه قبل، به ازای هر i يك بردار α_i در V وجود دارد به طوری که به ازای هر f در V^*

$$L_i(f) = f(\alpha_i)$$

یعنی، $L_i = L_{\alpha_i}$. از اینجا بلافاصله نتیجه می‌شود که $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه ای برای V است و \mathcal{B}^* دوگان این پایه است. \square

نظر به قضیه ۱۷، معمولاً α را با L_α یکی می‌گیریم، و می‌گوییم V دوگان فضای V^* «است»، یا اینکه فضاهای V و V^* به طور طبیعی در دوگانی یکدیگر هستند، و یا اینکه هر فضا دوگان فضای دیگر است. آخرین نتیجه گواه مفید بودن این نتایج است. گواه دیگر به شرح زیر است.

اگر E زیرمجموعه ای از V^* باشد، آنگاه پوچساز E° (بنا به قاعده) زیرمجموعه ای از V^{**} است. اگر نظر به قضیه ۱۷ تصمیم به یکی انگاشتن V و V^{**} بگیریم، آنگاه E° زیرفضایی از V خواهد بود که مجموعه همه α های V با شرط $f(\alpha) = 0$ به ازای همه f های در E است. در یکی از نتیجه های قضیه ۱۶ مشاهده کردیم که هر زیرفضای W توسط پوچسازش W° تعیین می‌شود. چگونه؟ پاسخ این است که W زیرفضای پوچ شده توسط همه f های در W° ، یعنی اشتراك فضاهای پوچ همه f های متعلق به W° است. بنا توجه به نماد مورد استفاده برای پوچسازها، پاسخ را می‌توان بسیار ساده بیان کرد: $W = (W^\circ)^\circ$.

قضیه ۱۸. اگر S زیرمجموعه ای از فضای برداری با بعد متناهی V باشد، آنگاه $(S^\circ)^\circ$ زیرفضای پدید آمده توسط S است.

اثبات. گیریم W زیر فضای پدید آمده توسط S باشد. واضح است که $W^\circ = S^\circ$. بنا بر این، کافی است اثبات کنیم که $W = W^{\circ\circ}$. قبلاً اثباتی از این مطلب عرضه کردیم، و اینک اثباتی دیگر. بنا بر قضیه ۱۶

$$\text{بعد } (W) + \text{بعد } (W^\circ) = \text{بعد } (V)$$

$$\text{بعد } (W^\circ) + \text{بعد } (W^{\circ\circ}) = \text{بعد } (V^*)$$

و چون $\text{بعد } (V) = \text{بعد } (V^*)$ داریم

$$\text{بعد } (W) = \text{بعد } (W^{\circ\circ})$$

چون W زیر فضای $W^{\circ\circ}$ است، می بینیم که $W = W^{\circ\circ}$. □

نتایج این بخش برای فضاهای برداری دلخواه نیز برقرار هستند؛ لکن، اثباتها مستلزم استفاده از به اصطلاح اصل انتخاب می باشند. چون نمی خواهیم خود را درگیر بحثی طولانی درباره این اصل بکنیم، پوچسازها را در فضاهای برداری عمومی مورد بحث قرار نمی دهیم. اما، دو نتیجه درباره تا بعکهای خطی روی فضاهای برداری دلخواه چنان اساسی هستند که نمی توان از آنها بسادگی گذشت.

گیریم V فضایی برداری باشد. می خواهیم ابر فضاهای V را تعریف کنیم. بجز در حالتی که V متناهی باشد، نمی توانیم ابر فضاها را از طریق بعد آنها تعریف کنیم. ولی می توانیم این ایده را که زیر فضای N برای پر کردن V دقیقاً یک بعد کم دارد، به طریق زیر بیان کنیم:

۱. N زیر فضایی سره از V است؛

۲. اگر زیر فضای W از V شامل N باشد، آنگاه یا $W = N$ و یا $W = V$. شرایط (۱) و (۲) توأماً بیان می کنند که N زیر فضایی سره است، و زیر فضای سره ای بزرگتر از آن وجود ندارد؛ به طور خلاصه، N یک زیر فضای سرهٔ ماکسیمال است.

تعریف. اگر V فضایی برداری باشد، یک ابر فضای V یک زیر فضای سرهٔ ماکسیمال V است.

قضیه ۱۹. اگر f تابع خطی غیر صفری روی فضای برداری V باشد، آنگاه فضای پوچ f ، یک ابر فضای V است. بعکس، هر ابر فضای V ، فضای پوچ تابع خطی غیر صفری (نه لزوماً یکتاً) روی V است.

اثبات. فرض کنیم f تابع خطی غیر صفری روی V ، و N_f فضای پوچ آن باشد. α را برداری از V می گیریم که در N_f نباشد؛ یعنی، α را برداری می گیریم که $f(\alpha) \neq 0$. نشان می دهیم که هر بردار V ، در فضای پدید آمده توسط N_f و α قرار دارد. این زیر-فضا شامل همهٔ بردارهای

$$\gamma + c\alpha \quad \gamma \text{ در } N_f, c \text{ در } F$$

است. هر گاه β در V باشد، تعریف می‌کنیم

$$c = \frac{f(\beta)}{f(\alpha)}$$

این تعریف بامعنی است چرا که $f(\alpha) \neq 0$. در این صورت، بردار $\gamma = \beta - c\alpha$ در N_f است، زیرا

$$\begin{aligned} f(\gamma) &= f(\beta - c\alpha) \\ &= f(\beta) - cf(\alpha) \\ &= 0. \end{aligned}$$

لذا، β در زیر فضای پدیدآمده توسط N_f و α قرار دارد. حال N را يك ابر فضای V فرض می‌کنیم و برداری چون α را در نظر می‌گیریم که در N نباشد. چون N يك زیر فضای سرهٔ ماکسیمال است، زیر فضای پدیدآمده توسط α و N کل فضای V است. بنابراین، هر بردار β از V به صورت

$$F \text{ در } c \text{ و } N \text{ در } \gamma, \beta = \gamma + c\alpha$$

است. بردار γ و اسکالر c توسط β به طور یکتا تعیین می‌شوند. زیرا، اگر همچنین داشته باشیم

$$F \text{ در } c' \text{ و } N \text{ در } \gamma', \beta' = \gamma' + c'\alpha$$

آنگاه

$$(c' - c)\alpha = \gamma - \gamma'.$$

اگر $c' - c \neq 0$ ، آنگاه α باید در N باشد؛ از این رو، $c' = c$ و $\gamma' = \gamma$. طریقی دیگر برای بیان نتیجهٔ حاصل چنین است. اگر β در V باشد، اسکالریکتایی چون c وجود دارد که $\beta - c\alpha$ در N است. این اسکالر را $g(\beta)$ می‌نامیم. حال، بررسی این که g تابعکی خطی روی V و N فضای پوچ g است، آسان می‌باشد. \square

لم. اگر f و g تابعکهایی خطی روی فضای برداری V باشند، آنگاه g مضرب اسکالری f است اگر و تنها اگر فضای پوچ g شامل فضای پوچ f باشد؛ یعنی اگر و تنها اگر $f(\alpha) = 0$ ایجاب کند که $g(\alpha) = 0$.

اثبات. اگر $f = 0$ ، آنگاه به همین نحو $g = 0$ و مسلماً g مضربی اسکالری از f است. فرض کنیم $f \neq 0$ ؛ آنگاه فضای پوچ N_f يك ابر فضای V است. بردار α از V را با شرط $f(\alpha) \neq 0$ انتخاب و فرض می‌کنیم

$$c = \frac{g(\alpha)}{f(\alpha)}.$$

تابع خطی $h = g - cf$ روی N_f صفر است، زیرا f و g هر دو روی N_f صفر هستند و $h(\alpha) = g(\alpha) - cf(\alpha) = 0$ ، پس، h روی زیرفضای پدید آمده توسط N_f و α صفر است و این زیر فضا خود V است. نتیجه اینکه $h = 0$ ، یعنی، $g = cf$. \square

قضیه ۲۰. فرض کنیم g, f_1, \dots, f_r تابع‌هایی خطی روی فضای برداری V ، بترتیب، با فضاهای پوچ N, N_1, \dots, N_r باشند. در این صورت، g ترکیبی خطی از f_1, \dots, f_r است اگر و تنها اگر N شامل اشتراک $N_1 \cap \dots \cap N_r$ باشد. اثبات. اگر $g = c_1 f_1 + \dots + c_r f_r$ ، و به ازای هر i داشته باشیم $f_i(\alpha) = 0$ ، آنگاه بوضوح $g(\alpha) = 0$. بنا بر این، N شامل $N_1 \cap \dots \cap N_r$ است. حالت عکس (نیمه «اگر» قضیه) را به استقرا نسبت به r اثبات می‌کنیم. لم قبل اثبات حالت $r = 1$ را به دست می‌دهد. فرض کنیم قضیه را برای حالت $r = k - 1$ بدانیم و تابع‌های خطی f_1, \dots, f_k و f_k را با فضاهای پوچ N_1, \dots, N_k با این شرط که $N_1 \cap \dots \cap N_k$ مشمول در N ، فضای پوچ g ، باشد در نظر می‌گیریم. اگر $g', f'_1, \dots, f'_{k-1}$ تحدیدهای g, f_1, \dots, f_{k-1} به زیرفضای N_k باشند، آنگاه $g', f'_1, \dots, f'_{k-1}$ و f'_{k-1} تابع‌هایی خطی روی فضای برداری N_k هستند. بعلاوه، اگر α برداری در N_k باشد و به ازای $i = 1, \dots, k - 1$ داشته باشیم $f'_i(\alpha) = 0$ ، آنگاه α در $N_1 \cap \dots \cap N_k$ است و لذا $g'(\alpha) = 0$. بنا به فرض استقرا (حالت $r = k - 1$) اسکالرهایی چون c_i وجود دارند که

$$g' = c_1 f'_1 + \dots + c_{k-1} f'_{k-1}.$$

اکنون فرض می‌کنیم

$$h = g - \sum_{i=1}^{k-1} c_i f_i. \quad (۱۶-۳)$$

در این صورت، h تابعی خطی روی V است و (۱۶-۳) می‌گوید که به ازای هر α در N_k ، $h(\alpha) = 0$. بنا بر لم قبل، h مضرری اسکالری از f_k است. اگر $h = c_k f_k$ ، آنگاه

$$g = \sum_{i=1}^k c_i f_i. \quad \square$$

تمرین

۱. فرض کنید n عددی صحیح مثبت و F یک هیأت باشد. W را مجموعه همه بردارهای (x_1, \dots, x_n) از F^n بگیرید که $x_1 + \dots + x_n = 0$. (الف) ثابت کنید W° مشکل است از همه تابع‌های خطی f به صورت

$$f(x_1, \dots, x_n) = c \sum_{j=1}^n x_j.$$

(ب) نشان دهید W^* ، فضای دوگان W را می توان «به طور طبیعی» با تابعهای خطی

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

روی F^n با شرط $c_1 + \dots + c_n = 0$ یکی گرفت.

۴. قضیه ۲۰ را برای اثبات مطلب ذیل به کار ببرید. اگر W زیرفضایی از یک فضای برداری با بعد منتهای V و $\{g_1, \dots, g_r\}$ پایه ای برای W^* باشد، آنگاه

$$W = \bigcap_{i=1}^r N_{g_i}.$$

۳. فرض کنید S یک مجموعه، F یک هیأت، و $V(S; F)$ فضای همه توابع از S در F با خواص

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(cf)(x) = cf(x)$$

باشد. W را زیرفضای n بعدی دلخواهی از $V(S; F)$ بگیرد و نشان دهید نقاطی

چون x_1, \dots, x_n در S و توابعی چون f_1, \dots, f_n در W یافت می شوند به طوری که

$$f_i(x_j) = \delta_{ij}$$

۷.۳. ترانهاده تبدیل خطی

فرض کنیم دو فضای برداری V و W بر روی هیأت F و تبدیل خطی T از V در W داده شده باشند. در این صورت، T تبدیلی خطی از W^* در V^* ، به طریق زیر، القا می کند.

فرض کنید g تابعی خطی روی W باشد و به ازای هر α از V

$$f(\alpha) = g(T\alpha). \quad (17-3)$$

در این صورت، (۱۷-۳) یک تابع f از V در F تعریف می کند. این تابع از ترکیب

تابع T از V در W با تابع g از W در F حاصل می شود. چون T و g هر دو خطی هستند، قضیه ۶ می گوید که f نیز خطی است؛ یعنی، f تابعی خطی روی V است. پس،

T یک قاعده T^* در دسترس ما می گذارد که هر تابع خطی g روی W را به یک تابع

خطی $f = T^*g$ روی V ، که طبق (۱۷-۳) تعریف می شود، مربوط می سازد. بعلاوه، توجه

کنید که T^* در واقع تبدیلی خطی از W^* در V^* است؛ زیرا، اگر g_1 و g_2 در W^* باشند

و c یک اسکالر

$$[T^*(cg_1 + g_2)](\alpha) = (cg_1 + g_2)(T\alpha)$$

$$= cg_1(T\alpha) + g_2(T\alpha)$$

$$= c(T^*g_1)(\alpha) + (T^*g_2)(\alpha)$$

و از اینجا $T'(cg_1 + g_2) = cT'g_1 + T'g_2$. این مطلب را خلاصه می‌کنیم.

قضیه ۲۱. فرض کنیم V و W فضاهایی برداری بر روی هیأت F باشند. به ازای هر تبدیل خطی T از V در W يك تبدیل خطی یکتای T' از W^* در V^* وجود دارد که به ازای هر g از W^* و هر α از V ،

$$(T'g)(\alpha) = g(T\alpha).$$

T' را ترانزاده T می‌نامیم. تبدیل T' اغلب الحاقی T هم نامیده می‌شود، لکن، ما این اصطلاح را به کار نخواهیم برد.

قضیه ۲۲. فرض کنیم V و W فضاهایی برداری بر روی هیأت F ، و T تبدیلی خطی از V در W باشد. فضای پوچ T' پوچساز برد T است. اگر V و W با بعدمتناهی باشند، آنگاه

$$(۱) \text{رتبه}(T) = \text{رتبه}(T');$$

(۲) برد T' پوچساز فضای پوچ T است.

اثبات. اگر g در W^* باشد، آنگاه بنا بر تعریف به ازای هر α از V ،

$$(T'g)(\alpha) = g(T\alpha).$$

این که g در فضای پوچ T' باشد بدین معنی است که به ازای هر α از V ، $g(T\alpha) = 0$. پس، فضای پوچ T' دقیقاً همان پوچساز برد T است.

فرض کنیم V و W با بعد متناهی باشند، مثلاً $\dim V = n$ و $\dim W = m$. برای اثبات (۱): گیریم r رتبه T ، یعنی بعد برد T باشد. طبق قضیه ۱۶، بعد پوچساز برد T برابر $(m-r)$ است. بنا بر اولین حکم این قضیه، پوچی T' باید $(m-r)$ باشد. اما در آن صورت، چون T' تبدیلی خطی روی يك فضای m بعدی است، رتبه T' برابر $m - (m-r) = r$ است، و لذا رتبه‌های T و T' برابرند. برای اثبات (۲): گیریم N فضای پوچ T باشد. هر تابع واقع در برد T' در پوچساز N قرار دارد؛ زیرا، فرض کنیم به ازای يك g از W^* داشته باشیم $f = T'g$ ؛ در این صورت، اگر α در N باشد

$$f(\alpha) = (T'g)(\alpha) = g(T\alpha) = g(0) = 0.$$

حال برد T' زیرفضایی از فضای N° است، و

$$\text{رتبه}(T') = \text{رتبه}(T) = \text{بعد}(N) = n - (N^\circ)$$

و بنا بر این برد T' باید دقیقاً N° باشد. \square

قضیه ۲۳. فرض کنیم V و W دو فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأت F باشند. \mathcal{B} پایه مرتبی برای V با پایه دوگان \mathcal{B}^* ، و \mathcal{B}' پایه مرتبی برای W با پایه

دوگان \mathcal{B}'^* می‌گیریم. اگر T تبدیلی خطی از V در A, W ماتریس T نسبت به \mathcal{B} و \mathcal{B}' ،
 B ماتریس T' نسبت به \mathcal{B}'^* و \mathcal{B}^* باشد، آنگاه $B_{ij} = A_{ji}$.
 اثبات. فرض کنیم

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, & \mathcal{B}' &= \{\beta_1, \dots, \beta_m\}, \\ \mathcal{B}^* &= \{f_1, \dots, f_n\}, & \mathcal{B}'^* &= \{g_1, \dots, g_m\}.\end{aligned}$$

بنا بر تعریف

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^m A_{ij}\beta_i, \quad j=1, \dots, n$$

$$T'g_j = \sum_{i=1}^n B_{ij}f_i, \quad j=1, \dots, m.$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned}(T'g_j)(\alpha_i) &= g_j(T\alpha_i) \\ &= g_j\left(\sum_{k=1}^m A_{ki}\beta_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^m A_{ki}g_j(\beta_k) \\ &= \sum_{k=1}^m A_{ki}\delta_{jk} \\ &= A_{ji}.\end{aligned}$$

برای هر تابع خطی دلخواه f روی V

$$f = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i)f_i.$$

اگر این فرمول را بر تابع $f = T'g_j$ به کار بندیم و از این واقعیت که $(T'g_j)(\alpha_i) = A_{ji}$ استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$T'g_j = \sum_{i=1}^n A_{ji}f_i$$

که از آن بیدرتنگ نتیجه می‌شود $B_{ij} = A_{ji}$. □

تعریف. اگر A ماتریسی $m \times n$ بر روی هیأت F باشد، ترانهاده A عبارت است
 از ماتریس A' $n \times m$ که با $A'_{ij} = A_{ji}$ تعریف می‌شود.

بدین سان قضیه ۲۳ بیان می‌کند که اگر T تبدیلی خطی از V در W باشد که

ماتریس نسبت به یک جفت پایه A است، آنگاه تبدیل ترانهاده T^e در جفت دوگان آن پایه‌ها توسط ماتریس ترانهاده A^e نمایش داده می‌شود.

قضیه ۲۴. فرض کنیم A ماتریس $m \times n$ دلخواهی بر روی هیأت F باشد. آنگاه رتبه سطری A با رتبه ستونی A برابر است.
اثبات. پایه مرتب استانده F^n را \mathcal{B} و پایه مرتب استانده F^m را \mathcal{B}' می‌نامیم. فرض کنیم T تبدیلی خطی از F^n در F^m باشد که ماتریس آن نسبت به جفت \mathcal{B} ، \mathcal{B}' برابر A است؛ یعنی،

$$T(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m)$$

که در آن

$$y_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j.$$

رتبه ستونی A برابر رتبه تبدیل T است؛ زیرا، برد T متشکل از همه m تایی‌هایی است که ترکیبی خطی از بردارهای ستونی A هستند.

نگاشت ترانهاده T^e نسبت به پایه‌های دوگان \mathcal{B}'^* و \mathcal{B}^* توسط ماتریس A^e نمایش داده می‌شود. چون ستونهای A^e همان سطرهای A هستند، بنا بر همین استدلال می‌بینیم که رتبه سطری A (رتبه ستونی A^e) برابر رتبه T^e است. بنا بر قضیه ۲۲، رتبه‌های T و T^e برابرند، و لذا رتبه سطری A برابر رتبه ستونی A است. \square

اکنون می‌بینیم که اگر A ماتریسی $m \times n$ بر روی F و T تبدیل خطی تعریف شده در فوق از F^n در F^m باشند، آنگاه

$$\text{رتبه ستونی } (A) = \text{رتبه سطری } (A) = \text{رتبه } (T).$$

این عدد را به‌طور ساده رتبه A می‌نامیم.

مثال ۲۵. در این مثال به‌مطلبی کلی می‌پردازیم - و بیشتر بحث است تا مثال. فرض کنیم فضای برداری n بعدی V بر روی هیأت F و عملگر خطی T روی V داده شده باشند، و نیز $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه مرتبی برای V باشد. بنا بر تعریف، ماتریس T در پایه مرتب \mathcal{B} عبارت است از ماتریس A $n \times n$ به‌طوری که

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^n A_{ij} \alpha_i.$$

به بیان دیگر، همان A_{ij} همان i مین مختص بردار $T\alpha_j$ در پایه مرتب \mathcal{B} است. اگر $\{f_1, \dots, f_n\}$ پایه دوگان \mathcal{B} باشد، این مطلب به‌صورت ساده

$$A_{ij} = f_i(T\alpha_j)$$

بیان می‌شود. اکنون ببینیم هنگام تغییر پایه چه رخ می‌دهد. فرض کنیم

$$\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$$

پایه مرتب دیگری برای V با پایه دوگان $\{f'_1, \dots, f'_n\}$ باشد. اگر B ماتریس T در پایه مرتب \mathcal{B}' باشد، آنگاه

$$B_{ij} = f'_i(T\alpha'_j).$$

گیریم U عملگر خطی معکوس پذیری باشد که $U\alpha_j = \alpha'_j$. در این صورت، ترانهادۀ U از $U^t f'_i = f_i$ به دست می‌آید. بسادگی می‌توان نشان داد که چون U معکوس پذیر است، U^t نیز معکوس پذیر است و $(U^t)^{-1} = (U^{-1})^t$. از این رو، $f'_i = (U^{-1})^t f_i$ ، به ازای $i = 1, \dots, n$. بنا بر این،

$$\begin{aligned} B_{ij} &= [(U^{-1})^t f_i](T\alpha'_j) \\ &= f_i(U^{-1}T\alpha'_j) \\ &= f_i(U^{-1}TU\alpha_j). \end{aligned}$$

اما، این رابطه چه می‌گوید؟ چیزی جز درایۀ j و i ماتریس $U^{-1}TU$ در پایه مرتب \mathcal{B} نیست. محاسبات بالا نشان می‌دهد که این اسکالر درایۀ j, i ماتریس T در پایه مرتب \mathcal{B} هم هست. به بیان دیگر

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{B}} &= [U^{-1}TU]_{\mathcal{B}} \\ &= [U^{-1}]_{\mathcal{B}} [T]_{\mathcal{B}} [U]_{\mathcal{B}} \\ &= [U]_{\mathcal{B}}^{-1} [T]_{\mathcal{B}} [U]_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

و این دقیقاً همان فرمول تغییر پایه است که قبلاً استخراج کردیم.

تمرین

۱. فرض کنید هیاوسی چون F و تابع خطی f روی F^2 تعریف شده توسط
 $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$ داده شده‌اند. به ازای هر یک از عملگرهای خطی زیر، فرض کنید $g = T^t f$ و $g(x_1, x_2)$ را بیابید.

$$T(x_1, x_2) = (x_1, 0) \quad (\text{الف})$$

$$T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1) \quad (\text{ب})$$

$$T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2) \quad (\text{پ})$$

۲. فرض کنید V فضای برداری همه توابع چند جمله‌ای بر روی هیات اعداد حقیقی

باشد. a و b را دو عدد حقیقی ثابت بگیرد، و فرض کنید f تابعی خطی روی V باشد که توسط

$$f(p) = \int_a^b p(x) dx$$

تعریف می‌شود. اگر D عملگر مشتق‌گیری روی V باشد، $D^t f$ چیست؟

۳. فرض کنید V فضای همه ماتریسهای $n \times n$ بر روی هیأت F و B ماتریس $n \times n$ ثابتی باشد. اگر عملگر خطی T روی V با $T(A) = AB - BA$ تعریف بشود و f تابع رد باشد، $T^t f$ چیست؟

۴. فرض کنید V فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأت F و T عملگری خطی روی V باشد. c را يك اسکالر بگیرد و فرض کنید بردار غیر صفری چون α در V موجود است که $T\alpha = c\alpha$. ثابت کنید تابع خطی غیر صفری چون f روی V وجود دارد که $T^t f = cf$.

۵. فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ با درایه‌های حقیقی باشد. ثابت کنید $A = 0$ اگر و تنها اگر $\text{tr}(A^t A) = 0$.

۶. فرض کنید n عددی صحیح و مثبت باشد، و V فضای همه توابع چند جمله‌ای با درجه حداکثر n ، یعنی توابع به صورت

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$$

بر روی هیأت اعداد حقیقی. اگر D عملگر مشتق‌گیری روی V باشد، پایه‌ای برای فضای پوچ عملگر ترانزاده D^t بیابید.

۷. فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی بر روی هیأت F باشد. نشان دهید $T \rightarrow T^t$ يك پیکریختی از $L(V, V)$ بروی $L(V^*, V^*)$ است.

۸. فرض کنید V فضای برداری ماتریسهای $n \times n$ بر روی هیأت F باشد.
 (الف) اگر B ماتریس $n \times n$ ثابتی باشد، تابع f_B روی V را طبق $f_B(A) = \text{tr}(B^t A)$ تعریف کنید. نشان دهید f_B تابعی خطی روی V است.
 (ب) نشان دهید هر تابع خطی روی V به صورت بالا است؛ یعنی، به ازای ماتریسی چون B برابر f_B است.

(پ) نشان دهید $f_B \rightarrow B$ يك پیکریختی از V بروی V^* است.

چند جمله ایها

۱.۴ جبرها

هدف ما در این فصل این است که چند خاصیت بنیانی جبر چند جمله ایهای بر روی يك هیأت F را اثبات کنیم. جهت تسهیل کار ابتدا به معرفی مفهوم جبر خطی بر روی هیأت F می پردازیم.

تعریف. فرض می کنیم F يك هیأت باشد. يك جبر خطی بر روی هیأت F فضایی برداری مانند \mathcal{A} بردوی F همراه با عملی اضافی به نام ضرب برداری است که هر جفت از بردارهای α و β از \mathcal{A} را به بردار $\alpha\beta$ از \mathcal{A} ، به نام حاصل ضرب α و β ، چنان وابسته می سازد که

(الف) ضرب شرکت پذیر است،

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$$

(ب) ضرب نسبت به جمع پخش پذیر است،

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad \text{و} \quad (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$$

(پ) به ازای هر اسکالر c از F

$$c(\alpha\beta) = (c\alpha)\beta = \alpha(c\beta).$$

اگر عنصری چون 1 در α موجود باشد، به طوری که به ازای هر α از α ،
 $1\alpha = \alpha 1 = \alpha$ ، 1 را يك جبرخطی با عنصرهمانی بر روی F و 1 را عنصرهمانی
 می‌نامیم. جبر α جایجایی نامیده می‌شود هرگاه به ازای همه α ها و β های در α ،
 $\alpha\beta = \beta\alpha$.

مثال ۱. مجموعه ماتریسهای $n \times n$ بر روی يك هیأت همراه با اعمال معمولی يك
 جبرخطی با عنصرهمانی است؛ بخصوص، خود هیأت هم يك جبر با عنصرهمانی است.
 این جبر در صورتی که $n \geq 2$ جایجایی نیست. خود هیأت (البته) جایجایی است.

مثال ۲. فضای همه عملگرهای خطی روی يك فضای برداری همراه با ترکیب
 عملگرها، به عنوان ضرب، يك جبرخطی با عنصرهمانی است. این جبر جایجایی است اگر
 و تنها اگر فضا يك بعدی باشد.

خواننده ممکن است درباره ضرب نقطه‌ای و ضرب خارجی بردارهای در R^3
 تجربیاتی داشته باشد. در این صورت وی باید متوجه باشد که هیچ يك از این ضربها، از
 نوع توصیف شده در تعریف جبرخطی نیست. ضرب نقطه‌ای يك «ضرب اسکالری» است؛
 بدین معنی که به هر جفت برداریك اسکالروایسته می‌سازد و از این رو، یقیناً از نوع ضربی
 نیست که در حال حاضر مورد بحث ماست. ضرب خارجی هر چند به هر جفت بردار R^3 يك
 بردار وابسته می‌کند، اما شرکت پذیر نیست.

بقیه این بخش به ساختن جبری خطی اختصاص دارد که با جبرهای مطرح شده در
 هر يك از مثالهای پیشین به طور بارزی متفاوت است. فرض کنیم F يك هیأت و S مجموعه
 اعداد صحیح نامنفی باشد. بنا بر مثال ۳ از فصل ۲، مجموعه همه توابع از S در F فضایی
 برداری بر روی F است. ما این فضای برداری را با F^∞ نشان می‌دهیم. لذا، بردارهای
 F^∞ دنباله‌های نامتناهی (f_0, f_1, f_2, \dots) از اسکالرهای f_i از F هستند. اگر
 $g = (g_0, g_1, g_2, \dots)$ ، هر g_i در F ، و a و b اسکالرهایی از F باشند،
 $af + bg$ دنباله‌ای نامتناهی است که با

$$af + bg = (af_0 + bg_0, af_1 + bg_1, af_2 + bg_2, \dots) \quad (1-4)$$

تعریف می‌شود. با وابسته کردن هر جفت f و g از بردارهای F^∞ به بردار fg که با

$$(fg)_n = \sum_{i=0}^n f_i g_{n-i}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2-4)$$

معین می‌شود، يك ضرب در F^∞ تعریف می‌کنیم. پس

$$fg = (f_0 g_0, f_0 g_1 + f_1 g_0, f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0, \dots)$$

۱. در صورتی که فضا صفر بعدی هم باشد این جبر جایجایی است. برای اجتناب از این گونه
 پیچیدگیها فرض می‌کنیم فضا حداقل دو عنصر متمایز داشته باشد. — م.

و چون به ازای $n = 0, 1, 2, \dots$

$$(gf)_n = \sum_{i=0}^n g_i f_{n-i} = \sum_{i=0}^n f_i g_{n-i} = (fg)_n,$$

نتیجه می گیریم که این ضرب جا بجایی است، $gf = fg$. اگر h نیز متعلق به F^∞ باشد،
آنگاه به ازای $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} [(fg)h]_n &= \sum_{i=0}^n (fg)_i h_{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^i f_j g_{i-j} \right) h_{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i f_j g_{i-j} h_{n-i} \\ &= \sum_{j=0}^n f_j \sum_{i=0}^{n-j} g_i h_{n-i-j} \\ &= \sum_{j=0}^n f_j (gh)_{n-j} = [f(gh)]_n \end{aligned}$$

و بنابراین

$$(fg)h = f(gh). \quad (3-4)$$

از خواننده می خواهیم نشان دهد که ضرب تعریف شده توسط (۳-۴) در شرایط (ب) و (پ) تعریف جبر خطی هم صدق می کند و بردار $(1, 0, 0, \dots)$ چون يك عنصر همانی برای F^∞ عمل می نماید. در این صورت، F^∞ همراه با اعمال تعریف شده در بالا يك جبر خطی جا بجایی با عنصر همانی بر روی هیأت F است.

در مطالبی که متعاقباً خواهد آمد، بردار $(0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$ نقش ممتازی برعهده دارد و ما آن را همواره با x نشان می دهیم. در سراسر این فصل، هرگز برای نشان دادن عنصری از هیأت F به کار نخواهد رفت. حاصل ضرب n بار x در خودش را با x^n نشان می دهیم و بنا بر قرارداد می گیریم $x^0 = 1$. در این صورت

$$x^2 = (0, 0, 1, 0, \dots), \quad x^3 = (0, 0, 0, 1, 0, \dots)$$

و در حالت کلی به ازای هر عدد صحیح $k \geq 0$ ، $(x^k)_k = 1$ و به ازای همه اعداد صحیح نامتفی $n \neq k$ ، $(x^k)_n = 0$. درخاتمه این بخش ملاحظه می کنیم که مجموعه متشکل از x, x^2, \dots هم مستقل است و هم نامتناهی. پس، بعد جبر F^∞ متناهی نیست. جبر F^∞ گاهی جبر رشته های توانی بر روی F نامیده می شود. عنصر $f = (f_0, f_1, f_2, \dots)$ غالباً به صورت

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \quad (۴-۴)$$

نوشته می‌شود. این نماد در مواجهه با اعمال جبری بسیار مناسب است. هنگام استفاده از آن باید به‌خاطر داشت که این نماد صددرصد صوری است. در جبر، «مجموع نامتناهی» وجود ندارد و قرار بر این نیست که نماد رشته‌توانی (۴-۴) چیزی درباره‌ی همگرایی، در صورتی که خواننده بداند همگرایی چیست، القا کند. پس، با استفاده از دنباله‌ها و بدون آنکه درمخاطره‌ی ابهام مطالبی چون مجموع نامتناهی قرار بگیریم توانستیم جبری را که در آن عملهای جبری، رفتاری شبیه به جمع و ضرب رشته‌های توانی صوری دارند، به‌طور دقیق تعریف کنیم.

۲.۴. جبر چندجمله‌ایها

اکنون درموقعیتی هستیم که بتوانیم یک چندجمله‌ای بر روی هیأت F را تعریف کنیم.

تعریف. فرض کنیم $F[x]$ زیرفضای پدیدآمده توسط بردارهای $1, x, x^2, \dots, x^{\infty}$ از F^{∞} باشد. هر عنصر $F[x]$ یک چندجمله‌ای بر روی F نامیده می‌شود.

چون $F[x]$ مشکل از همه‌ی ترکیبات خطی (متناهی) x و توانهای آن است، هر بردار غیرصفر f از F^{∞} ، یک چندجمله‌ای است اگر و تنها اگر یک عدد صحیح $n \geq 0$ وجود داشته باشد به‌طوری که $f_n \neq 0$ و به‌ازای همه‌ی اعداد صحیح $k > n$ ، $f_k = 0$ ؛ این عدد صحیح را که (در صورت وجود) مسلماً یکتاست درجه‌ی f می‌نامیم. درجه‌ی چندجمله‌ای f را با $\deg f$ نشان می‌دهیم، اما درجه‌ای به چندجمله‌ای 0 اختصاص نمی‌دهیم. اگر f یک چندجمله‌ای غیرصفر از درجه‌ی n باشد، داریم

$$f = f_0 x^0 + f_1 x^1 + f_2 x^2 + \dots + f_n x^n, \quad f_n \neq 0 \quad (۵-۴)$$

اسکالرهای f_0, f_1, \dots, f_n گاهی ضرایب f نامیده می‌شوند، و گفته می‌شود f یک چندجمله‌ای با ضرایب متعلق به F است. چندجمله‌ایهای به‌صورت $c x^0$ را چندجمله‌ایهای اسکالری می‌نامیم و غالباً به‌جای $c x^0$ می‌نویسیم c . هر چندجمله‌ای غیرصفر f از درجه‌ی n با شرط $f_n = 1$ یک چندجمله‌ای تکین نامیده می‌شود.

خواننده باید توجه داشته باشد که چندجمله‌ایها چیزهایی از قبیل توابع چندجمله‌ای روی F که تاکنون در چند مورد درباره‌ی آنها صحبت کرده‌ایم، نیستند. اگر F شامل تعدادی نامتناهی عنصر باشد، بین $F[x]$ و جبر توابع چندجمله‌ای بر روی F یک بکریختی طبیعی برقرار است. این موضوع را در بخش بعد مورد بحث قرار می‌دهیم و اکنون نشان می‌دهیم که $F[x]$ یک جبر خطی است.

قضیه ۱. فرض کنیم f و g دو چندجمله‌ای غیر صفر بر روی F باشند. در این صورت

$$(1) \quad fg \text{ يك چندجمله‌ای غیر صفر است؛}$$

$$(2) \quad \deg(fg) = \deg f + \deg g$$

(۳) هرگاه f و g هر دو چندجمله‌هایی تکین باشند، آنگاه fg نیز يك چندجمله‌ای

تکین است؛

(۴) fg يك چندجمله‌ای اسکالری است اگر و تنها اگر f و g هر دو چندجمله‌ای‌هایی

اسکالری باشند؛

$$(5) \quad \text{اگر } f + g \neq 0 \text{ داریم}$$

$$\deg(f+g) \leq \max(\deg f, \deg g).$$

اثبات. فرض کنیم f از درجه m ، و g از درجه n باشد. اگر k عددی صحیح و

غیر منفی باشد،

$$(fg)_{m+n+k} = \sum_{i=0}^{m+n+k} f_i g_{m+n+k-i}.$$

برای این که $f_i g_{m+n+k-i} \neq 0$ ، لازم است $i \leq m$ و $m+n+k-i \leq n$. از این رو،

لازم است $m+k \leq i \leq m$ که خود ایجاب می‌کند $k=0$ و $i=m$. لذا

$$(fg)_{m+n} = f_m g_n \quad (6-4)$$

و

$$(fg)_{m+n+k} = 0, \quad k > 0. \quad (7-4)$$

احکام (۱)، (۲)، و (۳) بیدرنگ از (۶-۴) و (۷-۴) نتیجه می‌شوند، در حالی که (۴)

پیمایی از (۱) و (۲) است. تحقیق درستی (۵) را به خواننده واگذار می‌کنیم. \square

نتیجه ۱. مجموعه همه چندجمله‌ایهای بر روی يك هیأت مفروض F ، مجهز به اعمال

(۱-۴) و (۲-۴)، يك جبر خطی جا بجایی با عضوهمانی بر روی F است.

اثبات. چون اعمال (۱-۴) و (۲-۴) همان اعمال تعریف شده در جبر F^∞ هستند و

چون $F[x]$ زیر فضایی از F^∞ است، کافی است ثابت کنیم که حاصل ضرب دو چندجمله‌ای

خرد يك چندجمله‌ای است. این مطلب در صورت 0 بودن یکی از سازه‌ها بدیهی است و

در غیر این صورت از (۱) نتیجه می‌شود. \square

نتیجه ۲. فرض کنیم f ، g و h چندجمله‌ایهایی بر روی هیأت F باشند که $f \neq 0$

و در این صورت $fg = fh$.

اثبات. چون $fg = fh$ ، داریم $f(g-h) = 0$ ، و نظر به اینکه $f \neq 0$ ، بیدرنگ

از (۱) نتیجه می‌شود که $g-h = 0$. \square

چند واقعیت دیگر هم نسبتاً با آسانی از اثبات قضیه ۱ نتیجه می‌شوند و ما برخی را در اینجا ذکر می‌کنیم.
فرض کنیم

$$g = \sum_{j=0}^n g_j x^j \quad \text{و} \quad f = \sum_{i=0}^m f_i x^i$$

در این صورت از (۷-۴) نتیجه می‌شود که

$$fg = \sum_{s=0}^{m+n} \left(\sum_{r=0}^s f_r g_{s-r} \right) x^s. \quad (۸-۴)$$

از خواننده می‌خواهیم نشان دهد که در حالت خاص $f = cx^m$ ، $g = dx^n$ ، با c و d در F ،
(۸-۴) به صورت

$$(cx^m)(dx^n) = cdx^{m+n} \quad (۹-۴)$$

درمی‌آید. حال، از (۹-۴) و قوانین بخش پذیری $F[x]$ ، نتیجه می‌شود که حاصل ضرب
(۸-۴) به صورت

$$\sum_{i,j} f_i g_j x^{i+j} \quad (۱۰-۴)$$

نیز می‌تواند نوشته شود. در اینجا، مجموع روی همه جفت اعداد صحیح i, j با شرایط
 $0 \leq i \leq m$ و $0 \leq j \leq n$ در نظر گرفته می‌شود.

تعریف. فرض کنیم α یک جبرخطی با عنصرهایی بر روی هیأت F باشد. عنصر
همانی α را با ۱ نشان می‌دهیم و قرارداد می‌کنیم که به ازای هر α از α ، $\alpha^0 = 1$. در این
صورت به هر چندجمله‌ای $f = \sum_{i=0}^n f_i x^i$ بر روی F و هر α از α ، یک عنصر $f(\alpha)$ از α را
بنابر قاعده

$$f(\alpha) = \sum_{i=0}^n f_i \alpha^i$$

وابسته می‌سازیم.

مثال ۳. گیریم C هیأت اعداد مختلط و $f = x^2 + 2$ باشد.
(الف) اگر $\alpha = C$ و z متعلق به C باشد، آنگاه $f(z) = z^2 + 2$ ؛ بخصوص
 $f(2) = 6$ و

$$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = 1.$$

(ب) اگر α جبره‌ماتریسهای 2×2 بر روی C باشد و

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

آنگاه

$$f(B) = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

(ب) اگر \mathcal{A} جبر همۀ عملگرهای خطی روی C^3 و T عنصری از \mathcal{A} داده شده توسط

$$T(c_1, c_2, c_3) = (i\sqrt{2}c_1, c_2, i\sqrt{2}c_3)$$

باشد، آنگاه $f(T)$ عملگری خطی روی C^3 است که توسط

$$f(T)(c_1, c_2, c_3) = (0, 3c_2, 0)$$

تعریف می‌شود.

(ت) اگر \mathcal{A} جبر همۀ چندجمله‌ایهای بر روی C و $g = x^4 + 3i$ باشد، آنگاه

$f(g)$ آن چندجمله‌ای در \mathcal{A} است که به وسیله

$$f(g) = -7 + 6ix^4 + x^8$$

تعیین می‌شود.

در باره مثال اخیر خواننده نکته بین ممکن است متوجه شود که اگر f چندجمله‌ای مفروضی بر روی یک هیأت دلخواه \mathcal{A} چندجمله‌ای $(0, 1, 0, 0, 0)$ باشد، آنگاه $f = f(x)$ ، اما به‌وی توصیه می‌کنیم که این واقعیت را نادیده انگارد.

قضیه ۲. فرض کنیم F یک هیأت \mathcal{A} جبری خطی با عنصرهایی بر روی F باشد. اگر f و g چندجمله‌ایهایی بر روی F ، α عنصری از \mathcal{A} و c متعلق به F باشد، آنگاه

$$(1) \quad (cf + g)(\alpha) = cf(\alpha) + g(\alpha)$$

$$(2) \quad (fg)(\alpha) = f(\alpha)g(\alpha)$$

اثبات. نظر به اینکه اثبات (۱) کاملاً ساده است، تنها به اثبات (۲) می‌پردازیم. فرض کنیم

$$g = \sum_{j=0}^n g_j x^j \quad \text{و} \quad f = \sum_{i=0}^m f_i x^i$$

بنابر (۴-۱۰)

$$fg = \sum_{i,j} f_i g_j x^{i+j}$$

و از این رو، بنابر (۱)

$$\begin{aligned}(fg)(\alpha) &= \sum_{i,j} f_i g_j \alpha^{i+j} \\ &= \left(\sum_{i=0}^m f_i \alpha^i \right) \left(\sum_{j=0}^n g_j \alpha^j \right) \\ &= f(\alpha)g(\alpha). \quad \square\end{aligned}$$

تمرین

۰۱ فرض کنید F زیرحیاتی از هیأت اعداد مختلط باشد و A ماتریسی 2×2 بر روی F به صورت

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

برای هر يك از چندجمله‌ایهای داده شده زیر، بر روی F ، ماتریس $f(A)$ را محاسبه کنید.

$$f = x^2 - x + 2 \quad (\text{الف})$$

$$f = x^3 - 1 \quad (\text{ب})$$

$$f = x^2 - 5x + 7 \quad (\text{پ})$$

۰۲ فرض کنید T عملگر خطی روی R^2 تعریف شده توسط

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3, -2x_2 - x_3)$$

باشد و f چندجمله‌ای روی R تعریف شده توسط $f = -x^2 + 2$ مطلوب است $f(T)$.

۰۳ فرض کنید A يك ماتریس قطری $n \times n$ بر روی هیأت F باشد؛ یعنی، ماتریسی باشد که به ازای $i \neq j$ در شرط $A_{ij} = 0$ صدق کند. چندجمله‌ای f بر روی F که توسط

$$f = (x - A_{11}) \cdots (x - A_{nn})$$

تعریف می‌شود داده شده است. مطلوب است $f(A)$.

۰۴ اگر f و g دو چندجمله‌ای مستقل خطی بر روی هیأت F و h يك چندجمله‌ای غیرصفر بر روی F باشند، نشان دهید gh و fh مستقل اند.

۰۵ اگر F هیأتی باشد، نشان دهید که حاصل ضرب دو عضو غیرصفر F^∞ غیرصفر است.

۰۶ فرض کنید S مجموعه‌ای از چندجمله‌ایهای غیرصفر بر روی هیأت F باشد. اگر هیچ دو

عضوی از S درجه مساوی نداشته باشند، نشان دهید که S در $F[x]$ مجموعه مستقلی است.

۷. اگر a و b اعضای هیأت F باشند و $a \neq 0$ ، نشان دهید که چندجمله‌ایهای $1, ax+b, (ax+b)^2, (ax+b)^3, \dots$ پایه‌ای برای $F[x]$ تشکیل می‌دهند.

۸. اگر F یک هیأت و h یک چندجمله‌ای از درجه‌ای بزرگتر از a مساوی با یک بر روی F باشد، نشان دهید نگاشت $f \rightarrow f(h)$ یک تبدیل خطی یک به یک از $F[x]$ در $F[x]$ است. همچنین نشان دهید این تبدیل یک یکریختی از $F[x]$ بر روی $F[x]$ است اگر و تنها اگر $\deg h = 1$.

۹. فرض کنید F زیرهیأتی از هیأت اعداد مختلط و T و D تبدیلهای تعریف شده توسط

$$T\left(\sum_{i=0}^n c_i x^i\right) = \sum_{i=0}^n \frac{c_i}{1+i} x^{i+1}$$

و

$$D\left(\sum_{i=0}^n c_i x^i\right) = \sum_{i=1}^n i c_i x^{i-1}$$

روی $F[x]$ باشند.

(الف) نشان دهید T عملگر خطی نامنفردی روی $F[x]$ است. همچنین نشان دهید T معکوس پذیر نیست.

(ب) نشان دهید D عملگری خطی روی $F[x]$ است و فضای پوچ آن را به دست آورید.

(پ) نشان دهید $DT = I$ و $TD \neq I$.

(ت) به ازای هر f و g از $F[x]$ نشان دهید

$$T[(Tf)g] = (Tf)(Tg) - T[f(Tg)].$$

(ث) قاعده‌ای برای D مشابه با قاعده داده شده در (ت) برای T بیان و آن را اثبات کنید.

(ج) فرض کنید V زیرفضای غیرصفری از $F[x]$ باشد که به ازای هر f در V ، چندجمله‌ای Tf متعلق به V است. نشان دهید بعد V متناهی نیست.

(ج) فرض کنید V زیرفضایی با بعد متناهی از $F[x]$ باشد ثابت کنید یک عدد صحیح $m \geq 0$ یافت می‌شود که به ازای هر f در V ، $D^m f = 0$.

۳.۴. درون‌یابی لاگرانژ

درسراسر این بخش فرض می‌کنیم F هیأتی ثابت و $t_0, t_1, \dots, t_n, \dots, t_{n+1}$ عنصر متمایز از F باشند. فرض کنیم V زیرفضایی از $F[x]$ متشکل از همه چندجمله‌ایهای از درجه کمتر از

یا مساوی با n (همراه با چندجمله‌ای 0) و L_i تابعی از V در F تعریف شده توسط

$$L_i(f) = f(t_i), \quad 0 \leq i \leq n$$

به ازای هر f از V باشد. بنا بر حکم (۱) قضیه ۲، هر L_i تابعکی خطی روی V است. یکی از مطالبی که می‌خواهیم نشان دهیم این است که مجموعه متشکل از L_0, L_1, \dots, L_n پایه‌ای برای V^* ، فضای دوگان V ، تشکیل می‌دهد.

بدیهی است برای این منظور کافی است که $\{L_0, L_1, \dots, L_n\}$ دوگان پایه‌ای چون $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ از V باشد (با قضیه ۱۵ در فصل ۳ مقایسه شود). چنین پایه‌ای یکی بیشترینست و در صورت وجود با

$$L_j(P_i) = P_i(t_j) = \delta_{ij} \quad (11-4)$$

تعیین می‌شود. چندجمله‌ایهای

$$P_i = \frac{(x-t_0) \cdots (x-t_{i-1})(x-t_{i+1}) \cdots (x-t_n)}{(t_i-t_0) \cdots (t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1}) \cdots (t_i-t_n)} \quad (12-4)$$

$$= \prod_{j \neq i} \left(\frac{x-t_j}{t_i-t_j} \right)$$

از درجه n هستند، از این رو به V تعلق دارند و بنا بر قضیه ۲ در (۱۱-۴) صدق می‌کنند.

اگر $f = \sum_i c_i P_i$ ، آنگاه به ازای هر j

$$f(t_j) = \sum_i c_i P_i(t_j) = c_j. \quad (13-4)$$

چون چندجمله‌ای 0 دارای این خاصیت است که به ازای هر t از F ، $0(t) = 0$ ، از (۱۳-۴) نتیجه می‌شود که چندجمله‌ایهای P_0, P_1, \dots, P_n مستقل خطی هستند. چندجمله‌ایهای $1, x, \dots, x^n$ پایه‌ای برای V تشکیل می‌دهند و لذا بعد V برابر $(n+1)$ است. بنابراین، مجموعه مستقل $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ نیز باید پایه‌ای برای V باشد. پس، به ازای هر f از V

$$f = \sum_{i=0}^n f(t_i) P_i. \quad (14-4)$$

عبارت (۱۴-۴)، فرمول درون‌یابی لاگرانژ نامیده می‌شود. اگر $f = x^j$ را در (۱۴-۴) قرار دهیم، چنین به دست می‌آوریم

$$x^j = \sum_{i=0}^n (t_i)^j P_i.$$

اکنون از قضیه ۷ در فصل ۲ نتیجه می‌شود که ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^n \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^n \end{bmatrix} \quad (15-4)$$

معکوس پذیر است. ماتریس (۱۵-۴) ماتریس واندرموند نامیده می‌شود؛ نشان دادن مستقیم معکوس پذیری این ماتریس، هنگامی که t_0, t_1, \dots, t_n اعضای متمایز از F باشند، تمرین جالبی است.

در بحث حاضر اگر f یک چندجمله‌ای دلخواه بر روی F باشد، تابع چندجمله‌ای از F در F را که هر t در F را به $f(t)$ می‌برد، با f^\sim نشان می‌دهیم. بنا بر تعریف (با مثال ۴ در فصل ۲ مقایسه شود) هر تابع چندجمله‌ای به همین طریق به وجود می‌آید؛ هر چند بر حسب اتفاق به ازای دو چندجمله‌ای f و g با شرط $f \neq g$ ممکن است داشته باشیم $f^\sim = g^\sim$ ، خوشبختانه، به طوری که خواهیم دید، این وضع ناخوش آیند تنها در حالتی که F هیأتی با تعدادی متناهی عنصر متمایز باشد پیش می‌آید. برای اینکه رابطه بین چندجمله‌ایها و توابع چندجمله‌ای را با روشی دقیق و جامع تشریح کنیم، نیاز به تعریف ضرب دو تابع چندجمله‌ای داریم. اگر f و g دو چندجمله‌ای بر روی F باشند، حاصل ضرب $f^\sim g^\sim$ و عبارت است از تابع $f^\sim g^\sim$ از F در F که با

$$(f^\sim g^\sim)(t) = f^\sim(t)g^\sim(t) \quad F \text{ در } t \text{ به ازای } (16-4)$$

تعریف می‌شود. بنا بر قسمت (۲) قضیه ۲، $(fg)^\sim(t) = f^\sim(t)g^\sim(t)$ ، ولذا به ازای هر t از F

$$(fg)^\sim(t) = f^\sim(t)g^\sim(t).$$

از این رو، $f^\sim g^\sim = (fg)^\sim$ و تابعی چندجمله‌ای است. در این جا، بررسی این نکته که فضای برداری توابع چندجمله‌ای بر روی F ، در صورتی که ضرب مطابق (۱۶-۴) تعریف شود، یک جبر خطی با عنصر همانی بر روی F است، موضوعی است سراسر است و آن را به خواننده واگذار می‌کنیم.

تعریف. فرض کنیم هیأت F و جبرهای خطی α و α^\sim بر روی F داده شده باشند. جبرهای α و α^\sim یکریخت خوانده می‌شوند هرگاه یک نگاشت یک به یک $\alpha \rightarrow \alpha^\sim$ از بروی α وجود داشته باشد که به ازای هر α و β از α و هر دو اسکالر c و d از F ، α

$$(c\alpha + d\beta)^\sim = c\alpha^\sim + d\beta^\sim \quad (\text{الف})$$

$$(\alpha\beta)^{\sim} = \alpha^{\sim}\beta^{\sim} \quad (\text{ب})$$

نگاشت $\alpha^{\sim} \rightarrow \alpha$ يك يکسریختی از α بروی α^{\sim} نامیده می‌شود. از این دو، هر یکریختی از α بروی α^{\sim} ، يك یکریختی فضای برداری از α بروی α^{\sim} است که دارای خاصیت اضافی (ب) مربوط به «حفظ» حاصل ضرب هم هست.

مثال ۴. گیریم V يك فضای برداری n بعدی بروی هیأت F باشد. بنا بر قضیه ۱۳ در فصل ۳ و تذکرات متعاقب آن، هر پایه \mathcal{B} از V يك یکریختی $T \rightarrow [T]_{\mathcal{B}}$ از جبر عملگرهای خطی روی V بروی جبر ماتریسهای $n \times n$ بروی F تعیین می‌کند. حال فرض کنیم عملگر خطی ثابت U روی V و چندجمله‌ای

$$f = \sum_{i=0}^n c_i x^i$$

با ضرایب c_i از F داده شده باشند. در این صورت

$$f(U) = \sum_{i=0}^n c_i U^i,$$

و چون $T \rightarrow [T]_{\mathcal{B}}$ نگاشتی خطی است

$$[f(V)]_{\mathcal{B}} = \sum_{i=0}^n c_i [U^i]_{\mathcal{B}}.$$

اکنون از این واقعیت که به ازای هر T_1 و T_2 از $L(V, V)$

$$[T_1 T_2]_{\mathcal{B}} = [T_1]_{\mathcal{B}} [T_2]_{\mathcal{B}}$$

نتیجه می‌گیریم که

$$[U^i]_{\mathcal{B}} = ([U]_{\mathcal{B}})^i, \quad 2 \leq i \leq n.$$

نظر به اینکه این رابطه به ازای $i = 0, 1$ نیز معتبر است، این نتیجه را به دست می‌آوریم که

$$[f(U)]_{\mathcal{B}} = f([U]_{\mathcal{B}}). \quad (17-4)$$

بد زبان کلمات، اگر U عملگری خطی روی V باشد، ماتریس يك چندجمله‌ای از U ، در پایه‌ای مفروض، عبارت است از همان چندجمله‌ای بر حسب ماتریس U .

قضیه ۴. اگر F هیأتی مشتمل بر تعدادی نامتناهی عنصر متمایز باشد، نگاشت

$f^{\sim} \rightarrow f$ يك یکریختی از جبر چندجمله‌ایهای برداری F بروی جبر توابع چندجمله‌ای برداری F است.

اثبات. طبق تعریف، این نگاشت پوشاست؛ و اگر f و g متعلق به $F[x]$ باشند،

واضح است که به ازای همه اسکالرهای c و d ,

$$(cf + dg)^{\sim} = cf^{\sim} + dg^{\sim}.$$

چون قبلاً ثابت کردیم که $(fg)^{\sim} = f^{\sim}g^{\sim}$ ، تنها نیازمندیم نشان دهیم که این نگاشت يك-به-يك است. برای انجام این کار، به خاطر خطی بودن نگاشت، کافی است نشان دهیم $f^{\sim} = 0$ یا $g^{\sim} = 0$ ایجاب می کند که $f = 0$. در این صورت فرض کنیم f يك چندجمله ای از درجه n یا کمتر باشد، به طوری که $f^{\sim} = 0$. گیریم $t_0, t_1, \dots, t_n, \dots, t_n + 1$ عنصر متمایز از F باشند. چون $f^{\sim} = 0$ ، به ازای $i = 0, 1, \dots, n$ ، داریم $f(t_i) = 0$ ، و يك نتیجه آنی از (۱۴-۴) این است که $f = 0$. \square

از نتایج بخش بعد اثبات کاملاً متفاوتی برای این قضیه به دست خواهیم آورد.

تمرین

۱. با استفاده از فرمول درون یابی لاگرانژ، يك چندجمله ای f با ضرایب حقیقی بیابید که از درجه کوچکتر از یا مساوی ۳ باشد و $f(-1) = -6$ ، $f(0) = 2$ ، $f(1) = -2$ ، $f(2) = 6$.

۲. فرض کنید $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ اعدادی حقیقی باشند. می خواهیم بدانیم چه وقت ممکن است يك چندجمله ای f روی R از درجه نایبتر از ۲ بیابیم که $f(-1) = \alpha$ ، $f(1) = \beta$ ، $f(2) = \gamma$ ، $f(3) = \delta$ ، و $f(0) = \delta$ ثابت کنید این امر ممکن است اگر و تنها اگر

$$3\alpha + 6\beta - \gamma - 8\delta = 0.$$

۳. فرض کنید F هیأت اعداد حقیقی باشد و داشته باشیم

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p = (x-2)(x-3)(x-1).$$

(الف) نشان دهید $p(A) = 0$.

(ب) فرض کنید P_1, P_2, P_3 چندجمله ایهای لاگرانژ به ازای $t_1 = 2$ ، $t_2 = 3$ ، $t_3 = 1$ و $t_3 = 1$ باشند. ماتریس $E_i = P_i(A)$ ، $i = 1, 2, 3$ را محاسبه کنید.

- (پ) نشان دهید $E_1 + E_2 + E_3 = I$ ، $E_i E_j = 0$ هر گاه $i \neq j$ ، و $E_i^2 = E_i$.
- (ت) نشان دهید $A = 2E_1 + 3E_2 + E_3$.

۴. فرض کنید $p = (x-1)(x-2)(x-3)$ ، و T عملگری خطی روی R^3 باشد که $p(T) = 0$. فرض کنید P_1, P_2, P_3 چندجمله‌ایهای لاگرانژ در تمرین ۳ باشند و $E_i = P_i(T)$ ، $i = 1, 2, 3$. ثابت کنید

$$E_1 + E_2 + E_3 = I,$$

$$E_i E_j = 0 \text{ هر گاه } i \neq j$$

$$E_i^2 = E_i,$$

$$T = 2E_1 + 3E_2 + E_3.$$

۵. عدد صحیح مثبت n و هیأت F داده شده‌اند. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ و P ماتریس $n \times n$ معکوس‌پذیری بر روی F باشند. اگر f چندجمله‌ای دلخواهی بر روی F باشد، ثابت کنید

$$f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P.$$

۶. فرض کنید F یک هیأت باشد. بعضی از تابعهای خطی خاص روی $F[x]$ را که از طریق «تعیین مقدار در t »:

$$L(f) = f(t)$$

به دست می‌آیند قبلاً دیده‌ایم. این گونه تابعها تنها خطی هستند بلکه دارای این خاصیت نیز می‌باشند که $L(fg) = L(f)L(g)$. ثابت کنید اگر L تابعی خطی روی $F[x]$ باشد که به ازای هر f و g ،

$$L(fg) = L(f)L(g),$$

آنگاه، یا $L = 0$ یا يك t در F یافت می‌شود که به ازای همه f ها، $L(f) = f(t)$.

۴.۴. ایدآلهای چندجمله‌ایها

در این بخش به نتایجی که عمدتاً به ساختار ضربی جبر چندجمله‌ایهای بر روی يك هیأت وابسته هستند می‌پردازیم.

لم. فرض کنیم f و d دو چندجمله‌ای غیر صفر بر روی هیأت F باشند و $\deg d \leq \deg f$. در این صورت، يك چندجمله‌ای g در $F[x]$ با یکی از دو شرط زیر یافت می‌شود:

$$\deg(f - dg) < \deg f \text{ یا } f - dg = 0$$

اثبات. فرض کنیم

$$f = a_m x^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i, \quad a_m \neq 0$$

و

$$d = b_n x^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i, \quad b_n \neq 0.$$

در این صورت $m \geq n$ و

$$\deg \left[f - \left(\frac{a_m}{b_n} \right) x^{m-n} d \right] < \deg f \text{ یا } f - \left(\frac{a_m}{b_n} \right) x^{m-n} d = 0$$

بدین سان می‌توان g را مساوی $(a_m/b_n)x^{m-n}$ اختیار کرد. \square

با استفاده از این لم می‌توانیم نشان دهیم که فرایند آشنای «تقسیمات متوالی» برای چندجمله‌ایهای با ضرایب حقیقی یا مختلط بر روی هر هیأت دلخواه نیز امکان پذیر است.

قضیه ۴. اگر f و d دو چندجمله‌ای بر روی هیأت F باشند و d مخالف ۰، آنگاه دو چندجمله‌ای q و r در $F[x]$ وجود دارند به طوری که

$$f = dq + r \quad (1)$$

$$\deg r < \deg d \text{ یا } r = 0 \quad (2)$$

چند جمله‌ایهای q و r که در شرایط (۱) و (۲) صدق می‌کنند یکتا هستند.

اثبات. اگر f چندجمله‌ای ۰ باشد یا $\deg f < \deg d$ آنگاه، $r = f$ و $q = 0$ يك پاسخ است. در حالت $f \neq 0$ و $\deg f \geq \deg d$ ، لم قبل نشان می‌دهد که می‌توان يك چندجمله‌ای g با شرط $f - dg = 0$ یا $\deg(f - dg) < \deg f$ انتخاب کرد. اگر $f - dg \neq 0$ و $\deg(f - dg) \geq \deg d$ ، چندجمله‌ای h را طوری انتخاب می‌کنیم که $(f - dg) - dh = 0$ یا

$$\deg[f - d(g+h)] < \deg(f - dg).$$

با ادامه این فرایند تا حد لزوم، سرانجام چندجمله‌ایهای q و r با شرط $r = 0$ و $\deg r < \deg d$ ، و شرط $f = dq + r$ حاصل می‌شوند. حال فرض کنیم همچنین داشته باشیم $f = dq_1 + r_1$ که در آن $r_1 = 0$ یا $\deg r_1 < \deg d$. در این صورت، $d(q - q_1) = r_1 - r$ و $dq + r = dq_1 + r_1$ و $d(q - q_1) \neq 0$ اگر $q - q_1 \neq 0$ آنگاه

$$\deg d + \deg(q - q_1) = \deg(r_1 - r).$$

اما چون درجه $r_1 - r$ کمتر از درجه d است، چنین چیزی ممکن نیست، و $q - q_1 = 0$. از این رو، همچنین داریم $r_1 - r = 0$. \square

تعریف. چند جمله‌ای غیر صفر d بر روی F مفروض است. اگر f در $F[x]$ باشد، قضیه قبل نشان می‌دهد که حداکثر یک چندجمله‌ای q در $F[x]$ موجود است که $f = dq$. اگر چنین q بی وجود داشته باشد، گوئیم d چندجمله‌ای f را عا د می‌کند، f بر d تقسیم (بخش) پذیر است یا f مضربی از d است. در این صورت، می‌نویسیم $q = f/d$ و q را خارج قسمت f بر d می‌نامیم.

نتیجه ۰۱. فرض کنیم f یک چندجمله‌ای بر روی هیأت F ، c عنصری از F باشد. در این صورت، f بر $x - c$ تقسیم‌پذیر است، اگر و تنها اگر $f(c) = 0$.
اثبات. بنا بر قضیه فوق $f = (x - c)q + r$ و در آن r یک چندجمله‌ای اسکالر است. طبق قضیه ۲

$$f(c) = 0q(c) + r(c) = r(c).$$

از این رو، $r = 0$ اگر و تنها اگر $f(c) = 0$. \square

تعریف. فرض کنیم F یک هیأت باشد. عنصر c از F ریشه یا صفر چندجمله‌ای مفروض f بر روی F خوانده می‌شود، هرگاه $f(c) = 0$.

نتیجه ۰۲. یک چندجمله‌ای f از درجه n بر روی هیأت F حداکثر n ریشه در F دارد.

اثبات. نتیجه برای چند جمله‌ایهای از درجه ۰ و درجه ۱ به‌طور آشکار درست است. فرض می‌کنیم که نتیجه برای چندجمله‌ایهای از درجه $1 - n$ نیز درست باشد. اگر a ریشه‌ای از f باشد، آنگاه $f = (x - a)q$ و در آن q دارای درجه $1 - n$ است. چون $f(b) = 0$ اگر و تنها اگر $a = b$ یا $q(b) = 0$ ، بنا بر فرض استقرا نتیجه می‌شود که f حداکثر n ریشه دارد. \square

خواننده توجه دارد که گام اصلی در اثبات قضیه ۳ بیدرنگ از این نتیجه به دست می‌آید.

در مبحث ریشه‌های چندگانه مقوله مشتقات صورتی چندجمله‌ایها مفید واقع می‌شود. مشتق چندجمله‌ای

$$f = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$$

عبارت است از چند جمله‌ای

$$f' = c_1 + 2c_2x + \dots + nc_nx^{n-1}.$$

از نماد $D_f = f'$ هم استفاده خواهیم کرد. مشتق‌گیری خطی است؛ بدین معنی که، D عملگری خطی روی $F[x]$ است. مشتقات صوری مراتب بالاتر $D^2 f = f''$ ، $D^3 f = f^{(3)}$ ، و غیره نیز وجود دارند.

قضیه ۵. (فرمول تیلور) فرض کنیم F هیأتی با سرشت نمای صفر، c عنصری از F و n عددی صحیح مثبت باشد. اگر چند جمله‌ای f بر روی F با $\deg f \leq n$ باشد، آنگاه

$$f = \sum_{k=0}^n \frac{(D^k f)(c)}{k!} (x-c)^k.$$

اثبات. فرمول تیلور پیامدی از قضیه دو جمله‌ای، و خطی بودن عملگرهای D ، D^2 ، \dots ، D^n است. قضیه دو جمله‌ای که با آسانی با استقرا ثابت می‌شود مدعی است که

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^{m-k} b^k.$$

در این فرمول

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{1 \times 2 \times \dots \times k}$$

همان ضریب دو جمله‌ای مشهور است که تعداد ترکیبات k شیء از m شیء را به دست می‌دهد. بنا بر قضیه دو جمله‌ای

$$\begin{aligned} x^m &= [c + (x-c)]^m \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} c^{m-k} (x-c)^k \\ &= c^m + mc^{m-1}(x-c) + \dots + (x-c)^m \end{aligned}$$

و این، بیان فرمول تیلور برای حالت $f = x^m$ است. اگر

$$f = \sum_{m=0}^n a_m x^m$$

آنگاه

$$D^k f(c) = \sum_m a_m (D^k x^m)(c)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{D^k f(c)}{k!} (x-c)^k &= \sum_k \sum_m a_m \frac{D^k x^m}{k!} (c) (x-c)^k \\ &= \sum_m a_m \sum_k \frac{D^k x^m}{k!} (c) (x-c)^k \\ &= \sum_m a_m x^m \\ &= f. \quad \square \end{aligned}$$

باید متذکر شد که به علت مستقل خطی بودن چند جمله‌ایهای $1, (x-c), \dots, (x-c)^n$ (یا تمرین در بخش ۲.۴ مقایسه شود) فرمول تیلور روش منحصر به فرد نوشتن f به صورت ترکیبی خطی از چند جمله‌ایهای $(x-c)^k$ ($0 \leq k \leq n$) را به دست می‌دهد.

در این مرحله، تذکر این مطلب، بدون ذکر جزئیات، ممکن است خالی از ارزش نباشد که با تعبیر مناسبی فرمول تیلور برای چندجمله‌ایهای بر روی هیأت‌های با سرشت نمای متناهی نیز معتبر است. اگر سرشت نمای هیأت F متناهی باشد (مجموع تعدادی متناهی 1 در F برابره شود) آنگاه ممکن است در F داشته باشیم $k! = 0$ ، که در این حالت تقسیم $(D^k f)(c)$ بر $k!$ بی‌معنی است. با این حال، تقسیم $D^k f$ بر $k!$ می‌تواند بامعنی باشد، زیرا که هر ضریب $D^k f$ حاصل ضرب عنصری است از F در عددی صحیح تقسیم‌پذیر بر $k!$. اگر این مطالب گیج‌کننده به نظر برسند، به خواننده توصیه می‌شود که توجه خود را به هیأت‌های با سرشت نمای صفر یا به‌زیر هیأت‌هایی از اعداد مختلط معطوف دارد.

اگر c ریشه‌ای از چند جمله‌ای f باشد، چندگانگی c به عنوان ریشه‌ای از f بزرگترین عدد صحیح مثبت r است به طوری که f بر $(x-c)^r$ تقسیم‌پذیر باشد. چندگانگی یک ریشه، بوضوح کوچکتر است از یا مساوی است با درجه f . در مورد چندجمله‌ایهای بر روی هیأت‌هایی با سرشت نمای صفر، چندگانگی c به عنوان ریشه‌ای از f ، در ارتباط است با تعداد مشتقاتی از f که در c صفر می‌شوند.

قضیه ۶. فرض کنید F هیأتی با سرشت نمای صفر و f یک چند جمله‌ای بر روی F با $\deg f \leq n$ باشد. در این صورت، اسکالر c ریشه‌ای از f با چندگانگی r است اگر و تنها اگر

$$(D^k f)(c) = 0, \quad 0 \leq k \leq r-1$$

$$(D^r f)(c) \neq 0.$$

اثبات. فرض کنیم r چندگانگی c به عنوان یک ریشه f باشد. در این صورت یک چندجمله‌ای g با خواص $f = (x-c)^r g$ و $g(c) \neq 0$ وجود دارد. زیرا در غیر این صورت، بنا بر نتیجه ۱ از قضیه ۴، f بر $(x-c)^{r+1}$ تقسیم‌پذیر است. با به کار بستن

فرمول تیلور بر g ,

$$f = (x-c)^r \left[\sum_{m=0}^{n-r} \frac{(D^m g)(c)}{m!} (x-c)^m \right]$$

$$= \sum_{m=0}^{n-r} \frac{(D^m g)(c)}{m!} (x-c)^{r+m}.$$

چون تنها يك راه برای نوشتن f به عنوان ترکیبی خطی از توانهای $(x-c)^k$ ($0 \leq k \leq n$) وجود دارد، داریم

$$\frac{(D^k f)(c)}{k!} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } 0 \leq k \leq r-1 \\ D^{k-r} g(c) & \text{اگر } r \leq k \leq n \end{cases}$$

بنابراین، به ازای $0 \leq k \leq r-1$ ، $D^k f(c) = 0$ و $D^k f(c) = g(c) \neq 0$ ، بعکس، اگر این شرایط برآورده شوند، از فرمول تیلور بیدرنگ نتیجه می‌شود که يك چندجمله‌ای g با شرایط $f = (x-c)^r g$ و $g(c) \neq 0$ وجود دارد. حال فرض کنیم r بزرگترین عدد صحیح مثبتی نباشد که $(x-c)^r$ چندجمله‌ای f را عا د کند. در این صورت، يك چندجمله‌ای h وجود دارد که $f = (x-c)^{r+1} h$ و لی این مطلب، بنا به نتیجه ۲ از قضیه ۱، ایجاب می‌کند که $h = (x-c)g$ ؛ لذا $g(c) = 0$ که هنوز خود يك تناقض است. □

تعریف. گیریم F يك هیأت باشد. يك ایدآل $F[x]$ زیرفضایی چون M از $F[x]$ است که به ازای هر f از $F[x]$ و هر g از M ، چندجمله‌ای fg متعلق به M باشد.

مثال ۵. اگر F يك هیأت و d يك چندجمله‌ای بر روی F باشد، مجموعه $M = dF[x]$ متشکل از همهٔ ضربهای df از d با f های دلخواه در $F[x]$ ، يك ایدآل است. زیرا، M غیرتهی است و در واقع M شامل d است؛ و اگر f و g متعلق به $F[x]$ باشند و c يك اسکالر، آنگاه

$$c(df) - dg = d(cf - g)$$

متعلق به M است و بنابراین M زیر فضا است. سرانجام M به همین نحو شامل $(df)g = d(fg)$ هم هست. ایدآل M ایدآل اصلی تولیدشده توسط d نامیده می‌شود.

مثال ۶. فرض کنیم d_1, \dots, d_n تعدادی متناهی چندجمله‌ای بر روی F باشند. در این صورت M ، مجموع زیرفضاهای $d_i F[x]$ يك زیرفضاست و نیز يك ایدآل. زیرا، فرض کنیم p متعلق به M باشد. در این صورت، چند جمله‌ایهایی مانند f_1, \dots, f_n در $F[x]$ وجود دارند که $p = d_1 f_1 + \dots + d_n f_n$. اگر g چندجمله‌ای دلخواهی بر روی F باشد، آنگاه

$$pg = d_1(f_1g) + \dots + d_n(f_n g)$$

و بنا بر این pg نیز به M تعلق دارد. از این رو، M یک ایدئال است، و می‌گوییم که M ایدئال تولید شده توسط چند جمله‌ایهای d_1, \dots, d_n می‌باشد.

مثال ۷. F را زیر هیأتی از اعداد مختلط فرض می‌کنیم و ایدئال

$$M = (x+2)F[x] + (x^2+8x+16)F[x]$$

را در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم که $M = F[x]$. زیرا، M شامل

$$x^2 + 8x + 16 - x(x+2) = 6x + 16$$

و از این رو، شامل $4 = 6(x+2) - 6(x+2) = 6x + 16 - 6(x+2)$ است. پس، چندجمله‌ای اسکالر 1 ، و در نتیجه همهٔ مضربهای آن به M تعلق دارند.

قضیهٔ ۷. اگر F یک هیأت، و M ایدئال غیر صفری از $F[x]$ باشد، چندجمله‌ای تکین یکتایی چون d در $F[x]$ یافت می‌شود که M ایدئال اصلی تولید شده توسط d باشد. اثبات. طبق فرض، M شامل یک چندجمله‌ای غیر صفر است؛ در بین همهٔ چندجمله‌ایهای غیر صفر M ، یک چندجمله‌ای d از کمترین درجه وجود دارد. می‌توان فرض کرد که d تکین است؛ زیرا، در غیر این صورت با ضرب d در یک اسکالر می‌توان آن را تکین ساخت. حال، اگر f به M تعلق داشته باشد، قضیهٔ ۴ نشان می‌دهد $f = dq + r$ با این شرط که $r = 0$ یا $\text{deg} r < \text{deg} d$. چون d در M است، $dq = f - r$ نیز به M تعلق دارند. از طرفی چون d عنصری از M و از کمترین درجه است نمی‌توانیم داشته باشیم $\text{deg} r < \text{deg} d$ ، لذا $r = 0$. پس، $M = dF[x]$. اگر g چندجمله‌ای تکین دیگری باشد که $M = gF[x]$ ، آنگاه در چندجمله‌ای غیر صفر p و q وجود دارند که $gd = gp$ و $g = dpq$ از این رو،

$$\text{deg} d = \text{deg} d + \text{deg} p + \text{deg} q.$$

بنابراین، $\text{deg} p = \text{deg} q = 0$ ، و چون d و g تکین هستند، $p = q = 1$ و در نتیجه $d = g$. \square

مشاهدهٔ این مطلب با ارزش است که در اثباتی که هم اکنون ارائه‌شد، حالت خاصی از یک واقعیت نسبتاً مفید و عمومی به شرح زیر مورد استفاده قرار گرفت: اگر p چندجمله‌ای غیر صفری از یک ایدئال M باشد و اگر چندجمله‌ای f در M بر p تقسیم پذیر نباشد، آنگاه $f = pq + r$ و «باقیماندهٔ» r نه تنها به M تعلق دارد و مخالف 0 است، بلکه درجه‌اش کوچکتر از درجهٔ p هم هست. قبلاً، در مثال ۷ نیز برای نشان دادن این که چندجمله‌ای اسکالر 1 مولد تکین ایدئال مورد نظر است، از این واقعیت استفاده کردیم. اصولاً، یافتن چندجمله‌ای تکینی که ایدئال غیر صفر مفروضی را تولید کند، همواره

امکان پذیر است. زیرا، در هر ایدآل می‌توان به‌توسط تعدادی متناهی از تقسیم‌متوالی، نهایتاً يك چندجمله‌ای با کمترین درجه به‌دست آورد.

نتیجه. اگر p_1, \dots, p_n چند جمله‌ایهایی بر روی هیأت F باشند و همه صفر نباشند، يك چندجمله‌ای تکین یکتای d در $F[x]$ وجود دارد که
 (الف) d در ایدآل تولید شده توسط p_1, \dots, p_n قرار دارد.
 (ب) d هر يك از چندجمله‌ایهای p_i را عادمی‌کند.
 هر چندجمله‌ای که در (الف) و (ب) صدق کند، لزوماً شرط زیر را نیز برمی‌آورد.
 (پ) d بر هر چندجمله‌ای که همه چندجمله‌ایهای p_1, \dots, p_n را بخش کند، بخش پذیر است.
 اثبات. گیریم d مولد تکین ایدآل

$$p_1 F[x] + \dots + p_n F[x]$$

باشد. هر عنصر این ایدآل بر d بخش پذیر است؛ لذا، همه چندجمله‌ایهای p_i بر d بخش پذیرند. حال فرض کنیم f يك چندجمله‌ای باشد که همه چندجمله‌ایهای p_1, \dots, p_n را عاد کند. در این صورت، چندجمله‌ایهایی چون g_1, \dots, g_n وجود دارند که $p_i = f g_i$ ، $1 \leq i \leq n$ بعلاوه، چون d در ایدآل

$$p_1 F[x] + \dots + p_n F[x]$$

است، چندجمله‌ایهایی چون q_1, \dots, q_n در $F[x]$ یافت می‌شوند که

$$d = p_1 q_1 + \dots + p_n q_n.$$

پس

$$d = f [g_1 q_1 + \dots + g_n q_n].$$

تا اینجا نشان داده‌ایم که d چندجمله‌ای تکینی است که در (الف)، (ب)، و (پ) صدق می‌کند. اگر d' يك چندجمله‌ای باشد که شرایط (الف) و (ب) را بر آورد، از (الف) و تعریف d نتیجه می‌شود که d' مضربی اسکالری از d است و در (پ) نیز صدق می‌کند. سرانجام، در حالتی که d' چندجمله‌ای تکینی باشد، داریم $d' = d$. □

تعریف. اگر p_1, \dots, p_n چندجمله‌ایهایی بر روی هیأت F باشند و همگی ۰ نباشند، آنگاه d ، مولد تکین ایدآل

$$p_1 F[x] + \dots + p_n F[x]$$

بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک چندجمله‌ایهای p_1, \dots, p_n نامیده می‌شود. این اصطلاح توسط لم قبل توجیه می‌شود. گوییم چندجمله‌ایهای p_1, \dots, p_n نسبت به هم اول هستند، هرگاه بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک آنها ۱ باشد، یا معادل آن، هرگاه ایدآلی را که آنها

تولید می‌کنند همه $F[x]$ باشد.

مثال ۸. گیریم C هیأت اعداد مختلط باشد. در این صورت

(الف) بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک $x+2$ و $x^2+8x+16$ برابر ۱ است (مثال ۷ را ببینید)؛

(ب) بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک $(x+i)^2(x-2)$ و $(x^2+1)(x-2)$ برابر $(x+i)(x-2)$ است. زیرا ایدآل

$$(x-2)^2(x+i)F[x] + (x-2)(x^2+1)F[x]$$

شامل

$$(x-2)^2(x+i) - (x-2)(x^2+1) = (x-2)(x+i)(i-2)$$

و بنا بر این شامل $(x-2)(x+i)$ است که تکین است و هر دو

$$(x-2)^2(x+i) \text{ و } (x-2)(x^2+1)$$

را عادی می‌کند.

مثال ۹. F را هیأت اعداد گویایمی گیریم و در $F[x]$ فرض می‌کنیم M ایدآل تولید شده توسط

$$(x-3) \text{ و } (x+2)^2(x-3), (x-1)(x+2)^2$$

باشد. در این صورت، M شامل

$$\frac{1}{2}(x+2)^2[(x-1) - (x-3)] = (x+2)^2$$

است و چون

$$(x+2)^2 = (x-3)(x+7) - 17$$

M شامل چندجمله‌ای اسکالر ۱ هم هست. از این رو، $M = F[x]$ و چندجمله‌ایهای

$$(x-3) \text{ و } (x+2)^2(x-3), (x-1)(x+2)^2$$

نسبت به هم اول هستند.

تمرین

۰۱. فرض کنید Q هیأت اعداد گویا باشد. تعیین کنید کدامیک از زیرمجموعه‌های زیر از $Q[x]$ ایدآل است. هر گاه مجموعه داده شده ایدآل باشد، مولد تکین آن را بیابید. (الف) همه f های از درجه زوج؛

- (ب) همه f های از درجه بزرگتر از یا مساوی با ۵؛
 (پ) همه f هایی که $f(0) = 0$ ؛
 (ت) همه f هایی که $f(2) = f(4) = 0$ ؛
 (ث) همه f های واقع در برد عملگر خطی T تعریف شده توسط

$$T\left(\sum_{i=0}^n c_i x^i\right) = \sum_{i=0}^n \frac{c_i}{i+1} x^{i+1}.$$

۲. مطلوب است بزرگترین مقسوم علیه مشترك هر يك از جفت چندجمله‌ایهای زیر:

(الف) $x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$ و $2x^5 - x^3 - 3x^2 - 6x + 4$ ؛

(ب) $x^3 + 2x^2 + 3x + 6$ و $3x^4 + 8x^2 - 3$ ؛

(پ) $x^3 + 6x^2 + 7x + 1$ و $x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3$ ؛

۳. اگر A ماتریسی $n \times n$ بر روی هیأت F باشد، نشان دهید مجموعه همه چندجمله‌ایهای در $F[x]$ با شرط $f(A) = 0$ يك ایدال است.

۴. فرض کنید F زیرهیأتی از اعداد مختلط باشد و

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

مولد تکین ایدال متشکل از همه چندجمله‌ایهای f در $F[x]$ را که $f(A) = 0$ بیابید.

۵. اگر F يك هیأت باشد، نشان دهید اشتراك هر تعداد دلخواه از ایدالهای $F[x]$ خود يك ایدال است.

۶. گیریم F يك هیأت باشد. نشان دهید ایدال تولید شده توسط تعدادی متناهی چندجمله‌ای از $F[x]$ چون f_1, \dots, f_n عبارت است از اشتراك همه ایدالهای شامل آنها.

۷. فرض کنید K زیرهیأتی از يك هیأت F و f و g چندجمله‌ایهایی در $K[x]$ باشند. اگر M_f ایدال تولید شده توسط f و g در $K[x]$ ، و M_g ایدال تولید شده توسط آنها در $F[x]$ باشد، نشان دهید M_f و M_g دارای مولدهای تکین مساوی هستند.

۵.۴. تجزیه چندجمله‌ایها به سازه‌های اول

در این بخش اثبات می‌کنیم که هر چندجمله‌ای بر روی هیأت F را می‌توان به صورت حاصل ضربی از چندجمله‌ایهای «اول» نوشت. این تجزیه به سازه‌ها، ابزار مؤثری برای

یافتن بزرگترین مقسوم علیه مشترك هر تعداد منتهای از چندجمله‌ایها، و بخصوص، وسیله مؤثری برای اتخاذ تصمیم در مورد اینکه چه وقت این چندجمله‌ایها نسبت به هم اول هستند، فراهم می‌آورد.

تعریف. فرض کنیم F يك هیأت باشد. چندجمله‌ای f در $F[x]$ را تحویل پذیر بر روی F می‌نامیم، هرگاه چندجمله‌ایهای g و h از درجه بزرگتر از g مساوی با h در $F[x]$ وجود داشته باشند به طوری که $f = gh$ ؛ وگرنه، f را تحویل ناپذیر بر روی F می‌نامیم. هر چندجمله‌ای تحویل ناپذیر غیر اسکالری بر روی F يك چندجمله‌ای اول بر روی F نام دارد و گاهی يك اول در $F[x]$ نیز نامیده می‌شود.

مثال ۱۰. چندجمله‌ای $x^2 + 1$ بر روی هیأت C از اعداد مختلط تحویل پذیر است.

زیرا

$$x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$$

و چندجمله‌ایهای $x+i$ و $x-i$ به $C[x]$ تعلق دارند. از طرف دیگر، $x^2 + 1$ بر روی هیأت اعداد حقیقی R تحویل ناپذیر است. چرا که اگر

$$x^2 + 1 = (ax+b)(a'x+b')$$

و a, a', b, b' در R باشند، آنگاه

$$aa' = 1, \quad ab' + ba' = 0, \quad bb' = 1.$$

این روابط ایجاب می‌کنند که $a^2 + b^2 = 0$ ، که این خود با حقیقی بودن اعداد a و b غیر ممکن است، مگر آنکه $a = b = 0$.

قضیه ۸. گیریم p, f ، و g چندجمله‌ایهایی بر روی هیأت F باشند. فرض کنیم p چندجمله‌ای اولی باشد که حاصل ضرب $f g$ را عاد کند. در این صورت، p یا f را عاد می‌کند یا g را.

اثبات. اگر فرض کنیم p چندجمله‌ای اول تکین است، از عمومیت اثبات نکاسته‌ایم. در این صورت، این واقعیت که p اول است، چیزی جز این نمی‌گوید که 1 و p تنها مقسوم علیه‌های تکین p هستند. گیریم d بزرگترین مقسوم علیه مشترك f و p است. در این صورت، یا $d = 1$ یا $d = p$ ؛ چرا که d چندجمله‌ای تکین است که p را تقسیم می‌کند. اگر $d = p$ ، آنگاه p چندجمله‌ای f را تقسیم می‌کند و کار به انجام می‌رسد. از این رو، فرض می‌کنیم $d = 1$ ؛ یعنی، فرض می‌کنیم f و p نسبت به هم اول باشند. ثابت خواهیم کرد که p چندجمله‌ای f را عاد می‌کند. چون بزرگترین مقسوم علیه مشترك f و p يك است، چندجمله‌ایهایی چون f و p وجود دارند که $p = pf + f$. با ضرب این رابطه در g داریم

$$g = f_0 f g + p_0 p g \\ = (f g) f_0 + p(p_0 g).$$

چون p ، چندجمله‌ای $f g$ را عادی می‌کند، $(f g) f_0$ و نیز مسلماً $p(p_0 g)$ را نیز تقسیم می‌کند. بدین سان g بر p بخش پذیر است. \square

نتیجه. اگر p یک اول باشد و حاصل ضرب $f_1 \dots f_n$ را عادی کند، آنگاه p یکی از چندجمله‌ایهای f_1, \dots, f_n را عادی می‌کند.

اثبات. اثبات به استقرای صورت می‌گیرد. وقتی $n = 2$ ، نتیجه چیزی جز صورت قضیه ۶ نیست. فرض کنیم نتیجه را برای $n = k$ اثبات کرده باشیم و p حاصل ضرب $f_1 \dots f_{k+1}$ از $(k+1)$ چندجمله‌ای را تقسیم کند. چون p چندجمله‌ای $(f_1 \dots f_k) f_{k+1}$ را تقسیم می‌کند. یا p f_{k+1} را عادی می‌کند یا $f_1 \dots f_k$ را. بنا بر فرض استقرا، اگر p چندجمله‌ای $f_1 \dots f_k$ را عادی کند، آنگاه زبی هست که $1 \leq j \leq k$ و p چندجمله‌ای f_j را عادی می‌کند. بدین لحاظ می‌بینیم که در هر حالت، p باید یکی از f_j ها، $1 \leq j \leq k+1$ را عادی کند. \square

قضیه ۹. اگر F یک هیأت باشد، هر چندجمله‌ای تکین غیر اسکالری در $F[x]$ را می‌توان به یک، و بدون احتساب ترتیب، تنها به یک طریق به صورت حاصل ضربی از اولهای تکین در $F[x]$ تجزیه کرد.

اثبات. فرض کنیم f چندجمله‌ای غیر اسکالری تکینی بر روی F باشد. هرگاه $\deg f = 1$ چیزی برای اثبات نمی‌ماند؛ زیرا چندجمله‌ایهای درجه ۱ خود تحویل‌ناپذیرند. فرض کنیم f دارای درجه $n > 1$ باشد. بنا بر فرض استقرا می‌توانیم فرض کنیم که قضیه برای همه چندجمله‌ایهای تکین غیر اسکالری از درجه کمتر از n درست است. اگر f تحویل‌ناپذیر باشد، خود هم اکنون به صورت حاصل ضربی از اولهای تکین هست. در غیر این صورت، $f = gh$ که در آن g و h دو چندجمله‌ای تکین غیر اسکالری از درجه کمتر از n هستند. پس، g و h می‌توانند به صورت حاصل ضربهایی از اولهای تکین در $F[x]$ تجزیه شوند، و از اینجا به همین نحو f . حال فرض کنیم

$$f = p_1 \dots p_m = q_1 \dots q_n$$

که در آن $p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_n$ اولهای تکینی از $F[x]$ هستند. در این صورت، p_m حاصل ضرب $q_1 \dots q_n$ را تقسیم می‌کند. بنا بر نتیجه قبل، p_m باید یکی از q_i ها را عادی کند. چون q_i و p_m هر دو چندجمله‌ایهای اول تکینی هستند، این بدان معنی است که

$$q_i = p_m. \quad (۱۶-۴)$$

از (۱۶-۴) می‌بینیم که اگر $m = 1$ یا $n = 1$ ، داریم $m = n = 1$ ؛ زیرا

$$\deg f = \sum_{i=1}^m \deg P_i = \sum_{j=1}^n \deg q_j$$

در این حالت چیزی بیشتر برای اثبات نمی‌ماند، لذا فرض می‌کنیم $m > 1$ و $n > 1$. پس از ترتیب بندی مجدد q ها می‌توانیم فرض کنیم که $p_m = q_n$ و

$$P_1 \cdots P_{m-1} P_m = q_1 \cdots q_{n-1} P_m.$$

حال بنا به نتیجه ۲ از قضیه ۱ داریم

$$P_1 \cdots P_{m-1} = q_1 \cdots q_{n-1}.$$

چون درجه چندجمله‌ای $P_1 \cdots P_m$ کمتر از n است، فرض استقرا به کار می‌رود و نشان می‌دهد که دنباله q_1, \dots, q_{n-1} حداکثر ترتیب بندی جدیدی از دنباله P_1, \dots, P_{m-1} است. این مطلب همراه با (۴-۱۶) نشان می‌دهد که تجزیه f به صورت حاصل ضربی از اولهای تکین، بدون توجه به ترتیب سازه‌ها، یکتاست. \square

در تجزیه چندجمله‌ای تکین غیر اسکالری f مفروض در بالا، بعضی از سازه‌های اول تکین ممکن است تکرار شوند. اگر p_1, p_2, \dots, p_r ، اولهای تکین متمایزی باشند که در این تجزیه f ظاهر می‌شوند، آنگاه

$$f = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r} \quad (17-4)$$

که در آن نمای n_i تعداد دفعاتی است که سازه اول p_i در تجزیه ظاهر می‌شود، این تجزیه نیز مسلماً یکتاست، و تجزیه اولیه f نامیده می‌شود. بسادگی می‌توان نشان داد که هر مقسوم-علیه تکین f به صورت

$$p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r}, \quad 0 \leq m_i \leq n_i \quad (18-4)$$

است. از (۴-۱۸) نتیجه می‌شود که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک تعدادی متناهی چندجمله‌ای تکین غیر اسکالری f_1, \dots, f_r از ترکیب همه سازه‌های اول تکینی به دست می‌آید که به طور همزمان در تجزیه‌های f_1, \dots, f_r ظاهر می‌شوند. نمایی که برای هر یک از سازه‌های اول فوق‌الذکر باید در نظر گرفته شود، بزرگترین نمایی است که آن سازه به توان این نما، سازه‌ای از همه f_i ها باشد. هرگاه هیچ توانی (غیر صفر) از چندجمله‌ایهای اول، سازه‌ای از همه f_i ها نباشد، این چندجمله‌ایها نسبت به هم اول هستند.

مثال ۱۱. فرض کنیم هیأت F و عناصر متمایز a, b, c از F داده شده باشند. در این صورت، چندجمله‌ایهای $x-a, x-b, x-c$ و اولهای تکین متمایزی از $F[x]$ هستند. اگر m, n ، و s اعداد صحیح مثبتی باشند، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک چندجمله‌ایهای

$$(x-a)^m (x-c)^s \quad \text{و} \quad (x-b)^n (x-c)^s$$

است، حال آنکه سه چندجمله‌ای

$$(x-b)^n(x-c)^s, \quad (x-a)^m(x-c)^s, \quad (x-a)^m(x-b)^n$$

نسبت به هم اول هستند.

قضیه ۱۰. فرض کنیم f یک چندجمله‌ای تکین غیراسکالری بر روی هیأت F و

$$f = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$$

تجزیه f به‌سازدهای اول باشد. به‌ازای هر j ، $1 \leq j \leq k$ ، گیریم

$$f_j = \frac{f}{p_j^{n_j}} = \prod_{i \neq j} p_i^{n_i}.$$

در این صورت f_1, \dots, f_k نسبت به هم اول هستند.

اثبات. اثبات (آسان) این قضیه را به‌خواننده واگذار می‌کنیم. این قضیه را بیشتر

بدین منظور بیان کردیم که بعدها بتوانیم به آن رجوع کنیم. \square

قضیه ۱۱. فرض کنیم چندجمله‌ای f بر روی هیأت F و مشتق آن f' داده شده

باشند. در این صورت f حاصل‌ضربی از چندجمله‌ایهای تحویل‌ناپذیر متمایز بر روی F است اگر و تنها اگر f و f' نسبت به هم اول باشند.

اثبات. فرض کنیم در تجزیه f به‌سازدهای اول بر روی هیأت F ، چندجمله‌ای اول (غیراسکالری) p تکرار بشود. در این صورت، به‌ازای عنصری چون h از $F[x]$ ، $f = p^2 h$ آنگاه

$$f' = p^2 h' + 2pp'h$$

و p مقسوم‌علیه f' نیز هست. پس، f و f' نسبت به هم اول نیستند.

حال فرض کنیم $f = p_1 \cdots p_k$ و p_1, \dots, p_k چندجمله‌ایهای تحویل‌ناپذیر

غیراسکالری متمایز بر روی F باشند. اگر $f_j = f/p_j$ ، آنگاه

$$f' = p_1' f_1 + p_2' f_2 + \cdots + p_k' f_k.$$

گیریم p چندجمله‌ای اولی باشد که هم f و هم f' را عادی می‌کند. در این صورت i بی‌هست که $p = p_i$. حال به‌ازای $i \neq j$ ، p_j چندجمله‌ای f_j را عادی می‌کند، و چون p_j چندجمله‌ای

$$f' = \sum_{j=1}^k p_j' f_j$$

را هم تقسیم می‌کند، می‌بینیم که p_i باید $p_i' f_i$ را نیز عادی کند. بنابراین p_i یا f_i را عادی می‌کند یا p_i' را. ولی p_i چندجمله‌ای f_i را عادی نمی‌کند، چرا که p_1, \dots, p_k از هم متمایزند. لذا، p_i چندجمله‌ای p_i' را عادی می‌کند. این هم ممکن نیست، زیرا درجه p_i' یکی کمتر از درجه p_i است. پس، نتیجه می‌گیریم که هیچ اولی هم f و هم f' را عادی نمی‌کند، یا آنکه f و f'

نسبت به هم اول هستند. \square

تعریف. هیأت F بسته جبری نامیده می‌شود، هرگاه هر چندجمله‌ای اول بر روی F دارای درجه ۱ باشد.

اینکه می‌گوییم F بسته جبری است بدین معنی که هر چندجمله‌ای تکین تحویل‌ناپذیر غیر اسکالری بر روی F به صورت $(x-c)$ است. قبلاً دیده‌ایم که هر چندجمله‌ای از این نوع بر روی هر هیأت F تحویل‌ناپذیر است. بدین‌سان، یک تعریف هم‌ارز برای هیأت بسته جبری عبارت از این است: هیأتی چون F که هر چندجمله‌ای غیر اسکالری f در $F[x]$ بتواند به صورت

$$f = c(x-c_1)^{n_1} \cdots (x-c_k)^{n_k}$$

که در آن c یک اسکالر، c_1, \dots, c_k عناصر متمایزی از F و n_1, \dots, n_k اعداد صحیح مثبتی هستند، بیان شود. یک فرمول‌بندی دیگر هم این است که اگر f یک چندجمله‌ای غیر اسکالری بر روی F باشد، آنگاه عنصری چون c در F وجود دارد که $f(c) = 0$.

هیأت R از اعداد حقیقی بسته جبری نیست؛ زیرا چندجمله‌ای (x^2+1) بر روی R که از درجه ۱ نیست تحویل‌ناپذیر است و با به این علت که عددی حقیقی مانند c وجود ندارد که $x^2+1=0$. قضیهٔ موسوم به قضیهٔ بنیادی جبر بیان می‌کند که هیأت C از اعداد مختلط بسته جبری است. اگرچه این قضیه را در این کتاب بعداً هم به کار می‌بریم ولی آن را اثبات نمی‌کنیم. اثبات این قضیه از یک سو به علت محدودیت زمانی، و از سوی دیگر به این خاطر که به‌خاصیتی «غیر جبری» از اعداد حقیقی وابسته است، کنار گذاشته شده است. برای دیدن اثباتی از این قضیه، خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند به کتاب شرایر و اسپرنر^۱ مندرج در فهرست مراجع رجوع کند.

قضیهٔ بنیادی جبر همچنین روشن می‌کند که چه امکاناتی برای تجزیهٔ چندجمله‌ایهای با ضرایب حقیقی به‌سازهای اول وجود دارد. اگر چندجمله‌ای f با ضرایب حقیقی باشد و c ریشه‌ای مختلط از f ، آنگاه \bar{c} ، مزدوج مختلط c ، نیز یک ریشهٔ f است. بنابراین، ریشه‌های مختلطی که حقیقی نیستند باید به صورت جفت‌های مزدوج ظاهر بشوند. در نتیجه مجموعهٔ همهٔ ریشه‌ها به صورت $\{t_1, \dots, t_k, c_1, \bar{c}_1, \dots, c_r, \bar{c}_r\}$ است که در آن t_1, \dots, t_k اعداد حقیقی c_1, \dots, c_r اعدادی مختلط و غیر حقیقی هستند. پس، f به صورت

$$f = c(x-t_1) \cdots (x-t_k) p_1 \cdots p_r$$

تجزیه می‌شود، که در آن p_i چندجمله‌ای درجهٔ دوم

$$p_i = (x-c_i)(x-\bar{c}_i)$$

است. البته ضرایب این چندجمله‌ایهای p_i حقیقی هستند. نتیجه می‌گیریم که درجهٔ هر چند

جمله‌ای تحویل‌ناپذیر بر روی هیأت اعداد حقیقی ۱ یا ۲ است، و هر چندجمله‌ای بر روی R حاصل‌ضربی است از چند سازه خطی، که از ریشه‌های حقیقی f به‌دست می‌آیند، در چند چندجمله‌ای درجهٔ دوم تحویل‌ناپذیر.

تمرین

۰۱. فرض کنید چندجمله‌ای تکین p بر روی هیأت F و چندجمله‌ایهای نسبت به هم اول f و g بر روی F داده شده باشند. ثابت کنید بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک Pf و pg برابر p است.

۰۲. با قبول قضیهٔ بنیادی جبر، مطلب زیر را اثبات کنید. اگر f و g چندجمله‌ایهایی بر روی هیأت اعداد مختلط باشند، آنگاه f و g نسبت به هم اولند اگر و تنها اگر f و g ریشه مشترکی نداشته باشند.

۰۳. فرض کنید D عملگر مشتق‌گیری روی فضای چندجمله‌ایهای بر روی هیأت اعداد مختلط و f يك چندجمله‌ای تکین بر روی همین هیأت باشد. ثابت کنید تساوی

$$f = (x - c_1) \cdots (x - c_k)$$

که در آن c_1, \dots, c_k اعداد مختلط متمایزی هستند برقرار است اگر و تنها اگر Df نسبت به هم اول باشند. به‌بیان دیگر، f دارای ریشهٔ تکراری نیست اگر و تنها اگر f و Df ریشهٔ مشترکی نداشته باشند. (قضیهٔ بنیادی جبر را دانسته فرض کنید.)

۰۴. تعمیم زیر از فرمول تیلور را ثابت کنید: فرض کنید f, g, h چندجمله‌ایهایی بر روی زیرهیأتی از اعداد مختلط باشند به‌طوری که $\deg f \leq n$. در این صورت

$$f(g) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(h)(g-h)^k.$$

(در اینجا $f(g)$ به‌معنی «ترکیب f با g » است.)

در بقیهٔ تمرینها به‌تعریف زیر نیازمندیم: اگر f, g, p چندجمله‌ایهایی بر روی هیأت F باشند و $p \neq 0$ ، گوئیم f همنهشت با g به پیمانۀ p است، هر گاه $(f-g)$ بر p بخش‌پذیر باشد. هر گاه f همنهشت با g به پیمانۀ p باشد، می‌نویسیم

$$f \equiv g \pmod{p}.$$

۰۵. به‌ازای هر چندجمله‌ای غیرصفر p ، ثابت کنید همنهشتی به پیمانۀ p رابطه‌ای هم‌ارزی است؛ یعنی،

$$f \equiv g \pmod{p} \text{ است: } f \equiv f \pmod{p}.$$

(ب) مقارن است: اگر $f \equiv g \pmod{p}$ ، آنگاه $g \equiv f \pmod{p}$.

(پ) متعدی است: اگر $f \equiv g \pmod{p}$ و $g \equiv h \pmod{p}$ ، آنگاه $f \equiv h \pmod{p}$.

۰۶. فرض کنید $f \equiv g \pmod{p}$ و $f_1 \equiv g_1 \pmod{p}$.

(الف) ثابت کنید $f + f_1 \equiv g + g_1 \pmod{p}$.

(ب) ثابت کنید $f f_1 \equiv g g_1 \pmod{p}$.

۰۷. از تمرین ۰۶ برای اثبات مطلب زیر استفاده کنید اگر f, g, h و p چندجمله‌ایهایی بر روی هیأت F باشند و $p \neq 0$ و اگر همچنین $f \equiv g \pmod{p}$ ، آنگاه

$$h(f) \equiv h(g) \pmod{p}$$

۰۸. اگر p چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیری باشد و $f g \equiv 0 \pmod{p}$ ، ثابت کنید یا $f \equiv 0 \pmod{p}$ یا

$g \equiv 0 \pmod{p}$. اگر p تحویل‌پذیر نباشد، مثالی بیاورید که نشان دهد مطلب فوق

نادرست است.



دترمینان

۱.۵. حلقه‌های جابجایی

در این فصل، به اثبات احکام اصلی دترمینانهای ماتریسهای مربعی می‌پردازیم. این امر را نه تنها برای ماتریسهای بر روی هیأتها، بلکه همچنین برای ماتریسهای که درایه‌های آنها «اسکالر»هایی از نوع عمومی‌تری هستند، انجام می‌دهیم. این تعمیم دو دلیل دارد. اول آنکه، در فصل بعد در موارد معینی ناگزیر از بحث دربارهٔ دترمینانهای ماتریسهای با درایه‌های چندجمله‌ای هستیم. دوم آنکه، در آنچه که دربارهٔ دترمینانها خواهیم آورد، یکی از اصول موضوع هیأتها، یعنی اصلی که وجود معکوس ضربی هر عنصر غیر صفر را تضمین می‌کند، هیچ گونه نقشی ندارد. به این دلایل، مناسب است که نظریهٔ دترمینانها را برای ماتریسهای که درایه‌های آنها عناصری از يك حلقهٔ جابجایی با عنصر همانی باشند، تعمیم دهیم.

تعریف. يك حلقه عبارت است از يك مجموعهٔ K همراه با دو عمل $(x, y) \rightarrow x + y$ و $(x, y) \rightarrow xy$ که شرایط زیر را برآوردند:

(الف) K تحت عمل $(x, y) \rightarrow x + y$ يك گروه جابجایی است (K تحت جمع يك گروه جابجایی است)؛

(ب) $(xy)z = x(yz)$ (ضرب شرکت پذیر است)؛

(پ) $x(y+z) = xy+xz$ و $(y+z)x = yx+zx$ (دو قانون بخش پذیری)

برقراردند).

اگر به ازای هر x و y از K داشته باشیم $xy = yx$ ، گوییم حلقه K جابجایی است. اگر عنصری چون 1 در K یافت شود به طوری که به ازای هر x ، $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$ ، گوییم K حلقه‌ای با عنصر همانی است و 1 را عنصر همانی K می‌نامیم.

در اینجا حلقه‌های جابجایی با عنصر همانی مورد نظر ما هستند. چنین حلقه‌ای را می‌توان به‌طور خلاصه به‌صورت مجموعه‌ای چون K همراه با دو عمل توصیف کرد که همه اصول موضوع هیأت را که در فصل ۱ ارائه شد ارضا می‌کنند مگر احتمالاً اصل موضوع (A) و شرط $1 \neq 0$ را. بدین سان، یک هیأت عبارت است از حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی غیر صفر که به هر x غیر صفر، عنصر x^{-1} با خاصیت $xx^{-1} = 1$ متناظر شود. مجموعه اعداد صحیح همراه با اعمال معمولی، یک حلقه جابجایی با عنصر همانی است، اما یک هیأت نیست. مجموعه همه چندجمله‌ای‌های بر روی یک هیأت همراه با جمع و ضربی که برای چندجمله‌ایها تعریف کردیم حلقه جابجایی دیگری با عنصر همانی است.

اگر K حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی باشد، هر ماتریس $m \times n$ بر روی K را به‌صورت تابعی چون A از مجموعه جفت‌های (i, j) از اعداد صحیح $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$ در K تعریف می‌کنیم. طبق معمول چنین ماتریسی را با آرایه‌ای مستطیلی که دارای m سطر و n ستون باشد، نمایش می‌دهیم. مجموع و حاصل ضرب ماتریسهای بر روی K ، به همان نحو که برای ماتریسهای بر روی هیأتها تعریف شدند، تعریف می‌شوند:

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

$$(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$$

جمع آنگاه تعریف می‌شود که A و B دارای تعداد سطرها و نیز تعداد ستونهای مساوی باشند، و ضرب هنگامی تعریف می‌شود که تعداد ستونهای A برابر با تعداد سطرهای B باشد. خواص جبری اساسی این اعمال در اینجا هم معتبرند. مثلاً

$$(AB)C = A(BC), A(B+C) = AB+AC, \text{ و غیره.}$$

همچون مورد هیأتها، عناصر K را هم اسکالر می‌نامیم. با این قرار، ترکیب خطی سطرها یا ستونهای هر ماتریس را می‌توان همچون گذشته، تعریف کرد. به‌طور اجمال، به استثنای نتایجی که به «تقسیم» پذیری در K مربوط اند، کلیه احکامی را که قبلاً برای ماتریسهای بر روی هیأتها به‌دست آوردیم برای ماتریسهای بر روی K نیز معتبرند.

۲۰۵. تابع دترمینان

فرض کنیم K یک حلقه جابجایی با عنصر همانی باشد. می‌خواهیم به هر ماتریس $n \times n$ (مربعی) بر روی K ، اسکالری (عنصری از K) که به‌عنوان دترمینان آن ماتریس شناخته

می‌شود، اختصاص دهیم. این امکان وجود دارد که دترمینان ماتریس مربعی A را تنها با نوشتن فرمولی برحسب درایه‌های A تعریف کنیم. در این صورت، خواص گوناگون دترمینان را می‌توان از این فرمول به‌دست آورد. اما، چنین فرمولی نسبتاً پیچیده است، و ما برای دست‌یابی به‌مزیتی تکنیکی به‌صورت زیر عمل می‌کنیم. یک «تابع دترمینان» روی $K^{n \times n}$ را چنان تابعی تعریف می‌کنیم که به‌هر ماتریس $n \times n$ بر روی K اسکالری را تخصیص بدهد و دارای خواص ویژه‌ی زیر باشد: این تابع، به‌عنوان تابعی از هر یک از سطرها یا ماتریس، خطی باشد؛ مقدار آن روی هر ماتریس با دو سطر متساوی برابر صفر باشد؛ و مقدار آن روی ماتریس همانی $n \times n$ برابر با ۱ باشد. ثابت می‌کنیم که چنین تابعی وجود دارد و سپس یکتا بودن آن را اثبات می‌کنیم؛ یعنی، ثابت می‌کنیم که دقیقاً یک تابع با این ویژگیها وجود دارد. حین اثبات یکتایی، فرمولی صریح برای دترمینان و نیز چندین خاصیت مفید آن را به‌دست خواهیم آورد.

این بخش به‌تعریف «تابع دترمینان» و به‌اثبات وجود حداقل یک تابع دترمینان اختصاص دارد.

تعریف. فرض کنیم K حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی، n عددی صحیح مثبت، و D تابعی باشد که به‌هر ماتریس $n \times n$ مانند A بر روی K اسکالر $D(A)$ از K را متناظر سازد، گوئیم D تابعی n خطی است هرگاه به‌ازای هر i ، $1 \leq i \leq n$ ، D تابعی خطی از i مین سطر با ثابت نگاه داشتن $(n-1)$ سطر دیگر باشد.

این تعریف نیازمند چند توضیح است. اگر D تابعی از $K^{n \times n}$ در K و $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ سطرها یا ماتریس A باشند، می‌نویسیم

$$D(A) = D(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

یعنی، D را به‌عنوان تابعی از سطرها یا A نیز به‌شمار می‌آوریم. در این صورت، این بیان که D تابعی n خطی است، بدین معنی است که

$$D(\alpha_1, \dots, c\alpha_i + \alpha'_i, \dots, \alpha_n) = cD(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) + D(\alpha_1, \dots, \alpha'_i, \dots, \alpha_n). \quad (1-5)$$

اگر همه‌ی سطرها به‌جز سطر i م را ثابت نگاه‌داریم و D را به‌عنوان تابعی از سطر i م محسوب کنیم، معمولاً مناسبتر است که به‌جای $D(A)$ بنویسیم $D(\alpha_i)$. بدین صورت، می‌توانیم (۱-۵) را به‌صورت

$$D(c\alpha_i + \alpha'_i) = cD(\alpha_i) + D(\alpha'_i),$$

به‌شرطی که معنی آن روشن باشد، خلاصه کنیم.

مثال ۱. فرض کنیم اعداد صحیح مثبت k_1, \dots, k_n ، $1 \leq k_i \leq n$ ، و عنصر a از

K مفروض باشند. به ازای هر ماتریس $n \times n$ مانند A بر روی K ، تعریف می‌کنیم

$$D(A) = \alpha A(1, k_1) \cdots \alpha A(n, k_n). \quad (2-5)$$

در این صورت تابع D تعریف شده توسط (2-5) تابعی n خطی است. زیرا، اگر D را به عنوان تابعی از سطر i م ماتریس A با ثابت نگاهداشتن سطرهای دیگر بینگاریم، می‌توانیم بنویسیم

$$D(\alpha_i) = A(i, k_i)b.$$

در اینجا b عنصر ثابتی از K است. گیریم $\alpha'_i = (A'_{i1}, \dots, A'_{in})$. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} D(c\alpha_i + \alpha'_i) &= [cA(i, k_i) + A'(i, k_i)]b \\ &= cD(\alpha_i) + D(\alpha'_i). \end{aligned}$$

پس، D تابعی خطی از هر یک از سطرهای A است. تابع n خطی ویژه‌ای از این نوع، تابع

$$D(A) = A_{11}A_{22} \cdots A_{nn}$$

است. به عبارت دیگر، «حاصل ضرب درایه‌های قطری» تابعی n خطی روی $K^{n \times n}$ است.

مثال ۰۳. ذیلاً همهٔ توابع 2 خطی روی ماتریسهای 2×2 بر روی K رامی‌باییم. فرض کنیم D چنین تابعی باشد. اگر سطرهای ماتریس همانی 2×2 را با ϵ_1 و ϵ_2 نشان دهیم، داریم

$$D(A) = D(A_{11}\epsilon_1 + A_{12}\epsilon_2, A_{21}\epsilon_1 + A_{22}\epsilon_2).$$

با استفاده از این حکم که D تابعی 2 خطی است مطابق (1-5) داریم

$$\begin{aligned} D(A) &= A_{11}D(\epsilon_1, A_{21}\epsilon_1 + A_{22}\epsilon_2) + A_{12}D(\epsilon_2, A_{21}\epsilon_1 + A_{22}\epsilon_2) \\ &= A_{11}A_{21}D(\epsilon_1, \epsilon_1) + A_{11}A_{22}D(\epsilon_1, \epsilon_2) + A_{12}A_{21}D(\epsilon_2, \epsilon_1) \\ &\quad + A_{12}A_{22}D(\epsilon_2, \epsilon_2). \end{aligned}$$

از این رو، D توسط چهار اسکالر

$$D(\epsilon_2, \epsilon_2) \text{ و } D(\epsilon_2, \epsilon_1), D(\epsilon_1, \epsilon_2), D(\epsilon_1, \epsilon_1)$$

کاملاً تعیین می‌شود. خواننده باید باسانی بتواند نشان دهد که اگر a, b, c ، و d چهار اسکالر دلخواه در K باشند و تعریف کنیم

$$D(A) = A_{11}A_{21}a + A_{11}A_{22}b + A_{12}A_{21}c + A_{12}A_{22}d$$

آنگاه D تابعی 2 خطی روی ماتریسهای 2×2 بر روی K است و

$$\begin{aligned} D(\epsilon_1, \epsilon_1) &= a, & D(\epsilon_1, \epsilon_2) &= b, \\ D(\epsilon_2, \epsilon_1) &= c, & D(\epsilon_2, \epsilon_2) &= d. \end{aligned}$$

لم. هر ترکیب خطی از توابع n خطی، خود n خطی است. اثبات. کافی است ثابت کنیم که ترکیبی خطی از دو تابع n خطی تابعی است n خطی. گیریم D و E توابعی n خطی باشند. اگر a و b به K تعلق داشته باشند، بدیهی است که ترکیب خطی $aD + bE$ توسط

$$(aD + bE)(A) = aD(A) + bE(A)$$

تعریف می‌شود. از این‌رو، اگر همه سطرها، به‌جز سطر i ، را ثابت نگاهداریم

$$\begin{aligned} (aD + bE)(c\alpha_i + \alpha'_i) &= aD(c\alpha_i + \alpha'_i) + bE(c\alpha_i + \alpha'_i) \\ &= acD(\alpha_i) + aD(\alpha'_i) + bcE(\alpha_i) + bE(\alpha'_i) \\ &= c(aD + bE)(\alpha_i) + (aD + bE)(\alpha'_i). \quad \square \end{aligned}$$

اگر K يك هیأت و V مجموعه ماتریسهای $n \times n$ بر روی K باشند، لم بالا بیان می‌کند که مجموعه توابع n خطی روی V زیرفضایی از فضای همه توابع از V در K است.

مثال ۳. فرض کنیم تابع D روی ماتریسهای 2×2 بر روی K توسط

$$D(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \quad (3-5)$$

تعریف شده باشد. در این صورت، D مجموع دو تابع از نوع توصیف شده در مثال ۱ است:

$$D = D_1 + D_2$$

$$D_1(A) = A_{11}A_{22}$$

$$D_2(A) = -A_{12}A_{21}.$$

بنابراین D تابعی 2 خطی است. خواننده‌ای که مختصر تجربه‌ای با دترمینانها داشته باشد این مطلب را شگفت‌آور نخواهد یافت؛ زیرا، (۳-۵) چپ‌سوی جز تعریف معمولی دترمینان يك ماتریس 2×2 نیست. بدیهی است تابع D که هم‌اکنون تعریف شد نمونه توابع 2 خطی نیست. این تابع دارای خواص ویژه بسیاری است که اینک به‌ذکر برخی از آنها می‌پردازیم. اول، اگر I ماتریس همانی 2×2 باشد، آنگاه $D(I) = 1$ ؛ یعنی، $D(\epsilon_1, \epsilon_2) = 1$ دوم، اگر دو سطر A برابر باشند، داریم

$$D(A) = A_{11}A_{12} - A_{12}A_{11} = 0.$$

سوم، اگر A' ماتریسی باشد که از تعویض سطرهای ماتریس A 2×2 حاصل شده باشد، آنگاه $D(A') = -D(A)$ ؛ زیرا

$$\begin{aligned} D(A') &= A'_{11}A'_{22} - A'_{12}A'_{21} \\ &= A_{21}A_{12} - A_{22}A_{11} \\ &= -D(A). \end{aligned}$$

تعریف. تابع n خطی D را متناوب گوئیم، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

(الف) وقتی دو سطر A متساوی باشند، $D(A) = 0$.

(ب) اگر ماتریس A' از تعویض دو سطر A حاصل شده باشد، آنگاه

$$D(A') = -D(A)$$

ذیلاً ثابت می‌کنیم هر تابع n خطی D که شرط (الف) را برآورد، خود به خود شرط (ب) را نیز برمی‌آورد. با این وجود، برای راحتی است که در تعریف تابع n خطی متناوب هر دو خاصیت را گنجانده‌ایم. خواننده احتمالاً خود درخواهد یافت که اگر D در شرط (ب) صدق کند و دوسطر از سطرهاى ماتریس A متساوی باشند، آنگاه $D(A) = -D(A)$. این مطلب ما را وسوسه می‌کند حکم کنیم که در این صورت D در شرط (الف) نیز صدق می‌کند. به‌عنوان مثال، اگر k هیأتی باشد که در آن $0 \neq 1 + 1$ ، این مطلب درست است، ولی در حالت عمومی (الف) نتیجه‌ای از (ب) نیست.

تعریف. فرض کنیم K حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی، n عددی صحیح مثبت و D تابعی از ماتریسهای $n \times n$ بر روی K در K باشد. گوئیم D تابع دترمینان است، هرگاه D, n خطی و متناوب باشد و $D(I) = 1$.

همچنان که قبلاً نیز بیان کردیم، نهایتاً نشان خواهیم داد که روی ماتریسهای $n \times n$ بر روی K دقیقاً يك تابع دترمینان وجود دارد. این مطلب در مورد ماتریسهای 1×1 ، $A = [a]$ بر روی K ، بسادگی قابل مشاهده است. تابع D که با $D(A) = a$ داده شود، يك تابع دترمینان است و واضح است که این تنها تابع دترمینان روی ماتریسهای 1×1 است. از این گذشته در موقعیتی هستیم که تکلیف حالت $n = 2$ را نیز معلوم کنیم. در مثال ۳ نشان داده شد که تابع

$$D(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$$

یک تابع دترمینان است. بعلاوه، فرمولی که در مثال ۲ ارائه شد، نشان می‌دهد که D تنها تابع دترمینان روی ماتریسهای 2×2 است. زیر نشان دادیم که به‌ازای هر تابع 2 خطی D

$$\begin{aligned} D(A) &= A_{11}A_{21}D(\epsilon_1, \epsilon_1) + A_{11}A_{22}D(\epsilon_1, \epsilon_2) + A_{12}A_{21}D(\epsilon_2, \epsilon_1) + \\ &A_{12}A_{22}D(\epsilon_2, \epsilon_2). \end{aligned}$$

اگر D متناوب باشد، آنگاه

$$D(\epsilon_1, \epsilon_1) = D(\epsilon_2, \epsilon_2) = 0$$

و

$$D(\epsilon_2, \epsilon_1) = -D(\epsilon_1, \epsilon_2) = -D(I).$$

اگر D در شرط ۱ $D(I) = 1$ نیز صدق کند، آنگاه

$$D(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}.$$

مثال ۴. هیأت F و تابع ۳ خطی متناوب دلخواه D روی ماتریسهای 3×3 بروی حلقه چندجمله‌ای $F[x]$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 & -x^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x^3 \end{bmatrix}.$$

اگر سطرهای ماتریس همانی 3×3 را با $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ و نشان دهیم، آنگاه

$$D(A) = D(x\epsilon_1 - x^2\epsilon_2, \epsilon_2, \epsilon_1 + x^3\epsilon_3).$$

از آنجا که D ، به‌عنوان تابعی از هر سطر، خطی است

$$\begin{aligned} D(A) &= xD(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_1 + x^3\epsilon_3) - x^2D(\epsilon_2, \epsilon_2, \epsilon_1 + x^3\epsilon_3) \\ &= xD(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_1) + x^4D(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) - x^2D(\epsilon_2, \epsilon_2, \epsilon_1) \\ &\quad - x^5D(\epsilon_2, \epsilon_2, \epsilon_3). \end{aligned}$$

چون D متناوب است، داریم

$$D(A) = (x^4 + x^2)D(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3).$$

نم. فرض کنیم تابع ۲ خطی D با این خاصیت باشد که به‌ازای هر ماتریس A 2×2 بروی K با سطرهای متساوی، $D(A) = 0$. در این صورت D متناوب است. اثبات. آنچه که باید نشان دهیم این است که اگر A ماتریسی 2×2 باشد و A' از تعویض سطرهای A حاصل بشود، آنگاه $D(A') = -D(A)$. اگر سطرهای A را α و β بنامیم، این بدان معنی است که باید نشان دهیم $D(\beta, \alpha) = -D(\alpha, \beta)$. چون D تابعی ۲ خطی است

$$D(\alpha + \beta, \alpha + \beta) = D(\alpha, \alpha) + D(\alpha, \beta) + D(\beta, \alpha) + D(\beta, \beta).$$

بنا به فرض $D(\alpha + \beta, \alpha + \beta) = D(\alpha, \alpha) = D(\beta, \beta) = 0$. بنابراین

$$D(\alpha, \beta) + D(\beta, \alpha) = 0. \square$$

لم. تابع n خطی D دوی ماتریسهای $n \times n$ بردی K مفروض است. فرض کنیم D دارای این خاصیت باشد که هرگاه دوسطر مجاور A متساوی باشند، آنگاه $D(A) = 0$. در این صورت D متناوب است.

اثبات. باید نشان دهیم وقتی که دوسطر دلخواه A متساوی باشند آنگاه $D(A) = 0$ ، و نیز وقتی که A' از تعویض دوسطر دلخواه A حاصل بشود آنگاه $D(A') = -D(A)$. ابتدا، فرض می‌کنیم A' از تعویض دوسطر مجاور A حاصل شده باشد. شایان توجه است که برهانی که در اثبات لم قبل به کار رفت شامل این حالت نیز می‌شود و $D(A') = -D(A)$ را به دست می‌دهد.

اینک فرض می‌کنیم B از تعویض سطرهای i و j ماتریس A با شرط $j < i$ حاصل شده باشد. بدیهی است می‌توانیم B را با چند تعویض متوالی سطرهای مجاور A به طور جفت‌جفت به دست آوریم. از تعویض سطر i با سطر $(i+1)$ شروع می‌کنیم و کار را ادامه می‌دهیم تا اینکه سطرها بترتیب

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_j, \alpha_i, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n$$

درآیند. این عمل نیاز به $k = j - i$ تعویض سطرهای مجاور دارد. اکنون با استفاده از $(k-1)$ تعویض سطرهای مجاور، α_j را به مکان i منتقل می‌کنیم. بدین سان، B را با $k + (k-1) = 2k - 1$ تعویض سطرهای مجاور، از A به دست می‌آوریم. پس

$$D(B) = (-1)^{2k-1} D(A) = -D(A).$$

فرض می‌کنیم A ماتریسی $n \times n$ با دوسطر متساوی، مثلاً $\alpha_i = \alpha_j$ با $j < i$ باشد؛ اگر $j = i + 1$ ، آنگاه A دارای دوسطر مجاور متساوی است و $D(A) = 0$. اگر $j > i + 1$ ، α_j و α_{i+1} را تعویض می‌کنیم. ماتریس حاصل؛ یعنی B ، دارای دوسطر مجاور متساوی است و لذا $D(B) = 0$. از سوی دیگر، $D(B) = -D(A)$ ، پس $\square \cdot D(A) = 0$.

تعریف. اگر $n > 1$ و A یک ماتریس $n \times n$ بر دوی K باشد، ماتریس $(n-1) \times (n-1)$ حاصل از حذف سطر i و ستون j ماتریس A را با $A(i|j)$ نشان می‌دهیم. اگر D تابعی $(n-1)$ خطی A ماتریسی $n \times n$ باشد، قرار می‌گذاریم که $D_{ij}(A) = D[A(i|j)]$.

قضیه ۱. فرض کنیم $n > 1$ و D تابع $(n-1)$ خطی متناوبی دوی ماتریسهای $(n-1) \times (n-1)$ بر دوی K باشد. به ازای هر j ، $1 \leq j \leq n$ ، تابع E_j تعریف شده توسط

$$E_j(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} A_{ij} D_{ij}(A) \quad (۴-۵)$$

تابع n خطی متناوبی روی ماتریسهای $n \times n$ است. اگر D يك تابع دترمینان باشد، هر E_j نیز يك تابع دترمینان است.

اثبات. اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد، $D_{ij}(A)$ مستقل از i مین سطر A است. چون D ، $(n-1)$ خطی است، واضح است که D_{ij} به عنوان تابعی از هر سطر، به جز سطر i ، خطی است. بنابراین $A_{ij} D_{ij}(A)$ تابعی n خطی از A است. هر ترکیب خطی از توابع n خطی، خود n خطی است؛ از این رو، E_j هم n خطی است. برای اینکه ثابت کنیم E_j متناوب نیز هست، کافی است نشان دهیم هنگامی که A دارای دو سطر مجاور متساوی باشد $E_j(A) = 0$. فرض می کنیم $\alpha_k = \alpha_{k+1}$. اگر $i \neq k+1$ و $i \neq k$ ماتریس $A(i|j)$ دارای دو سطر متساوی است و لذا $D_{ij}(A) = 0$. بنابراین

$$E_j(A) = (-1)^{k+j} A_{kj} D_{kj}(A) + (-1)^{k+1+j} A_{(k+1)j} D_{(k+1)j}(A).$$

چون $\alpha_k = \alpha_{k+1}$

$$A(k|j) = A(k+1|j) \text{ و } A_{kj} = A_{(k+1)j}$$

در این صورت مسلماً $E_j(A) = 0$.

حال فرض می کنیم D يك تابع دترمینان باشد. اگر $I^{(n)}$ ماتریس همانی $n \times n$ باشد، آنگاه $I^{(n)}(j|j) = I^{(n)}$ ماتریس همانی $(n-1) \times (n-1)$ ، یعنی $I^{(n-1)}$ ، است. چون $I_{ij}^{(n)} = \delta_{ij}$ از (۴-۵) نتیجه می شود که

$$E_j(I^{(n)}) = D(I^{(n-1)}). \quad (۵-۵)$$

حال $D(I^{(n-1)}) = 1$ ، از این رو $E_j(I^{(n)}) = 1$ و E_j نیز يك تابع دترمینان است. \square

نتیجه ۴. اگر K حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی dn عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه حداقل يك تابع دترمینان روی $k^n \times k^n$ وجود دارد.

اثبات. قبلاً وجود يك تابع دترمینان روی ماتریسهای 1×1 بر روی K ، حتی روی ماتریسهای 2×2 بر روی K را نشان دادیم. قضیه ۱ بوضوح نشان می دهد که با در دست داشتن يك تابع دترمینان روی ماتریسهای $(n-1) \times (n-1)$ ، چگونگی توان يك تابع دترمینان روی ماتریسهای $n \times n$ را ساخت. حال، اثبات این نتیجه با استقراتکمیل می شود. \square

مثال ۵. فرض کنیم B ماتریسی 2×2 بر روی K باشد و

$$|B| = B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21}.$$

در این صورت، اگر D يك تابع دترمینان روی ماتریسهای 2×2 باشد، آنگاه $|B| = D(B)$.

نشان دادیم که این تابع روی $K^{2 \times 2}$ یکنواست. گیریم

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

ماتریسی 3×3 بر روی K باشد. اگر E_1, E_2, E_3 و E_3 را طبق (۵-۴) تعریف کنیم، آنگاه

$$E_1(A) = A_{11} \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} - A_{21} \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + A_{31} \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{vmatrix} \quad (۶-۵)$$

$$E_2(A) = -A_{12} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} + A_{22} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} - A_{32} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{21} & A_{23} \end{vmatrix} \quad (۷-۵)$$

$$E_3(A) = A_{13} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} - A_{23} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} + A_{33} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}. \quad (۸-۵)$$

از قضیه ۱ نتیجه می شود که E_1, E_2, E_3 توابع دترمینان هستند. در واقع، چنانکه بعداً نشان خواهیم داد، $E_1 = E_2 = E_3$ ، ولی هنوز این موضوع حتی در این حالت ساده هم روشن نیست. به هر صورت، این موضوع را مستقیماً با بسط هر یک از عبارات بالایی توان نشان داد. به جای انجام این کار، چند مثال خاص می آوریم.

(الف) فرض کنیم $K = R[x]$ و

$$A = \begin{bmatrix} x-1 & x^2 & x^3 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & 0 & x-3 \end{bmatrix}.$$

در این صورت

$$E_1(A) = (x-1) \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 0 & x-3 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2)(x-3),$$

$$E_2(A) = -x^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & x-3 \end{vmatrix} + (x-2) \begin{vmatrix} (x-1) & x^3 \\ 0 & x-3 \end{vmatrix}$$

$$=(x-1)(x-2)(x-3),$$

$$E_3(A) = x^2 \begin{vmatrix} \circ & & \\ \circ & & \\ \circ & & \end{vmatrix} + (x-2) \begin{vmatrix} x-1 & & \\ \circ & & \\ \circ & & \end{vmatrix} + (x-3) \begin{vmatrix} & & x^2 \\ & & \circ \\ & & \circ \end{vmatrix} + (x-3) \begin{vmatrix} & x-1 & \\ & \circ & \\ & \circ & x-2 \end{vmatrix}$$

$$=(x-1)(x-2)(x-3).$$

(ب) گیریم $K=R$ و

$$A = \begin{bmatrix} \circ & ۱ & \circ \\ \circ & \circ & ۱ \\ ۱ & \circ & \circ \end{bmatrix}.$$

در این صورت

$$E_1(A) = \begin{vmatrix} ۱ & \circ \\ \circ & ۱ \end{vmatrix} = ۱$$

$$E_2(A) = - \begin{vmatrix} \circ & ۱ \\ ۱ & \circ \end{vmatrix} = ۱$$

$$E_3(A) = - \begin{vmatrix} \circ & ۱ \\ ۱ & \circ \end{vmatrix} = ۱.$$

تمرین

۱. هر يك از عبارات زیر، يك تابع D روی مجموعه ماتریسهای 3×3 بر روی هیأت اعداد حقیقی تعریف می کند. در کدام يك از این حالات D تابعی 3 خطی است؟

$$;D(A) = A_{11} + A_{22} + A_{33} \text{ (الف)}$$

$$;D(A) = (A_{11})^2 + 3A_{11}A_{22} \text{ (ب)}$$

$$;D(A) = A_{11}A_{12}A_{33} \text{ (پ)}$$

$$;D(A) = A_{13}A_{22}A_{32} + 5A_{12}A_{22}A_{32} \text{ (ت)}$$

$$;D(A) = \circ \text{ (ث)}$$

$$.D(A) = ۱ \text{ (ج)}$$

۰۳. مستقیماً نشان دهید که سه تابع E_1, E_2, E_3 و E_4 تعریف شده توسط $(5-6), (5-7)$ و $(5-8)$ مساوی اند.

۰۴. حلقه جابجایی K با عنصر همسانی مفروض است. اگر A ماتریسی 2×2 بر روی K باشد، الحاقی کلاسیک A عبارت از ماتریس 2×2 $\text{adj } A$ است که به صورت

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix}$$

تعریف می‌شود. اگر \det تابع یکنای دترمینان روی ماتریسهای 2×2 بر روی K را نمایش دهد، نشان دهید

$$(\text{adj } A)A = A(\text{adj } A) = (\det A)I \quad (\text{الف})$$

$$\det(\text{adj } A) = \det(A) \quad (\text{ب})$$

$$\text{adj}(A') = (\text{adj } A)' \quad (\text{پ})$$

(A' ترانزاده A را نشان می‌دهد.)

۰۴. فرض کنید A ماتریسی 2×2 بر روی هیأت F باشد. نشان دهید که A معکوس پذیر است اگر و تنها اگر $\det A \neq 0$. اگر A معکوس پذیر باشد، فرمولی برای A^{-1} به دست آورید.

۰۵. فرض کنید A ماتریسی 2×2 بر روی هیأت F باشد و $A^2 = 0$. نشان دهید به ازای هر اسکالر c داریم $\det(cI - A) = c^2$.

۰۶. زیر هیأت K از اعداد مختلط و عدد صحیح مثبت n مفروض اند. فرض کنید $j_1, \dots, j_n, k_1, \dots, k_n$ اعداد صحیح مثبتی کوچکتر از یا مساوی با n باشند. به ازای هر ماتریس $n \times n$ A بر روی K تعریف می‌کنیم

$$D(A) = A(j_1, k_1)A(j_2, k_2) \cdots A(j_n, k_n).$$

ثابت کنید D تابعی n خطی است اگر و تنها اگر اعداد صحیح j_1, \dots, j_n متمایز باشند.

۰۷. فرض کنید K حلقه‌ای جابجایی با عنصر همسانی باشد. نشان دهید تابع دترمینان روی ماتریسهای A 2×2 بر روی K به عنوان تابعی از ستونهای A تابعی است متناوب و 2 خطی.

۰۸. حلقه جابجایی K با عنصر همسانی را در نظر بگیرید و تابع D روی ماتریسهای 3×3 بر روی K را با قاعده

$$D(A) = A_{11} \det \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} - A_{12} \det \begin{bmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{bmatrix} \\ + A_{13} \det \begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix}$$

تعریف کنید. نشان دهید D به عنوان تابعی از ستونهای A متناوب و ۳ خطی است.

۹. فرض کنید K حلقه‌ای جایجایی با عنصرهمانی باشد و D تابع n خطی متناوبی روی ماتریسهای $n \times n$ بر روی K . نشان دهید

(الف) هرگاه یکی از سطرهاى A برابر ۰ باشد، $D(A) = 0$.

(ب) هرگاه B از A با اضافه کردن مضربی اسکالری از يك سطر A به سطرى دیگر حاصل شده باشد، $D(B) = D(A)$.

۱۰. هیأتی چون F ، يك ماتریس A ی 3×2 بر روی F ، و بردار (c_1, c_2, c_3) از F^3 تعریف شده توسط

$$c_1 = \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{vmatrix}, \quad c_2 = \begin{vmatrix} A_{13} & A_{11} \\ A_{23} & A_{21} \end{vmatrix}, \quad c_3 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$$

داده شده‌اند. نشان دهید

(الف) $2 = \text{رتبه}(A)$ اگر و تنها اگر $(c_1, c_2, c_3) \neq 0$ ؛

(ب) اگر A دارای رتبه ۲ باشد، آنگاه (c_1, c_2, c_3) پایه‌ای برای فضای جواب دستگاه معادلات $AX = 0$ است.

۱۱. فرض کنید K حلقه‌ای جایجایی با عنصرهمانی و D تابع ۲ خطی متناوبی روی ماتریسهای 2×2 بر روی K باشد. نشان دهید به ازای هر A ، $D(A) = (\det A)D(I)$. حال از این نتیجه استفاده کنید (هیچ محاسبه‌ای روی درایه‌ها جایز نیست) و نشان دهید که به ازای هر دو ماتریس A و B ی 2×2 بر روی K داریم

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

۱۲. يك هیأت F و يك تابع D روی ماتریسهای $n \times n$ بر روی F (با مقادیر در F) داده شده‌اند. فرض کنید به ازای هر A و B ، $D(AB) = D(A)D(B)$. نشان دهید که به ازای هر A داریم $D(A) = 0$ یا $D(I) = 1$. در حالت اخیر، نشان دهید هنگامی که A معکوس پذیر باشد آنگاه $D(A) \neq 0$.

۱۳. فرض کنید R هیأت اعداد حقیقی باشد و تابع D روی ماتریسهای 2×2 بر روی R با مقادیر در R چنان باشد که به ازای همه A ها و B ها، $D(AB) = D(A)D(B)$. همچنین فرض کنید

$$D\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \neq D\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

مطالب زیر را اثبات کنید:

(الف) $D(0) = 0$ ؛

(ب) هرگاه $A^2 = 0$ آنگاه $D(A) = 0$ ؛

(پ) هرگاه B از تعویض سطرها (یا ستونهای) A حاصل شده باشد، آنگاه

$D(B) = -D(A)$ ؛

(ت) هرگاه یک سطر (یا یک ستون) A صفر باشد آنگاه $D(A) = 0$ ؛

(ث) هرگاه A منفرد باشد آنگاه $D(A) \neq 0$.

۱۴. فرض کنید A ماتریسی 2×2 بر روی هیأت F باشد. در این صورت، مجموعه همه ماتریسهای به صورت $f(A)$ که در آن f یک چندجمله‌ای بر روی F است حلقه‌ای است جایجایی با عنصر همانی که آن را با K نمایش می‌دهیم. اگر B ماتریسی 2×2 بر روی K باشد، آنگاه دترمینان B ، ماتریسی 2×2 بر روی F و به صورت $f(A)$ است. فرض کنید I ماتریس همانی 2×2 بر روی F و B ماتریس 2×2 بر روی K به این صورت باشد که

$$B = \begin{bmatrix} A - A_{11}I & -A_{12}I \\ -A_{21}I & A - A_{22}I \end{bmatrix}.$$

نشان دهید $\det B = f(A)$ ، که در آن $\det A = x^2 - (A_{11} + A_{22})x + \det A$ ، و همچنین نشان دهید $f(A) = 0$.

۳.۵. جایگشتهای ویکتایی دترمینان

در این بخش، یکتایی تابع دترمینان روی ماتریسهای $n \times n$ بر روی K را اثبات می‌کنیم. اثبات، به‌طورکاملاً طبیعی، ما را به‌دردنظر گرفتن جایگشتهای و برخی از خواص بنیانی آنها رهنمون می‌کند.

فرض کنیم D تابع n خطی متناوبی روی ماتریسهای $n \times n$ بر روی K باشد. ماتریس A $n \times n$ بر روی K با سطرهای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ را در نظر می‌گیریم. اگر سطرهای ماتریس همانی $n \times n$ بر روی K را با $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ نشان دهیم، داریم

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^n A(i, j)\epsilon_j, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (9-5)$$

از این رو

$$\begin{aligned} D(A) &= D\left(\sum_j A(1, j)\epsilon_j, \alpha_1, \dots, \alpha_n\right) \\ &= \sum_j A(1, j)D(\epsilon_j, \alpha_1, \dots, \alpha_n). \end{aligned}$$

اکنون اگر $\sum_k A(2, k)\epsilon_k$ را جایگزین α_2 کنیم، می بینیم که

$$D(\epsilon_j, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_k A(2, k)D(\epsilon_j, \epsilon_k, \dots, \alpha_n).$$

پس

$$D(A) = \sum_{j,k} A(1, j)A(2, k)D(\epsilon_j, \epsilon_k, \dots, \alpha_n).$$

سپس در $\sum A(3, l)\epsilon_l, D(\epsilon_j, \epsilon_k, \dots, \alpha_n)$ را به جای α_3 می گذاریم، والی آخر. سرانجام برای $D(A)$ به عبارتی پیچیده ولی از نظر تئوری مهم دست می یابیم و آن:

$$D(A) = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} A(1, k_1)A(2, k_2) \dots A(n, k_n) \times D(\epsilon_{k_1}, \epsilon_{k_2}, \dots, \epsilon_{k_n}). \quad (10-5)$$

در (۱۰-۵) مجموع به ازای همه دنباله‌های (k_1, k_2, \dots, k_n) از اعداد صحیح مثبت نایبتر از n محاسبه می شود. این مطلب نشان می دهد که D مجموعی متناهی از توابع از نوع توصیف شده توسط (۲-۵) است. باید توجه داشت که (۱۰-۵) صرفاً نتیجه‌ای از فرض n خطی بودن D است، و نیز اینکه حالت خاصی از (۱۰-۵) در مثال ۲ به دست آمد. چون D متناوب است

$$D(\epsilon_{k_1}, \epsilon_{k_2}, \dots, \epsilon_{k_n}) = 0$$

با این شرط که دو نمایه k_i متساوی نباشند. دنباله (k_1, k_2, \dots, k_n) از اعداد صحیح مثبت نایبتر از n با این خاصیت که هیچ دو تایی از k_i ها متساوی نباشند، یک جایگشت از درجه n نامیده می شود. بنابراین، در (۱۰-۵)، ضرورت دارد فقط عمل جمع، بر روی دنباله‌هایی صورت گیرد که جایگشتهایی از درجه n هستند.

چون هر دنباله متناهی یا هر n تایی تابعی است تعریف شده روی اولین n عدد صحیح مثبت، هر جایگشت از درجه n را می توان به عنوان تابعی یک به یک از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ به روی خودش تعریف کرد. چنین تابعی، مثلاً σ ، با n تایی $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ متناظر است و از این رو چیزی جز قاعده‌ای برای ترتیب بندی

اعداد ۱، ۲، ...، n به يك روش كاملاً خوش تعريف نيست.

اگر D تابع n خطی متناوبی باشد و A ماتریسی $n \times n$ بر روی K ، آنگاه داریم

$$D(A) = \sum_{\sigma} A(1, \sigma_1) \cdots A(n, \sigma_n) D(\epsilon_{\sigma_1}, \dots, \epsilon_{\sigma_n}) \quad (11-5)$$

که در آن مجموع به ازای جایگشتهای متمایز σ از درجه n محاسبه می شود.

حال نشان می دهیم که

$$D(\epsilon_{\sigma_1}, \dots, \epsilon_{\sigma_n}) = \pm D(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \quad (12-5)$$

که در آن علامت \pm تنها به جایگشت σ وابسته است. دلیل این نکته به شرح زیر است. دنباله $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ را می توان از دنباله $(1, 2, \dots, n)$ با تعدادی متناهی تعویض جفتی عناصر به دست آورد. مثلاً، اگر $\sigma_1 \neq 1$ ، می توان جای ۱ و σ_1 را عوض کرد و $(\sigma_1, \dots, 1, \dots)$ را به دست آورد. با ادامه این راه، پس از حداکثر n بار تعویض جفتی از این نوع به دنباله $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ دست می یابیم. چون D متناوب است، هر بار که دو سطر ϵ_j و ϵ_r را تعویض کنیم، علامت مقدار آن هم تغییر می کند. پس، اگر از $(1, 2, \dots, n)$ با m تعویض از جفتیهای (i, j) به $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ برسیم، داریم

$$D(\epsilon_{\sigma_1}, \dots, \epsilon_{\sigma_n}) = (-1)^m D(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n).$$

درحالت خاص، اگر D يك تابع دترمینان باشد

$$D(\epsilon_{\sigma_1}, \dots, \epsilon_{\sigma_n}) = (-1)^m \quad (13-5)$$

که در آن m تنها به σ وابسته است و نه به D . بنابراین، همه توابع دترمینان، به ماتریسی با سطرهای $\epsilon_{\sigma_1}, \dots, \epsilon_{\sigma_n}$ يك مقدار تخصیص می دهند، و این مقدار یا ۱ است یا -۱. حکمی بنیانی در مورد جایگشتها به شرح زیر است: اگر σ جایگشتی از درجه n باشد، می توان از دنباله $(1, 2, \dots, n)$ ، با تعویضهایی متوالی از جفتها، به دنباله $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ رسید. گرچه این امر می تواند به طرق گوناگون انجام شود، ولی بدون توجه به چگونگی انجام آن، تعداد تعویضهای به کار رفته یا همواره زوج است و یا همواره فرد. در این صورت، جایگشت بترتیب زوج یا فرد نامیده می شود. علامت جایگشت σ توسط

$$\operatorname{sgn} \sigma = \begin{cases} 1 & \text{هرگاه } \sigma \text{ زوج باشد} \\ -1 & \text{هرگاه } \sigma \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

تعریف می شود. در اینجا نماد «۱» عدد صحیح ۱ را نشان می دهد.

ذیلاً نشان خواهیم داد که این خاصیت بنیانی جایگشتها را می توانیم از مطالبی که هم اکنون در مورد توابع دترمینان می دانیم نیز به دست آوریم. اما، عجلتاً این مطلب را

دانسته فرض می‌کنیم. پس، عدد صحیح m موجود در $(5-13)$ همواره زوج است هرگاه σ جایگشتی زوج باشد، و همواره فرد است هرگاه σ جایگشتی فرد باشد. در این صورت، به ازای هر تابع n خطی متناوب D داریم

$$D(\epsilon_{\sigma_1}, \dots, \epsilon_{\sigma_n}) = (\text{sgn } \sigma) D(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$$

و با استفاده از $(5-11)$ داریم

$$D(A) = \left[\sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) A(1, \sigma_1) \dots A(n, \sigma_n) \right] D(I). \quad (14-5)$$

بدیهی است که I ماتریس همانی $n \times n$ را نشان می‌دهد.

از $(5-14)$ می‌توان دریافت که دقیقاً یک تابع دترمینان روی ماتریسهای $n \times n$ بر روی K وجود دارد. هرگاه این تابع را با \det نمایش دهیم، داریم

$$\det(A) = \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) A(1, \sigma_1) \dots A(n, \sigma_n) \quad (15-5)$$

که در آن مجموع به ازای جایگشتهای متمایز σ از درجه n محاسبه می‌شود. این مطالب رسماً به صورت زیر خلاصه می‌شوند.

قضیه ۴. فرض کنیم K حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی و n عددی صحیح مثبت باشد. دقیقاً یک تابع دترمینان روی مجموعه ماتریسهای $n \times n$ بر روی K وجود دارد، و این تابع همان تابع \det تعریف شده در $(5-15)$ است. اگر D تابع n خطی متناوبی روی $K^{n \times n}$ باشد، آنگاه به ازای هر ماتریس A $n \times n$

$$D(A) = (\det A) D(I).$$

این همان قضیه‌ای است که در جستجویش بودیم، اما کمبودی در اثبات آن وجود دارد. این کمبود عبارت از اثبات این مطلب است که به ازای هر جایگشت مفروض σ وقتی با تعویض جفتها از $(1, 2, \dots, n)$ به $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ برسیم، تعداد تعویضها یا همواره زوج است یا همواره فرد. این حکم بنیانی مربوط به ترکیبات، بدون هرگونه رجوعی به دترمینانها قابل اثبات است؛ با این وجود، مایلم نشان دهیم که چگونه این واقعیت از وجود یک تابع دترمینان روی ماتریسهای $n \times n$ نتیجه می‌شود.

فرض کنیم K حلقه اعداد صحیح باشد و D تابع دترمینان روی ماتریسهای $n \times n$ بر روی K . σ را جایگشتی از درجه n می‌گیریم و فرض می‌کنیم از $(1, 2, \dots, n)$ با m تعویض از جفتها (i, j) ، $i \neq j$ ، به $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ برسیم. چنانکه در $(5-13)$ نشان دادیم

$$(-1)^m = D(\epsilon_{\sigma_1}, \dots, \epsilon_{\sigma_n})$$

یعنی، عدد $(-1)^m$ باید مقدار D روی ماتریس با سطرهای $\epsilon_{\sigma_1}, \dots, \epsilon_{\sigma_n}$ باشد. اگر

$$D(\epsilon_{\sigma_1}, \dots, \epsilon_{\sigma_n}) = 1$$

آنگاه، m لزوماً زوج است و اگر

$$D(\epsilon_{\sigma_1}, \dots, \epsilon_{\sigma_n}) = -1$$

آنگاه، m حتماً فرد است.

چون فرمولی صریح برای دترمینان ماتریسهای $n \times n$ در دست هست و این فرمول حاوی جایگشتهای از درجه n است، این بخش را با چند مشاهده دیگر در مورد جایگشتهای به پایان می‌رسانیم. ابتدا، متذکر می‌شویم که دقیقاً $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ جایگشت از درجه n وجود دارد. زیرا، اگر σ چنین جایگشتی باشد، n امکان برای انتخاب σ_1 وجود دارد؛ وقتی این انتخاب صورت گرفت، $(n-1)$ انتخاب برای σ_2 موجود است، سپس $(n-2)$ انتخاب برای σ_3 ، و الی آخر. بنا براین

$$n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

جایگشت مانند σ وجود دارد. پس، فرمول (۵-۱۵) برای $\det(A)$ ، این تابع را به صورت مجموعی از $n!$ جمله، یک جمله به ازای هر جایگشت از درجه n ، به دست می‌دهد. هر جمله مفروض حاصل ضربی چون

$$A(1, \sigma_1) \cdot \dots \cdot A(n, \sigma_n)$$

از n درایه A است، یک درایه از هر سطر و یکی از هر ستون با علامتی «+» یا «-» بر حسب اینکه σ جایگشتی زوج یا جایگشتی فرد باشد.

وقتی جایگشتهای به عنوان توابعی یک به یک از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ به روی خودش محسوب شوند، تعریف یک نوع ضرب برای جایگشتهای میسر می‌شود. حاصل ضرب σ و τ بسادگی می‌تواند تابع مرکب $\sigma\tau$ با تعریف

$$(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i))$$

باشد. اگر ϵ جایگشت همانی، $\epsilon(i) = i$ ، را نشان دهد، آنگاه هر σ دارای یک معکوس σ^{-1} است که

$$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \epsilon.$$

این مشاهدات را می‌توان با این گفته که مجموعه جایگشتهای از درجه n تحت عمل ترکیب یک گروه است خلاصه کرد. این گروه غالباً گروه متقارن درجه n نامیده می‌شود. از دیدگاه حاصل ضرب جایگشتهای، خاصیت بنیانی علامت هر جایگشت این است که

$$\text{sgn}(\sigma\tau) = (\text{sgn}\sigma)(\text{sgn}\tau). \quad (16-5)$$

به بیان دیگر، $\sigma\tau$ جایگشتی زوج است هر گاه σ و τ یا هر دو زوج باشند یا هر دو فرد، در حالی که $\sigma\tau$ فرد است هر گاه یکی از دو جایگشت فرد و دیگری زوج باشد. این مطلب

را می‌توان از تعریف علامت، برحسب تعویضهای متوالی جفت‌های (i, j) دریافت. با این وجود، نشان دادن چگونگی حصول رابطه $\text{sgn}(\sigma\tau) = (\text{sgn}\sigma)(\text{sgn}\tau)$ از يك خاصیت بنیانی دترمینانها ممکن است آموزنده هم باشد.

گیریم K حلقهٔ اعداد صحیح و σ و τ جایگشتهایی از درجهٔ n باشند. $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ را سطرهای ماتریس همانی $n \times n$ بر روی K می‌گیریم و فرض می‌کنیم A ماتریس با سطرهای $\epsilon_{\tau_1}, \dots, \epsilon_{\tau_n}$ ، و B ماتریس با سطرهای $\epsilon_{\sigma_1}, \dots, \epsilon_{\sigma_n}$ باشد. زمین سطر A دقیقاً شامل يك درایهٔ غیرصفر، یعنی همان ۱ واقع در ستون τ_i است. از اینجا بسادگی مشاهده می‌شود که $\epsilon_{\sigma\tau_i}$ همان i مین سطر ماتریس حاصل ضرب AB است. حال

$$\det(A) = \text{sgn}\tau, \det(B) = \text{sgn}\sigma, \text{ و } \det(AB) = \text{sgn}(\sigma\tau)$$

از این‌رو، بلافاصله پس از اثبات قضیهٔ زیر داریم $\text{sgn}(\sigma\tau) = (\text{sgn}\sigma)(\text{sgn}\tau)$.

قضیهٔ ۳. فرض کنیم K حلقه‌ای جایجایی با عنصر همانی، و A و B ماتریسهایی $n \times n$ بر روی K باشند. در این صورت

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

اثبات. B را ماتریس $n \times n$ ثابتی بر روی K می‌گیریم و به‌ازای هر ماتریس A $n \times n$ تعریف می‌کنیم $D(A) = \det(AB)$. اگر سطرهای A را با $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ نشان دهیم، آنگاه

$$D(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \det(\alpha_1 B, \dots, \alpha_n B).$$

در اینجا $\alpha_i B$ ماتریسی $1 \times n$ را نشان می‌دهد که حاصل ضرب ماتریس $1 \times n$ α_i و ماتریس B $n \times n$ است. از آنجا که

$$(\alpha_i + \alpha'_i)B = \alpha_i B + \alpha'_i B$$

و \det تابعی n خطی است، بسادگی دیده می‌شود که D تابعی n خطی است. اگر $\alpha_i = \alpha_j$ ، آنگاه $\alpha_i B = \alpha_j B$ و چون \det متناوب است

$$D(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0.$$

از این‌رو، D نیز متناوب است. پس D يك تابع n خطی متناوب است، و بنا بر قضیهٔ ۲

$$D(A) = (\det A)D(I).$$

اما $D(I) = \det(IB) = \det B$ بنا بر این

$$\det(AB) = D(A) = (\det A)(\det B). \quad \square$$

حکم $\text{sgn}(\sigma\tau) = (\text{sgn}\sigma)(\text{sgn}\tau)$ تنها یکی از چند نتیجهٔ قضیهٔ ۳ است. بعضی از این نتیجه‌ها را در بخش بعد ملاحظه خواهیم کرد.

تمرین

۱. اگر K حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی و A ماتریسی بر روی K به صورت

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

باشند، نشان دهید $\det A = 0$.

۲. ثابت کنید دترمینان ماتریس واندروند

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$$

برابر $(b-a)(c-a)(c-b)$ است.

۳. شش جایگشت درجه ۳ را به طور صریح بنویسید و مشخص کنید کدام فرد و کدام زوج است، و آنها را در ارائه فرمول کامل (۵-۱۵) برای دترمینان یک ماتریس 3×3 به کار ببرید.

۴. فرض کنید σ و τ جایگشتهایی از درجه ۴ باشند که با $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 3, \sigma_3 = 4, \sigma_4 = 1$ و $\tau_1 = 3, \tau_2 = 1, \tau_3 = 2, \tau_4 = 4$ تعریف شده‌اند. (الف) σ فرد است یا زوج؟ τ فرد است یا زوج؟ (ب) $\sigma\tau$ و $\tau\sigma$ را بیابید.

۵. اگر A ماتریس $n \times n$ معکوس‌پذیری بر روی یک هیأت باشد، نشان دهید $\det A \neq 0$.

۶. A ماتریسی 2×2 بر روی یک هیأت است. ثابت کنید $\det(I+A) = 1 + \det A$ اگر و تنها اگر $\text{tr}(A) = 0$.

۷. ماتریس $n \times n$ مانند A مثلثی نامیده می‌شود، هر گاه $A_{ij} = 0$ وقتی که $i > j$ ، یا هر گاه $A_{ij} = 0$ وقتی که $i < j$. ثابت کنید که دترمینان هر ماتریس مثلثی برابر حاصل ضرب $A_{11}A_{22}\dots A_{nn}$ از درایه‌های قطری آن است.

۸. فرض کنید A ماتریسی 3×3 بر روی هیأت اعداد مختلط باشد. ماتریس $\omega I - A$ با درایه‌های چندجمله‌ای را تشکیل می‌دهیم؛ درایه i, j این ماتریس چندجمله‌ای

$\delta_{ij}x - A_{ij}$ است. اگر $f = \det(xI - A)$ ، نشان دهید f یک چندجمله‌ای تکین درجه ۳ است. اگر به ازای اعداد مختلط c_1, c_2, c_3 و c_3 داشته باشیم

$$f = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)$$

ثابت کنید

$$c_1 c_2 c_3 = \det A \quad \text{و} \quad c_1 + c_2 + c_3 = \text{tr}(A)$$

۹. فرض کنید n عددی صحیح مثبت و F یک هیأت باشد. اگر σ جایگشتی از درجه n باشد، ثابت کنید که تابع

$$T(x_1, \dots, x_n) = (x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_n})$$

یک عملگر خطی معکوس‌پذیر روی F^n است.

۱۰. فرض کنید F یک هیأت، n عددی صحیح مثبت، و S مجموعه ماتریسهای $n \times n$ بر روی F باشد. فرض کنید V فضای برداری همه توابع از S در F ، و W مجموعه توابع n خطی متناوب روی S باشد. ثابت کنید W زیرفضایی از V است. بعد W چند است؟

۱۱. عملگر خطی T روی F^n داده شده است. تابع D_T را به صورت

$$D_T(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \det(T\alpha_1, \dots, T\alpha_n).$$

تعریف می‌کنیم.

(الف) نشان دهید D_T یک تابع n خطی متناوب است.

(ب) اگر

$$c = \det(T\epsilon_1, \dots, T\epsilon_n)$$

نشان دهید که به ازای هر n بردار داده شده $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ داریم

$$\det(T\alpha_1, \dots, T\alpha_n) = c \det(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

(پ) اگر \mathcal{B} پایه مرتبی برای F^n و A ماتریس T در پایه مرتب \mathcal{B} باشد، نشان

دهید $\det A = c$.

(ت) فکر می‌کنید چه نامی برای اسکالر c مناسب است؟

۱۲. اگر σ جایگشتی از درجه n و A ماتریسی $n \times n$ بر روی هیأت F با بردارهای سطری

$\alpha_{\sigma_1}, \dots, \alpha_{\sigma_n}$ باشد، فرض کنید $\sigma(A)$ ماتریس $n \times n$ با بردارهای سطری $\alpha_{\sigma_1}, \dots, \alpha_{\sigma_n}$

را نمایش دهد.

(الف) ثابت کنید $\sigma(AB) = \sigma(A)B$ و در حالت خاص $\sigma(A) = \sigma(I)A$.

- (ب) اگر T عملگر خطی تمرین ۹ باشد، ثابت کنید ماتریس T در پایه مرتب استاندارد برابر $\sigma(I)$ است.
- (پ) آیا $\sigma^{-1}(I)$ ماتریس $\sigma(I)$ است؟
- (ت) آیا این درست است که $\sigma(A)$ با A متشابه است؟

۱۳. ثابت کنید تابع علامت روی جایگشتها به مفهوم زیر یکتاست. اگر f تابعی باشد که بهر جایگشت درجه n یک عدد صحیح را تخصیص بدهد و اگر $f(\sigma\tau) = f(\sigma)f(\tau)$ ، آنگاه f یا متحداً ۰ است یا متحداً ۱، و یا تابع علامت است.

۴.۵. چند خاصیت دیگر دترمینان

در این بخش به شرح برخی از خواص مفید تابع دترمینان روی ماتریسهای $n \times n$ می پردازیم. شاید اولین نکته ای را که باید خاطر نشان کنیم، مطلب ذیل باشد. در بحث $\det A$ ، سطرهای A نقش ممتازی را ایفا کردند. چون تفاوتی اساسی بین سطرها و ستونها وجود ندارد، می توان انتظار داشت که $\det A$ تابع n خطی متناوبی از ستونهای A هم باشد. در واقع چنین است و برای اثبات آن کافی است نشان دهیم

$$\det(A') = \det(A) \quad (17-5)$$

که در آن A' نمایشگر ترانزاده A است. اگر σ جایگشتی از درجه n باشد،

$$A'(i, \sigma i) = A(\sigma i, i).$$

در این صورت بنا به عبارت (۵-۱۵) داریم

$$\det(A') = \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) A(\sigma_1, 1) \cdots A(\sigma_n, n).$$

وقتی که $j = \sigma^{-1} i$ داریم $A(\sigma i, i) = A(j, \sigma^{-1} j)$. از این رو

$$A(\sigma_1, 1) \cdots A(\sigma_n, n) = A(1, \sigma^{-1} 1) \cdots A(n, \sigma^{-1} n).$$

چون $\sigma\sigma^{-1}$ جایگشت همانی است،

$$\text{sgn}(\sigma^{-1}) = \text{sgn}(\sigma) \quad \text{یا} \quad (\text{sgn } \sigma)(\text{sgn } \sigma^{-1}) = 1$$

بعلاوه، چون σ روی همه جایگشتهای درجه n تغییر می کند، σ^{-1} نیز چنین تغییر می کند. بنابراین

$$\begin{aligned} \det(A') &= \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma^{-1}) A(1, \sigma^{-1} 1) \cdots A(n, \sigma^{-1} n) \\ &= \det A \end{aligned}$$

و (۱۷-۵) اثبات می شود.

در موارد معینی به محاسبه دترمینانهای مشخصی نیازمندیم. هنگامی که این امر ضرورت یابد، غالباً استفاده از حکم زیر مفید است. اگر B از A با افزودن مضربی از یک سطر A به سطری دیگر (یا مضربی از یک ستون به ستونی دیگر) حاصل شود، آنگاه

$$\det B = \det A. \quad (18-5)$$

ما این حکم را در مورد سطرها اثبات می‌کنیم. فرض کنیم B از A با افزودن $c\alpha_j$ به α_i ، با فرض $j < i$ ، حاصل بشود. چون \det ، به‌عنوان تابعی از i مین سطر، خطی است

$$\begin{aligned} \det B &= \det A + c \det(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n) \\ &= \det A. \end{aligned}$$

حکم مفید دیگری هم به‌شرح زیر است. فرض کنیم ماتریسی $n \times n$ به‌صورت بلوکی

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

داده شده باشد. در اینجا A ماتریسی $r \times r$ ، C ماتریسی $s \times s$ ، B ماتریسی $r \times s$ و 0 ماتریس صفر $s \times r$ را نشان می‌دهد. در این صورت

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = (\det A)(\det C). \quad (19-5)$$

برای اثبات این مطلب، تعریف می‌کنیم

$$D(A, B, C) = \det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}.$$

اگر A و B را ثابت نگاهداریم، آنگاه D به‌عنوان تابعی از سطرهای C متناوب و s خطی است. از این‌رو، بنا بر قضیه ۲

$$D(A, B, C) = (\det C)D(A, B, I).$$

که در آن I ماتریس همانی $s \times s$ است. با تفریق مضربی از سطرهای I از سطرهای B و به‌کار بردن حکم پیش از رابطه (۱۸-۵)، داریم

$$D(A, B, I) = D(A, 0, I).$$

حال $D(A, 0, I)$ به‌عنوان تابعی از سطرهای A مسلماً متناوب و r خطی است. از این‌رو

$$D(A, 0, I) = (\det A)D(I, 0, I).$$

اما، $D(I, 0, I) = 1$ ، پس

$$\begin{aligned} D(A, B, C) &= (\det C)D(A, B, I) \\ &= (\det C)D(A, O, I) \\ &= (\det C)(\det A). \end{aligned}$$

با برهانی از همین نوع یا با استفاده از ترانهاده‌ها داریم

$$\det \begin{bmatrix} A & O \\ B & C \end{bmatrix} = (\det A)(\det C). \quad (20-5)$$

مثال ۶. فرض کنیم K هیأت اعداد گویا باشد و بخواهیم دترمینان ماتریس 4×4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

را محاسبه کنیم. با تفریق مضربهای مناسب سطر ۱ از سطرهای ۲، ۳، و ۴ ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & -9 & -13 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

را به دست می‌آوریم و می‌دانیم که بنا بر (۱۸-۵) این ماتریس همان دترمینان ماتریس A را دارد. اگر $5/4$ سطر ۲ را از سطر ۳، و سپس $3/4$ سطر ۲ را از سطر ۴ کم کنیم، داریم

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

و بار دیگر $\det B = \det A$. از صورت بلوکی B برمی‌آید که

$$\det A = \det B = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -4 & -8 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4(32) = 128.$$

حال فرض کنیم $n > 1$ و A ماتریسی $n \times n$ بر روی K باشد. در قضیه ۱ با مفروض بودن تابع دترمینان روی ماتریسهای $(n-1) \times (n-1)$ نشان دادیم که يك تابع دترمینان روی ماتریسهای $n \times n$ چگونه ساخته می‌شود. حال که یکتایی تابع دترمینان را ثابت کرده‌ایم، فرمول (۴-۵) مطلب زیر را بیان می‌کند. اگر هر نمایه ستونی دلخواه j را ثابت نگاهداریم.

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} A_{ij} \det A(i|j).$$

اسکالر $(-1)^{i+j} \det A(i|j)$ معمولاً همسازۀ i و j ماتریس A یا همسازۀ درایه i و j ماتریس A نامیده می‌شود. در این صورت، فرمول فوق برای $\det A$ بسط به وسیله همسازۀ‌های ستون j م (یا گاهی بسط به وسیله کهایدهای ستون j م) نامیده می‌شود. اگر بنویسیم

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A(i|j)$$

آنگاه از فرمول فوق برمی‌آید که به ازای هر j

$$\det A = \sum_{i=1}^n A_{ij} C_{ij}.$$

در اینجا همسازۀ C_{ij} ، $(-1)^{i+j}$ برابر دترمینان ماتریس $(n-1) \times (n-1)$ حاصل از حذف سطر i م و ستون j م ماتریس A است. اگر $j \neq k$ ، آنگاه

$$\sum_{i=1}^n A_{ik} C_{ij} = 0.$$

زیرا، اگر k مین ستون A را جایگزین زمین ستون آن بکنیم، و ماتریس حاصل را B بنامیم، آنگاه B دارای دو ستون متساوی است و لذا $\det B = 0$. چون $B(i|j) = A(i|j)$ داریم

$$\begin{aligned} 0 &= \det B \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} B_{ij} \det B(i|j) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} A_{ik} \det A(i|j) \\ &= \sum_{i=1}^n A_{ik} C_{ij}. \end{aligned}$$

این خواص همسازۀ‌ها را می‌توان به صورت

$$\sum_{i=1}^n A_{ik} C_{ij} = \delta_{jk} \det A \quad (21-5)$$

خلاصه کرد.

ماتریس $\text{adj} A, n \times n$ ، که ترانژاده ماتریس همسازهای A است، الحاقی کلاسیک A نامیده می‌شود. بدین نحو

$$(\text{adj} A)_{ij} = C_{ji} = (-1)^{i+j} \det A(j|i). \quad (22-5)$$

فرمول (21-5) را می‌توان در معادله ماتریسی

$$(\text{adj} A)A = (\det A)I \quad (23-5)$$

خلاصه کرد.

حال مایلیم که تساوی $A(\text{adj} A) = (\det A)I$ را هم اثبات کنیم. چون

$$A'(i|j) = A(j|i)'$$

$$(-1)^{i+j} \det A'(i|j) = (-1)^{j+i} \det A(j|i)$$

که به‌طور ساده بیانگر این مطلب است که همساز j ، i ماتریس A' همان همساز i ، j ، A است. بنابراین

$$\text{adj}(A') = (\text{adj} A)'. \quad (24-5)$$

با به‌کار بستن (23-5) بر A' ، به‌دست می‌آوریم

$$(\text{adj} A')A' = (\det A')I = (\det A)I$$

و با ترانژش آن داریم

$$A(\text{adj} A')' = (\det A)I.$$

حال با استفاده از (24-5) به آنچه که می‌خواستیم دست می‌یابیم:

$$A(\text{adj} A) = (\det A)I. \quad (25-5)$$

نظیر مورد ماتریسهای بر روی هیأتها، ماتریس A $n \times n$ بر روی K ، معکوس پذیر

بر روی K نامیده می‌شود هرگاه ماتریسی $n \times n$ چون A^{-1} با درایه‌های متعلق به K یافت

شود به طوری که $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. اگر چنین ماتریس معکوسی موجود باشد، یکتا است؛

زیرا، همان برهانی که در فصل ۱ به‌کار رفت نشان می‌دهد که اگر $BA = AC = I$ ، آنگاه

$B = C$. فرمولهای (23-5) و (25-5)، درباره معکوس پذیری ماتریسهای بر روی K

مطالب زیر را به‌دست می‌دهند. اگر عنصر $\det A$ در K معکوس ضریبی داشته باشد، آنگاه

A معکوس پذیر است و $A^{-1} = (\det A)^{-1} \text{adj} A$ یکتا معکوس A است. بعکس، بسادگی

دید می‌شود که اگر A بر روی K معکوس پذیر باشد، آنگاه $\det A$ در K معکوس پذیر است.

زیرا، اگر $BA = I$ ، داریم

$$1 = \det I = \det(BA) = (\det A)(\det B).$$

حاصل آنچه که ثابت کرده ایم قضیه زیر است.

قضیه ۴. فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ بر روی K باشد. در این صورت A بر روی K معکوس پذیر است اگر و تنها اگر $\det A \neq 0$ در K معکوس پذیر باشد. وقتی A معکوس پذیر باشد، یکتا معکوس A عبارت است از

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} \text{adj} A.$$

بخصوص، هر ماتریس $n \times n$ بر روی یک هیأت، معکوس پذیر است اگر و تنها اگر دترمینان آن مخالف صفر باشد.

باید خاطر نشان کنیم که این معیار دترمینانی برای معکوس پذیری، ثابت می کند که هر ماتریس $n \times n$ با معکوسی چپ یا راست، معکوس پذیر است. این اثبات کاملاً مستقل از اثباتی است که در فصل ۱ برای ماتریسهای بر روی هیأتها ارائه کردیم. ما یلیم مفهوم معکوس پذیری ماتریسهای با درایه های چندجمله ای را نیز خاطر نشان کنیم. اگر K حلقه چندجمله ای $F[x]$ باشد، تنها عناصری از K که معکوس پذیر هستند، عبارتند از چند جمله ایهای اسکالری غیر صفر؛ زیرا، اگر f و g دو چندجمله ای با شرط $fg = 1$ باشند داریم $\deg f + \deg g = 0$ ، پس $\deg f = \deg g = 0$ ؛ یعنی، f و g دو چندجمله ای اسکالری هستند. از این رو، هر ماتریس $n \times n$ بر روی حلقه چندجمله ای $F[x]$ ، بر روی $F[x]$ معکوس پذیر است اگر و تنها اگر دترمینان آن یک چندجمله ای اسکالری غیر صفر باشد.

مثال ۷. فرض کنیم $K = R[x]$ حلقه چندجمله ایهای بر روی هیأت اعداد حقیقی باشد. اگر

$$B = \begin{bmatrix} x^2 - 1 & x + 2 \\ x^2 - 2x + 3 & x \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} x^2 + x & x + 1 \\ x - 1 & 1 \end{bmatrix}$$

آنگاه، با یک محاسبه کوتاه، داریم $\det A = x + 1$ و $\det B = -6$. از این رو، A بر روی K معکوس پذیر نیست، در حالی که B بر روی K معکوس پذیر است. توجه کنید که

$$\text{adj} A = \begin{bmatrix} 1 & -x - 1 \\ -x + 1 & x^2 + x \end{bmatrix}, \quad \text{adj} B = \begin{bmatrix} x & -x - 2 \\ -x^2 + 2x - 3 & x^2 - 1 \end{bmatrix},$$

$(\text{adj} A)A = (x + 1)I$ و $(\text{adj} B)B = -6I$. بدیهی است که

$$B^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} x & -x - 2 \\ -x^2 + 2x - 3 & 1 - x^2 \end{bmatrix}.$$

مثال ۸. فرض کنیم K حلقه اعداد صحیح باشد و

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

در این صورت $\det A = -2$ و

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

از این رو، A به عنوان یک ماتریس بر روی حلقه اعداد صحیح، معکوس پذیر نیست؛ با این وجود، می توانیم A را به عنوان ماتریسی بر روی هیأت اعداد گویا نیز محسوب کنیم، که در این صورت A معکوس پذیر است و

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

در رابطه با ماتریسهای معکوس پذیر، ما لیم به ذکر حکم مقدماتی دیگری هم پردازیم. ماتریسهای متشابه، دترمینانهای مساوی دارند؛ یعنی، اگر P بر روی K معکوس پذیر باشد و $B = P^{-1}AP$ ، آنگاه $\det B = \det A$. این مطلب واضح است، زیرا

$$\det(P^{-1}AP) = (\det P^{-1})(\det A)(\det P) = \det A.$$

این مشاهده ساده، این امکان را به وجود می آورد که دترمینان هر عملگر خطی روی فضای برداری با بعد متناهی را تعریف کنیم. اگر T عملگری خطی روی V باشد، دترمینان T را دترمینان هر ماتریس $n \times n$ تعریف می کنیم که نمایش T در پایه مرتبی از V باشد. چون همه این ماتریسها متشابه هستند، دترمینانهای مساوی دارند و این تعریف بامعنی است. در این باره به تمرین ۱۱ بخش ۳.۵ رجوع کنید.

حال به بحث درباره قاعده گرامر برای حل دستگاه معادلات خطی می پردازیم. فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ بر روی هیأت F باشد، و بخواهیم دستگاه معادلات خطی $AX = Y$ را به ازای n تایی مفروض (y_1, \dots, y_n) حل کنیم. اگر $AX = Y$ ، آنگاه

$$(\text{adj}A)AX = (\text{adj}A)Y$$

و بنابراین

$$(\det A)X = (\text{adj}A)Y.$$

پس

$$\begin{aligned}(\det A)x_j &= \sum_{i=1}^n (\text{adj}A)_{ji}y_i \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} y_i \det A(i|j).\end{aligned}$$

عبارت آخر همان دترمینان ماتریس $n \times n$ حاصل از جایگزینی Y به جای زمین ستون A است. اگر $\det A = 0$ ، از این مطالب چیزی معلوم نمی‌شود؛ اما، اگر $\det A \neq 0$ به قاعده‌ای دست می‌یابیم که به قاعده کرامر مشهور است. گیریم A یک ماتریس $n \times n$ بروی هیأت F باشد و $\det A \neq 0$. اگر y_1, \dots, y_n اسکالرهای F باشند، یکتا جواب $X = A^{-1}Y$ از دستگاه معادلات $AX = Y$ به صورت

$$x_j = \frac{\det B_j}{\det A}, \quad j = 1, \dots, n$$

به دست می‌آید. در اینجا B_j ماتریس $n \times n$ حاصل از جایگزینی Y به جای زمین ستون ماتریس A است.

در خاتمه این بخش، علاقه‌مندیم به چند توضیح که به اعتقاد ما به نمایش چهره واقعی دترمینان کمک می‌کنند، بپردازیم. گه گاه لازم است دترمینانهای مشخصی را محاسبه کنیم، و لذا جزئی از این بخش را به روشهایی که این محاسبات را آسان می‌سازند اختصاص دادیم. لکن، نقش اصلی دترمینان در این کتاب، هر چند زیبایی احکامی همچون قاعده کرامر انکارناپذیر است، نظری است. اما، قاعده کرامر عمده‌تاً به این علت که خود درگیر محاسبات بسیاری است، وسیله مؤثری برای حل دستگاههای معادلات خطی نیست. لذا باید فکر خود را بر آنچه که قاعده کرامر بیان می‌کند متمرکز سازیم تا بر چگونگی محاسبه با آن. در واقع، امیدواریم که خواننده ضمن تفکر روی تمامی این فصل، تأکید بیشتری بردرک مفهوم دترمینان و چگونگی رفتار آن داشته باشد تا بر چگونگی محاسبه دترمینان ماتریسهای معین.

تمرین

۰۱. از فرمول الحاقی کلاسیک برای محاسبه معکوس هر یک از ماتریسهای حقیقی 3×3 زیر استفاده کنید.

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

۰۲. قاعده کرامر را برای حل هر یک از دستگاه معادلات خطی زیر بر روی هیأت اعداد گویا به کار بگیرید.

$$x + y + z = 11 \quad (\text{الف})$$

$$2x - 6y - z = 0$$

$$3x + 4y + 2z = 0$$

$$3x - 2y = 7 \quad (\text{ب})$$

$$3y - 2z = 6$$

$$3z - 2x = -1$$

۳. ماتریس A ی $n \times n$ بر روی هیأت F متقارن کج است هر گاه $A' = -A$. اگر A یک ماتریس $n \times n$ متقارن کج با درایه‌های مختلط باشد و n عددی فرد، ثابت کنید $\det A = 0$.

۴. ماتریس A ی $n \times n$ بر روی هیأت F متعامد نامیده می‌شود هر گاه $AA' = I$. اگر A متعامد باشد، نشان دهید $\det A = \pm 1$. یک ماتریس متعامد مثال بزنید که به ازای آن $\det A = -1$.

۵. ماتریس A ی $n \times n$ بر روی هیأت اعداد مختلط را یکانی خوانیم هر گاه $A^*AA^* = I$. نمایشگر ترانهاده مزدوج A است). اگر A یکانی باشد، نشان دهید که $|\det A| = 1$.

۶. فرض کنید T و U دو عملگر خطی روی فضای برداری V باشند. ثابت کنید

$$\det(TU) = (\det T)(\det U) \quad (\text{الف})$$

$$\det T \neq 0 \quad (\text{ب}) \quad T \text{ معکوس پذیر است اگر و تنها اگر}$$

۷. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ بر روی K که حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی است، باشد. فرض کنید A صورت بلوکی

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{bmatrix}$$

را داشته باشد. در اینجا A_j ماتریسی $r_j \times r_j$ است. ثابت کنید

$$\det A = (\det A_1)(\det A_2) \dots (\det A_k).$$

۸. گیریم V فضای برداری ماتریسهای $n \times n$ بر روی هیأت F باشد. فرض کنید B عنصر ثابتی از V ، و T_B عملگر خطی روی V تعریف شده توسط $T_B(A) = AB - BA$ باشد. نشان دهید $\det T_B = 0$.

۹. ماتریس A $n \times n$ بر روی هیأتی مفروض است و $A \neq 0$. اگر r عدد صحیح مثبت دلخواهی بین ۱ و n باشد، یک زیرماتریس $r \times r$ از A عبارت است از ماتریس $r \times r$ حاصل از حذف $(n-r)$ سطر و $(n-r)$ ستون از A . رتبه دترمینانی A بزرگترین عدد صحیح مثبت r است که زیرماتریسی $r \times r$ از A دارای دترمینان غیر صفر باشد. ثابت کنید رتبه دترمینانی A برابر رتبه سطری A (= رتبه ستونی A) است.

۱۰. اگر A ماتریسی $n \times n$ بر روی هیأت F باشد، ثابت کنید حداکثر n اسکالر متمایز c در F وجود دارد که $\det(cI - A) = 0$.

۱۱. دو ماتریس $n \times n$ ، A و B بر روی هیأت F داده شده‌اند. نشان دهید که اگر A معکوس پذیر باشد، حداکثر n اسکالر c در F وجود دارد که به ازای آنها ماتریس $cA + B$ معکوس پذیر نیست.

۱۲. اگر V فضای برداری ماتریسهای $n \times n$ بر روی F و B ماتریس $n \times n$ ثابتی بر روی F باشد، فرض کنید L_B و R_B دو عملگر خطی روی V باشند که با $L_B(A) = AB$ و $R_B(A) = BA$ تعریف می‌شوند. نشان دهید

$$\det L_B = (\det B)^n \quad (\text{الف})$$

$$\det R_B = (\det B)^n \quad (\text{ب})$$

۱۳. فرض کنید V فضای برداری همه ماتریسهای $n \times n$ بر روی هیأت اعداد مختلط و B ماتریس $n \times n$ ثابتی بر روی C باشد. عملگر خطی M_B روی V را توسط $M_B(A) = BAB^*$ ، که در آن $B^* = \overline{B}^t$ ، تعریف می‌کنیم. نشان دهید

$$\det M_B = |\det B|^{2n}.$$

حال فرض کنید H مجموعه همه ماتریسهای هرمیتی در V باشد؛ A هرمیتی است هرگاه $A = A^*$. در این صورت H فضایی برداری بر روی هیأت اعداد حقیقی است. نشان دهید تابع T_B تعریف شده توسط $T_B(A) = BAB^*$ عملگری خطی روی فضای برداری حقیقی H است، و سپس نشان دهید $\det T_B = |\det B|^{2n}$. (راهنمایی: در محاسبه $\det T_B$ ، نشان دهید V دارای پایه‌ای متشکل از ماتریسهای هرمیتی است، و سپس نشان دهید $\det T_B = \det M_B$.)

۱۴. فرض کنید A ، B ، C ، و D ماتریسهای $n \times n$ جا بجا شونده‌ای بر روی هیأت F

باشند. نشان دهید دترمینان ماتریس $2n \times 2n$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

برابر $\det(AD - BC)$ است.

۵.۵.۵. مدول

اگر K حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی باشد، هر مدول بر روی K دستگاهی جبری است که مانند فضای برداری عمل می‌کند و در آن K نقش هیأت اسکالرها را برعهده دارد. به‌طور دقیق، گوئیم V یک مدول بر روی K (یا یک K -مدول) است، هر گاه

۱. عملی به نام جمع: $\alpha + \beta \rightarrow (\alpha, \beta)$ روی V یافت شود به‌طوری که تحت آن V گروهی جابجایی باشد

۲. عملی به نام ضرب: $c\alpha \rightarrow (c, \alpha)$ از عناصر α در V و c در K موجود باشد که

$$(c_1 + c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha$$

$$c(\alpha_1 + \alpha_2) = c\alpha_1 + c\alpha_2$$

$$(c_1 c_2)\alpha = c_1(c_2\alpha)$$

$$1\alpha = \alpha.$$

برای منظور ما، مهم‌ترین K -مدولها، مدولهای n تایی K^n هستند، هر چند مدولهای ماتریسی $K^{n \times n}$ نیز مهم‌اند. اگر V مدول دلخواهی باشد، عیناً به‌همان نحو که در مورد فضای برداری عمل کردیم می‌توانیم از ترکیبات خطی، وابستگی خطی، و استقلال خطی صحبت کنیم. باید مواظب باشیم نتایجی از فضاهای برداری را که به عمل تقسیم بر اسکالرهای غیر صفر وابسته‌اند، یعنی اعمالی که به هیأت مربوط‌اند و ممکن است حلقه K فاقد آنها باشد، در مورد V به کار نیندیم. مثلاً، اگر $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ وابسته خطی باشند، نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که یکی از α ها ترکیبی خطی از بقیه آنهاست. این مطلب یافتن پایه در مدول را مشکل‌تر می‌سازد.

یک پایه برای مدول V زیر مجموعه‌ای مستقل خطی است که مدول را پدیدمی‌آورد (یا تولید می‌کند). این همان تعریفی است که در مورد فضای برداری هم ارائه کردیم. خاصیت مهم پایه‌ای چون \mathcal{B} این است که هر عنصر V را می‌توان به‌طور یکتا به صورت ترکیبی خطی از (تعدادی متناهی از) عناصر \mathcal{B} بیان کرد. اگر در ریاضیات اصل انتخاب (ر. ک. پیوست) پذیرفته شود، می‌توان نشان داد که هر فضای برداری دارای پایه است. خواننده بخوبی آگاه است که در هر فضای برداری دلخواهی که توسط تعدادی متناهی بردار پدید آید، پایه هم وجود دارد. اما، برای مدول وضعیت چنین نیست. از

این رو، برای مدولهایی که پایه دارند، و نیز برای مدولهایی که توسط تعدادی متناهی عنصر پدید می‌آیند، نیاز به نامهای خاصی داریم.

تعریف. K -مدول V ، يك مدول آزاد نامیده می‌شود، هرگاه دارای پایه باشد. اگر V دارای پایه‌ای متناهی شامل n عنصر باشد، آنگاه V يك K -مدول آزاد با n مولد نامیده می‌شود.

تعریف. مدول V به‌طور متناهی تولید می‌شود هرگاه شامل زیر مجموعه‌ای متناهی باشد که V را پدید آورد. رتبهٔ مدولی که به‌طور متناهی تولید بشود کوچکترین عدد صحیح مثبت k است که V توسط k عنصر پدید آید.

تکرار می‌کنیم که ممکن است مدولی به‌طور متناهی تولید بشود، بدون آنکه پایه‌ای متناهی داشته باشد. اگر V ، K -مدول آزادی با n مولد باشد، آنگاه V با مدول K^n یکرخت است. اگر $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ پایه‌ای برای V باشد، يك یکرختی که بردار $c_1\beta_1 + \dots + c_n\beta_n$ را به روی n تایی (c_1, \dots, c_n) از K^n بفرستد، وجود دارد. فوراً دیده نمی‌شود که مدول V نمی‌تواند مدولی آزاد با k مولد با شرط $k \neq n$ باشد. به بیان دیگر، واضح نیست که تعداد عناصر هر دو پایهٔ دلخواه V باید لزوماً مساوی باشند. اثبات این حقیقت بر اساس کار برد جالبی از درمینانهاست.

قضیهٔ ۵. فرض کنیم K حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی باشد. اگر V يك K -مدول آزاد با n مولد باشد، آنگاه رتبهٔ V برابر n است.

اثبات. می‌خواهیم ثابت کنیم که V نمی‌تواند توسط تعدادی کمتر از n عنصر از خودش پدید آید. چون V با K^n یکرخت است، باید نشان دهیم که اگر $m < n$ ، مدول K^n توسط n تاییهای $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ پدید نمی‌آید. ماتریس A با سطرهای $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم هر يك از بردارهای $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ از پایهٔ استاندارد ترکیبی خطی از $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ باشد. در این صورت ماتریسی چون P در $K^{n \times m}$ وجود دارد که

$$PA = I.$$

در اینجا I ماتریس همانی $n \times n$ است. گیریم \tilde{A} ماتریس $n \times n$ حاصل از افزودن $n - m$ سطر ۰ در زیر سطرهای A باشد و \tilde{P} ماتریس $n \times n$ داخلی که ستونهای P را به‌عنوان n ستون اول خود دارد. در این صورت

$$\tilde{P}\tilde{A} = I.$$

بنابراین، $\det \tilde{A} \neq 0$. اما چون $m < n$ درایه‌های اقلای يك سطر \tilde{A} همه صفرند. این تناقض نشان می‌دهد که $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ مدول K^n را پدید نمی‌آورند. \square

توجه به این نکته مهم است که قضیهٔ ۵ یکتایی بعد هر فضای برداری (با بعد متناهی)

را ثابت می‌کند. این اثبات که بر وجود تابع دترمینان استوار است با اثباتی که در فصل ۲ عرضه کردیم کاملاً متفاوت است. از قضیه ۵ بر می‌آید که «مدول آزاد از رتبه n با «مدول آزاد با n مولد» یکی است.

اگر V مدولی بر روی K باشد، مدول دوگمان V^* مشکل است از همه توابع خطی f از V در K . اگر V مدول آزادی از رتبه n باشد، آنگاه V^* نیز مدول آزادی از رتبه n است. اثبات این مطلب عیناً همان اثبات در مورد فضاهای برداری است. اگر $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ پایه مرتبی برای V باشد، پایه دوگمان وابسته‌ای چون $\{f_1, \dots, f_n\}$ برای مدول V^* وجود دارد. تابع f_i به هر α از V ، زمین مختص نسبت به $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ را تخصیص می‌دهد:

$$\alpha = f_1(\alpha)\beta_1 + \dots + f_n(\alpha)\beta_n$$

اگر f تابعی خطی روی V باشد، آنگاه

$$f(\alpha) = f(\beta_1)f_1 + \dots + f(\beta_n)f_n.$$

۶.۵. تابع چند خطی

هدف این بخش بیان بحث دترمینان در قالبی است که به اعتقاد ما چهره واقعی دترمینان را می‌نمایاند. برای این منظور، فرمهای چند خطی متناوب روی مدولها را مورد بحث قرار می‌دهیم. این فرمها تعمیم طبیعی دترمینان، آن طور که ما آن را عرضه کردیم، هستند. خواننده‌ای هم که شرح مختصر مدولها در بخش ۵.۵ را نخوانده باشد (یا مایل نباشد که بخواند) نیز می‌تواند این بخش را با بهره‌وری مطالعه کند مشروط بر این که «فضای برداری بر روی F با بعد n » را همواره به جای «مدول آزاد بر روی K از رتبه n » منظور کند.

فرض کنیم K حلقه‌ای جا بجایی با عنصرهمانی و V مدولی بر روی K باشد. اگر r عدد صحیح مثبتی باشد، تابع L از $V^r = V \times V \times \dots \times V$ در K چند خطی نامیده می‌شود، هر گاه $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ به عنوان تابعی از هر α_i ، وقتی α_j های دیگر ثابت نگه داشته شوند، خطی باشد؛ یعنی، هر گاه به ازای هر i

$$L(\alpha_1, \dots, c\alpha_i + \beta_i, \dots, \alpha_r) = cL(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_r) + L(\alpha_1, \dots, \beta_i, \dots, \alpha_r).$$

یک تابع چند خطی روی V^r یک فرم r خطی روی V ، یا یک فرم چند خطی از درجه r روی V نیز نامیده می‌شود. به چنین تابعی گاهی یک r -تانسور روی V نیز گفته می‌شود. دسته همه تساوی چند خطی روی V^r با $M^r(V)$ نشان داده می‌شود. اگر L و M در $M^r(V)$ باشند، آنگاه مجموع $L+M$ ، که به این صورت تعریف می‌شود:

$$(L+M)(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) + M(\alpha_1, \dots, \alpha_r),$$

نیز چند خطی است؛ و اگر c عنصری از K باشد، حاصل ضرب cL ، که به این صورت

تعریف می‌شود:

$$(cL)(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = cL(\alpha_1, \dots, \alpha_r),$$

نیز چندخطی است. بنا براین، $M^r(V)$ یک K -مدول (زیرمدولی از مدول همه توابع از V در K) است.

اگر $r = 1$ ، داریم $M^1(V) = V^*$ که همان مدول دوگان توابع خطی روی V است. از توابع خطی نیز می‌توان برای ساختن مثالهایی از فرمهای چندخطی از مراتب بالاتر استفاده کرد. اگر f_1, \dots, f_r توابعی خطی روی V باشند، تعریف می‌کنیم

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = f_1(\alpha_1) f_2(\alpha_2) \dots f_r(\alpha_r).$$

واضح است که L فرمی r خطی روی V است.

مثال ۹. اگر V مدول باشد، یک فرم r خطی روی V معمولاً یک فرم دوخطی روی V نامیده می‌شود. فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های متعلق به K باشد. در این صورت

$$L(X, Y) = Y^t A X$$

فرم دوخطی L را روی مدول $K^{n \times 1}$ تعریف می‌کند. به‌طور مشابه

$$M(\alpha, \beta) = \alpha A \beta^t$$

فرم دوخطی M را روی K^n تعریف می‌کند.

مثال ۱۰. تابع دترمینان به‌ر ماتریس $n \times n$ عنصر $\det A$ از K را مربوط می‌سازد. اگر $\det A$ به‌عنوان تابعی از سطرهای A در نظر گرفته شود:

$$\det A = D(\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

آنگاه D فرمی n خطی روی K^n است.

مثال ۱۱. به‌دست آوردن عبارتی جبری برای فرم r خطی نوعی، روی مدول K^n آسان است. اگر $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ بردارهایی از V و A ماتریسی $r \times n$ با سطرهای $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ باشد، آنگاه به‌ازای هر تابع L از $M^r(K^n)$

$$\begin{aligned}
 L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) &= L\left(\sum_{j=1}^n A_{1j}\epsilon_j, \alpha_2, \dots, \alpha_r\right) \\
 &= \sum_{j=1}^n A_{1j}L(\epsilon_j, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \\
 &= \sum_{j=1}^n A_{1j}L\left(\epsilon_j, \sum_{k=1}^n A_{2k}\epsilon_k, \dots, \alpha_r\right) \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{1j}A_{2k}L(\epsilon_j, \epsilon_k, \alpha_3, \dots, \alpha_r) \\
 &= \sum_{j,k=1}^n A_{1j}A_{2k}L(\epsilon_j, \epsilon_k, \alpha_3, \dots, \alpha_r).
 \end{aligned}$$

اگر به جای $\alpha_3, \dots, \alpha_r$ به نوبت برابرهایشان بر حسب ترکیبات خطی بردارهای پایه استاندارد را قرار دهیم و $A(i, j)$ را به جای A_{ij} بنویسیم، فرمول زیر به دست می آید:

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^n A(1, j_1) \cdots A(r, j_r) L(\epsilon_{j_1}, \dots, \epsilon_{j_r}). \quad (26-5)$$

در (۲۶-۵) به ازای هر r تایی مانند $J = (j_1, \dots, j_r)$ از اعداد صحیح مثبت بین 1 و n ، یک جمله وجود دارد. تعداد این نوع r تایی ها برابر n^r است. پس، L کاملاً توسط (۲۶-۵) و مقادیر خاص:

$$c_J = L(\epsilon_{j_1}, \dots, \epsilon_{j_r})$$

تخصیص یافته به n^r عنصر $(\epsilon_{j_1}, \dots, \epsilon_{j_r})$ تعیین می شود. همچنین باسانی دیده می شود که اگر به ازای هر r تایی مانند J عنصری چون c_J از K را انتخاب کنیم، آنگاه

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \sum_J A(1, j_1) \cdots A(r, j_r) c_J \quad (27-5)$$

فرمی r خطی روی K^n تعریف می کند.

فرض کنیم L تابعی چندخطی روی V^r باشد و M تابعی چندخطی روی V^s تابع $L \otimes M$ روی V^{r+s} را با

$$(L \otimes M)(\alpha_1, \dots, \alpha_{r+s}) = \quad (28-5)$$

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) M(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{r+s})$$

تعریف می کنیم. اگر تصورمان از V^{r+s} همان $V^r \times V^s$ باشد، آنگاه به ازای α در V^r و β در V^s

$$(L \otimes M)(\alpha, \beta) = L(\alpha)M(\beta).$$

واضح است که $L \otimes M$ روی V^{r+s} چندخطی است. تابع $L \otimes M$ ضرب تانسوری L و M نامیده می‌شود. ضرب تانسوری جابجایی نیست. در واقع، $M \otimes L \neq L \otimes M$ مگر آنکه $L = 0$ یا $M = 0$ ؛ با این وجود، ضرب تانسوری به‌طور مطلوبی با اعمال مدولی در M^r و M^s مربوط است.

لم. فرض کنیم L و L_1 فرمهایی r خطی روی V ، M و M_1 فرمهایی s خطی روی V ، و c عنصری از K باشد.

$$(cL + L_1) \otimes M = c(L \otimes M) + L_1 \otimes M \quad (\text{الف})$$

$$L \otimes (cM + M_1) = c(L \otimes M) + L \otimes M_1 \quad (\text{ب})$$

اثبات. تمرین.

ضرب تانسوری شرکت‌پذیر است؛ یعنی، اگر L ، M ، و N (بترتیب) فرمهایی r ، s ، و t خطی روی V باشند، آنگاه

$$(L \otimes M) \otimes N = L \otimes (M \otimes N).$$

این مطلب نتیجه‌ای آنی از این واقعیت است که عمل ضرب در K شرکت‌پذیر است. بنابراین، اگر $L_1, \dots, L_r, L_k, \dots, L_k$ توابعی چندخطی روی $V^{r_1}, \dots, V^{r_k}, \dots, V^{r_k}$ باشند، آنگاه ضرب تانسوری

$$L = L_1 \otimes \dots \otimes L_k$$

به‌عنوان تابعی چندخطی روی V^r که در آن $r = r_1 + \dots + r_k$ بدون ابهام تعریف می‌شود. قبلاً حالت خاصی از این را ذکر کردیم. اگر f_1, \dots, f_r توابعی خطی روی V باشند، آنگاه ضرب تانسوری

$$L = f_1 \otimes \dots \otimes f_r$$

توسط

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = f_1(\alpha_1) \dots f_r(\alpha_r)$$

تعریف می‌شود.

قضیه ۶. فرض کنیم K حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی باشد. اگر V یک K -مدول آزاد از رتبه n باشد، آنگاه $M^r(V)$ یک K -مدول آزاد از رتبه n^r است؛ در واقع، اگر $\{f_1, \dots, f_n\}$ پایه‌ای برای مدول دوگان V^* باشد، آنگاه n^r ضرب تانسوری

$$f_{j_1} \otimes \dots \otimes f_{j_r}, \quad 1 \leq j_1 \leq n, \dots, 1 \leq j_r \leq n$$

پایه‌ای برای $M^r(V)$ تشکیل می‌دهند.

اثبات. فرض کنیم $\{f_1, \dots, f_n\}$ پایه‌ی مرتبی برای V^* باشد که دوگان پایه‌ی

داریم. به ازای هر بردار α از V ،

$$\alpha = f_1(\alpha)\beta_1 + \dots + f_n(\alpha)\beta_n.$$

اکنون به محاسبه‌ای نظیر آنچه در مثال ۱۱ انجام شد می‌پردازیم. اگر L فرمی r خطی روی V و $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ عناصری از V باشند، آنگاه بنا بر (۲۶-۵)

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \sum_{j_1, \dots, j_r} f_{j_1}(\alpha_1) \dots f_{j_r}(\alpha_r) L(\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_r}).$$

به بیان دیگر،

$$L = \sum_{j_1, \dots, j_r} L(\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_r}) f_{j_1} \otimes \dots \otimes f_{j_r}. \quad (29-5)$$

این رابطه نشان می‌دهد که n^r ضرب تانسوری

$$E_J = f_{j_1} \otimes \dots \otimes f_{j_r} \quad (30-5)$$

که با r تاییهای $J = (j_1, \dots, j_r)$ معین می‌شوند مدول $M^r(V)$ را پدید می‌آورند. بنا به دلیل زیر، r فرمهای مختلف E_J مستقل هستند. فرض کنیم به ازای هر J ، عنصری چون c_J در K وجود داشته باشد و تابع چندخطی

$$L = \sum_J c_J E_J \quad (31-5)$$

را تشکیل داده باشیم. توجه کنید که اگر $I = (i_1, \dots, i_r)$ ، آنگاه

$$E_J(\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_r}) = \begin{cases} 0, & I \neq J \\ 1, & I = J. \end{cases}$$

بنابراین از (۳۱-۵) مشاهده می‌شود که

$$c_I = L(\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_r}). \quad (32-5)$$

بخصوص، اگر $L = 0$ ، آنگاه به ازای هر r تایی I ، $c_I = 0$. \square

تعریف. فرض کنیم L فرمی r خطی K -مدول V باشد. گوئیم L متناوب است، در صورتی که وقتی $\alpha_i = \alpha_j$ ، به ازای $i \neq j$ ، آنگاه $L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = 0$.

اگر L تابع چندخطی متناوبی روی V^r باشد، آنگاه

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_r) = -L(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_r).$$

به بیان دیگر، اگر جای دو بردار (با نمایه‌های مختلف) را در r تایی $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ تعویض کنیم، مقدار L تغییر علامت می‌دهد. چون هر جایگشت σ حاصل ضربی از ترانزهاست، می‌بینیم که $L(\alpha_{\sigma_1}, \dots, \alpha_{\sigma_r}) = (\text{sgn } \sigma)L(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$.

دسته همه فرمهای مخطی متناوب روی V را با $\Lambda^r(V)$ نشان می‌دهیم. باید روشن باشد که $\Lambda^r(V)$ زیرمدولی از $M^r(V)$ است.

مثال ۱۴. قبلاً در این فصل نشان دادیم که روی مدول K^n ، دقیقاً یک فرم n خطی متناوب D با خاصیت $D(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = 1$ وجود دارد. همچنین در قضیه ۲ نشان دادیم که اگر L فرم دلخواهی از $\Lambda^n(K^n)$ باشد، آنگاه

$$L = L(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)D.$$

به عبارت دیگر، $\Lambda^n(K^n)$ ، K -مدولی آزاد از رتبه ۱ است. گذشته از این، فرمول صریح (۱۵-۵) را برای D به دست آوردیم. بر حسب نمادی که جدیداً به کار می‌بریم، این فرمول را می‌توان به صورت

$$D = \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) f_{\sigma_1} \otimes \dots \otimes f_{\sigma_n} \quad (۳۳-۵)$$

هم نوشت. در اینجا f_1, \dots, f_n توابع مختصی استانده روی K^n هستند و مجموع بروی $n!$ جایگشت مختلف σ از مجموعه $\{1, \dots, n\}$ گسترش دارد. اگر درمینان ماتریس A را به صورت

$$\det A = \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) A(\sigma_1, 1) \dots A(\sigma_n, n)$$

بنویسیم، آنگاه عبارت متفاوتی برای D به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} D(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) f_1(\alpha_{\sigma_1}) \dots f_n(\alpha_{\sigma_n}) \quad (۳۴-۵) \\ &= \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) L(\alpha_{\sigma_1}, \dots, \alpha_{\sigma_n}) \end{aligned}$$

که در آن $L = f_1 \otimes \dots \otimes f_n$

یک روش عمومی برای مربوط ساختن فرمی متناوب به فرمی چندخطی وجود دارد. اگر L فرمی r خطی روی مدول V باشد و σ جایگشتی از $\{1, \dots, r\}$ ، با تعریف

$$L_{\sigma}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = L(\alpha_{\sigma_1}, \dots, \alpha_{\sigma_r})$$

تابع r خطی دیگر L_{σ} به دست می‌آید. اگر بر حسب اتفاق L متناوب باشد، آنگاه $L_{\sigma} = (\text{sgn } \sigma)L$. اکنون، به ازای هر L از $M^r(V)$ تابع $M^r(V)$ تابع $\pi_r L$ را بنا بر

$$\pi_r L = \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) L_{\sigma} \quad (۳۵-۵)$$

تعریف می‌کنیم، بدین معنی که

$$(\pi_r L)(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) L(\alpha_{\sigma_1}, \dots, \alpha_{\sigma_r}). \quad (۳۶-۵)$$

نم. تبدیلی خطی از $M'(V)$ در $\Lambda^r(V)$ است. اگر L در $\Lambda^r(V)$ باشد، آنگاه

$$\pi_r L = r! L$$

اثبات. فرض کنیم τ جایگشت دلخواهی از $\{1, \dots, r\}$ باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} (\pi_r L)(\alpha_{\tau_1}, \dots, \alpha_{\tau_r}) &= \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) L(\alpha_{\tau\sigma_1}, \dots, \alpha_{\tau\sigma_r}) \\ &= (\operatorname{sgn} \tau) \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \tau\sigma) L(\alpha_{\tau\sigma_1}, \dots, \alpha_{\tau\sigma_r}). \end{aligned}$$

اگر σ همه جایگشتهای $\{1, \dots, r\}$ را (یکبار) احراز کند، $\tau\sigma$ نیز چنین می‌کند. بنابراین،

$$(\pi_r L)(\alpha_{\tau_1}, \dots, \alpha_{\tau_r}) = (\operatorname{sgn} \tau) (\pi_r L)(\alpha_1, \dots, \alpha_r),$$

ولذا، $\pi_r L$ فرمی متناوب است.

اگر L در $\Lambda^r(V)$ باشد، آنگاه به‌ازای هر σ داریم

$$L(\alpha_{\sigma_1}, \dots, \alpha_{\sigma_r}) = (\operatorname{sgn} \sigma) L(\alpha_1, \dots, \alpha_r);$$

از این‌رو، $\square \pi_r L = r! L$

در (۳۳-۵) نشان دادیم که تابع دترمینان D از $\Lambda^n(K^n)$ عبارت است از

$$D = \pi_n(f_1 \otimes \dots \otimes f_n).$$

در اینجا f_1, \dots, f_n توابع مختصی استانده روی K^n هستند. درباره آخرین لم، نکته مهمی هست که باید آن را متذکر شویم. اگر K هیأتی با سرشت نمای صفر و $r!$ در K معکوس پذیر باشد، آنگاه π فضای $M'(V)$ را به‌روی $\Lambda^r(V)$ می‌نگارد. در واقع، در این حالت به‌کار بردن نگاشت $\pi_1 = (1/r!) \pi$ به‌جای π از یک دیدگاه، طبیعی‌تر است، زیرا π_1 نگاشتی تصویری از $M'(V)$ به‌روی $\Lambda^r(V)$ است؛ یعنی، نگاشتی است خطی از $M'(V)$ به‌روی $\Lambda^r(V)$ با این خاصیت که $\pi_1(L) = L$ اگر و تنها اگر L در $\Lambda^r(V)$ باشد.

قضیه ۷. فرض کنیم K حلقه‌ای جایجایی با عنصرهمانی و V ، K -مدول آزادی از رتبه n باشد. اگر $r > n$ ، آنگاه $\Lambda^r(V) = \{0\}$. اگر $1 \leq r \leq n$ ، آنگاه $\Lambda^r(V)$ ، K -مدول آزادی از رتبه $\binom{n}{r}$ است.

اثبات. فرض کنیم $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ پایه مرتبی برای V با پایه دوگان $\{f_1, \dots, f_n\}$ باشد. اگر L در $M'(V)$ باشد، داریم

$$L = \sum_J L(\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_r}) f_{j_1} \otimes \dots \otimes f_{j_r} \quad (۳۷-۵)$$

که در آن مجموع به‌ازای همه رتاییهای $J = (j_1, \dots, j_r)$ از اعداد صحیح بین ۱ و n محاسبه می‌شود. اگر L متناوب و دوتا از نمایه‌های j_r مساوی باشند، آنگاه

$$L(\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_r}) = 0.$$

اگر $r > n$ ، آنگاه در هر r تایی مانند J عددی صحیح باید تکرار بشود. از این رو، اگر $r > n$ آنگاه $\Lambda^r(V) = \{0\}$.

حال فرض می‌کنیم $1 \leq r \leq n$. اگر L در $\Lambda^r(V)$ باشد، مجموع در (۳۷-۵) لازم است تنها به‌ازای آن r تاییهای J محاسبه شود که به‌ازای آنها j_1, \dots, j_r متمایز هستند؛ زیرا همه جملات دیگر 0 می‌باشند. هر r تایی از اعداد صحیح متمایز بین 1 و n جایگشتی از یک r تایی $J = (j_1, \dots, j_r)$ است که $j_1 < \dots < j_r$. این نوع خاص از r تاییها یک r -بُز از $\{1, \dots, n\}$ نامیده می‌شود. تعداد چنین برهائی

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

است.

r -بر ثابت J را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم L_J مجموع همه جملاتی از (۳۷-۵) باشد که با جایگشتهای J متناظر هستند. اگر σ جایگشتی از $\{1, \dots, r\}$ باشد، آنگاه

$$L(\beta_{j_{\sigma_1}}, \dots, \beta_{j_{\sigma_r}}) = (\text{sgn } \sigma) L(\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_r}).$$

پس

$$L_J = L(\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_r}) D_J \quad (38-5)$$

که در آن

$$D_J = \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) f_{j_{\sigma_1}} \otimes \dots \otimes f_{j_{\sigma_r}} \quad (39-5)$$

$$= \pi_r(f_{j_1} \otimes \dots \otimes f_{j_r}).$$

از (۳۹-۵) درمی‌یابیم که همه D_J ها متناوب هستند و به‌ازای هر L در $\Lambda^r(V)$

$$L = \sum_{J \text{ برهائی}} L(\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_r}) D_J. \quad (40-5)$$

ادعا این است که $\binom{n}{r}$ فرم D_J پایه‌ای برای $\Lambda^r(V)$ تشکیل می‌دهند. قبلاً دیده‌ایم که

اینها $\Lambda^r(V)$ را پدید می‌آورند. با آسانی دیده می‌شود که این فرمها مستقل خطی هم هستند؛ زیرا، اگر برهائی $I = (i_1, \dots, i_r)$ و $J = (j_1, \dots, j_r)$ داده شده باشند، آنگاه

$$D_J(\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_r}) = \begin{cases} 1, & I=J \\ 0, & I \neq J \end{cases}. \quad (41-5)$$

حال فرض کنیم به‌ازای هر r ، اسکالری چون c_r داشته باشیم و

$$L = \sum_J c_J D_J$$

را تعریف کنیم. از (۴۰-۵) و (۴۱-۵) نتیجه می گیریم

$$c_I = L(\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_r}).$$

بخصوص، اگر $L = 0$ ، آنگاه به ازای هر بر I داریم $c_I = 0$. □

نتیجه. اگر V ، K ممدول آزادی از رتبه n باشد، آنگاه $\Lambda^n(V)$ ، K -مدولی آزاد از رتبه 1 است. اگر T عملگری خطی V باشد، عنصر یکتایی چون c در K یافت می شود که به ازای هر فرم n خطی متناوب L در V

$$L(T\alpha_1, \dots, T\alpha_n) = cL(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

اثبات. اگر L در $\Lambda^n(V)$ باشد، آنگاه بوضوح ضابطه

$$L_T(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = L(T\alpha_1, \dots, T\alpha_n)$$

فرم n خطی متناوب L_T را تعریف می کند. فرض کنیم M مولدی برای $\Lambda^n(V)$ ، که مدولی از رتبه 1 است، باشد. هر L در $\Lambda^n(V)$ ، به طور یکتا به صورت $L = aM$ ، به ازای یک a در K ، قابل بیان است. بویژه، به ازای c معینی $M_T = cM$ برای $L = aM$ داریم

$$L_T = (aM)_T$$

$$= aM_T$$

$$= a(cM)$$

$$= c(aM)$$

$$= cL. \quad \square$$

طبیعی است که عنصر c در نتیجه اخیر را دترمینان T بنامیم. در حالت $r = n$ (وقتی که تنها یک بر $J = (1, \dots, n)$ وجود دارد) از (۳۹-۵) نتیجه می شود که دترمینان T برابر دترمینان ماتریسی است که T را در هر پایه مرتب $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ نمایش دهد. ببینیم چرا. در پایه j, i این ماتریس نمایش برابر است با

$$A_{ij} = f_j(T\beta_i),$$

ولذا

$$\begin{aligned} D_J(T\beta_1, \dots, T\beta_n) &= \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) A(1, \sigma_1) \cdots A(n, \sigma_n) \\ &= \det A. \end{aligned}$$

از طرف دیگر،

$$\begin{aligned} D_J(T\beta_1, \dots, T\beta_n) &= (\det T) D_J(\beta_1, \dots, \beta_n) \\ &= \det T. \end{aligned}$$

اهمیت این تذکرها در این است که با کمک قضیه ۷ و نتیجه آن، تعریفی برای دترمینان عملگرهای خطی به دست می آوریم که بستگی به شناخت دترمینان ماتریسها ندارد. سپس می توانیم دترمینان ماتریسها را بر حسب دترمینان عملگرها، به جای عکس این طریق، تعریف کنیم.

حال می خواهیم قدری بیشتر در مورد فرمهای r خطی متناوب خاص D_r ، که در (۳۹-۵) آنها را به پایه $\{f_1, \dots, f_n\}$ برای V^* مربوط ساختیم، گفتگو کنیم. درک این نکته مهم است که $D_r(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ دترمینان ماتریس $r \times r$ معینی است. اگر

$$A_{ij} = f_j(\alpha_i), \quad 1 \leq i \leq r, \quad 1 \leq j \leq n$$

یعنی، اگر

$$\alpha_i = A_{i1}\beta_1 + \dots + A_{in}\beta_n, \quad 1 \leq i \leq r$$

و J بر r تایی (j_1, \dots, j_r) باشد، آنگاه

$$D_r(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) A(1, j_{\sigma_1}) \dots A(r, j_{\sigma_r}) \quad (۴۲-۵)$$

$$= \det \begin{bmatrix} A(1, j_1) & \dots & A(1, j_r) \\ \vdots & & \vdots \\ A(r, j_1) & \dots & A(r, j_r) \end{bmatrix}.$$

پس، $D_r(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ برابر دترمینان ماتریسی $r \times r$ است که از ستونهای j_1, \dots, j_r ماتریسی $r \times n$ که $(n$ تاییهای مختصات) $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ را به عنوان سطرهای خود دارد، شکل می گیرد. نماد دیگری که گاهی برای این دترمینان مورد استفاده قرار می گیرد، عبارت است از

$$D_r(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \frac{\partial(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}{\partial(\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_r})}. \quad (۴۳-۵)$$

بر مبنای این نماد، اثبات قضیه ۷ نشان می دهد که هر فرم r خطی متناوب L می تواند نسبت به پایه ای چون $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ توسط معادله

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \quad (۴۴-۵)$$

$$\sum_{j_1 < \dots < j_r} \frac{\partial(\alpha_1, \dots, \alpha_r)}{\partial(\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_r})} L(\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_r})$$

بیان شود.

۷.۵. حلقه گراسمان

بسیاری از خواص مهم دترمینانها و فرمهای چندخطی متناوب، به بهترین وجه بر حسب يك عمل ضرب روی فرمها، به نام ضرب خارجی، تشریح می شوند. اگر L و M ، بترتیب فرمهای r و s خطی متناوبی روی مدول V باشند، آنگاه ضربی وابسته به L و M ، یعنی ضرب تانسوری $L \otimes M$ ، وجود دارد. ولی، این ضرب فرمی متناوب نیست، مگر آنکه $L = 0$ یا $M = 0$ ؛ با این وجود، راهی طبیعی برای تصویر این ضرب در $\Lambda^{r+s}(V)$ در دست هست. به نظر می رسد که

$$L \cdot M = \pi_{r+s}(L \otimes M) \quad (۴۵-۵)$$

ضرب «طبیعی» فرمهای متناوب باشد. ولی، آیا این طور است؟
بیاید مثال خاصی را در نظر بگیریم. فرض کنیم V مدول K^n ، و f_1, \dots, f_n توابع مختصی استانده روی K^n باشند. اگر $i \neq j$ ، آنگاه

$$f_i \cdot f_j = \pi_2(f_i \otimes f_j)$$

تابع (دترمینان)

$$D_{ij} = f_i \otimes f_j - f_j \otimes f_i$$

است که با (۳۹-۵) تعریف می شود. حال فرض کنیم k نمایه ای متفاوت با i و j باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} D_{ij} \cdot f_k &= \pi_3[(f_i \otimes f_j - f_j \otimes f_i) \otimes f_k] \\ &= \pi_3(f_i \otimes f_j \otimes f_k) - \pi_3(f_j \otimes f_i \otimes f_k). \end{aligned}$$

اثبات لم بعد از معادله (۳۶-۵) نشان می دهد که به ازای هر فرم r خطی مانند L و هر جایگشت σ از $\{1, \dots, r\}$ ،

$$\pi_r(L_\sigma) = \text{sgn } \sigma \pi_r(L).$$

از این رو، $D_{ij} \cdot f_k = 2\pi_3(f_i \otimes f_j \otimes f_k)$ با محاسبه ای مشابه

$$f_i \cdot D_{jk} = 2\pi_3(f_i \otimes f_j \otimes f_k).$$

بنابراین داریم

$$(f_i \cdot f_j) \cdot f_k = f_i \cdot (f_j \cdot f_k).$$

تمام این مطالب بسیار نویددهنده به نظر می رسند. اماگیری هم وجود دارد. با وجود محاسبه ای که هم اکنون به انجام رساندیم، به اصطلاح ضرب داده شده در (۴۵-۵) شرکت پذیر نیست. در واقع، اگر i نمایه ای متفاوت با i, j و k باشد، آنگاه می توان با

محاسبه‌ای نشان داد که

$$D_{ij} \cdot D_{kl} = \Psi \pi_{\Psi}(f_i \otimes f_j \otimes f_k \otimes f_l)$$

و نیز

$$(D_{ij} \cdot f_k) \cdot f_l = \epsilon \pi_{\Psi}(f_i \otimes f_j \otimes f_k \otimes f_l).$$

پس عموماً

$$(f_i \cdot f_j) \cdot (f_k \cdot f_l) \neq [(f_i \cdot f_j) \cdot f_k] \cdot f_l$$

و می‌بینیم که اولین تلاش ما برای یافتن ضرب به‌عملی شرکت‌ناپذیر منجر شد. اگر خواننده برای نشان‌دادن شرکت‌ناپذیری، ارائه‌ی اثبات مستقیم دو معادله را امری نسبتاً ملال‌آور یا بد نباید متعجب شود. خصلت موضوع این است، و اینکه وجود دستوری عمومی کار را به‌طور قابل ملاحظه‌ای ساده می‌کند هم نمونه است.

فرض کنیم L فرمی r خطی و M فرمی s خطی روی مدول V باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} \pi_{r+s}((\pi_r L) \otimes (\pi_s M)) &= \pi_{r+s} \left(\sum_{\sigma, \tau} (\text{sgn } \sigma) (\text{sgn } \tau) L_{\sigma} \otimes M_{\tau} \right) \\ &= \sum_{\sigma, \tau} (\text{sgn } \sigma) (\text{sgn } \tau) \pi_{r+s}(L_{\sigma} \otimes M_{\tau}) \end{aligned}$$

که در آن σ بروی گروه متقارن S_r متشکل از همه جایگشت‌های $\{1, \dots, r\}$ ، و τ بروی S_s تغییر می‌کند. هر جفت σ و τ ، عنصر (σ, τ) از S_{r+s} را به‌دست می‌دهد که r عنصر اول $\{1, \dots, r+s\}$ را طبق σ و s عنصر آخر آن را طبق τ جای می‌گرداند. روشن است که

$$\text{sgn}(\sigma, \tau) = (\text{sgn } \sigma) (\text{sgn } \tau)$$

و

$$(L \otimes M)_{(\sigma, \tau)} = L_{\sigma} \otimes M_{\tau}.$$

بنابراین

$$\pi_{r+s}[(\pi_r L) \otimes (\pi_s M)] = \sum_{\sigma, \tau} \text{sgn}(\sigma, \tau) \pi_{r+s}[(L \otimes M)_{(\sigma, \tau)}].$$

اما، قبلاً مشاهده کرده‌ایم که

$$\text{sgn}(\sigma, \tau) \pi_{r+s}[(L \otimes M)_{(\sigma, \tau)}] = \pi_{r+s}(L \otimes M).$$

از این‌رو، نتیجه می‌گیریم که

$$\pi_{r+s}[(\pi_r L) \otimes (\pi_s M)] = r!s! \pi_{r+s}(L \otimes M). \quad (46-5)$$

این فرمول محاسبات چندی را ساده می‌کند. مثلاً، فرض کنیم یک r -بُر مانند $I = (i_1, \dots, i_r)$ ، و یک s -بُر مانند $J = (j_1, \dots, j_s)$ در دست باشد. برای سادگی کار، همچنین فرض کنیم

$$i_1 < \dots < i_r < j_1 < \dots < j_s.$$

در این صورت توابع دترمینان وابسته

$$D_I = \pi_r(E_I)$$

$$D_J = \pi_s(E_J)$$

را که در آنها E_I و E_J توسط (۳۰-۵) تعیین می‌شوند، خواهیم داشت. با استفاده از (۴۶-۵) بلافاصله می‌بینیم که

$$\begin{aligned} D_I \cdot D_J &= \pi_{r+s}[\pi_r(E_I) \otimes \pi_s(E_J)] \\ &= r!s! \pi_{r+s}(E_I \otimes E_J). \end{aligned}$$

چون $E_I \otimes E_J = E_{I \cup J}$ ، نتیجه می‌گیریم که

$$D_I \cdot D_J = r!s! D_{I \cup J}.$$

این فرمول حاکی است که شرکت ناپذیری ضرب (۴۵-۵)، از این واقعیت ناشی می‌شود که $D_I \cdot D_J \neq D_{I \cup J}$. گذشته از همه اینها، حاصل ضرب D_I و D_J باید $D_{I \cup J}$ باشد. برای اصلاح وضع، لازم است ضرب جدیدی به نام ضرب خارجی (یا ضرب گوه‌ای) فرم خطی متناوب L و فرم S خطی متناوب M را به صورت

$$L \wedge M = \frac{1}{r!s!} \pi_{r+s}(L \otimes M) \quad (۴۷-۵)$$

تعریف کنیم. در این صورت، برای توابع دترمینان روی K^n داریم

$$D_I \wedge D_J = D_{I \cup J}$$

و انصاف این است که به ضرب صحیح فرمهای چندخطی متناوب دست یافته باشیم. متأسفانه، (۴۷-۵) برای عمومی‌ترین حالت تحت بررسی فاقد معنی است، چرا که ممکن است در حلقه K قادر به تقسیم بر $r!s!$ نباشیم. اگر K هیأتی با سرشت نمای صفر باشد، آنگاه (۴۷-۵) بامعنی است و خیلی سریع می‌توان نشان داد که ضرب گوه‌ای شرکت‌پذیر است.

قضیه ۸. فرض کنیم K هیأتی با سرشت نمای صفرو V فضایی برداری بر روی K باشد. در این صورت ضرب خارجی عملی شرکت‌پذیر روی فرمهای چند خطی متناوب روی V است. به بیان دیگر، اگر L, M, N فرمهای چند خطی متناوبی روی V بترتیب از درجات r, s, t باشند، آنگاه

$$(L \wedge M) \wedge N = L \wedge (M \wedge N).$$

اثبات. از (۴۷-۵) نتیجه می‌شود که به ازای هر دو اسکالر دلخواه c و d

$$cd(L \wedge M) = cL \wedge dM$$

$$r!s!t![(L \wedge M) \wedge N] = r!s!(L \wedge M) \wedge t!N$$

و چون $\pi_i(N) = t!N$ داریم

$$\begin{aligned} r!s!t![(L \wedge M) \wedge N] &= \pi_{r+s}(L \otimes M) \wedge \pi_t(N) \\ &= \frac{1}{(r+s)!} \frac{1}{t!} \pi_{r+s+t}[\pi_{r+s}(L \otimes M) \otimes \pi_t(N)]. \end{aligned}$$

اکنون از (۴۶-۵) مشهود است که

$$r!s!t![(L \wedge M) \wedge N] = \pi_{r+s+t}(L \otimes M \otimes N).$$

با محاسبه‌ای مشابه

$$r!s!t![L \wedge (M \wedge N)] = \pi_{r+s+t}(L \otimes M \otimes N)$$

و بنابراین، $\square \cdot (L \wedge M) \wedge N = L \wedge (M \wedge N)$

اکنون به حالت عمومی که در آن تنها فرض می‌شود K یک حلقه جایجایی با عنصر همانی است، بازمی‌گردیم. مسأله اول ما این است که (۴۷-۵) را با تعریفی هم‌ارز که در حالت عمومی هم‌کار کند، عوض کنیم. اگر L و M فرمهای چندخطی متناوبی، بترتیب از درجات r و s ، باشند می‌خواهیم فرم چندخطی متناوب متعارف $L \wedge M$ از درجه $r+s$ را که

$$r!s!(L \wedge M) = \pi_{r+s}(L \otimes M)$$

بسازیم.

اکنون به یادآوری چگونگی تعریف $\pi_{r+s}(L \otimes M)$ می‌پردازیم. به هر جایگشت σ از $\{1, \dots, r+s\}$ تابع چندخطی

$$(\operatorname{sgn} \sigma)(L \otimes M)_\sigma \quad (48-5)$$

را که در آن

$$(L \otimes M)_\sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_{r+s}) = (L \otimes M)(\alpha_{\sigma(1)}, \dots, \alpha_{\sigma(r+s)})$$

مربوط می‌سازیم و توابع (۴۸-۵) را به‌ازای همه جایگشتهای σ جمع می‌کنیم. $(r+s)!$ جایگشت وجود دارد؛ اما، به‌علت متناوب بودن L و M بسیاری از توابع (۴۸-۵) مساوی‌اند. در واقع، حداکثر

$$\frac{(r+s)!}{r!s!}$$

تابع متمایز (۴۸-۵) وجود دارد. ببینیم چرا. فرض کنیم S_{r+s} مجموعه جایگشتهای $\{1, \dots, r+s\}$ ، یعنی گروه متقارن از درجه $r+s$ باشد. نظیر اثبات (۴۶-۵) زیر-

مجموعه G متشکل از جایگشت‌های σ را که مجموعه‌های $\{1, 0, \dots, r\}$ و $\{r+1, 0, \dots, r+s\}$ را در داخل خودشان جای می‌گردانند، جدا می‌کنیم. به بیان دیگر، σ در G است، هر گاه به‌ازای هر i بین 1 و r داشته باشیم $1 \leq \sigma i \leq r$. (لزوماً نتیجه می‌شود که به‌ازای هر j بین $r+1$ و $r+s$ ، $r+1 \leq \sigma j \leq r+s$). حال G زیر-گروهی از S_{r+s} است، پس اگر σ و τ در G باشند، آنگاه $\sigma\tau^{-1}$ نیز در G است. آشکار است که G ، $r!s!$ عضو دارد.

حال نگاشت

$$S_{r+s} \xrightarrow{\psi} M^{r+s}(V)$$

تعریف شده توسط

$$\psi(\sigma) = (\text{sgn } \sigma)(L \otimes M)_\sigma$$

در دست است. چون L و M متناوب هستند، به‌ازای هر γ در G

$$\psi(\gamma) = L \otimes M.$$

بنابراین، چون هر فرم $r+s$ خطی N روی V ، $(N_\sigma)_\tau = N_{\tau\sigma}$

به‌ازای هر γ در G و τ در S_{r+s} داریم $\psi(\tau\gamma) = \psi(\tau)$.

این مطلب نشان می‌دهد که نگاشت ψ روی هر هم-مجموعه (چپ) τG از زیر گروه G ثابت است. اگر τ_1 و τ_2 در S_{r+s} باشند، برحسب اینکه $\tau_1^{-1}\tau_2$ در G باشد یا نباشد هم-مجموعه‌های $\tau_1 G$ و $\tau_2 G$ یا مساوی اند یا مجزا. هر هم-مجموعه شامل $r!s!$ عنصر است، از این رو

$$\frac{(r+s)!}{r!s!}$$

هم-مجموعه متمایز وجود دارد. اگر S_{r+s}/G دسته هم-مجموعه‌ها را نشان دهد، آنگاه ψ تابعی روی S_{r+s}/G تعریف می‌کند؛ بدین معنی که، بنا بر آنچه نشان داده‌ایم، تابعی چون $\tilde{\psi}$ روی آن مجموعه وجود دارد که به‌ازای هر τ در S_{r+s}

$$\psi(\tau) = \tilde{\psi}(\tau G).$$

اگر H هم-مجموعه چپی از G باشد، آنگاه به‌ازای هر τ در H ، $\tilde{\psi}(H) = \psi(\tau)$. اکنون ضرب خارجی فرمهای چندخطی متناوب L و M از درجه‌های r و s را با

قرار دادن

$$L \wedge M = \sum_H \tilde{\psi}(H) \quad (49-5)$$

که در آن H روی S_{r+s}/G تغییر می‌کند، تعریف می‌کنیم. روش دیگر بیان تعریف $L \wedge M$ چنین است. فرض کنیم S مجموعه دلخواهی از جایگشت‌های $\{1, 0, \dots, r+s\}$

باشد که از هر هم-مجموعهٔ چپ G دقیقاً يك عنصر را شامل است. در این صورت

$$L \wedge M = \sum_{\sigma} (\text{sgn} \sigma) (L \otimes M)_{\sigma} \quad (50-5)$$

که در آن σ بر روی S تغییر می‌کند. واضح است که

$$r!s!L \wedge M = \pi_{r+s}(L \otimes M)$$

و از این رو، تعریف جدید وقتی K هیأتی با سرشت نمای صفر باشد با (۴۷-۵) هم‌ارز است.

قضیه ۹. فرض کنیم K حلقه‌ای جابجایی با عنصر همانی و V مدولی دوی K باشد. در این صورت ضرب خارجی عملی شرکت‌پذیر دوی فرمهای چند خطی متناوب دوی V است. به بیان دیگر، اگر L, M, N فرمهای چند خطی متناوبی دوی V ، برترتیب از درجات r, s, t و r, s, t باشند، آنگاه

$$(L \wedge M) \wedge N = L \wedge (M \wedge N).$$

اثبات. گرچه اثبات قضیه ۸ در اینجا به‌کار نمی‌آید، اما در چگونگی اثبات حالت عمومی الهام بخش است. فرض کنیم $G(r, s, t)$ زیر گروهی از S_{r+s+t} متشکل از جایگشتهایی باشد که مجموعه‌های

$$\{1, \dots, r\}, \quad \{r+1, \dots, r+s\}, \quad \{r+s+1, \dots, r+s+t\}$$

را داخل خودشان جای می‌گردانند. در این صورت به‌ازای همهٔ μ های واقع در هم-مجموعهٔ چپ مفروضی از $G(r, s, t)$ ، توابع چند خطی $(\text{sgn} \mu)(L \otimes M \otimes N)_{\mu}$ مساوی‌اند. از هر هم-مجموعهٔ چپ $G(r, s, t)$ عنصری انتخاب می‌کنیم و E را مجموع جملات متناظر $(\text{sgn} \mu)(L \otimes M \otimes N)_{\mu}$ می‌گیریم. آنگاه E مستقل از نحوهٔ انتخاب نمایشگرهای μ است و

$$r!s!t!E = \pi_{r+s+t}(L \otimes M \otimes N).$$

نشان خواهیم داد که $(L \wedge M) \wedge N$ و $L \wedge (M \wedge N)$ هر دو با E متساوی هستند.

فرض کنیم $G(r+s, t)$ زیر گروهی از S_{r+s+t} باشد که مجموعه‌های

$$\{1, \dots, r+s\}, \quad \{r+s+1, \dots, r+s+t\}$$

را در داخل خودشان جای می‌گردانند. فرض کنیم T مجموعه‌ای از جایگشتهای $G(r+s, t)$ باشد، که شامل دقیقاً يك عنصر از هر هم-مجموعهٔ چپ $G(r+s, t)$ است. بنا بر (۵۰-۵)

$$(L \wedge M) \wedge N = \sum_{\tau} (\text{sgn} \tau) [(L \wedge M) \otimes N]_{\tau}$$

که در آن مجموع بر روی همه جایگشت‌های τ در T نوشته می‌شود. حال فرض کنیم $G(r, s)$ زیر گروهی از S_{r+s} باشد که مجموعه‌های

$$\{1, \dots, r\}, \{r+1, \dots, r+s\}$$

را در داخل خودشان جای می‌گردانند. گیرسیم S مجموعه دلخواهی از جایگشت‌های $\{1, \dots, r+s\}$ باشد که شامل دقیقاً یک عنصر از هر هم-مجموعه چپ $G(r, s)$ است. از (۵-۵) و آنچه در بالا نشان دادیم، نتیجه می‌شود که

$$(L \wedge M) \wedge N = \sum_{\sigma, \tau} (\text{sgn } \sigma)(\text{sgn } \tau) [(L \otimes M)_{\sigma} \otimes N]_{\tau}$$

که در آن مجموع به ازای همه جفت‌های σ, τ در $S \times T$ محاسبه می‌شود. اگر توافق کنیم که هر σ در S_{r+s} را با عنصری از S_{r+s+s} ، که روی $\{1, \dots, r+s\}$ با σ توافق داشته و روی $\{r+s+1, \dots, r+s+t\}$ برابر عنصر همانی باشد یکی بگیریم، آنگاه می‌توانیم بنویسیم

$$(L \wedge M) \wedge N = \sum_{\sigma, \tau} \text{sgn}(\sigma\tau) [(L \otimes M \otimes N)_{\sigma}]_{\tau}$$

اما

$$[(L \otimes M \otimes N)_{\sigma}]_{\tau} = (L \otimes M \otimes N)_{\tau\sigma}$$

بنابراین

$$(L \wedge M) \wedge N = \sum_{\sigma, \tau} \text{sgn}(\tau\sigma) (L \otimes M \otimes N)_{\tau\sigma}$$

حال فرض کنیم به ازای σ_i در S ، τ_i در T ، و γ در $G(r, s, t)$ داشته باشیم

$$\tau_1 \sigma_1 = \tau_1 \sigma_1 \gamma$$

در این صورت $\tau_1^{-1} \tau_1 = \sigma_1 \gamma \sigma_1^{-1}$ و چون $\sigma_1 \gamma \sigma_1^{-1}$ در $G(r+s, t)$ است نتیجه می‌شود که $\tau_1 = \tau_1$ در یک هم-مجموعه چپ $G(r+s, t)$ قرار دارند. بنابراین $\tau_1 = \tau_1$ و $\sigma_1 = \sigma_1 \gamma$ اما این مطلب ایجاب می‌کند که σ_1 و σ_1 (به عنوان عناصری از S_{r+s}) در یکی از هم-مجموعه‌های $G(r, s)$ واقع شوند؛ از این رو، $\sigma_1 = \sigma_1$. پس، حاصل ضربهای $\tau\sigma$ که با

$$\frac{(r+s+t)!}{(r+s)!t!} \frac{(r+s)!}{r!s!}$$

جفت (τ, σ) در $T \times S$ متناظرند، همگی متمایز هستند و در هم-مجموعه‌های متمایزی از $G(r, s, t)$ قرار می‌گیرند. چون دقیقاً

$$\frac{(r+s+t)!}{r!s!t!}$$

هم-مجموعه چپ $G(r, s, t)$ در S_{r+s+t} وجود دارد، نتیجه می شود که $(L \wedge M) \wedge N = E$.
با استدلال مشابهی، همچنین $\square. L \wedge (M \wedge N) = E$.

مثال ۱۳. ضرب خارجی با فرمولهای معین مربوط به محاسبه دترمینان، مشهور به بسطهای لاپلاس، ارتباط نزدیک دارد. گیریم K حلقه‌ای جایجایی با عنصر همانی و n عدد صحیح مثبتی باشد. فرض کنیم $1 \leq r < n$ و L فرم r خطی متناوب روی K^n تعریف شده توسط

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \det \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \dots & A_{rr} \end{bmatrix}$$

باشد. اگر $s = n - r$ و M فرم s خطی متناوب

$$M(\alpha_1, \dots, \alpha_s) = \det \begin{bmatrix} A_{1(r+1)} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s(r+1)} & \dots & A_{sn} \end{bmatrix}$$

باشد، آنگاه $L \wedge M = D$ تابع دترمینان K^n است. این امر نتیجه‌ای فوری از این حکم است که $L \wedge M$ فرم n خطی متناوبی است و (چنانکه می توان دید)

$$(L \wedge M)(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = 1.$$

حال اگر $L \wedge M$ را به طرز صحیح توصیف کنیم، یکی از بسطهای لاپلاس برای دترمینان هر ماتریس $n \times n$ بر روی K را به دست می آوریم.

در گروه جایگشتی S_n ، فرض کنیم G زیر گروهی باشد که مجموعه‌های $\{1, \dots, r\}$ و $\{r+1, \dots, n\}$ را در داخل خودشان جای بگرداند. هر هم-مجموعه چپ G شامل دقیقاً یک جایگشت σ است که $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_r < \sigma_{r+1} < \dots < \sigma_n$ علامت این جایگشت توسط

$$\text{sgn} \sigma = (-1)^{\sigma_1 + \dots + \sigma_r - \frac{r(r+1)}{2}}$$

مشخص می شود. ضرب گروه‌ای $L \wedge M$ با

۱. فرمولی که در متن اصلی آمده چنین است:

$$\text{sgn} \sigma = (-1)^{\sigma_1 + \dots + \sigma_r + \frac{r(r-1)}{2}}$$

که صحیح نیست، زیرا اگر r عددی فرد بین 1 و n ، و ϵ جایگشت همانی باشد، برای هم-مجموعه

$(L \wedge M)(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum (\text{sgn} \sigma) L(\alpha_{\sigma_1}, \dots, \alpha_{\sigma_r}) M(\alpha_{\sigma_{(r+1)}}, \dots, \alpha_{\sigma_n})$
 معین می‌شود که در آن مجموع بر روی دسته‌ای از σ ها، از هر هم-مجموعه G یکی، محاسبه می‌شود. بنا بر این

$$(L \wedge M)(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{j_1 < \dots < j_r} e_j L(\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_r}) M(\alpha_{k_1}, \dots, \alpha_{k_r})$$

و در آن

$$e_j = (-1)^{j_1 + \dots + j_r - \frac{r(r+1)}{2}}$$

$$k_i = \sigma(r+i).$$

به بیان دیگر

$$\det A = \sum_{j_1 < \dots < j_r} e_j \begin{vmatrix} A_{j_1,1} & \dots & A_{j_1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{j_r,1} & \dots & A_{j_r,r} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{k_1,r+1} & \dots & A_{k_1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k_r,r+1} & \dots & A_{k_r,n} \end{vmatrix}.$$

این يك بسط لاپلاس است. بسطهای دیگر را می‌توان با عوض کردن مجموعه‌های $\{1, \dots, r\}$ و $\{r+1, \dots, n\}$ با دو مجموعه مکمل متفاوتی از نمایه‌ها به دست آورد.

\rightarrow
 $\epsilon \in G$ ، تنها جایگشتی که می‌تواند دارای خاصیت مذکور باشد، جایگشت همانی ϵ است. اما مطابق این فرمول

$$\text{sgn} \epsilon = (-1)^{r^2} = -1.$$

فرمول صحیح باید

$$\text{sgn} \sigma = (-1)^{\sigma_1 + \dots + \sigma_r - \frac{r(r+1)}{2}}$$

باشد، که به طریق زیر اثبات می‌شود. برای چنین σ بی تعداد $(\sigma_1 - 1)$ تعویض لازم است که σ_1 عنصر ابتدای جایگشت باشد. و نیز $2 - \sigma_2$ تعویض لازم است که σ_2 عنصر دوم جایگشت باشد. و به همین منوال $\sigma r - r$ تعویض لازم است که σr عنصر r جایگشت باشد. پس از این تعویضها $(\sigma(n), \dots, \sigma(r+1))$ بدون تغییر و با ترتیب درست در جای خود قرار می‌گیرد. بدین سان

$$\begin{aligned} \text{sgn} \sigma &= (-1)^{\sigma_1 - 1} \cdot (-1)^{\sigma_2 - 2} \dots (-1)^{\sigma r - r} \\ &= (-1)^{\sigma_1 + \dots + \sigma r - \frac{r(r+1)}{2}}. \end{aligned}$$

در ترجمه صورت صحیح این فرمول، و نیز صورت تصحیح شده نتایج مربوط به آن آمده است. م.

اگر V يك K -مدول باشد، می توانیم مدولهای فرمی گوناگون $\wedge^r(V)$ را پهلوی هم قرار دهیم و با استفاده از ضرب خارجی حلقه‌ای تعریف کنیم. برای سادگی، این کار را تنها برای حالت K -مدول آزادی از رتبه n انجام می‌دهیم. در این صورت، به‌ازای $r > n$ مدولهای $\wedge^r(V)$ بدیهی هستند. حال

$$\wedge(V) = \wedge^0(V) \oplus \wedge^1(V) \oplus \dots \oplus \wedge^n(V)$$

را تعریف می‌کنیم. این يك مجموع مستقیم خارجی است - مفهومی که قبلاً از آن صحبت نشده‌است. عناصر $\wedge(V)$ عبارتند از $n+1$ تاییهای (L_0, \dots, L_n) با L_r در $\wedge^r(V)$. جمع، و ضرب در K ، به‌همان صورت که برای $n+1$ تاییها انتظار می‌رود، تعریف می‌شوند. ضمناً $\wedge^0(V) = K$. اگر $\wedge^r(K)$ را با $n+1$ تاییهای $(0, \dots, 0, L, 0, \dots, 0)$ که در آن L از $\wedge^r(K)$ است، یکی بگیریم، آنگاه $\wedge^r(K)$ زیر مدولی از $\wedge(V)$ می‌باشد و تجزیه به مجموع مستقیم

$$\wedge(V) = \wedge^0(V) \oplus \dots \oplus \wedge^n(V)$$

به مفهوم معمولی آن، برقرار است. چون $\wedge^r(V)$ ، K -مدول آزادی از رتبه $\binom{n}{r}$ است، می‌بینیم که $\wedge(V)$ نیز يك K -مدول آزاد است و

$$\begin{aligned} \text{رتبه}(\wedge(V)) &= \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \\ &= 2^n. \end{aligned}$$

ضرب خارجی يك عمل ضرب در $\wedge(V)$ تعریف می‌کند: از ضرب خارجی روی فرمها استفاده می‌کنیم و آن را به‌طور خطی به $\wedge(V)$ سرایت می‌دهیم. این عمل، نسبت به عمل جمع روی $\wedge(V)$ پخش‌پذیر است و به $\wedge(V)$ ساختار حلقه می‌بخشد. این حلقه، حلقه گراسمان روی V^* است. این حلقه جابجایی نیست؛ مثلاً اگر M و L بترتیب در \wedge^r و \wedge^s باشند، آنگاه

$$L \wedge M = (-1)^{rs} M \wedge L.$$

با این وجود، حلقه گراسمان در چندین شاخه ریاضیات حائز اهمیت است.

فرمهای متعارف مقدماتی

۹.۶. مقدمه

قبلاً اشاره کرده‌ایم که هدف اصلی ما مطالعه تبدیلهای خطی روی فضاهای برداری با بعد متناهی است. تا اینجا، مثالهای خاص بسیاری از تبدیلهای خطی دیدیم و قضایایی چند دربارهٔ تبدیل خطی کلی اثبات کردیم. در حالت فضاهای با بعد متناهی، از پایه‌های مرتب برای نمایش ماتریسی این گونه تبدیلهای استفاده کردیم و این نمایش مسلماً به بینش ما در مورد رفتار آنها افزود. فضای برداری $L(V, W)$ متشکل از تبدیلهای خطی از یک فضای دیگرو نیز جبر خطی $L(V, V)$ متشکل از تبدیلهای خطی از یک فضا در خودش را مورد بررسی قرار دادیم.

در دو فصل آتی، به بررسی عملگرهای خطی مشغول می‌شویم. برنامه ما این است که تنها یک عملگر خطی T روی فضای برداری با بعد متناهی V را برگزینیم و «آن را تفکیک کنیم تا بفهمیم در درون آن چه می‌گذرد.» در این مرحلهٔ اولیه، ساده‌ترین راه آن است که هدف خود را به زبان ماتریسی بیان کنیم: برای عملگر خطی داده شده T پایهٔ مرتبی برای V بیابید که نسبت به آن، ماتریس T شکل سادهٔ منتخبی را به خود بگیرد. در اینجا تصویری از آنچه که در ذهن داریم، آورده شده است. شاید از نظر انجام کار ساده‌ترین ماتریسها، بعد از مضر بهای اسکالری ماتریس همانی، ماتریسهای قطری

$$D = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_n \end{bmatrix} \quad (۱-۶)$$

باشند. فرض کنیم T عملگری خطی روی يك فضای n بعدی V باشد. اگر می توانستیم پایه مرتبی چون $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ برای V بیابیم که در آن T توسط ماتریس قطری D در (۱-۶) نمایش داده شود، مسلماً اطلاعات قابل ملاحظه‌ای درباره T کسب می کردیم. به عنوان نمونه، برخی از اعداد ساده وابسته به T ، مثل رتبه T یا دترمینان T را می توانستیم با اندک کوششی فراتر از يك نگاه به ماتریس D ، تعیین کنیم. همچنین می توانستیم به طور آشکار برد و فضای پوچ T را توصیف کنیم. چون $[T]_{\mathcal{B}} = D$ اگر و تنها اگر

$$T\alpha_k = c_k\alpha_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (۲-۶)$$

برد برابر زیر فضای پدید آمده توسط α_k هایی است که به ازای آنها $c_k \neq 0$ ، و فضای پوچ زیر فضای پدید آمده توسط بقیه α_k ها است. در واقع، به نظر منصفانه می آید که بگوییم، اگر پایه ای چون \mathcal{B} و ماتریس قطری چون D را می شناختیم که $[T]_{\mathcal{B}} = D$ ، می توانستیم به هر سؤال احتمالی در مورد T باسانی پاسخ دهیم.

آیا هر عملگر خطی T می تواند توسط ماتریس قطری در پایه ای مرتب، نمایش داده شود؟ اگر چنین نیست، برای کدام عملگرهای T چنین پایه ای وجود دارد؟ در صورت وجود چگونه می توانیم چنین پایه ای را بیابیم؟ اگر چنین پایه ای وجود نداشته باشد، ساده ترین نوع ماتریسی که توسط آن می توانیم T را نمایش دهیم، کدام است؟ اینها برخی از سؤالاتی هستند که در این فصل (وفصل بعدی) به آنها خواهیم پرداخت. همچنان که از برخی از مشکلات آگاهی می یابیم، شکل سؤالات ما نیز پیچیده تر و ظریفتر خواهد شد.

۲.۶. مقدار سرشت نما

تذکرات مقدماتی بخش قبل، نقطه شروعی برای تلاش جهت تجزیه و تحلیل عملگر خطی عمومی T به دست می دهد. ما مطلب کلیدی خود را از (۲-۶) می گیریم که پیشنهاد می کند بردارهایی را مورد مطالعه قرار دهیم که توسط T به مضربهای اسکالری خودشان فرستاده می شوند.

تعریف. فرض کنیم V فضایی برداری بردی های F و T عملگری خطی روی V باشد. يك مقدار سرشت نما T اسکالری چون c در F است که برای آن بردار غیر صفری چون α در V با خاصیت $T\alpha = c\alpha$ وجود داشته باشد. اگر c يك مقدار سرشت نما T

باشد، آنگاه

(الف) هر α با خاصیت $T\alpha = c\alpha$ يك بردار سرشت نماي T وابسته به مقدار سرشت نماي c نامیده می شود.

(ب) دسته همه α ها که $T\alpha = c\alpha$ فضای سرشت نماي وابسته به c نامیده می شود.

مقادیر سرشت نما در مواردی ریشه های سرشت نما، ریشه های را کسد، مقادیر ویژه، مقادیر سره، یا مقادیر طیفی هم نامیده می شوند. در این کتاب تنها از نام «مقادیر سرشت نما» استفاده خواهیم کرد.

اگر T عملگری خطی و c اسکالری دلخواه باشد، مجموعه بردارهای α به طوری که $T\alpha = c\alpha$ ، زیر فضایی از V است. این زیرفضا، فضای بسوج تبدیل خطی $(T - cI)$ است. c را يك مقدار سرشت نماي T می نامیم، هر گاه این زیرفضا، زیر فضای صفر نباشد؛ یعنی، هر گاه $(T - cI)$ يك به يك نباشد. در صورتی که فضای زمینه V با بعد متناهی باشد، $(T - cI)$ دقیقاً زمانی يك به يك نیست که در مینان آن 0 باشد. حال مطالب فوق را خلاصه می کنیم.

قضیه ۱. فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای V و c اسکالر دلخواهی باشد. احکام زیر هم ارزند.

(۱) c يك مقدار سرشت نماي T است.

(۲) عملگر $(T - cI)$ منفرد (معکوس ناپذیر) است.

(۳) $\det(T - cI) = 0$

معیار در مینانی (۳) بسیار مهم است، زیرا به ما می گوید که کجا مقادیر سرشت نماي T را جستجو کنیم. چون $\det(T - cI)$ نسبت به متغیر c يك چند جمله ای درجه n است، مقادیر سرشت نما را به صورت ریشه های این چند جمله ای به دست می آوریم. اجازه بدهید این مطلب را با دقت بیان کنیم.

اگر \mathcal{B} پایه مرتبی برای V باشد و $A = [T]_{\mathcal{B}}$ ، آنگاه $(T - cI)$ معکوس پذیر است اگر و تنها اگر ماتریس $(A - cI)$ معکوس پذیر باشد. در نتیجه، تعریف زیر مصداق دارد.

تعریف. اگر A ماتریسی $n \times n$ بردوی هیأت F باشد، يك مقدار سرشت نماي A در F ، اسکالری چون c از F است که ماتریس $(A - cI)$ منفرد (معکوس ناپذیر) باشد.

چون c يك مقدار سرشت نماي A است اگر و تنها اگر $\det(A - cI) = 0$ ، یا به طور هم ارز، اگر و تنها اگر $\det(cI - A) = 0$ ، پس ماتریس $(xI - A)$ با درایه های چند جمله ای را تشکیل می دهیم و چند جمله ای $f = \det(xI - A)$ را در نظر می گیریم. بوضوح مقادیر سرشت نماي A در F دقیقاً اسکالرهایی چون c در F هستند که $f(c) = 0$.

بدین دلیل، f چندجمله‌ای سرشت‌نمای A نامیده می‌شود. توجه به این نکته مهم است که f چندجمله‌ای تکیننی است که دقیقاً از درجه n است. این مطلب بسادگی از فرمول دترمینان ماتریس بر حسب درایه‌هایش قابل مشاهده است.

لم. ماتریسهای متشابه، چندجمله‌ای سرشت‌نمای مساوی دارند.
اثبات. اگر $B = P^{-1}AP$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} \det(xI - B) &= \det(xI - P^{-1}AP) \\ &= \det(P^{-1}(xI - A)P) \\ &= \det P^{-1} \cdot \det(xI - A) \det P \\ &= \det(xI - A). \quad \square \end{aligned}$$

این لم مارا قادر می‌سازد که آگاهانه چندجمله‌ای سرشت‌نمای عملگر T را به‌نوعان چندجمله‌ای سرشت‌نمای هر ماتریس $n \times n$ دلخواهی که T را در پایه مرتبی از V نمایش دهد تعریف کنیم. عیناً همچون در مورد ماتریسها، مقادیر سرشت‌نمای T ریشه‌های چندجمله‌ای سرشت‌نمای T هستند. بخصوص، این مطلب نشان می‌دهد که T نمی‌تواند بیش از n مقدار سرشت‌نمای متمایز داشته باشد. توجه به این نکته مهم است که ممکن است T هیچ مقدار سرشت‌نما نداشته باشد.

مثال ۱. فرض کنیم T عملگری خطی روی R^2 باشد که در پایه مرتب استاندارد با ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

نمایش داده می‌شود. چندجمله‌ای سرشت‌نمای T (یا A) عبارت است از

$$\det(xI - A) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2 + 1.$$

چون این چندجمله‌ای دارای ریشه حقیقی نیست، T هیچ مقدار سرشت‌نما ندارد. اگر U عملگری خطی روی C^2 باشد که در پایه مرتب استاندارد توسط A نمایش داده می‌شود، آنگاه U دارای دو مقدار سرشت‌نمای i و $-i$ است. در اینجا نکته‌ای ظریف دیده می‌شود. در بحث مربوط به مقادیر سرشت‌نمای ماتریس مفروض A باید مواظب باشیم که هیأت مورد نظر را تصریح کنیم. در این مثال ماتریس A دارای هیچ مقدار سرشت‌نما در R نیست، اما دو مقدار سرشت‌نمای i و $-i$ در C دارد.

مثال ۰۲. گیریم A ماتریس 3×3 (حقیقی)

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

باشد. در این صورت چند جمله‌ای سرشت‌نمای A عبارت است از

$$\begin{vmatrix} x-3 & -1 & 1 \\ -2 & x-2 & 1 \\ -2 & -2 & x \end{vmatrix} = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2.$$

از این رو، مقادیر سرشت‌نمای A عبارتند از ۱ و ۲.

فرض کنیم T عملگری خطی روی R^3 باشد که در پایه استاندارد توسط A نمایش داده می‌شود. بردارهای سرشت‌نمای T وابسته به مقادیر سرشت‌نمای ۱ و ۲ را می‌یابیم. داریم

$$A - I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

با یک نظر روشن است که $A - I$ دارای رتبه ۲ است (و لذا پوچی $T - I$ برابر ۱ است). از این رو، فضای بردارهای سرشت‌نمای وابسته به مقدار سرشت‌نمای ۱ یک بعدی است. بردار $\alpha_1 = (1, 0, 2)$ فضای پوچ $T - I$ را پدید می‌آورد. پس، $T\alpha_1 = \alpha_1$ اگر و تنها اگر α مضربی اسکالری از α_1 باشد. اکنون

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

را در نظر می‌گیریم. آشکار است که رتبه $A - 2I$ نیز ۲ است، بنابراین فضای بردارهای سرشت‌نمای وابسته به مقدار سرشت‌نمای ۲ دارای بعد ۱ است. بدیهی است که $T\alpha_2 = 2\alpha_2$ اگر و تنها اگر α مضربی اسکالری از $\alpha_2 = (1, 1, 2)$ باشد.

تعریف. فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای V باشد. گوییم T قطری شدنی است، هرگاه پایه‌ای برای V وجود داشته باشد که هر بردار آن یک بردار سرشت‌نمای T باشد.

دلیل این نام‌گذاری باید روشن باشد؛ زیرا، اگر پایه مرتبی چون $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ برای V وجود داشته باشد که در آن هر α_i يك بردار سرشت‌نمای T باشد، آنگاه ماتریس T در پایه مرتب \mathcal{B} قطری است. اگر $T\alpha_i = c_i\alpha_i$ داریم

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_n \end{bmatrix}$$

حتماً لازم نیست که اسکالرهای c_1, \dots, c_n متمایز باشند؛ در واقع، ممکن است همگی يك اسکالر باشند (وقتی که T ضربی اسکالری از عملگرهمانی است).

همچنین می‌توان تعریف کرد که T قطری شدنی است هرگاه بردارهای سرشت‌نمای فضای V را پدید آورند. این تعریف تنها از نظر ظاهر با تعریف قبلی متفاوت است، چرا که می‌توان بین هر مجموعه پدیدآورنده‌ای از بردارها، پایه‌ای انتخاب کرد.

در مثالهای ۱ و ۲ عمداً عملگرهایی خطی روی R^n برگزیدیم که قطری شدنی نباشند. در مثال ۱، عملگری خطی روی R^2 داریم که قطری شدنی نیست، چرا که مقادیر سرشت‌نما ندارد. در مثال ۲، عملگر T مقادیر سرشت‌نما دارد؛ در واقع، چندجمله‌ای سرشت‌نمای T ، به‌طور کامل بر روی هیأت اعداد حقیقی تجزیه می‌شود: $f(x) = (x-1)(x-2)^2$. با این حال، T قطری شدنی نیست. به‌هریک از دو مقدار سرشت‌نمای T ، تنها يك فضای يك‌بعدی از بردارهای سرشت‌نما وابسته است. از این‌رو، ممکن نیست بتوانیم پایه‌ای برای R^2 تشکیل دهیم که متشکل از بردارهای سرشت‌نمای T باشد.

فرض کنیم عملگر خطی T قطری شدنی باشد. بعلاوه فرض کنیم c_1, \dots, c_k مقادیر سرشت‌نمای متمایز T باشند. در این صورت، پایه مرتبی چون \mathcal{B} وجود دارد که در آن T توسط ماتریسی قطری با درایه‌های قطری c_i نمایش داده می‌شود و هر يك از c_i ها به تعداد دفعات معینی تکرار می‌شوند. اگر تعداد دفعات تکرار c_i برابر d_i باشد، آنگاه (با انتخاب ترتیبی درست) ماتریس شکل بلوکی

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 I_{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 I_{d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_k I_{d_k} \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

دارد که در آن I_j ماتریس همانی $d_j \times d_j$ است. از این ماتریس دو مطلب مشاهده می‌شود. اول اینکه، چند جمله‌ای سرشت نمای T ، حاصل ضربی از سازه‌های خطی (احتمالاً مکرر) است:

$$f = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k}.$$

اگر هیأت اسکالری F بسته جبری، مثلاً هیأت اعداد مختلط باشد، هر چند جمله‌ای بر روی F را می‌توان بدین صورت به سازه‌ها تجزیه کرد (ر. ک. بخش ۵.۴)؛ اما، اگر F بسته جبری نباشد، وقتی که بگوییم چند جمله‌ای سرشت نمای T دارای چنین تجزیه‌ای به سازه‌هاست، داریم ویژگی خاصی از آن را ذکر می‌کنیم. دومین مطلبی که از (۳-۶) مشاهده می‌شود. این است که d_i ، تعداد دفعاتی که c_i به عنوان ریشه f تکرار می‌شود، برابر با بعد فضای بردارهای سرشت نمای وابسته به مقدار سرشت نمای c_i است. علت آن است که پوچی هر ماتریس قطری برابر است با تعداد صفرهایی که روی قطر اصلی خود دارد، و ماتریس $[T - c_i I]$ هم d_i صفر روی قطر اصلی دارد. هر چند این رابطه بین بعد فضای سرشت نما و چندگانگی مقدار سرشت نما به عنوان ریشه‌ای از f در ابتدا جالب به نظر نمی‌آید، اما راه ساده‌ای است برای تعیین اینکه آیا عملگر مفروضی قطری‌شدنی است یا خیر.

لم. فرض کنیم $T\alpha = c\alpha$. اگر f چند جمله‌ای دلخواهی باشد، آنگاه

$$f(T)\alpha = f(c)\alpha$$

اثبات. تمرین.

لم. فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای V باشد. گیریم c_1, \dots, c_k مقادیر سرشت نمای متمایز T و W_i فضای بردارهای سرشت نمای وابسته به مقدار سرشت نمای c_i باشد. اگر $W = W_1 + \dots + W_k$ ، آنگاه

$$\dim W = \dim W_1 + \dots + \dim W_k.$$

در واقع، اگر \mathcal{B}_i پایه مرتبی برای W_i باشد، آنگاه $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k)$ پایه مرتبی برای W است.

اثبات. فضای $W = W_1 + \dots + W_k$ زیر فضای پدید آمده توسط همه بردارهای سرشت نمای T است. معمولاً وقتی که مجموع W از زیر فضاهای W_i را تشکیل می‌دهیم، به دلیل روابط خطی که ممکن است بین بردارهای فضاهای گوناگون موجود باشد، انتظار داریم که $\dim W < \dim W_1 + \dots + \dim W_k$. این لم بیان می‌کند که فضاهای سرشت نمای وابسته به مقادیر سرشت نمای متفاوت مستقل از یکدیگرند.

فرض کنیم که (به‌ازای هر i) برداری چون β_i از W_i در دست باشد و نیز فرض کنیم $\beta_1 + \dots + \beta_k = 0$. نشان می‌دهیم که به‌ازای هر i ، $\beta_i = 0$. گیریم f چند جمله‌ای

دلخواهی باشد. چون $T\beta_i = c_i\beta_i$ ، لم قبل می‌گوید که

$$\begin{aligned} 0 &= f(T)0 = f(T)\beta_1 + \dots + f(T)\beta_k \\ &= f(c_1)\beta_1 + \dots + f(c_k)\beta_k. \end{aligned}$$

چند جمله‌ایهای f_1, \dots, f_k را طوری انتخاب می‌کنیم که

$$f_i(c_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

در این صورت

$$\begin{aligned} 0 &= f_i(T)0 = \sum_j \delta_{ij}\beta_j \\ &= \beta_i. \end{aligned}$$

حال، فرض کنیم \mathcal{B}_i پایه مرتبی برای W_i و \mathcal{B} دنباله $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k)$ باشد. در این صورت \mathcal{B} زیر فضای \mathcal{B} زیر فضای $W = W_1 + \dots + W_k$ را پدید می‌آورد. بعلاوه، به دلیل زیر \mathcal{B} يك دنباله مستقل خطی از بردارهاست. هر رابطه خطی بین بردارهای \mathcal{B} شکل $\beta_1 + \dots + \beta_k = 0$ را که در آن β_i ترکیبی خطی از بردارهای \mathcal{B}_i است، خواهد داشت. بنابراین آنچه که هم اکنون انجام دادیم، می‌دانیم که به ازای هر i ، $\beta_i = 0$. چون هر \mathcal{B}_i مستقل خطی است، مشاهده می‌کنیم که تنها رابطه خطی بین بردارهای \mathcal{B} ، رابطه خطی بدیهی است. \square

قضیه ۲. فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای V باشد. بگیریم c_1, \dots, c_k مقادیر سرشت‌نمای متمایز T و W_i فضای پوچ $(T - c_i I)$ باشد. مطالب ذیل هم اذزند.

(۱) T قطری شدنی است.

(۲) چند جمله‌ای سرشت‌نمای T عبارت است از

$$f = (x - c_1)^{d_1} \dots (x - c_k)^{d_k}$$

و $i = 1, \dots, k, \dim W_i = d_i$

$$\dim W_1 + \dots + \dim W_k = \dim V \quad (۳)$$

اثبات. قبلاً دیده‌ایم که (۲) از (۱) نتیجه می‌شود. اگر چند جمله‌ای سرشت‌نمای f حاصل ضرب سازه‌های خطی باشد، چنانکه در (۲) هم هست، آنگاه $d_1 + \dots + d_k = \dim V$. زیرا مجموع d_i ها برابر درجه چند جمله‌ای سرشت‌نماست، و این درجه همان $\dim V$ است. بنابراین (۳) از (۲) نتیجه می‌شود. حال فرض کنیم (۳) برقرار باشد. بنا بر لم، باید داشته باشیم $V = W_1 + \dots + W_k$. پس، بردارهای

سرشت نمای T فضای V را پدید می آورند. \square

نظیر ماتریسی قضیه ۲ را می توان به صورت زیر تنظیم کرد. فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ با درایه های متعلق به هیأت F ، و c_1, \dots, c_k مقادیر سرشت نمای متمایز A در F باشند. به ازای هر i ، گیریم W_i فضای ماتریسهای ستونی X (با درایه های متعلق به F) باشد که

$$(A - c_i I)X = 0$$

و فرض کنیم \mathcal{B}_i پایه مرتبی برای W_i باشد. اگر پایه های $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k$ به طور دسته جمعی به دنبال هم بیایند، دنباله ستونهای ماتریسی چون P

$$P = [P_1, P_2, \dots] = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k).$$

را تشکیل می دهند. ماتریس A روی F متشابه ماتریسی قطری است اگر و تنها اگر P ماتریسی مربعی باشد. وقتی P مربعی باشد، معکوس پذیر هم هست و $P^{-1}AP$ قطری است.

مثال ۳. فرض کنیم T عملگری خطی روی R^3 باشد که در پایه مرتب استاندارد با

ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می شود. می خواهیم با استفاده از اعمال مختلف سطری و ستونی چگونگی محاسبه چند جمله ای سرشت نما را نشان دهیم.

$$\begin{vmatrix} x-5 & 6 & 6 \\ 1 & x-4 & -2 \\ -3 & 6 & x+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-5 & 0 & 6 \\ 1 & x-2 & -2 \\ -3 & 2-x & x+4 \end{vmatrix}$$

$$= (x-2) \begin{vmatrix} x-5 & 5 & -6 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & x+4 \end{vmatrix}$$

$$= (x-2) \begin{vmatrix} x-5 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & x+4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= (x-2) \begin{vmatrix} x-5 & 6 \\ -2 & x+2 \end{vmatrix} \\
 &= (x-2)(x^2-3x+2) \\
 &= (x-2)^2(x-1).
 \end{aligned}$$

ابعاد فضاهای بردارهای سرشت‌نمای وابسته به این دو مقدار سرشت‌نما چیستند؟ داریم

$$\begin{aligned}
 A - I &= \begin{bmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix} \\
 A - 2I &= \begin{bmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

می‌دانیم که $A - I$ منفرد است و بوضوح $2 \geq$ رتبه $(A - I)$. بنابراین، $2 =$ رتبه $(A - I)$. بدیهی است که $1 =$ رتبه $(A - 2I)$.

فرض کنیم W_1 و W_2 فضاهای بردارهای سرشت‌نمای وابسته به مقادیر سرشت‌نمای ۱ و ۲ باشند. می‌دانیم که $\dim W_1 = 1$ و $\dim W_2 = 2$. بنا بر قضیه ۲، T قطری‌شدنی است. ارائه پایه‌ای برای R^3 که در آن T توسط ماتریسی قطری نمایش داده شود، آسان است. فضای پوچ $(T - I)$ توسط بردار $\alpha_1 = (3, -1, 3)$ پدیدمی‌آید، و لذا $\{\alpha_1\}$ پایه‌ای برای W_1 است. فضای پوچ $T - 2I$ (یعنی فضای W_2) متشکل است از بردارهای (x_1, x_2, x_3) با شرط $x_1 = 2x_2 + 2x_3$. از این رو، به‌عنوان پایه‌ای برای W_2 مثلاً می‌توانیم این دو بردار را برگزینیم:

$$\alpha_2 = (2, 1, 0)$$

$$\alpha_3 = (2, 0, 1).$$

اگر $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ ، آنگاه $[T]_{\mathcal{B}}$ عبارت است از ماتریس قطری

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

این واقعیت که T قطری‌شدنی است، بدین معنی است که ماتریس اولیه A با ماتریس قطری D (بر روی R) متشابه است. ماتریس P که ما را قادر به تغییر مختصات از پایه \mathcal{B} به پایه استاندارد می‌سازد (مسلماً) ماتریسی است که سه ترانزاده‌های $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ را به‌عنوان

بردارهای ستونی خود دارد:

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

بعلاوه، $AP = PD$ ، بنا بر این

$$P^{-1}AP = D.$$

تمرین

۰۱ در هر يك از حالات زیر فرض کنیم T و U دو عملگر خطی بترتیب روی R^2 و C^2 باشند که هر دو بترتیب در پایه مرتب استاندارد R^2 و پایه مرتب استاندارد C^2 توسط A نمایش داده می شوند. چند جمله ایهای سرشت نمای T و U ، همچنین مقادیر سرشت نمای هر عملگر را بیابید، و نیز به ازای هر مقدار سرشت نما چون c پایه ای برای فضای بردارهای سرشت نمای وابسته به آن بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

۰۲ فضای برداری n بعدی V بر روی F داده شده است. چند جمله ای سرشت نمای عملگر همانی روی V چیست؟ چند جمله ای سرشت نمای عملگر صفر چیست؟

۰۳ ماتریس مثلثی شکل A $n \times n$ بر روی هیأت F مفروض است. ثابت کنید که مقادیر سرشت نمای A در پایه های قطری A ، یعنی اسکارهای A_{ii} می باشند.

۰۴ فرض کنید T عملگر خطی روی R^3 باشد که در پایه مرتب استاندارد با ماتریس

$$\begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می شود. با ارائه پایه ای برای R^3 که هر بردار آن يك بردار سرشت نمای T باشد، ثابت کنید T قطری شدنی است.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix}.$$

آیا A بر روی هیأت R با ماتریسی قطری متشابه است؟ آیا A بر روی هیأت C با ماتریسی قطری متشابه است؟

۶. فرض کنید T عملگری خطی روی R^4 باشد که در پایه استاندارد با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می شود. تحت چه شرایطی روی a, b, c و عملگر T قطری شدنی است؟

۷. T را عملگری خطی روی فضای برداری n بعدی V بگیرید و فرض کنید n مقدار سرشت نمای هتمایز داشته باشد. ثابت کنید T قطری شدنی است.

۸. فرض کنید A و B دو ماتریس $n \times n$ بر روی هیأت F باشند. ثابت کنید که اگر $(I - AB)$ معکوس پذیر باشد، آنگاه $I - BA$ نیز معکوس پذیر است و

$$(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1}A.$$

۹. از نتیجه تمرین ۸ استفاده و ثابت کنید که اگر A و B دو ماتریس $n \times n$ بر روی هیأت F باشند، آنگاه مقادیر سرشت نمای AB و BA در F مساوی هستند.

۱۰. فرض کنید A ماتریس 2×2 متقارنی ($A^t = A$) با درایه های حقیقی باشد. ثابت کنید A بر روی R با ماتریسی قطری متشابه است.

۱۱. ماتریس 2×2 مختلط N را که $N^2 = 0$ در نظر بگیرید. ثابت کنید یا $N = 0$ یا N بر روی C با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

متشابه است.

۱۲. از نتیجه تمرین ۱۱ برای اثبات مطلب زیر استفاده کنید: اگر A ماتریسی 2×2 با درایه‌های مختلط باشد، آنگاه A بر روی C با ماتریسی از یکی از دو نوع

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

متشابه است.

۱۳. فرض کنید V فضای برداری همهٔ توابع پیوسته از R در R ، یعنی فضای توابع حقیقی (مقدار) پیوسته روی خط حقیقی، باشد. فرض کنید T عملگر خطی روی V تعریف شده توسط

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t) dt$$

باشد. ثابت کنید که T دارای هیچ مقدار سرشت نما نیست.

۱۴. ماتریس قطری A $n \times n$ با چندجمله‌ای سرشت نما

$$(x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k}$$

را که در آن c_1, \dots, c_k متمایز هستند، در نظر بگیرید. فرض کنید V فضای ماتریسهای B $n \times n$ با شرط $AB = BA$ باشد. ثابت کنید که بعد V برابر $d_1^2 + \dots + d_k^2$ است.

۱۵. فرض کنید V فضای ماتریسهای $n \times n$ بر روی F و A ماتریس $n \times n$ ثابتی بر روی F باشد. فرض کنید T عملگر خطی «ضرب از چپ در A » روی V باشد. آیا این درست است که A و T مقادیر سرشت نما مساوی دارند؟

۳.۶. چندجمله‌ایهای پوچساز

در تلاش برای تحلیل عملگر خطی T یکی از مفیدترین مقولاتی که باید بدانیم، ردهٔ چندجمله‌ایهایی است که T را پوچ می‌سازند. به بیان دقیقتر، فرض کنیم V فضایی برداری بر روی F و T عملگری خطی روی V باشد. اگر p یک چندجمله‌ای بر روی F باشد، آنگاه $p(T)$ نیز عملگری خطی روی V است. اگر q چندجمله‌ای دیگری بر روی F باشد، آنگاه

$$(p+q)(T) = p(T) + q(T)$$

$$(pq)(T) = p(T)q(T).$$

از این رو، دسته چندجمله‌ایهای p که T را پوچ می‌سازند، بدین معنی که

$$p(T) = 0$$

یک ایدآل در جبر چندجمله‌ای $F[x]$ است. این ایدآل ممکن است ایدآل صفر باشد، بدین معنی که ممکن است T توسط هیچ چندجمله‌ای غیر صفری پوچ نشود. اما، اگر بعد فضای V متناهی باشد، این امر نمی‌تواند روی دهد.

فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای n بعدی V باشد. $n^2 + 1$ توان اول T را مورد نظر قرار می‌دهیم:

$$I, T, T^2, \dots, T^{n^2}.$$

این دنباله، از $n^2 + 1$ عملگر در $L(V, V)$ ، فضای عملگرهای خطی روی V ، تشکیل می‌شود. بعد فضای $L(V, V)$ برابر n^2 است. بنابراین، این دنباله از $n^2 + 1$ عملگر باید وابسته خطی باشد؛ یعنی، به‌ازای چند اسکالر c_i که همگی صفر نباشند، داریم

$$c_0 I + c_1 T + \dots + c_{n^2} T^{n^2} = 0.$$

از این رو، ایدآل چندجمله‌ایهایی که T را پوچ می‌سازند شامل چندجمله‌ای غیر صفری از درجه n^2 یا کمتر هم هست.

بنا بر قضیه ۵ از فصل ۴، هر ایدآل چندجمله‌ایها متشکل از همهٔ مضربهای چندجمله‌ای تکین ثابتی است که مولد آن ایدآل است. پس، عملگر T با چندجمله‌ای تکین p با خاصیت زیر در تناظر است: اگر f چندجمله‌ای مفروضی بر روی F باشد، آنگاه $f(T) = 0$ اگر و تنها اگر $f = pg$ باشد، که در آن g نیز یک چندجمله‌ای بر روی F است.

تعریف. فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای برداری V بردی F باشد. چندجمله‌ای مینیمال T عبارت است از (یکتا) مولد تکین ایدآل چندجمله‌ایهایی بر روی F که T را پوچ می‌سازند.

نام «چندجمله‌ای مینیمال» از این واقعیت ریشه می‌گیرد که مولد هر ایدآل چندجمله‌ایها با چندجمله‌ای تکین از درجهٔ مینیمم در آن ایدآل مشخص می‌شود. این بدان معنی است که چندجمله‌ای مینیمال p برای عملگر خطی T به‌طور یکتا با سه خاصیت زیر معین می‌شود:

$$(1) \quad p \text{ چندجمله‌ای تکینی بر روی هیأت اسکالری } F \text{ است.}$$

$$(2) \quad p(T) = 0$$

(3) درجهٔ هیچ چندجمله‌ای بر روی F که T را پوچ می‌سازد کمتر از درجهٔ p نیست.

اگر A ماتریسی $n \times n$ بر روی F باشد، چندجمله‌ای مینیمال A را به طریقی مشابه، به عنوان یکتا مولد تکین ایدآل همهٔ چندجمله‌ایهای بر روی F که A را پوچ می‌سازند، تعریف می‌کنیم. اگر عملگر T در پایهٔ مرتبی توسط ماتریس A نمایش داده

شود، آنگاه T و A چندجمله‌ای مینیمال مساوی دارند. این بدان خاطر است که $f(T)$ در آن پایه با ماتریس $f(A)$ نمایش داده می‌شود و بنابراین، $f(T) = 0$ اگر و تنها اگر $f(A) = 0$.

از تذکره اخیر در مورد عملگرها و ماتریسها نتیجه می‌گیریم که ماتریسهای متشابه دارای چندجمله‌ایهای مینیمال مساوی هستند. این حکم از تعاریف نیز روشن است، زیرا به ازای هر چندجمله‌ای f

$$f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P.$$

نکته اساسی دیگری هم در مورد چندجمله‌ایهای مینیمال ماتریسها هست که باید متذکر شویم. فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های متعلق به هیأت F باشد. فرض کنیم F_1 هیأتی باشد که F را به عنوان یک زیرهیأت شامل است. (مثلاً، A ممکن است ماتریسی با درایه‌های گویا باشد، در حالی که F_1 هیأت اعداد حقیقی. یا A ممکن است ماتریسی با درایه‌های حقیقی باشد، در حالی که F_1 هیأت اعداد مختلط.) می‌توان A را به عنوان ماتریسی $n \times n$ بر روی F ، یا به عنوان ماتریسی $n \times n$ بر روی F_1 محسوب کرد. در ظاهر، ممکن است به نظر برسد که برای A دو چندجمله‌ای مینیمال متفاوت به دست می‌آید. خوشبختانه این طور نیست؛ و باید ببینیم چرا. تعریف چندجمله‌ای مینیمال A ، در صورتی که به عنوان ماتریسی $n \times n$ بر روی هیأت F محسوب شود، چیست؟ همه چندجمله‌ایهای تکین با ضرایب متعلق به F که A را پوچ می‌سازند در نظر می‌گیریم و آن را که با کوچکترین درجه است انتخاب می‌کنیم. اگر f چندجمله‌ای تکینی بر روی F باشد:

$$f = x^k + \sum_{j=0}^{k-1} a_j x^j \quad (۴-۶)$$

آنگاه $f(A) = 0$ صرفاً بیان می‌کند که رابطه‌ای خطی بین توانهای A در دست است:

$$A^k + a_{k-1}A^{k-1} + \dots + a_1A + a_0I = 0. \quad (۵-۶)$$

درجه چندجمله‌ای مینیمال، کوچکترین عدد صحیح مثبت k است که یک رابطه خطی به صورت (۵-۶) بین توانهای A ، I ، \dots ، A^k وجود داشته باشد. بعلاوه، بنا بر یکتایی چندجمله‌ای مینیمال به ازای این k یک و تنها یک رابطه به صورت (۵-۶) برقرار است؛ بدین معنی که، وقتی درجه این چندجمله‌ای مینیمال، k ، تعیین شود، اسکالرهایی یکتا چون a_0, \dots, a_{k-1} در F یافت می‌شوند که در (۵-۶) صدق کنند. اینها، ضرایب چندجمله‌ای مینیمال هستند.

حال (به ازای هر k) در (۵-۶) دستگاهی متشکل از n^2 معادله خطی برای «مجهولهای» a_0, \dots, a_{k-1} داریم. چون درایه‌های A در F قرار دارند، ضرایب معادلات (۵-۶) هم در F هستند. بنابراین، اگر دستگاه به ازای a_0, \dots, a_{k-1} در F_1 جوابی داشته باشد، به ازای a_0, \dots, a_{k-1} در F نیز دارای جوابی است. (ر. ک. انتهای بخش ۱.۴). اکنون باید روشن باشد که دو چندجمله‌ای مینیمال مساوی هستند.

تا اینجا چه مطالبی دربارهٔ چندجمله‌ای مینیمال عملگری خطی روی فضای n بعدی آموخته‌ایم؟ تنها چیزی که می‌دانیم این است که درجهٔ آن از n^2 تجاوز نمی‌کند. معلوم می‌شود که این تخمین نسبتاً ضعیف است، چرا که این درجه نمی‌تواند بیش از n باشد. بزودی ثابت می‌کنیم که این عملگر به وسیلهٔ چندجمله‌ای سرشت نمایش پوچ می‌شود. ابتدا، به مشاهدهٔ حکمی مقدماتی‌تر می‌پردازیم.

قضیهٔ ۳. فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای برداری n بعدی V باشد [یا، A ماتریسی $n \times n$ باشد]. چندجمله‌ایهای سرشت نما و مینیمال T [یا A]، دارای ریشه‌های مساوی ولی احتمالاً با چندگانگیهای متفاوت هستند.

اثبات. گیریم p چندجمله‌ای مینیمال T و c يك اسکالر باشد. آنچه را که می‌خواهیم نشان بدهیم این است که $p(c) = 0$ ، اگر و تنها اگر c يك مقدار سرشت نماي T باشد. ابتدا فرض کنیم $p(c) = 0$. در این صورت

$$p = (x - c)q$$

که در آن q يك چندجمله‌ای است. چون $\deg q < \deg p$ ، تعریف چندجمله‌ای مینیمال p تصریح می‌کند که $q(T) \neq 0$. برداری چون β انتخاب می‌کنیم که $q(T)\beta \neq c$. گیریم $\alpha = q(T)\beta$ در این صورت

$$\begin{aligned} 0 &= p(T)\beta \\ &= (T - cI)q(T)\beta \\ &= (T - cI)\alpha \end{aligned}$$

و بنابراین، c يك مقدار سرشت نماي T است. حال، فرض کنیم c يك مقدار سرشت نماي T ، مثلاً $T\alpha = c\alpha$ و $\alpha \neq 0$ باشد. همان‌طور که در یکی از لمهای پیش متذکر شدیم

$$p(T)\alpha = p(c)\alpha.$$

چون $p(T) = 0$ و $\alpha \neq 0$ ، داریم $p(c) = 0$. \square

فرض کنیم T يك عملگر خطی قطری شدنی و c_1, \dots, c_k مقادیر سرشت نماي متمایز T باشند. در این صورت بآسانی دیده می‌شود که چندجمله‌ای مینیمال T عبارت است از چندجمله‌ای

$$p = (x - c_1) \cdots (x - c_k).$$

اگر α يك بردار سرشت نما باشد، آنگاه یکی از عملگرهای $T - c_1I, \dots, T - c_kI$ بردار α را به 0 می‌فرستد. بنابراین به‌ازای هر بردار سرشت نماي α

$$(T - c_1I) \cdots (T - c_kI)\alpha = 0.$$

پایه‌ای برای فضای زمینه وجود دارد که متشکل از بردارهای سرشت‌نمای T است؛ از این رو

$$p(T) = (T - c_1 I) \cdots (T - c_k I) = 0.$$

ماحصل کارمان چنین است. اگر T یک عملگر خطی قطری شدنی باشد، آنگاه چندجمله‌ای مینیمال T حاصل ضربی از سازدهای خطی متمایز است. به طوری که بزودی خواهیم دید، این خاصیت مشخص‌کننده عملگرهای قطری شدنی است.

مثال ۴. سعی می‌کنیم چندجمله‌ای‌های مینیمال عملگرهای مثال‌های ۱، ۲، و ۳ را بیابیم. ما آنها را به عکس ترتیب فوق مورد بحث قرار می‌دهیم. قبلاً معلوم شد که عملگر مثال ۳ قطری شدنی و با چندجمله‌ای سرشت‌نمای

$$f = (x-1)(x-2)^2$$

است. از بند قبل بر می‌آید که چندجمله‌ای مینیمال T عبارت است از

$$P = (x-1)(x-2).$$

خواننده می‌تواند با بررسی مستقیم کاملاً اطمینان یابد که

$$(A-I)(A-2I) = 0.$$

در مثال ۲، عملگر T نیز چندجمله‌ای سرشت‌نمای $f = (x-1)(x-2)^2$ را دارد. اما، این T قطری شدنی نیست و لذا نمی‌دانیم که چندجمله‌ای مینیمال آن $(x-1)(x-2)$ است. در این حالت درباره چندجمله‌ای مینیمال چه می‌دانیم؟ به واسطه قضیه ۳ می‌دانیم که ریشه‌های این چندجمله‌ای همان ۱ و ۲ هستند، البته احتمالاً با چندگانگی‌هایی دیگر. پس p رامیان چندجمله‌ای‌هایی به صورت $(x-1)^k(x-2)^l$ ، $k \geq 1$ ، $l \geq 1$ جستجوی می‌کنیم. چندجمله‌ای $(x-1)(x-2)$ را آزمایش می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (A-I)(A-2I) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

از این رو، درجه چندجمله‌ای مینیمال اقل از ۳ است. پس، باید $(x-1)^2(x-2)$ یا $(x-1)(x-2)^2$ را بیابیم. دومی که چندجمله‌ای سرشت‌نما است، انتخابی محتمل به نظر می‌رسد. با آسانی می‌توان محاسبه کرد که $(A-I)(A-2I)^2 = 0$. پس، چندجمله‌ای مینیمال T همان چندجمله‌ای سرشت‌نمای آن است.

در مثال ۱، عملگر خطی T روی R^2 را که در پایه استاندارد توسط ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود مورد بحث قرار دادیم. چندجمله‌ای سرشت نما، $x^2 + 1$ است که هیچ ریشه حقیقی ندارد. برای تعیین چندجمله‌ای مینیمال T را کنار می‌گذاریم و حواس خود را روی A متمرکز می‌کنیم. به عنوان ماتریسی مختلط، A دارای مقادیر سرشت نمای i و $-i$ است. هر دو ریشه باید در چندجمله‌ای مینیمال ظاهر شوند. پس چندجمله‌ای مینیمال بر $x^2 + 1$ تقسیم پذیر است. با آسانی می‌توان نشان داد که $A^2 + I = 0$. بنابراین، چندجمله‌ای مینیمال $x^2 + 1$ است.

قضیه ۴ (کیلی-همیلتن). عملگر خطی T روی فضای برداری بعد متناهی V داده شده است. اگر f چندجمله‌ای سرشت نمای T باشد، آنگاه $f(T) = 0$ به بیان دیگر، چندجمله‌ای مینیمال T چندجمله‌ای سرشت نمای T را عادی می‌کند.

اثبات. بعدها دواثبات دیگر از این قضیه، مستقل از اثبات ارائه شده در اینجا، عرضه خواهیم کرد. اثبات حاضر هر چند کوتاه، ولی احتمالاً فهم آن مشکل است. گذشته از اختصار، این اثبات این حسن را هم دارد که کاربردی آموزنده و کاملاً غیر بدیهی از نظریه عمومی دترمینانها که در فصل ۵ گسترش یافت، عرضه می‌کند.

فرض کنیم K حلقه جابجایی با عنصرهمانی متشکل از همه چندجمله‌ایهای از T باشد. بدیهی است که K در واقع جبری جابجایی با عنصرهمانی بر روی هیأت اسکالری است. پایه مرتبی چون $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ برای V انتخاب می‌کنیم و A را ماتریسی می‌گیریم که T را در آن پایه نمایش می‌دهد. در این صورت

$$T\alpha_i = \sum_{j=1}^n A_{ji}\alpha_j, \quad 1 \leq i \leq n.$$

این معادلات را می‌توان به صورت دم‌ارز

$$\sum_{j=1}^n (\delta_{ji}T - A_{ji}I)\alpha_j = 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

نیز نوشت. فرض کنیم B عنصری از $K^{n \times n}$ با درایه‌های

$$B_{ij} = \delta_{ij}T - A_{ji}I$$

باشد. وقتی $n = 2$

$$B = \begin{bmatrix} T - A_{11}I & -A_{21}I \\ -A_{12}I & T - A_{22}I \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det B &= (T - A_{11}I)(T - A_{22}I) - A_{12}A_{21}I \\ &= T^2 - (A_{11} + A_{22})T + (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})I \\ &= f(T)\end{aligned}$$

که در آن f چندجمله‌ای سرشت‌نما است:

$$f = x^2 - (\operatorname{tr} A)x + \det A.$$

در حالت $n > 2$ نیز روشن است که

$$\det B = f(T)$$

چرا که f در مینان ماتریس $xI - A$ است که درایه‌های چندجمله‌ایهای

$$(xI - A)_{ij} = \delta_{ij}x - A_{ij}$$

می‌باشند.^۱

می‌خواهیم نشان دهیم که $f(T) = 0$. برای اینکه $f(T)$ عملگر صفر باشد لازم و کافی است که به ازای $n, \dots, 1, k$ ، $(\det B)\alpha_k = 0$. طبق تعریف B ، بردارهای $\alpha_n, \dots, \alpha_1$ در معادلات

$$\sum_{j=1}^n B_{ij}\alpha_j = 0, \quad 1 \leq i \leq n \quad (6-6)$$

صدق می‌کنند. وقتی $n = 2$ ، نوشتن (6-6) به صورت

$$\begin{bmatrix} T - A_{11}I & -A_{21}I \\ -A_{12}I & T - A_{22}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

الهام بخش است. در این حالت، الحاقی کلاسیک، یعنی $\operatorname{adj} B$ عبارت است از ماتریس

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} T - A_{22}I & A_{21}I \\ A_{12}I & T - A_{11}I \end{bmatrix}$$

۱. این قسمت از اثبات اندکی تصحیح شده است در متن اصلی در این رابطه بجای A_{ji} ، A_{ij} آمده است که با تصحیح این اشتباه، شکافی در اثبات به وجود می‌آید. خوشبختانه با استفاده از

$$(xI - A)_{ij}^t = xI_{ji} - A_{ji} \quad \text{و} \quad f = \det(xI - A) = \det(xI - A)^t$$

نتیجه مطلوب؛ یعنی، $\det(B) = \det(TI - A)^t = \det(TI - A) = f(T)$ ، به دست می‌آید...

$$\tilde{B}B = \begin{bmatrix} \det B & 0 \\ 0 & \det B \end{bmatrix}.$$

از این رو، داریم

$$\begin{aligned} (\det B) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} &= (\tilde{B}B) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \\ &= \tilde{B} \left(B \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

در حالت کلی، فرض کنیم $\tilde{B} = \text{adj } B$. در این صورت بنا بر (۶-۶) به ازای هر جفت i, k

$$\sum_{j=1}^n \tilde{B}_{ki} B_{ij} \alpha_j = 0,$$

و با مجموع گیری روی i ، داریم

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{B}_{ki} B_{ij} \alpha_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \tilde{B}_{ki} B_{ij} \right) \alpha_j. \end{aligned}$$

حال $\tilde{B}B = (\det B)I$ و از این رو

$$\sum_{i=1}^n \tilde{B}_{ki} B_{ij} = \delta_{kj} \det B.$$

پس

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^n \delta_{kj} (\det B) \alpha_j \\ &= (\det B) \alpha_k, \quad 1 \leq k \leq n. \quad \square \end{aligned}$$

قضیه کیلی-همیلتن، عمدتاً بدین خاطر در این مرحله مفید است که حیطة جستجو برای چند جمله‌ایهای مینیمال عملگرهای گوناگون را محدود می‌سازد. اگر ماتریس A را که نمایشگر T در پایه مرتبی است بشناسیم، آنگاه می‌توانیم چند جمله‌ای سرشت‌نمای آن، f ، را محاسبه کنیم. می‌دانیم که چند جمله‌ای مینیمال p چند جمله‌ای f را عاد می‌کند و هر دو

ریشه‌های مساوی دارند. هیچ روش خاصی برای محاسبه دقیق ریشه‌های چندجمله‌ایها (مگر در صورت کوچک بودن درجه) در دست نیست؛ اما، اگر f به‌سازها تجزیه شود:

$$f = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k} \quad (7-6)$$

آنگاه

$$p = (x - c_1)^{r_1} \cdots (x - c_k)^{r_k}, \quad 1 \leq r_j \leq d_j. \quad (8-6)$$

این تنها چیزی است که در حالت عمومی می‌توان ابراز کرد. اگر f چندجمله‌ای (۷-۶) با درجه n باشد، آنگاه به‌ازای هر چندجمله‌ای p نظیر (۸-۶) می‌توانیم ماتریسی $n \times n$ بیابیم که f را به‌عنوان چندجمله‌ای سرشت‌نمای خود p را به‌عنوان چندجمله‌ای مینیمال خود دارا باشد. این مطلب را حالا اثبات نمی‌کنیم. ولی، می‌خواهیم این واقعیت را تأکید کنیم که علم به‌اینکه چندجمله‌ای سرشت‌نما شکل (۷-۶) را دارد، تصریح می‌کند که چندجمله‌ای مینیمال به‌شکل (۸-۶) است و هیچ چیز دیگری در مورد p ابراز نمی‌کند.

مثال ۵. گیریم A ماتریس (گویای) 4×4

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

باشد. توانهای A بسادگی قابل محاسبه‌اند:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

پس $A^3 = 4A$ ؛ یعنی، اگر $p = x^3 - 4x = x(x+2)(x-2)$ ، آنگاه $p(A) = 0$ چندجمله‌ای مینیمال A باید p را تقسیم کند. این چندجمله‌ای مینیمال بوضوح از درجه ۱ نیست، چرا که این مطلب بدان معنی است که A ضربی اسکالر از عنصر همانی است. از این رو، نامزدهای چندجمله‌ای مینیمال عبارتند از: p ، $x(x+2)$ ، $x(x-2)$ ، و $x^2 - 4$. سه چندجمله‌ای درجه دوم را می‌توان حذف کرد، زیرا با یک نظر آشکار است که $A^2 \neq 4A$ ، $A^2 \neq 2A$ ، $A^2 \neq -2A$. بنا بر این p چندجمله‌ای مینیمال A است. بخصوص ۰، ۲ و -2 مقادیر سرشت‌نمای A هستند. یکی از سازه‌های x ، $x-2$ ، و $x+2$ باید دوبار در چندجمله‌ای سرشت‌نما تکرار شود. آشکار است که $2 = \text{رتبه}(A)$. در نتیجه، فضایی دوبعدی از بردارهای سرشت‌نمای وابسته به مقدار سرشت‌نمای ۰ وجود دارد. اکنون از قضیه ۲ باید روشن باشد که چندجمله‌ای سرشت‌نما $(x^2 - 4)x^2$ است، و نیز اینکه A بروی هیأت اعداد گویا با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

متشابه است.

تمرین

۱. فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی باشد. چندجمله‌ای مینیمال عملگر همانی روی V کدام است؟ چندجمله‌ای مینیمال عملگر صفر چیست؟

۲. فرض کنید a ، b ، و c عناصر هیأت F و A ماتریس 3×3 زیر بروی F باشد:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}.$$

ثابت کنید چندجمله‌ای سرشت‌نمای A عبارت است از $x^3 - ax^2 - bx - c$ و این، چندجمله‌ای مینیمال A نیز هست.

۳. فرض کنید A ماتریس حقیقی 4×4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

باشد. نشان دهید چندجمله‌ای سرشت‌نمای A ، $x^2(x-1)^2$ است که چندجمله‌ای مینیمال آن نیز هست.

۴. آیا ماتریس A از تمرین ۳ بر روی هیأت اعداد مختلط با ماتریسی قطری متشابه است؟

۵. فضای برداری n بعدی V و عملگر خطی T روی V داده شده‌اند. فرض کنید عدد صحیح مثبتی چون k موجود است که $T^k = 0$. ثابت کنید $T^n = 0$.

۶. ماتریسی 3×3 بیابید که چندجمله‌ای مینیمال آن x^2 باشد.

۷. فرض کنید n عددی صحیح مثبت و V فضای چندجمله‌ای‌های بر روی R که درجه آنها حداکثر n است باشد (چندجمله‌ای 0 را نیز در V قرار دهید). فرض کنید D عملگر مشتق‌گیری روی V باشد. چندجمله‌ای مینیمال D کدام است؟

۸. فرض کنید P عملگری روی R^2 باشد که هر بردار را به موازات محور y ‌ها بروی محور x ‌ها تصویر کند: $P(x, y) = (x, 0)$. نشان دهید که P خطی است. چندجمله‌ای مینیمال P چیست؟

۹. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ با چندجمله‌ای سرشت‌نمای

$$f = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k}$$

باشد. نشان دهید که

$$c_1 d_1 + \cdots + c_k d_k = \text{tr}(A).$$

۱۰. فرض کنید V فضای برداری ماتریسهای $n \times n$ بر روی هیأت F باشد. فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ ثابت و T عملگر خطی روی V تعریف شده توسط

$$T(B) = AB$$

باشد. نشان دهید که چندجمله‌ای مینیمال T برابر چندجمله‌ای مینیمال A است.

۱۱. ماتریسهای A و B $n \times n$ بر روی هیأت F داده شده‌اند. بنابر تمرین ۹ در بخش

۱.۶ دو ماتریس AB و BA دارای مقادیر سرشت نمای مساوی اند. آیا چند جمله‌ایهای سرشت نمای آنها هم مساوی اند؟ آیا چند جمله‌ایها مینیمال آنها مساوی اند؟

۴.۶. زیرفضاهای پایا

در این بخش به معرفی چند مفهوم می‌پردازیم که در تحلیل عملگرهای خطی مفید واقع خواهند شد. از این ایده‌ها برای به دست آوردن سرشت نمایی عملگرهای قطری شدنی (و مثلی شونده) بر حسب چند جمله‌ایهای مینیمالشان، استفاده خواهیم کرد.

تعریف. فرض کنیم V فضایی برداری و T عملگری خطی روی V باشد. اگر W زیرفضایی از V باشد، گوئیم W تحت T پایا است، هرگاه به ازای هر بردار α در W ، بردار $T\alpha$ هم در W باشد؛ یعنی، هرگاه $T(W)$ مشمول W باشد.

مثال ۶. اگر T عملگر خطی دلخواهی روی V باشد، آنگاه V تحت T پایاست، همین‌طور است زیرفضای صفر. برد T و فضای پوچ T نیز تحت T پایا هستند.

مثال ۷. هیأت F و عملگر مشتق‌گیری D روی فضای $F[x]$ متشکل از چند جمله‌ایهای بر روی F مفروض اند. فرض کنیم n عددی صحیح مثبت و W زیرفضای چند جمله‌ایهای از درجه حداکثر n باشد. در این صورت W تحت D پایاست. این امر دقیقاً طریق دیگر بیان این مطلب است که D «کاهش‌دهنده درجه» است.

مثال ۸. در اینجا به تعمیمی بسیار مفید از مثال ۶ می‌پردازیم. عملگر خطی T روی V مفروض است. فرض کنیم U عملگر خطی دلخواهی روی V باشد که با T جابجایی شود؛ یعنی $TU = UT$. همچنین فرض کنیم W برد U و N فضای پوچ U باشد. N و W هر دو تحت T پایا هستند. اگر α در برد U باشد، مثلاً $\alpha = U\beta$ ، آنگاه $T\alpha = T(U\beta) = U(T\beta)$ و از این رو، $T\alpha$ در برد U قرار دارد. اگر α در N باشد، آنگاه

$$U(T\alpha) = T(U\alpha) = T(0) = 0 ;$$

پس، $T\alpha$ متعلق به N است.

نوع خاصی از عملگرهایی که با T جابجایی می‌شوند، عملگری چون $U = g(T)$ است که در آن g یک چند جمله‌ای است. مثلاً، ممکن است داشته باشیم $U = T - cI$ که در آن c یک مقدار سرشت نمای T است، فضای پوچ U برای ما آشناست. می‌بینیم که این مثال، این حکم (بدیهی) را شامل است که فضای بردارهای سرشت نمای T وابسته به مقدار سرشت نمای c تحت T پایا است.

مثال ۹. فرض کنیم T عملگری خطی روی R^2 باشد که در پایه مرتب‌استانده با ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. در این صورت تنها زیرفضاهایی از R^2 که تحت T پایا هستند، عبارتند از R^1 و زیرفضای صفر. هر زیرفضای پایای دیگری لزوماً باید دارای بعد یک باشد. اما، اگر W زیرفضایی باشد که توسط بردار غیرصفر α پدید می‌آید، این حکم که W تحت T پایاست به معنی این است که α يك بردار سرشت‌نااست، ولی A هیچ مقدار سرشت‌نمای حقیقی ندارد.

هرگاه زیرفضای W تحت عملگر T پایا باشد، T عملگری خطی چون T_W روی فضای W القا می‌کند. عملگر خطی T_W طبق $T_W(\alpha) = T(\alpha)$ ، به ازای هر α در W ، تعریف می‌شود، ولی T_W با T کاملاً متفاوت است، زیرا دامنه آن W است نه V . وقتی بعد V متناهی باشد، پایایی W تحت T تعیرماتریسی ساده‌ای دارد و شاید بهتر باشد که آن را در اینجا ذکر کنیم. فرض کنیم پایه مرتب $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ را برای V چنان انتخاب کرده باشیم که $\mathcal{B}' = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ پایه مرتبی برای W باشد ($r = \dim W$). گیریم $A = [T]_{\mathcal{B}}$ و از آنجا

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^n A_{ij}\alpha_i.$$

چون W تحت T پایاست، به ازای $j \leq r$ بردار $T\alpha_j$ به W تعلق دارد. این بدان معنی است که

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^r A_{ij}\alpha_i, \quad j \leq r. \quad (9-6)$$

به عبارت دیگر، هرگاه $i > r$ و $j \leq r$ ، $A_{ij} = 0$. از نظر ظاهر، A به صورت بلوکی

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix} \quad (10-6)$$

است، که در آن B ماتریسی $r \times r$ ، C ماتریسی $r \times (n-r)$ ، D و D ماتریسی $(n-r) \times (n-r)$ است. خواننده توجه دارد که بنا بر (9-6)، ماتریس B دقیقاً ماتریس عملگر القا شده T_W در پایه مرتب \mathcal{B}' است.

اکثر اوقات، بحث در خصوص T و T_W را بدون استفاده از صورت بلوکی ماتریس A در (10-6) انجام می‌دهیم. اما، به این نکته که روابط معین بین T و T_W چگونه از این صورت بلوکی دیده می‌شوند باید توجه کرد.

لم. فرض کنیم W زیرفضایی پایا از T باشد. چند جمله‌ای سرشت‌نمای عملگر

تحدیدی T_W چندجمله‌ای سرشت نمای T را عادی می‌کند، و نیز چندجمله‌ای مینیمال T_W چندجمله‌ای مینیمال T را اثبات. داریم

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

که در آن $A = [T]$ و $B = [T_W]$ به واسطه صورت بلوکی این ماتریس

$$\det(xI - A) = \det(xI - B) \det(xI - D).$$

این تساوی، حکم در خصوص چندجمله‌ایهای سرشت نما را اثبات می‌کند. توجه داشته باشید که I برای نمایش ماتریسهای همانی با سه اندازه مختلف، به کار رفته است. k مین توان ماتریس A دارای صورت بلوکی

$$A^k = \begin{bmatrix} B^k & C_k \\ 0 & D^k \end{bmatrix}$$

است که در آن C_k ماتریسی $r \times (n-r)$ است. بنا براین، هر چند جمله‌ای که A را پوچ سازد B را نیز (و ایضاً D را) پوچ می‌سازد. از این رو، چندجمله‌ای مینیمال B چندجمله‌ای مینیمال A را عادی می‌کند. \square

مثال ۱۰. فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای با بعد متناهی V ، زیرفضای پدیدآمده توسط همه بردارهای سرشت نمای T و c_1, \dots, c_r مقادیر سرشت نمای متمایز T باشند. به ازای هر i ، گیریم فضای بردارهای سرشت نمای وابسته به مقدار سرشت نمای c_i و پایه مرتبی برای W_i باشد. لم پیش از قضیه ۲ می‌گوید که $\mathcal{B}' = (B_1, \dots, B_k)$ پایه مرتبی برای W است. بویژه

$$\dim W = \dim W_1 + \dots + \dim W_k.$$

فرض کنیم $\mathcal{B}' = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ به صورتی باشد که چند α ی نخست آن پایه \mathcal{B}_1 چندتای بعدی پایه \mathcal{B}_2 ، و به همین نحو بقیه را تشکیل دهند. با این قرار

$$T\alpha_i = t_i \alpha_i, \quad i = 1, \dots, r$$

که در آن $(t_1, \dots, t_r) = (c_1, c_1, \dots, c_1, \dots, c_k, c_k, \dots, c_k)$ و این در حالی است که c_i به تعداد $\dim W_i$ بار تکرار شده باشد.

حال W تحت T پایاست، چرا که به ازای هر α در W داریم

$$\alpha = x_1 \alpha_1 + \dots + x_r \alpha_r$$

$$T\alpha = t_1 x_1 \alpha_1 + \dots + t_r x_r \alpha_r.$$

بردارهای دیگری چون $\alpha_n, \dots, \alpha_{r+1}$ را در V به نحوی انتخاب می‌کنیم که $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V باشد. ماتریس T نسبت به \mathcal{B} صورت بلوکی (۱۰-۶) را دارد و ماتریس عملگر تحدیدی T_W نسبت به پایه \mathcal{B}' برابر با

$$B = \begin{bmatrix} t_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & t_r \end{bmatrix}$$

است. چندجمله‌ای سرشت‌نمای B (یعنی، چندجمله‌ای سرشت‌نمای T_W) عبارت است از

$$g = (x - c_1)^{e_1} \dots (x - c_k)^{e_k}$$

که در آن $e_i = \dim W_i$. از این گذشته، g چندجمله‌ای سرشت‌نمای f از T را عادی می‌کند. بنا براین، چندگانگی c_i ، به عنوان ریشه‌ای از f ، حداقل برابر $\dim W_i$ است. این مطالب باید قضیه ۲ را روشن کرده باشند. قضیه مذکور صرفاً بیان می‌کند که T قطری شدنی است اگر و تنها اگر $r = n$ یا اگر و تنها اگر $e_1 + \dots + e_k = n$. در حالت قطری نشدنی این مطالب کمک زیادی نمی‌کنند، چرا که ماتریسهای C و D در (۱۰-۶) را نمی‌شناسیم.

تعریف. فرض کنیم W زیرفضایی پایا از T و α برداری از V باشد. $T - \text{هادی}$ α در W عبارت است از مجموعه $S_T(\alpha; W)$ متشکل از همه چندجمله‌ایهای g (بر روی هیأت اسکالر) که $g(T)\alpha$ متعلق به W باشد.

چون عملگر T در بیشتر مباحث ثابت است، معمولاً زیرنمایه T را حذف می‌کنیم و می‌نویسیم $S(\alpha; W)$. مؤلفین معمولاً این دسته از چندجمله‌ایها را «پرکننده» (ایدال پرکننده) می‌نامند. «هادی» اصطلاح متداول تری است که مورد ترجیح کسانی است که عملگر نه‌چندان مهاجم $g(T)$ را در تصور دارند که با ملایمت بردار α را به W سوق می‌دهد. در حالت خاص $W = \{0\}$ ، هادی T - پوچساز α می‌نامیم.

لم. اگر W زیرفضای پایایی برای T باشد، آنگاه W تحت هر چندجمله‌ای در T پایاست. پس، به ازای هر α در V ، هادی $S(\alpha; W)$ ایدالی در جبر چندجمله‌ای $F[x]$ است.

اثبات. اگر β در W باشد، آنگاه $T\beta$ متعلق به W است. در نتیجه،

با در $T(T\beta) = T^2\beta$ هم در W است. به استقرا، به ازای هر k ، بردار $T^k\beta$ در W است. با در نظر گرفتن ترکیبات خطی، دیده می شود که به ازای هر چندجمله ای f ، $f(T)\beta$ متعلق به W است.

اگر W زیر مجموعه دلخواهی از V باشد، تعریف $S(\alpha; W)$ بامعنی است. اگر W زیر فضا باشد، آنگاه $S(\alpha; W)$ هم زیر فضایی از $F[x]$ است، زیرا

$$(cf + g)(T) = cf(T) + g(T).$$

در صورتی که W تحت T نیز پایا باشد، g را يك چندجمله ای در $S(\alpha; W)$ می گیریم؛ یعنی، فرض می کنیم $g(T)\alpha$ در W باشد. اگر f يك چندجمله ای دلخواه باشد، آنگاه $f(T)[g(T)\alpha]$ در W است. چون

$$(fg)(T) = f(T)g(T)$$

fg متعلق به $S(\alpha; W)$ است. پس مجموعه هادی، عمل ضرب در هر چندجمله ای دلخواه را پذیراست. \square

یکتا مولد تکین ایدآل $S(\alpha; W)$ ، T -هادی α در W (توچساز، در حالت $W = \{0\}$) نیز نامیده می شود. T -هادی α در W چندجمله ای تکینی مانند g با کمترین درجه است که $g(T)\alpha$ در W باشد. چندجمله ای f در $S(\alpha; W)$ است اگر و تنها اگر g چندجمله ای f را عا کند. توجه کنید که هادی $S(\alpha; W)$ همواره چندجمله ای مینیمال T را شامل است؛ از این رو، هر T -هادی چندجمله ای مینیمال T را عا می کند.

به عنوان اولین مثال از چگونگی استفاده از هادی $S(\alpha; W)$ ، عملگرهای مثلثی شونده را سرشت نمایی می کنیم. عملگر خطی T مثلثی شونده نامیده می شود، هر گاه پایه مرتبی وجود داشته باشد که در آن T با ماتریسی مثلثی نمایش داده شود.

هم فرض کنیم V فضایی برداری با بعد متناهی بر روی هیأت F و T عملگری خطی روی V باشد که چندجمله ای مینیمال T حاصل ضربی از سازه های خطی به صورت

$$p = (x - c_1)^{r_1} \cdots (x - c_k)^{r_k}$$

باشد. همچنین فرض کنیم W زیر فضایی سره ($W \neq V$) از V باشد که تحت T پایاست. برداری چون α در V وجود دارد که
(الف) α در W نیست؛

(ب) به ازای يك مقدار سرشت نمای c از عملگر T ، بردار $(T - cI)\alpha$ متعلق به W است.

اثبات. آنچه را که (الف) و (ب) بیان می کنند این است که T -هادی α در W يك چندجمله ای خطی است. گیریم β برداری در V باشد که در W نباشد و g برابر T -هادی β در W باشد. در این صورت g چندجمله ای مینیمال p از T را عا می کند.

چون β در W قرار ندارد، چند جمله‌ای g ثابت نیست. بنا بر این،

$$g = (x - c_1)^{e_1} \cdots (x - c_k)^{e_k}$$

که در آن حداقل یکی از اعداد صحیح e_i مثبت است. z را طوری انتخاب می‌کنیم که $e_j > 0$. در این صورت $(x - c_j)$ چند جمله‌ای g را عاد می‌کند:

$$g = (x - c_j)h.$$

بنا بر تعریف g ، بردار $\alpha = h(T)\beta$ نمی‌تواند در W باشد. اما

$$\begin{aligned} (T - c_j I)\alpha &= (T - c_j I)h(T)\beta \\ &= g(T)\beta \end{aligned}$$

متعلق به W است. \square

قضیه ۵. فرض کنیم V فضایی برداری با بعد متناهی بر روی هیأت F و T عملگری خطی روی V باشد. در این صورت T مثلثی شونده است اگر و تنها اگر چند جمله‌ای مینیمال T حاصل ضربی از چند جمله‌ایهای خطی بر روی F باشد. اثبات. فرض کنیم چند جمله‌ای مینیمال، به صورت

$$p = (x - c_1)^{r_1} \cdots (x - c_k)^{r_k}$$

به سازه‌ها تجزیه شود. با به کار بستن مکرر لم بالا، به پایه r مرتب $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ دست می‌یابیم که در آن نمایش ماتریسی T بالامتثلی است:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \circ & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \circ & \circ & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (11-6)$$

(۱۱-۶) صرفاً بیان می‌کند که

$$T\alpha_j = a_{1j}\alpha_1 + \cdots + a_{jj}\alpha_j, \quad 1 \leq j \leq n \quad (12-6)$$

یعنی، $T\alpha_j$ در زیرفضای پدیدآمده توسط $\alpha_1, \dots, \alpha_j$ قرار دارد. برای یافتن $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ با به کار بردن لم در مورد زیر فضای $W = \{0\}$ اول α_1 را به دست می‌آوریم. آنگاه لم را در مورد W_1 ، فضای پدیدآمده توسط α_1 ، به کار می‌بندیم تا α_2 را به دست آوریم. سپس لم را در مورد W_2 ، فضای پدیدآمده توسط α_1 و α_2 ، به کار می‌بندیم، و

به همین طریق ادامه می‌دهیم. يك نکته را هم باید متذکر شویم. پس از اینکه $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ را یافتیم، این روابط مثلث گونه (۶-۱۲)، به ازای $i, j = 1, \dots, n$ هستند که متضمن پایا بودن زیر فضای پدیدآمده توسط $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ تحت عملگر T هستند.

اگر T مثلثی شونده باشد، بدیهی است که چندجمله‌ای سرشت‌نمای T به صورت

$$f = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k} \text{ در } F$$

است. اکنون به ماتریس مثلثی (۶-۱۱) توجه کنید. درایه‌های قطری $\alpha_{n_n}, \dots, \alpha_{11}$ مقادیر سرشت‌نما هستند که c_i به تعداد d_i بار تکرار می‌شود. اما، اگر f بتواند بدین صورت تجزیه شود، چندجمله‌ای مینیمال p نیز این طور تجزیه می‌شود، چرا که p چندجمله‌ای f را عاد می‌کند. \square

نتیجه. فرض کنیم F يك هیأت بسته جبری، چون هیأت اعداد مختلط باشد. هر ماتریس $n \times n$ بر روی F ، با يك ماتریس مثلثی بر روی F متشابه است.

قضیه ۶. فضای برداری V با بعد متناهی V بر روی هیأت F و عملگر خطی T روی V داده شده‌اند. T قطری شدنی است اگر و تنها اگر چندجمله‌ای مینیمال T به صورت

$$p = (x - c_1) \cdots (x - c_k)$$

باشد که در آن c_1, \dots, c_k عناصری متمایز از F هستند.

اثبات. قبلاً گفته‌ایم که اگر T قطری شدنی باشد، چندجمله‌ای مینیمال آن حاصل-ضربی از سازه‌های خطی متمایز است (ر. ک. بحث پیش از مثال ۴). برای اثبات حالت عکس، W را زیر فضای پدیدآمده توسط همه بردارهای سرشت‌نمای T می‌گیریم و فرض می‌کنیم $W \neq V$. بنا بر لمی که در اثبات قضیه ۵ به کار رفت، برداری چون α که در W نیست و نیز مقدار سرشت‌نمایی چون c_j از T وجود دارند که بردار

$$\beta = (T - c_j I)\alpha$$

در W قرار می‌گیرد. چون β در W است،

$$\beta = \beta_1 + \cdots + \beta_k$$

که در آن $T\beta_i = c_i\beta_i$ ، $1 \leq i \leq k$ و بنابراین به ازای هر چندجمله‌ای h ، بردار

$$h(T)\beta = h(c_1)\beta_1 + \cdots + h(c_k)\beta_k$$

در W قرار دارد.

حال، يك چندجمله‌ای چون q وجود دارد که $p = (x - c_j)q$. همچنین

$$q - q(c_j) = (x - c_j)h.$$

پس، داریم

$$q(T)\alpha - q(c_j)\alpha = h(T)(T - c_j I)\alpha = h(T)\beta.$$

اما $h(T)\beta$ متعلق به W است و چون

$$0 = p(T)\alpha = (T - c_j I)q(T)\alpha$$

بردار $q(T)\alpha$ در W قرار دارد. بنابراین، $q(c_j)\alpha$ هم در W است. چون α در W نیست، $q(c_j)\alpha = 0$. این مطلب متناقض با این واقعیت است که p ریشه‌های متمایزی دارد. \square

در انتهای بخش ۷.۶، اثبات متفاوتی از قضیه ۶ ارائه خواهیم کرد. قضیه ۶ علاوه بر اینکه نتیجه زیبایی است، از نظر محاسباتی نیز مفید است. فرض کنیم عملگر خطی T که در پایه مرتبی با ماتریس A نمایش داده می‌شود در دست باشد و بخواهیم بدانیم که آیا T قطری شدنی است یا نه. چند جمله‌ای سرشت‌نمای f را محاسبه می‌کنیم. اگر بتوانیم f را به‌سازها تجزیه کنیم:

$$f = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k}$$

دو روش متفاوت برای تعیین اینکه آیا T قطری شدنی است یا نه، در اختیار داریم. یک روش این است که ببینیم آیا می‌توانیم به‌ازای هر i ، تعداد d_i بردار سرشت‌نمای مستقل، وابسته به مقدار سرشت‌نمای c_i ، بیابیم یا نه. روش دیگر، بررسی این مطلب است که آیا $(T - c_1 I) \cdots (T - c_k I)$ عملگر صفر هست یا نه.

قضیه ۵، اثبات متفاوتی از قضیه کیلی-همیلتن به‌دست می‌دهد. قضیه اخیر در مورد ماتریسهای مثلثی آسان است. از این‌رو، به واسطه قضیه ۵، نتیجه را برای هر ماتریس دلخواه بر روی هیأتی بسته جبری، به‌دست می‌آوریم. هر هیأت، زیرهیأتی از یک هیأت بسته جبری است. با دانستن این قضیه، اثباتی برای قضیه کیلی-همیلتن برای ماتریسهای بر روی هیأتی دلخواه به‌دست می‌آید. اگر در این بحث، دست کم قضیه بنیادی جبر (هیأت اعداد مختلط بسته جبری است) را بپذیریم، آنگاه قضیه ۵ اثباتی از قضیه کیلی-همیلتن برای ماتریسهای مختلط هم فراهم می‌آورد و این اثبات مستقل از اثباتی است که قبلاً ارائه کردیم.

تمرین

۰۱. فرض کنید T عملگری خطی روی R^2 باشد که ماتریس آن در پایه مرتب استاندارد

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

است.

(الف) ثابت کنید تنها زیرفضاهای R^2 که تحت T پایا هستند، R^2 و زیرفضای

صفر می باشند.

(ب) اگر ماتریس عملگر خطی U روی C^2 در پایه مرتب استاندارد A باشد، نشان دهید U دارای زیرفضاهای پایای یک بعدی است.

۲. فرض کنید W زیرفضای پایایی برای T باشد. بدون رجوع به ماتریسها، ثابت کنید که چندجمله‌ای مینیمال عملگر تحدیدی $T|_W$ ، چندجمله‌ای مینیمال T را عادی می‌کند.

۳. C را یک مقدار سرشت‌نمای T و W را فضای بردارهای سرشت‌نمای وابسته به مقدار سرشت‌نمای C بگیرید. عملگر تحدیدی $T|_W$ چیست؟

۴. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

آیا A بر روی هیأت اعداد حقیقی با ماتریسی مثلثی متشابه است؟ اگر این طور باشد، چنین ماتریس مثلثی را بیابید.

۵. هر ماتریس A ، با این خاصیت که $A^2 = A$ ، با ماتریسی قطری متشابه است.

۶. فرض کنید T یک عملگر خطی قطری شدنی روی فضای برداری n بعدی V باشد. اگر W زیرفضایی باشد که تحت T پایاست، ثابت کنید عملگر تحدیدی $T|_W$ قطری-شدنی است.

۷. فرض کنید T عملگر خطی روی یک فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأت اعداد مختلط باشد. ثابت کنید T قطری شدنی است اگر و تنها اگر T توسط یک چندجمله‌ای بر روی C با ریشه‌های متمایز، پوچ شود.

۸. فرض کنید T عملگری خطی روی V باشد. اگر هر زیرفضای V تحت T پایا باشد، آنگاه T ضربی اسکالری از عملگر همانی است.

۹. فرض کنید T عملگر انتگرال نامعین

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t) dt$$

روی فضای توابع پیوسته روی فاصله $[0, 1]$ باشد. آیا فضای توابع چندجمله‌ای

تحت T پایا است؟ فضای توابع مشتق‌پذیر چطور؟ فضای توابعی که در $1/2 = \alpha$ صفر می‌شوند چطور؟

۱۰. فرض کنید A ماتریسی 3×3 با درایه‌های حقیقی باشد. ثابت کنید که اگر A بر روی R با ماتریسی مثلثی متشابه نباشد، آنگاه A بر روی C با ماتریسی قطری متشابه است.

۱۱. این حکم درست است یا غلط: اگر ماتریس مثلثی A با ماتریسی قطری متشابه باشد، آنگاه A خود قطری است.

۱۲. فرض کنید T عملگری خطی روی یک فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأت بسته جبری F ، و f یک چندجمله‌ای بر روی F باشد. ثابت کنید c یک مقدار سرشت-نمای $f(T)$ است اگر و تنها اگر $c = f(t)$. در اینجا t یک مقدار سرشت نمای T است.

۱۳. فرض کنید V فضای ماتریسهای $n \times n$ بر روی F و A ماتریس $n \times n$ ثابتی بر روی F باشد. فرض کنید T و U عملگرهای خطی روی V تعریف شده توسط

$$T(B) = AB$$

$$U(B) = AB - BA$$

باشند.

(الف) این حکم درست است یا غلط: اگر A (بر روی F) قطری شدنی باشد، آنگاه T قطری شدنی است.

(ب) این حکم درست است یا غلط: اگر A قطری شدنی باشد، آنگاه U نیز قطری شدنی است.

۵.۶. مثلث‌بندی همزمان؛ قطری سازی همزمان

فرض کنیم V فضایی با بعد متناهی و \mathcal{C} خانواده‌ای از عملگرهای خطی روی V باشد. می‌خواهیم بدانیم کی می‌توانیم عملگرهای واقع در \mathcal{C} را به‌طور همزمان مثلث‌بندی کنیم یا قطری سازیم؛ یعنی، پایه‌ای چون \mathcal{B} بیابیم که همهٔ ماتریسهای \mathcal{C} در $T, [T]$ در \mathcal{C} ، مثلثی (یا قطری) باشند. در مورد قطری سازی، لازم است \mathcal{C} خانواده‌ای از عملگرهای جابجا-شونده باشد؛ به‌ازای هر T و U در \mathcal{C} ، $UT = TU$. این مطلب، از این واقعیت ناشی می‌شود که همهٔ ماتریسهای قطری جابجا می‌شوند. البته، این نیز لازم است که هر عملگر در \mathcal{C} عملگری قطری شدنی باشد. برای مثلث‌بندی همزمان، هر عملگر در \mathcal{C} باید مثلثی-

شونده باشد. لازم نیست که \mathcal{F} خانواده‌ای جابجا شونده باشد؛ هر چند، این شرط (که هر T به تنهایی می‌تواند مثلث بندی شود) برای مثلث بندی همزمان کافی است. این نتایج، از تغییراتی جزئی در اثبات قضایای ۵ و ۶ حاصل می‌شوند.

زیر فضای W تحت (خانواده عملگرهای) \mathcal{F} پایاست، هر گاه W تحت هر يك از عملگرهای واقع در \mathcal{F} پایا باشد.

لم. گیریم \mathcal{F} خانواده جابجا شونده‌ای از عملگرهای خطی مثلثی شونده روی V باشد. فرض کنیم W زیرفضایی سره از V باشد که تحت \mathcal{F} پایاست. برداری چون α در V وجود دارد که

(الف) α در W نیست؛

(ب) به ازای هر T در \mathcal{F} ، بردار $T\alpha$ در زیر فضای پدید آمده توسط α و W قرار

دارد.

اثبات. به دلیل مشاهده ذیل هر گاه فرض کنیم \mathcal{F} فقط شامل تعدادی متناهی عملگر باشد از عمومیت مسأله نکاسته ایم. گیریم $\{T_1, \dots, T_r\}$ يك زیرمجموعه مستقل خطی ما کسیمال \mathcal{F} ، یعنی پایه‌ای برای زیر فضای پدید آمده توسط \mathcal{F} باشد. اگر α برداری باشد که برای آن شرط (ب) به ازای هر T_i برقرار باشد، آنگاه (ب) به ازای هر عملگری که ترکیبی خطی از T_1, \dots, T_r باشد نیز برقرار است.

بنا بر لم قبل از قضیه ۵ (همین لم برای تنها يك عملگر) می‌توانیم برداری چون β_1 (که در W نیست) و اسکالری چون c_1 بیابیم که $(T_1 - c_1 I)\beta_1$ متعلق به W باشد. گیریم V_1 دسته همه بردارهایی چون β در V باشد که $(T_1 - c_1 I)\beta$ متعلق به W است. در این صورت V_1 زیرفضایی از V است که به طور سره بزرگتر از W می‌باشد. از این گذشته، V_1 بحت \mathcal{F} پایاست؛ زیرا، اگر T با T_1 جابجا شود، آنگاه

$$(T_1 - c_1 I)(T\beta) = T(T_1 - c_1 I)\beta.$$

اگر β در V_1 باشد، آنگاه $(T_1 - c_1 I)\beta$ در W است. چون W تحت هر T در \mathcal{F} پایاست، $T(T_1 - c_1 I)\beta$ متعلق به W است؛ یعنی، به ازای هر β در V_1 و هر T در \mathcal{F} ، $T\beta$ در V_1 قرار دارد.

حال W زیرفضایی سره از V_1 است. گیریم U_1 عملگر خطی روی V_1 باشد که از تحدید T_1 به زیر فضای V_1 حاصل می‌شود. چندجمله‌ای مینیمال U_1 چندجمله‌ای مینیمال T_1 را تقسیم می‌کند. بنابراین، می‌توانیم لم قبل از قضیه ۵ را در مورد این عملگر و زیر فضای پایای W به کار بندیم. برداری چون β_1 در V_1 (و نه در W) و اسکالری چون c_1 را به دست می‌آوریم که $(T_1 - c_1 I)\beta_1$ در W باشد. توجه کنید که

(الف) β_1 متعلق به W نیست؛

(ب) $(T_1 - c_1 I)\beta_1$ در W است؛

(پ) $(T_1 - c_1 I)\beta_1$ هم در W است.

فرض کنیم V_p مجزعه همه بردارهای β در V_1 باشد که $(T_p - c_p I)\beta$ در W است. در این صورت V_p تحت \mathcal{P} پایاست. لم قبل از قضیه ۵ را در مورد U_p ، تحدید T_p به V_p ، به کار می بندیم. اگر بدین طریق ادامه دهیم به برداری چون $\alpha = \beta_r$ (که در W نیست) خواهیم رسید که $\alpha = (T_j - c_j I)\alpha$ ، $j = 1, \dots, r$ ، در W است. \square

قضیه ۷. فرض کنیم V فضایی برداری با بعد متناهی بر روی هیأت F و خانواده جابجا شونده‌ای از عملگرهای خطی مثلثی شونده روی V باشد. پایه مرتبی برای V وجود دارد که در آن پایه، هر عملگر واقع در \mathcal{P} توسط ماتریسی مثلثی نمایش داده می شود. اثبات. با در اختیار داشتن لمی که هم اکنون اثبات شد، چنانچه \mathcal{P} جایگزین T گردد، آنگاه این قضیه همان اثبات قضیه ۵ را خواهد داشت. \square

نتیجه. گیریم \mathcal{P} خانواده جابجا شونده‌ای از ماتریسهای $n \times n$ بر روی هیأت بسته جبری F باشد. ماتریس $n \times n$ ناهمفردی چون P ، با درایه‌های متعلق به F وجود دارد که به ازای هر ماتریس A در \mathcal{P} ، ماتریس $P^{-1}AP$ بالا مثلثی است.

قضیه ۸. فرض کنیم \mathcal{P} خانواده جابجا شونده‌ای از عملگرهای خطی قطری شدنی روی فضای برداری با بعد متناهی V باشد. پایه مرتبی برای V وجود دارد که در آن پایه، هر عملگر واقع در \mathcal{P} توسط ماتریسی قطری نمایش داده می شود.

اثبات. همچنان که قضیه ۶ را با اقتباس از لم قبل از قضیه ۵ برای حالت قطری شدنی ثابت کردیم، می توانیم این قضیه را هم با اقتباس لم قبل از قضیه ۷ برای حالت قطری شدنی اثبات کنیم. ولی، در این مرحله ساده تر آن است که با استقرار روی بعد V به پیش برویم. اگر $1 = \text{بعد}(V)$ چیزی برای اثبات باقی نمی ماند. قضیه را برای فضاهای برداری با ابعاد کمتر از n فرض می کنیم و V را فضایی n بعدی می گیریم. عنصری چون T از \mathcal{P} انتخاب می کنیم که ضربی اسکالری از عنصر همانی نباشد. اسکالرهایی c_1, \dots, c_r را مقادیر سرشت نمای متمایز T ، و (به ازای هر i) W_i را فضای پوچ $T - c_i I$ فرض می کنیم. نمایه‌ای چون i را تثبیت می کنیم. در این صورت W_i تحت هر عملگری که با T جابجا شود پایاست. \mathcal{P} را خانواده عملگرهای خطی روی W_i می گیریم که از تحدید عملگرهای در \mathcal{P} به زیر فضاهای (پایه‌ای) W_i حاصل بشوند. هر عملگر متعلق به \mathcal{P} قطری شدنی است، زیرا چند جمله‌ای مینیمال آن، چند جمله‌ای مینیمال عملگر متناظرش در \mathcal{P} را عادمی کند. چون $\dim W_i < \dim V$ ، عملگرهای واقع در \mathcal{P} می توانند همزمان قطری شوند. به بیان دیگر، W_i پایه‌ای چون \mathcal{B}_i دارد، متشکل از بردارهایی که همزمان بردارهای سرشت نمای هر يك از عملگرهای متعلق به \mathcal{P} هستند.

چون T قطری شدنی است، لم قبل از قضیه ۲ می گوید که $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r)$ پایه‌ای برای V است. این همان پایه‌ای است که در جستجوی هشتم. \square

تمرین

۰۱. ماتریس حقیقی معکوس پذیری چون P بیابید که $P^{-1}AP$ و $P^{-1}BP$ هر دو قطری-شدنی باشند. در اینجا A و B ماتریسهای حقیقی زیر هستند.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

۰۲. فرض کنید \mathcal{C} خانواده جابجاشونده‌ای از ماتریسهای مختلط 3×3 باشد. خانواده \mathcal{C} چند ماتریس مستقل خطی را می‌تواند شامل باشد؟ در حالت $n \times n$ چه می‌توان گفت؟

۰۳. T را عملگری خطی روی فضای n بعدی بگیرید و فرض کنید T دارای n مقدار سرشت‌نمای متمایز باشد. ثابت کنید هر عملگر خطی که با T جابجا شود، یک چندجمله‌ای بر حسب T است.

۰۴. فرض کنید A, B, C, D چهار ماتریس مختلط $n \times n$ باشند که (با یکدیگر) جابجا می‌شوند. فرض کنید E ماتریس $2n \times 2n$

$$E = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

باشد. ثابت کنید $\det E = \det(AD - BC)$.

۰۵. فرض کنید F یک هیأت n عددی صحیح مثبت، و V فضای ماتریسهای $n \times n$ بر روی F باشد. اگر A ماتریس $n \times n$ ثابتی بر روی F باشد، T_A را عملگر خطی روی V تعریف شده توسط $T_A(B) = AB - BA$ بگیرید. خانواده عملگرهای خطی T_A را که با تغییر A روی همه ماتریسهای قطری، حاصل می‌شود در نظر بگیرید. ثابت کنید عملگرهای واقع در این خانواده همزمان قطری‌شدنی هستند.

۰۶. تجزیه به مجموع مستقیم

همچنان که به تحلیل خود از یک تک عملگر خطی ادامه می‌دهیم، ایده‌هایمان را به‌طریقی استانداردتر-کمتر بر حسب ماتریسها و بیشتر بر حسب زیرفضاها-تنظیم می‌کنیم. در آغاز این فصل هدف خود را بدین صورت تشریح کردیم: یافتن پایه مرتبی که در آن ماتریس T

شکل ساده خاصی به خود بگیرد. اکنون، هدف خود را به صورت زیر تشریح می کنیم: تجزیه فضای زمینه V به مجموع از زیرفضاهای پایا برای T به طوری که عملگرهای تحدیدی روی این زیرفضاها ساده باشند.

تعریف. گیریم W_1, \dots, W_k زیر فضاهایی از فضای برداری V باشند. گوئیم W_1, \dots, W_k مستقل هستند، هرگاه

$$W_i \text{ در } \alpha_i, \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_k = 0$$

ایجاب کند که همه α_i ها صفر باشند.

به ازای $k=2$ ، معنی استقلال همان $\{0\}$ بودن اشتراك است، به عبارت دیگر، W_1 و W_2 مستقل هستند اگر و تنها اگر $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. اگر $k > 2$ ، استقلال W_1, \dots, W_k بیانگر مطالب بسیار بیشتری از $W_1 \cap \dots \cap W_k = \{0\}$ است. این استقلال بیان می کند که هر W_j با مجموع زیر فضاهای دیگر W_i تنها در بردار صفر شریک است.

اهمیت استقلال در نکته زیر نهفته است. گیریم $W = W_1 + \dots + W_k$ زیر فضای پدید آمده توسط W_1, \dots, W_k باشد. هر بردار α در W را می توان به صورت مجموعی چون

$$W_i \text{ در } \alpha_i, \quad \alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$$

نوشت. اگر W_1, \dots, W_k مستقل باشند، آنگاه این عبارت برای α یکتا است؛ زیرا اگر

$$W_i \text{ در } \beta_i, \quad \beta = \beta_1 + \dots + \beta_k$$

آنگاه $0 = (\alpha_1 - \beta_1) + \dots + (\alpha_k - \beta_k)$ و از این رو $\alpha_i - \beta_i = 0$ ، $i=1, \dots, k$. پس، وقتی که W_1, \dots, W_k مستقل باشند، به همان طریقی که با بردارهای R^k به مثابه k تاییهایی از اعداد رفتار می کردیم، می توانیم با بردارهای W نیز به صورت k تاییهای $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ در W_i رفتار کنیم.

لم. فرض کنیم V فضایی برداری با بعد متناهی باشد. W_1, \dots, W_k را زیر-فضاهایی از V می گیریم و فرض می کنیم $W = W_1 + \dots + W_k$. احکام زیر هم ازنند.

(الف) W_1, \dots, W_k مستقل هستند.

(ب) به ازای هر j ، $2 \leq j \leq k$ داریم

$$W_j \cap (W_1 + \dots + W_{j-1}) = \{0\}.$$

(پ) اگر \mathcal{B}_i پایه مرتبی برای W_i ، $1 \leq i \leq k$ باشد آنگاه دنباله $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k)$ پایه مرتبی برای W است.

اثبات. (الف) را فرض می گیریم. فرض کنیم α برداری در اشتراك

$\alpha_{j-1}, \dots, \alpha_1$ چون بردارهایی باشند. در این صورت بردارهایی چون $W_j \cap (W_1 + \dots + W_{j-1})$ وجود دارند که $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_{j-1}$. چون

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_{j-1} + (-\alpha) + 0 + \dots + 0 = 0$$

و از طرفی W_k, \dots, W_1 مستقل هستند، باید داشته باشیم $\alpha = 0$ یا $\alpha_{j-1} = \dots = \alpha_1 = 0$. اکنون ثابت می‌کنیم که (ب) حکم (الف) را ایجاب می‌کند. فرض کنیم

$$W_i \text{ در } \alpha_i \quad 0 = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$$

j را بزرگترین عدد صحیح i می‌گیریم که $\alpha_i \neq 0$ ، در این صورت

$$0 = \alpha_1 + \dots + \alpha_j, \quad \alpha_j \neq 0.$$

پس $\alpha_j = -\alpha_1 - \dots - \alpha_{j-1}$ بردار غیر صفری در $W_j \cap (W_1 + \dots + W_{j-1})$ است.

تا اینجا می‌دانیم که (الف) و (ب) یکی هستند، ببینیم چرا (الف) و (ب) هم‌ارزند. (الف) را فرض می‌گیریم. فرض کنیم \mathcal{B}_i پایه‌ای برای W_i ، $1 \leq i \leq k$ باشد و $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k)$ هر رابطه خطی بین بردارهای \mathcal{B} صورت

$$\beta_1 + \dots + \beta_k = 0$$

را دارد که در آن ترکیبی خطی از بردارهای متعلق به \mathcal{B}_i است. چون W_k, \dots, W_1 مستقل هستند، هر β_i برابر ۰ است. چون هر \mathcal{B}_i مستقل است، رابطه‌ای که بین بردارهای واقع در \mathcal{B} داریم رابطه‌ای بدیهی است.

اثبات این که (ب) حکم (الف) را ایجاب می‌کند به تمرین (تمرین ۲) ارجاع می‌شود. \square

اگر هر يك از (و در نتیجه همه) شرایط لم اخیر برقرار باشد، گوئیم مجموع $W = W_1 + \dots + W_k$ مستقیم است یا مجموع مستقیم W_1, \dots, W_k است و می‌نویسیم

$$W = W_1 \oplus \dots \oplus W_k.$$

خواننده ممکن است در نوشتارهای ریاضی این مجموع مستقیم را با عنوان مجموع مستقل یا مجموع مستقیم درونی W_1, \dots, W_k هم بباید.

مثال ۱۱. گیریم V فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأت F و $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای برای V باشد. اگر W_i زیر فضای يك بعدی پدیدآمده توسط α_i باشد، آنگاه $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_n$.

مثال ۱۲. فرض کنیم n عددی صحیح مثبت، F زیر هیأتی از اعداد مختلط، و V

فضای همه ماتریسهای $n \times n$ بر روی F باشد. گیریم W_1 زیرفضای همه ماتریسهای متقارن، یعنی ماتریسهایی چون A با شرط $A^t = A$ ، و W_2 زیرفضای همه ماتریسهای متقارن کج، یعنی ماتریسهایی چون A با شرط $A^t = -A$ ، باشند. در این صورت $V = W_1 \oplus W_2$. اگر A ماتریسی دلخواه در V باشد، عبارت یکتایی که A را به صورت مجموعی از ماتریسها، یکی در W_1 و دیگری در W_2 ، بیان کند عبارت است از

$$A = A_1 + A_2$$

$$A_1 = \frac{1}{2}(A + A^t)$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(A - A^t).$$

مثال ۱۳. فرض کنیم T عملگر خطی دلخواهی روی فضای با بعد متناهی V باشد. گیریم c_1, \dots, c_k مقادیر سرشت نمای متمایز T ، و W_i فضای بردارهای سرشت نمای وابسته به مقدار سرشت نمای c_i باشند. در این صورت W_1, \dots, W_k مستقل اند. به لم قبل از قضیه ۲ مراجعه کنید. بخصوص، اگر T قطری شدنی باشد، آنگاه $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$.

تعریف. اگر V فضایی برداری باشد، یک تصویر V عملگری خطی چون E روی V است که $E^2 = E$.

فرض کنیم E یک تصویر باشد. R را برد E و N را فضای پوچ E می گیریم.
۱. بردار β در برد R است اگر و تنها اگر $E\beta = \beta$. اگر $\beta = E\alpha$ ، آنگاه $E\beta = E^2\alpha = E\alpha = \beta$.
۲. $V = R \oplus N$.
۳. عبارت یکتای α به صورت مجموعی از بردارهای R و N عبارت است از

$$\alpha = E\alpha + (\alpha - E\alpha)$$

از (۱)، (۲)، و (۳) بسادگی دیده می شود که اگر R و N دو زیرفضای V باشند و $V = R \oplus N$ ، یک و تنها یک عملگر تصویر E وجود دارد که بردش R و فضای پوچش N باشد. این عملگر، تصویر روی R در راستای N نامیده می شود.

هر تصویر E (به طور بدیهی) قطری شدنی است. اگر $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ پایه ای برای R و $\{\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n\}$ پایه ای برای N باشد، آنگاه پایه $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ماتریس E را قطری می کند:

$$[E]_B = \begin{bmatrix} I & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}.$$

در اینجا I ماتریس همانی $r \times r$ است. ایسن موضوع به تفسیر برخی از اصطلاحات در باره تصویرها کمک می‌کند. خواننده باید حالات گوناگون در صفحه R^2 (یا فضای 3 بعدی R^3) را بررسی و خود را متقاعد کند که تصویر روی R در راستای N ، هر بردار را با تصویر کردنش به موازات N ، در R می‌فرستد.

از تصویرها می‌توان در تشریح تجزیه به مجموعه‌های مستقیم فضای V استفاده کرد. زیرا، گیریم $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$. به ازای هر j عملگری چون E_j روی V تعریف می‌کنیم. فرض کنیم α در V باشد؛ مثلاً فرض کنیم $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$ در W_i باشد. بنا به تعریف می‌گیریم $E_j \alpha = \alpha_j$. در این صورت E_j قاعده‌ای خوش تعریف است. بسادگی دیده می‌شود که E_j خطی است، برد E_j برابر W_j است و $E_j^2 = E_j$. فضای پوچ E_j برابر است با زیر فضای

$$(W_1 + \dots + W_{j-1} + W_{j+1} + \dots + W_k)$$

زیرا، حکم $E_j \alpha = 0$ ، چیزی جز $\alpha_j = 0$ نیست؛ یعنی، α عملاً مجموعی از بردارهای واقع در فضاهای W_i با $i \neq j$ است. بر حسب تصویرهای E_j به ازای هر α در V داریم

$$\alpha = E_1 \alpha + \dots + E_k \alpha.$$

مطلبی که (۶-۱۳) بیان می‌کند این است

$$I = E_1 + \dots + E_k.$$

توجه نیز داشته باشید که اگر $i \neq j$ ، آنگاه $E_i E_j = 0$ ، زیرا برد E_j زیر فضای W_j است که مشمول در فضای پوچ E_i است. اکنون یافته‌های خود را خلاصه و عکس قضیه را بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۹. اگر $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ ، آنگاه k عملگر خطی E_1, \dots, E_k روی V وجود دارند که

$$(1) \text{ هر } E_i \text{ يك تصوير است } (E_i^2 = E_i);$$

$$(2) \text{ هرگاه } i \neq j, E_i E_j = 0;$$

$$(3) I = E_1 + \dots + E_k$$

$$(4) \text{ برد } E_i \text{ برابر } W_i \text{ است.}$$

بعکس، اگر E_1, \dots, E_k عملگرهایی خطی روی V باشند که در شرایط (۱)، (۲) و (۳) صدق کنند و اگر W_i برد E_i باشد، آنگاه $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$.

اثبات. تنها باید حکم عکس را اثبات کنیم. فرض کنیم E_1, \dots, E_k عملگرهایی خطی روی V باشند که سه شرط اول را برمی‌آورند و همچنین فرض می‌کنیم W_i برد E_i باشد. در این صورت یقیناً

$$V = W_1 + \dots + W_k;$$

زیرا، بنا بر شرط (۳)، به ازای هر α در V داریم

$$\alpha = E_1\alpha + \dots + E_k\alpha$$

و $E_i\alpha$ هم در W قرار دارد. این عبارت برای α یکتاست، زیرا اگر

$$\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$$

و α_i در W_i باشد، مثلاً $\alpha_i = E_i\beta_i$ ، آنگاه با استفاده از (۱) و (۲) داریم

$$\begin{aligned} E_j\alpha &= \sum_{i=1}^k E_j E_i \alpha_i \\ &= \sum_{i=1}^k E_j E_i \beta_i \\ &= E_j^2 \beta_j \\ &= E_j \beta_j \\ &= \alpha_j. \end{aligned}$$

این مطلب نشان می‌دهد که V مجموع مستقیم W_i هاست. \square

تمرین

۱. فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی و W_1 زیرفضایی از V باشد. ثابت کنید

$$V = W_1 \oplus W_2 \text{ وجود دارد که } V = W_1 \oplus W_2.$$

۲. فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی و W_1, \dots, W_k زیرفضاهایی از V باشند که

$$V = W_1 + \dots + W_k \text{ و } (W_i) \text{ بعد } (W_j) = (V).$$

$$\text{ثابت کنید } V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k.$$

۳. تصویر E را بیابید که R^2 را بروی زیرفضای پدیدآمده توسط بردار $(1, -1)$ ، در

راستای زیرفضای پدیدآمده توسط بردار $(1, 2)$ ، تصویر کند.

۴. این حکم درست است یا غلط: اگر E_1 و E_2 تصویرهایی بروی زیرفضاهایی مستقل

باشند، آنگاه $E_1 + E_2$ یک تصویر است.

۵. اگر E یک تصویر و f یک چندجمله‌ای باشد، آنگاه $f(E) = aI + bE$. مقادیر a و

b بر حسب ضرایب f چه هستند؟

۶. این حکم درست است یا غلط: اگر عملگری قطری شدنی تنها دارای مقادیر سرشت-

نمای ۰ و ۱ باشد، يك تصوير است.

۷. ثابت كنيد كه اگر E تصوير روی R در راستای N باشد، آنگاه $(I - E)$ تصوير روی N در راستای R است.

۸. فرض كنيد E_1, \dots, E_k عملگرهايی خطی روی فضای V باشند و

$$E_1 + \dots + E_k = I$$

(الف) ثابت كنيد كه اگر به ازای $i \neq j$ داشته باشیم $E_i E_j = 0$ ، آنگاه به ازای هر i

$$E_i^2 = E_i$$

(ب) در حالت $k = 2$ ، عكس (الف) را اثبات كنيد؛ یعنی، اگر $E_1 + E_2 = I$ ، $E_1 E_2 = 0$ ، آنگاه $E_1^2 = E_1$ و $E_2^2 = E_2$.

۹. فرض كنيد V يك فضای برداری حقیقی و E يك عملگر خطی خود توان روی V ، یعنی يك تصوير باشد. ثابت كنيد $(I + E)$ معكوس پذیر است. $(I + E)^{-1}$ را نیز بیابید.

۱۰. فرض كنيد F زیرهائی از اعداد مختلط (یا، هر هئاتی با سرشت نمای صفر) و V يك فضای برداری با بعدمتناهی بر روی F باشد. فرض كنيد E_1, \dots, E_k تصويرهایی از V باشند و $E_1 + \dots + E_k = I$. ثابت كنيد به ازای $i \neq j$ ، $E_i E_j = 0$ (دانهمایی: از تابع رد استفاده كنید، و از خود سؤال كنید كه رد هر تصوير چیست).

۱۱. فرض كنيد V فضایی برداری و W_1, \dots, W_k زیرفضاهایی از V باشند. فرض كنيد

$$V_j = W_1 + \dots + W_{j-1} + W_{j+1} + \dots + W_k$$

همچنین فرض كنید كه $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$. ثابت كنید فضای دوگان V^* به مجموع مستقیم $V^* = V_1^\circ \oplus \dots \oplus V_k^\circ$ تجزیه می شود.

۷.۶. مجموعه‌های مستقیم پایا

ما در وهله نخست به تجزیه به مجموع مستقیم $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ ، كه در آن هر يك از زیرفضاهای W_i تحت عملگر خطی مفروض T پایا باشد، علاقه مندیم. با در دست بودن چنین تجزیه‌ای از V ، T به وسیله تحدید، عملگری خطی چون T_i روی هر W_i القا می كند. پس، كش T عبارت از این است كه اگر α برداری از V باشد بردارهای یكتایی چون $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ، با α_i در W_i را داریم كه

$$\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$$

و در این صورت

$$T\alpha = T_1\alpha_1 + \dots + T_k\alpha_k.$$

این وضعیت را با گفتن اینکه T مجموع مستقیم عملگرهای T_1, \dots, T_k است توصیف می‌کنیم. در استفاده از این اصطلاح، باید به خاطر داشت که T_i ها عملگرهایی خطی روی فضای V نیستند، بلکه عملگرهایی خطی روی زیرفضاهای مختلف W_i هستند. این حقیقت که $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ ، ما را قادر می‌سازد که به هر $\alpha \in V$ ، k تایی یکتایی چون $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ از بردارهای α_i واقع در W_i (بنابر $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$) را به طریقی وابسته سازیم که بتوانیم اعمال خطی در V را با کار روی تک زیرفضاهای W_i انجام دهیم. این واقعیت که هر W_i تحت T پایاست، اجازه می‌دهد که به کنش T به صورت کنشهای مستقل عملگرهای T_i روی زیرفضاهای W_i بنگریم. هدف ما مطالعه T ، با یافتن تجزیه به مجموع مستقیم پایایی است که در آن عملگرهای T_i از نوعی ابتدایی باشند.

پیش از ذکر یک مثال، اجازه دهید به نظیر ماتریسی این وضعیت پردازیم. فرض کنیم پایه \mathcal{B}_i مرتبی چون \mathcal{B}_i را برای هر W_i انتخاب، و برای اینکه \mathcal{B} مشکل از اجتماع \mathcal{B}_i ها پایه \mathcal{B}_i مرتبی برای V باشد آنها را بترتیب $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k$ مرتب کرده باشیم. از بحثی که درباره نظیر ماتریسی A یک زیرفضای پایایی تنها کردیم بسادگی مشهود است که اگر $A = [T]_{\mathcal{B}}$ و $A_i = [T_i]_{\mathcal{B}_i}$ آنگاه A دارای صورت بلوکی

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{bmatrix} \quad (14-6)$$

است. در (۱۴-۶)، A_i ماتریسی $d_i \times d_i$ ($d_i = \dim W_i$) است و 0 ها نمادهایی برای بلوک‌های مستطیلی شکل از اسکالرهای 0 با اندازه‌های مختلف هستند. بعلاوه، به نظر مناسب می‌رسد که (۱۴-۶) را با گفتن اینکه A مجموع مستقیم ماتریسهای A_1, \dots, A_k است توصیف کنیم.

بسیاری از اوقات، زیرفضای W_i را با تصویرهای وابسته E_i (قضیه ۹) توصیف خواهیم کرد. بنابراین، ضرورت دارد که بتوانیم پایایی زیرفضاهای W_i را بر حسب E_i بیان کنیم.

قضیه ۱۰. فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای V و W_1, \dots, W_k و نیز E_1, \dots, E_k به صورتی که در قضیه ۹ آمده‌اند، باشند. در این صورت، شرطی لازم و کافی برای اینکه هر زیرفضای W_i تحت T پایا باشد این است که T با هر یک از تصویرهای E_i جا بجا شود؛ یعنی،

$$TE_i = E_i T, \quad i = 1, \dots, k.$$

اثبات. فرض کنیم T با هر E_i جابجا شود و α در W_j باشد. در این صورت

$$E_j \alpha = \alpha$$

$$\begin{aligned} T\alpha &= T(E_j \alpha) \\ &= E_j(T\alpha) \end{aligned}$$

که نشان می‌دهد $T\alpha$ در برد E_j قرار دارد؛ یعنی، W_j تحت T پایاست. اکنون فرض می‌کنیم هر W_i تحت T پایا باشد، نشان خواهیم داد که $TE_j = E_j T$. گیریم α برداری در V باشد. در این صورت

$$\alpha = E_1 \alpha + \dots + E_k \alpha$$

$$T\alpha = TE_1 \alpha + \dots + TE_k \alpha.$$

چون $E_i \alpha$ در W_i تحت T پایاست قرار دارد، باید به ازای برداری چون β_i داشته باشیم

$$T(E_i \alpha) = E_i \beta_i$$

$$E_j T E_i \alpha = E_j E_i \beta_i$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{اگر } i \neq j \\ E_j \beta_j & \text{اگر } i = j \end{cases}$$

و بنابراین

$$E_j T \alpha = E_j T E_1 \alpha + \dots + E_j T E_k \alpha$$

$$= E_j \beta_j$$

$$= T E_j \alpha.$$

این رابطه به ازای هر α در V برقرار است و از این رو، $\square \cdot E_j T = T E_j$.

اکنون عملگری قطری شدنی چون T را به زبان تجزیه به مجموع مستقیم پایا (تصویرهایی که با T جابجا می‌شوند) توصیف می‌کنیم. این مطلب بعدها کمک شایانی در فهم چند قضیه عمیق تجزیه فضاها خواهد کرد. خواننده ممکن است تصور کند که توصیفی که در صد عرضه آن هستیم، در مقایسه با فرمولبندی ماتریسی، یا این بیان ساده که بردارهای سرشت نمای T فضای زمینه را پدید می‌آورند، نسبتاً پیچیده است. ولی، باید در نظر داشته باشد که این اولین نظراتی است که ما به روشی بسیار مؤثر است که به وسیله آن می‌توانیم مسائل مختلفی در رابطه با زیرفضاها، پایه‌ها، ماتریسها، و نظایر آنها را به محاسبات جبری عملگرهای خطی، تحویل کنیم. با اندکی تجربه، کار آیی، و ظرافت این روش استدلال آشکار خواهد شد.

قضیه ۱۱. فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای بعد متناهی V باشد. اگر T قطری شدنی و c_1, \dots, c_k مقادیر سرشت نمای متمایز T باشند، آنگاه عملگرهایی خطی چون E_1, \dots, E_k روی V وجود دارند که

$$T = c_1 E_1 + \dots + c_k E_k \quad (1)$$

$$I = E_1 + \dots + E_k \quad (2)$$

$$E_i E_j = 0 \quad (i \neq j) \quad (3)$$

$$E_i E_i = E_i \quad (E_i \text{ یک تصویر است}) \quad (4)$$

(۵) برد E_i ، فضای سرشت نمای T وابسته به c_i است.

بعکس، اگر k اسکالر متمایز c_1, \dots, c_k و k عملگر خطی غیرصفر E_1, \dots, E_k موجود باشند که شرایط (۱)، (۲) و (۳) را برآورند، آنگاه T قطری شدنی است؛ c_1, \dots, c_k مقادیر سرشت نمای متمایز T هستند؛ و شرایط (۴) و (۵) نیز برقرارند.

اثبات. فرض کنیم T قطری شدنی و با مقادیر سرشت نمای متمایز c_1, \dots, c_k باشد. گیریم W_i فضای بردارهای سرشت نمای وابسته به مقدار سرشت نمای c_i باشد. همان‌طور که قبلاً دیده‌ایم

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k.$$

گیریم E_1, \dots, E_k همچون در قضیه ۹ تصویرهای وابسته به این تجزیه باشند. در این صورت (۲)، (۳)، (۴) و (۵) برقرارند. برای اثبات (۱) به شرح زیر عمل می‌کنیم. به ازای هر α در V

$$\alpha = E_1 \alpha + \dots + E_k \alpha$$

و از این رو

$$T\alpha = TE_1 \alpha + \dots + TE_k \alpha$$

$$= c_1 E_1 \alpha + \dots + c_k E_k \alpha.$$

به بیان دیگر، $T = c_1 E_1 + \dots + c_k E_k$

حال فرض کنید عملگری خطی چون T ، همراه با اسکالره‌ای متمایز c_i و عملگرهای غیرصفر E_i که (۱)، (۲) و (۳) را برمی‌آورند داده شده باشند. چون به ازای $i \neq j$ ، $E_i E_j = 0$ و دوطرف $I = E_1 + \dots + E_k$ را که در E_i ضرب کنیم بی‌افاصله $E_i = E_i$ را به دست می‌آوریم. با ضرب $T = c_1 E_1 + \dots + c_k E_k$ در E_i خواهیم داشت $TE_i = c_i E_i$ ، که نشان می‌دهد هر بردار در برد E_i در فضای پوچ $(T - c_i I)$ نیز هست. چون فرض کرده‌ایم که $E_i \neq 0$ ، این مطلب ثابت می‌کند که برداری غیرصفر در فضای پوچ $(T - c_i I)$ وجود دارد؛ بدین معنی که c_i یک مقدار سرشت نمای T است. بعلاوه، c_i ها کل مقادیر سرشت نمای T هستند؛ زیرا، اگر c اسکالری دلخواه باشد، آنگاه

$$T - cI = (c_1 - c)E_1 + \dots + (c_k - c)E_k$$

لذا اگر $(T - cI)\alpha = 0$ باید داشته باشیم $(c_i - c)E_i\alpha = 0$. اگر α بردار صفر نباشد، آنگاه $E_i\alpha \neq 0$ است که $E_i\alpha = 0$ و از این رو به ازای این i داریم $c_i - c = 0$. مطمئناً T قطری شدنی است، زیرا نشان داده ایم که هر بردار غیر صفر در برد E_i یک بردار سرشت نامی T نیز هست و این واقعیت که $I = E_1 + \dots + E_k$ نشان می دهد که این بردارهای سرشت نامی V را پدید می آورند. آنچه برای اثبات باقی می ماند این است که فضای پوچ $(T - c_i I)$ دقیقاً برد E_i است. اما این موضوع واضح است، چرا که اگر $T\alpha = c_i\alpha$

$$\sum_{j=1}^k (c_j - c_i)E_j\alpha = 0.$$

از این رو

$$(c_j - c_i)E_j\alpha = 0 \quad \text{به ازای هر } j,$$

و آنگاه

$$E_j\alpha = 0, \quad j \neq i.$$

چون $\alpha = E_1\alpha + \dots + E_k\alpha$ و به ازای $j \neq i$ ، $E_j\alpha = 0$ پس داریم $\alpha = E_i\alpha$ که خود نشان می دهد که α در برد E_i است. \square

بخشی از قضیه ۹ بیان می کند که برای عملگری قطری شدنی چون T ، اسکالرهای c_1, \dots, c_k و عملگرهای E_1, \dots, E_k به طور یکتا به وسیله شرایط (۱)، (۲)، (۳)، این شرط که c_i ها متمایزند و این شرط که E_i ها غیر صفرند، تعیین می شوند. یکی از خواص جالب تجزیه $T = c_1E_1 + \dots + c_kE_k$ این است که اگر g چند جمله ای دلخواهی بر روی هیأت F باشد، آنگاه

$$g(T) = g(c_1)E_1 + \dots + g(c_k)E_k.$$

جزئیات اثبات را به خواننده وامی گذاریم. برای مشاهده چگونگی اثبات این مطلب، تنها نیازمند به محاسبه T^r ، به ازای هر عدد صحیح r ، هستیم. به عنوان نمونه

$$\begin{aligned} T^r &= \sum_{i=1}^k c_i E_i \sum_{j=1}^k c_j E_j \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k c_i c_j E_i E_j \\ &= \sum_{i=1}^k c_i^r E_i^r \\ &= \sum_{i=1}^k c_i^r E_i. \end{aligned}$$

لازم است خواننده این را با $g(A)$ که در آن A ماتریسی قطری است مقایسه کند؛ زیرا در این صورت $g(A)$ چیزی جز ماتریسی قطری با درایه‌های قطری $g(A_{11}), \dots, g(A_{nn})$ نخواهد بود.

در حالت خاص، ما یلیم بدانیم هنگام به کار بردن چندجمله‌ایهای لاگرانژ متناظر با اسکالرهای c_1, \dots, c_k :

$$p_j = \prod_{i \neq j} \frac{(x - c_i)}{(c_j - c_i)}$$

چه رخ می‌دهد. داریم $p_j(c_i) = \delta_{ij}$ ، یعنی

$$\begin{aligned} p_j(T) &= \sum_{i=1}^k \delta_{ij} E_i \\ &= E_j. \end{aligned}$$

پس، تصویرهای E_j نه تنها با T جا بجا می‌شوند، بلکه چندجمله‌ایهای بر حسب T هستند. از این گونه محاسبات با چندجمله‌ایهای بر حسب T می‌توان برای ارائه اثباتی دیگری از قضیهٔ ۶ که عملگرهای قطری‌شدنی را بر حسب چندجمله‌ایهای مینیمالشان سرشت نمایی می‌کند، استفاده کرد. این اثبات کاملاً مستقل از اثبات قبلی است.

اگر T قطری‌شدنی باشد، $T = c_1 E_1 + \dots + c_k E_k$ ، آنگاه به ازای هر چندجمله‌ای g

$$g(T) = g(c_1) E_1 + \dots + g(c_k) E_k.$$

پس، $g(T) = 0$ اگر و تنها اگر به ازای هر i ، $g(c_i) = 0$. بخصوص، چندجمله‌ای مینیمال T عبارت است از

$$p = (x - c_1) \dots (x - c_k).$$

حال فرض کنیم T عملگری خطی با چندجمله‌ای مینیمال $(x - c_1) \dots (x - c_k)$ باشد و c_1, \dots, c_k عناصر متمایزی از هیأت اسکالر. چندجمله‌ایهای لاگرانژ را تشکیل می‌دهیم

$$p_j = \prod_{i \neq j} \frac{(x - c_i)}{(c_j - c_i)}.$$

از فصل ۴ یادآوری می‌کنیم که $p_j(c_i) = \delta_{ij}$ و به ازای هر چندجمله‌ای g با درجهٔ حداکثر $(k-1)$ ، داریم

$$g = g(c_1) p_1 + \dots + g(c_k) p_k.$$

اگر g را چندجمله‌ای اسکالر 1 و سپس چندجمله‌ای x بگیریم، داریم

$$1 = p_1 + \dots + p_k \quad (15-6)$$

$$x = c_1 p_1 + \dots + c_k p_k.$$

(خواننده زیرک توجه خواهد کرد که ممکن است استفاده از x درست نباشد، چرا که k ممکن است ۱ باشد. اما اگر $k=1$ ، T ضربی اسکالری از عنصر همانی است و لذا قطری شدنی.) حال فرض کنیم $E_j = p_j(T)$. بنا بر (۱۵-۶) داریم

$$I = E_1 + \dots + E_k \quad (16-6)$$

$$T = c_1 E_1 + \dots + c_k E_k.$$

توجه کنید که اگر $i \neq j$ ، آنگاه $p_i p_j$ بر چند جمله‌ای مینیمال p بخش پذیر است، چرا که $p_i p_j$ همه $(x - c_r)$ ها را به عنوان سازه‌ای شامل است. پس

$$E_i E_j = 0, \quad i \neq j. \quad (17-6)$$

مطلب دیگری را که باید نشان دهیم این است که به ازای هر i ، $E_i \neq 0$. اما این مطلب از این واقعیت نتیجه می‌شود که p چند جمله‌ای مینیمال T است، و از این رو نمی‌توانیم داشته باشیم $p_i(T) = 0$ ، چرا که درجه p_i از درجه p کمتر است. این نکته آخر، همراه با (۱۶-۶)، (۱۷-۶)، و این امر که c_i ها متمایزند، ما را قادر می‌سازد که قضیه ۱۱ را به کار بندیم و نتیجه بگیریم که T قطری شدنی است. \square

تمرین

۰۱. فرض کنید E یک تصویر V و T عملگری خطی روی V باشد. ثابت کنید که برد E تحت T پایاست اگر و تنها اگر $ETE = TE$. همچنین ثابت کنید که برد فضای پوچ E هر دو تحت T پایا هستند اگر و تنها اگر $ET = TE$.

۰۲. فرض کنید T عملگری خطی روی R^2 باشد که ماتریس آن در پایه مرتب استاندارد

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

است. فرض کنید W_1 زیرفضایی از R^2 پدید آمده توسط بردار $\epsilon_1 = (1, 0)$ باشد. (الف) ثابت کنید W_1 تحت T پایاست.

(ب) ثابت کنید هیچ زیرفضایی از W_2 وجود ندارد که تحت T پایا و مکمل W_1 باشد:

$$R^2 = W_1 \oplus W_2.$$

(با تمرین ۱ از بخش ۵.۶ مقایسه شود.)

۳. فرض کنید T عملگری خطی روی فضای برداری V باشد. فرض کنید R برد T و N فضای پوچ T باشد. ثابت کنید R و N مستقل هستند اگر و تنها اگر $V = R \oplus N$.

۴. فرض کنید T عملگری خطی روی V باشد و نیز $W_1 \oplus \dots \oplus W_k = V$ که هر W_i تحت T پایاست. فرض کنید T_i عملگر (تحدیدی) القا شده روی W_i باشد.

(الف) ثابت کنید $\det(T) = \det(T_1) \dots \det(T_k)$.

(ب) ثابت کنید که چندجمله‌ای سرشت‌نمای f عبارت است از حاصل ضرب چند جمله‌ایهای سرشت‌نمای f_1, \dots, f_k .

(پ) ثابت کنید چند جمله‌ای مینیمال T کوچکترین مضرب مشترک چند جمله‌ایهای مینیمال T_1, \dots, T_k است. (داهنمایی: احکام تناظر مربوط به مجموع مستقیم ماتریسها را اثبات کنید و سپس آنها را به کار بندید.)

۵. فرض کنید T عملگری خطی قطری‌شدنی روی R^3 باشد که در مثال ۳ از بخش ۲.۶ مورد بحث قرار گرفت. چندجمله‌ایهای لاگرانژ را به کار گیرید تا ماتریس نمایش A را به صورت $A = E_1 + 2E_2$ و $E_1 E_2 = 0$ بنویسید.

۶. A را ماتریس 4×4 در مثال ۵ از بخش ۳.۶ بگیرید. ماتریسهای E_1, E_2 و E_3 بیابید که

$$i \neq j, E_i E_j = 0 \text{ و } E_1 + E_2 + E_3 = I, A = c_1 E_1 + c_2 E_2 + c_3 E_3$$

۷. در تمرینهای ۵ و ۶ توجه کنید که (به ازای هر i) فضای بردارهای سرشت‌نمای وابسته به مقدار سرشت‌نمای c_i توسط بردارهای ستونی ماتریسهای مختلف E_j با $j \neq i$ پدید می‌آید. آیا این امر تصادفی است؟

۸. فرض کنید T عملگری خطی روی V باشد که با هر عملگر تصویری روی V جابجا شود. دزمورد T چه می‌توان گفت؟

۹. فرض کنید V فضای برداری توابع (با مقدار) حقیقی پیوسته روی فاصله $[-1, +1]$ از خط حقیقی باشد. همچنین فرض کنید W_0 زیرفضای توابع زوج، $f(-x) = f(x)$ و W_1 زیرفضای توابع فرد، $f(-x) = -f(x)$ باشد.

(الف) نشان دهید $V = W_0 \oplus W_1$.

(ب) اگر T عملگر انتگرال نامعین

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t) dt$$

باشد، آیا W_e و W_o تحت T پایا هستند؟

۸.۶. قضیه تجزیه اولیه

کوشش ما در این بخش این است که عملگر خطی T روی فضای با بعد متناهی V را از طریق تجزیه T به مجموعی مستقیم از عملگرهایی که به معنایی ابتدایی هستند، مطالعه کنیم. می‌توانیم این کار را در برخی از حالات خاص معین، مثلاً هنگامی که چندجمله‌ای مینیمال T بر روی هیأت اسکالر F به حاصل ضربی از چندجمله‌ایهای تکین متمایز از درجه ۱ تجزیه شود، از طریق بردارها و مقادیر سرشت نمای T انجام دهیم. در حالت کلی چه می‌توانیم بکنیم؟ در صورتی که سعی کنیم T را با استفاده از مقادیر سرشت نما مطالعه کنیم با دو مسأله روبرو خواهیم شد. اول آنکه، T ممکن است حتی یک مقدار سرشت نما هم نداشته باشد؛ این وضع، در واقع نقیصه‌ای است از هیأت اسکالر، بدین معنی که این هیأت بسته جبری نیست. دوم، حتی اگر چندجمله‌ای سرشت نما به طور کامل بر روی F به حاصل ضربی از چندجمله‌ایهای درجه ۱ تجزیه شود، ممکن است برای T به اندازه کافی بردار سرشت نما جهت پدید آوردن فضای V موجود نباشد؛ واضح است که این وضع نقیصه‌ای از T است. وضعیت دوم، با عملگر T روی F^3 (F هیأتی دلخواه) که در پایه استاندارد توسط

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود، تشریح می‌گردد. چندجمله‌ای سرشت نمای A عبارت است از $(x+1)^2(x-2)$ که بوضوح چندجمله‌ای مینیمال A (یا T) نیز هست. پس، T قطری-شدنی نیست. واضح است که این واقعه به دلیل اینکه بعد فضای پوچ $(T-2I)$ یک است، رخ می‌دهد. از طرف دیگر، فضای پوچ $(T+I)$ و فضای پوچ $(T-2I)^2$ با هم V را پدید می‌آورند؛ اولی زیر فضای پدید آمده توسط ϵ_3 ، و دومی زیر فضای پدید آمده توسط ϵ_2 و ϵ_1 است.

این روش، کم و بیش روش عمومی در مورد دومین مسأله است. اگر چندجمله‌ای مینیمال T به صورت زیر تجزیه شود (به خاطر داشته باشید که این فرض است)

$$p = (x-c_1)^{r_1} \cdots (x-c_k)^{r_k}$$

و c_1, \dots, c_k عناصر متمایز F باشند، آنگاه نشان خواهیم داد که فضای V مجموع

مستقیم فضاهای پوچ عملگرهای $(T - c_i I)^{r_i}$ ، $k, c_i = 1, \dots, k$ است. این فرض در مورد p با این حقیقت هم ارز است که T مثلثی شونده است (قضیه ۵)؛ گرچه، علم به این واقعیت هم کمکی به ما نخواهد کرد.

قضیه‌ای را که اثبات می‌کنیم، عمومی‌تر از مطلبی است که تشریح کردیم، چرا که این قضیه به تجزیه اولیه چندجمله‌ای مینیمال مربوط است، خواه سازه‌های اولی که در کار وارد می‌شوند همگی از درجه یکم باشند خواه نباشند. برای خواننده مفید است که حالت خاصی را که سازه‌های اول از درجه ۱ باشند و حتی به‌طور اخص اثبات تصویری گونه قضیه ۶ را که حالت خاصی از این قضیه است، به‌طور آورد.

قضیه ۱۲. (قضیه تجزیه اولیه) فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای برداری

بعدمناهی V بردوی هیأت F ، و p چندجمله‌ای مینیمال T

$$p = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$$

باشد. در اینجا p_i ها چندجمله‌ایهای تکین تحویل‌ناپذیر متمایزی بردوی F و r_i ها اعداد صحیح مثبتی هستند. گیریم W_i فضای پوچ $(T - c_i I)^{r_i}$ ، $k, c_i = 1, \dots, k$ باشد. در این صورت

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k \quad (۱)$$

(۲) همه W_i ها تحت T پایا هستند.

(۳) اگر T_i عملگر القا شده توسط T روی W_i باشد، آنگاه چندجمله‌ای مینیمال

T_i عبارت است از $p_i^{r_i}$.

اثبات. طرح اثبات چنین است. اگر تجزیه به‌مجموع مستقیم (۱) معتبر باشد، چگونه می‌توانیم تصویرهای E_1, \dots, E_k وابسته به این تجزیه را به‌دست آوریم؟ تصویر E_i روی W_i ، عنصرهمانی و روی دیگر W_j ها صفر است. یک چندجمله‌ای چون h_i می‌یابیم که $h_i(T)$ روی W_i عنصرهمانی و روی W_j های دیگر صفر باشد و بعلاوه $h_1(T) + \cdots + h_k(T) = I$ و غیره. به‌ازای هر i ، فرض کنیم

$$f_i = \frac{p}{p_i^{r_i}} = \prod_{j \neq i} p_j^{r_j}$$

چون p_1, \dots, p_k چندجمله‌ایهای اول متمایزی هستند، چندجمله‌ایهای f_1, \dots, f_k نسبت به هم اول می‌باشند (قضیه ۱۰، فصل ۴). پس، چندجمله‌ایهایی چون g_1, \dots, g_k وجود دارند که

$$\sum_{i=1}^k f_i g_i = 1.$$

بعلاوه توجه کنید که اگر $j \neq i$ ، آنگاه $f_i f_j$ بر چندجمله‌ای p تقسیم پذیر است، زیرا $f_i f_j$

هر p_m^i را بدعنوان سازه‌ای در بردارد. نشان خواهیم داد که چند جمله‌ایهای $h_i = f_i g_i$ هم به‌همان طریقی که در اولین بند اثبات تشریح شد، عمل می‌کنند.

فرض کنیم $E_i = h_i(T) = f_i(T)g_i(T)$. چون $h_1 + \dots + h_k = 1$ ، p به‌ازای $f_i, f_j, i \neq j$ را عادی می‌کند، داریم

$$E_1 + \dots + E_k = I$$

$$E_i E_j = 0, \quad i \neq j \text{ و هر گاه}$$

پس، E_i ها تصویرهایی هستند که با تجزیه‌ای به‌مجموع مستقیم از فضای V در تناظر می‌باشند. می‌خواهیم نشان دهیم که برد E_i دقیقاً همان زیرفضای W_i است. واضح است که هر بردار در برد E_i ، در W_i نیز هست، زیرا اگر α در برد E_i باشد، آنگاه $\alpha = E_i \alpha$ ، و لذا

$$\begin{aligned} p_i(T)^t \alpha &= p_i(T)^t E_i \alpha \\ &= p_i(T)^t f_i(T) g_i(T) \alpha \\ &= 0 \end{aligned}$$

چرا که $p_i^t f_i g_i$ بر چندجمله‌ای مینیمال p تقسیم پذیر است. بعکس، فرض کنیم α در فضای پوچ $p_i(T)^t$ باشد. اگر $j \neq i$ ، آنگاه $f_j g_j$ بر p_i^t تقسیم پذیر است و لذا $f_j(T)g_j(T)\alpha = 0$ ، یعنی، به‌ازای $j \neq i$ ، $E_j \alpha = 0$. اما در این صورت، ضروری است که $E_i \alpha = \alpha$ ؛ یعنی، α در برد E_i باشد. این مطلب اثبات حکم (۱) را کامل می‌کند.

به‌طور حتم واضح است که زیرفضاهای W_i تحت T پایا هستند. اگر T_i عملگر القا شده توسط T روی W_i باشد، آنگاه بدیهی است که $p_i(T_i)^t = 0$ ، چرا که بنا بر تعریف، $p_i(T_i)^t$ روی زیرفضای W_i برابر ۰ است. این مطلب نشان می‌دهد که چندجمله‌ای مینیمال T_i چندجمله‌ای p_i^t را عادی می‌کند. بعکس، فرض کنیم g يك چندجمله‌ای باشد که $g(T_i) = 0$. در این صورت $g(T)f_i(T) = 0$ ، پس، $g f_i$ بر چندجمله‌ای مینیمال T ، یعنی p ، تقسیم پذیر است؛ یعنی، $f_i^t p_i^t$ چندجمله‌ای $g f_i$ را عادی می‌کند. بسادگی دیده می‌شود که p_i^t هم g را عادی می‌کند. از این‌رو، چندجمله‌ای مینیمال T_i عبارت است از p_i^t . \square

نتیجه. اگر E_1, \dots, E_k تصویرهای وابسته به تجزیه اولیه T باشند، آنگاه هر E_i يك چندجمله‌ای بر حسب T است و لذا اگر عملگر خطی U با T جابجا شود، آنگاه U با هر يك از E_i ها جابجا می‌شود، و در نتیجه هر زیرفضای W_i تحت U پایا است.

بر حسب نمادگذاری اثبات قضیه ۱۲، نظری می‌کنیم به‌حالت خاصی که در آن چندجمله‌ای مینیمال T حاصل ضربی از چندجمله‌ایهای درجه یکم باشد، یعنی حالتی که در آن هر p_i به‌صورت $p_i = x - c_i$ است. حال برد E_i عبارت است از W_i ، یعنی فضای پوچ

$(T - c_i I)^i$. فرض می‌کنیم $D = c_1 E_1 + \dots + c_k E_k$. بنا بر قضیه ۱۱، عملگری قطری شدنی است که آن را جزء قطری شدنی T می‌نامیم. به عملگر $N = T - D$ توجه کنید. داریم

$$T = TE_1 + \dots + TE_k$$

$$D = c_1 E_1 + \dots + c_k E_k$$

لذا

$$N = (T - c_1 I)E_1 + \dots + (T - c_k I)E_k.$$

خواننده باید تاکنون به قدر کافی با تصویرها آشنایی پیدا کرده باشد که ببیند

$$N^r = (T - c_1 I)^r E_1 + \dots + (T - c_k I)^r E_k$$

و در حالت کلی

$$N^r = (T - c_1 I)^r E_1 + \dots + (T - c_k I)^r E_k.$$

وقتی به ازای هر i ، $r \geq r_i$ آنگاه $N^r = 0$ ، چرا که در این صورت عملگر $(T - c_i I)^r$ روی برد E_i برابر ۰ است.

تعریف. فرض کنیم N عملگری خطی روی فضای برداری V باشد. گوئیم N پوچ توان است، هرگاه عدد صحیح مثبتی چون r وجود داشته باشد که $N^r = 0$.

قضیه ۱۳. گیریم T عملگری خطی روی فضای برداری بعدمتناهی V بر روی هیأت F باشد. فرض کنیم چندجمله‌ای مینیمال T ، بردی F به حاصل ضربی از چندجمله‌ایهای خطی تجزیه شود. در این صورت عملگری قطری شدنی چون D روی V و عملگر پوچ-توانی چون N روی V وجود دارد که

$$T = D + N \quad (1)$$

$$DN = ND \quad (2)$$

عملگر قطری شدنی D و عملگر پوچ توان N توسط (۱) و (۲) به طور یکتا تعیین می‌شوند و هر یک از آنها یک چندجمله‌ای بر حسب T است.

اثبات. قریباً مشاهده کردیم که می‌توانیم بنویسیم $T = D + N$ ؛ در اینجا D قطری-شدنی و N پوچ توان است و نیز D و N نه تنها جابجا می‌شوند بلکه چندجمله‌ایهای بر حسب T هستند. حال فرض کنیم $T = D' + N'$ را هم داریم که در آن D' قطری شدنی و N' پوچ توان است و $D'N' = N'D'$. ثابت خواهیم کرد که $D = D'$ و $N = N'$. چون D' و N' با یکدیگر جابجا می‌شوند و $T = D' + N'$ ، می‌بینیم که D' و N' با T هم جابجا می‌شوند. پس، D' و N' با هر چندجمله‌ای بر حسب T جابجا می‌شوند؛ از این رو، آنها با D و N نیز جابجا می‌شوند. حال داریم

$$D + N = D' + N'$$

یا

$$D - D' = N' - N$$

و این چهار عملگر همه با هم جابجا می‌شوند. چون D و D' هر دو قطری‌شدنی هستند و با هم جابجا می‌شوند، هم‌زمان نیز قطری‌شدنی هستند و $D - D'$ هم قطری‌شدنی است. چون N و N' هر دو پوچ‌توان هستند و با هم جابجا می‌شوند، عملگر $(N' - N)$ پوچ‌توان است؛ زیرا، با استفاده از این حکم که N و N' با هم جابجا می‌شوند

$$(N' - N)^r = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (N')^{r-j} (-N)^j$$

ولذا وقتی که r به اندازه کافی بزرگ باشد هر جمله در این بسط $(N' - N)^r$ برابر است. (درواقع، n مین‌توان هر عملگر پوچ‌توان روی فضایی n بعدی باید 0 باشد. در اینجا اگر $r = 2n$ فرض شود، r به اندازه کافی بزرگ است و از اینجا نتیجه می‌شود که $r = n$ هم به اندازه کافی بزرگ است؛ اما این مطلب از عبارت بالا آشکار نیست.) حال $D - D'$ عملگری قطری‌شدنی است که پوچ‌توان نیز هست. چنین عملگری بوضوح عملگر صفر است؛ زیرا به علت پوچ‌توان بودن، r هست که $r \leq n$ و چند جمله‌ای مینیمال x^r به صورت آن باشد. اما در این صورت، چون این عملگر قطری‌شدنی است، چند جمله‌ای مینیمال آن نمی‌تواند ریشه‌ای مکرر داشته باشد؛ از این رو، $r = 1$ و چند جمله‌ای مینیمال چیزی جز x نیست، و این خود حاکی است که این عملگر 0 است. پس، می‌بینیم که $D = D'$ و $\square \cdot N = N'$

نتیجه. گیریم V فضایی برداری با بعد متناهی بر روی هیأت بسته جبری F ، مثلاً هیأت اعداد مختلط، باشد. در این صورت هر عملگر خطی T روی V می‌تواند به صورت مجموع یک عملگر قطری‌شدنی D و یک عملگر پوچ‌توان N که با یکدیگر جابجا می‌شوند، نوشته شود. این عملگرهای D و N یکتا هستند و هر یک از آنها یک چند جمله‌ای بر حسب T است.

از این نتایج مشهود است که مطالعه عملگرهای خطی روی فضاهای برداری بر روی هیأتی بسته جبری، اساساً به مطالعه عملگرهای پوچ‌توان تحویل می‌شود. برای فضاهای برداری بر روی هیأت‌هایی که بسته جبری نباشند، هنوز هم لازم است جانشینی برای بردارها و مقادیر سرشت‌نما بیابیم. نکته بسیار جالب در اینجا است که این دو مسئله می‌توانند هم‌زمان مورد بررسی قرار گیرند، و این مطلبی است که در فصل بعد به انجام آن خواهیم پرداخت. درخاتمه این بخش، ما بلیسم مثالی عرضه کنیم که برخی از ایده‌های قضیه تجزیه اولیه را تشریح می‌کند. چون این مثال با معادلات دیفرانسیل سروکار دارد، و از این نظر به طور مطلق جبر خطی نیست، ارائه آن را به انتهای بخش موكول کردیم.

مثال ۰۱۴. در قضیه تجزیه اولیه لازم نیست که فضای برداری V با بعد متناهی باشد، و نیز در قسمتهای (۱) و (۲) لازم نیست که p چندجمله‌ای مینمال T باشد. اگر عملگری خطی روی فضای برداری دلخواهی باشد و اگر چندجمله‌ای تکین p چون p وجود داشته باشد که $p(T) = 0$ ، آنگاه با اثباتی که ارائه کردیم، قسمتهای (۱) و (۲) قضیه ۱۲ برای T هم معتبر هستند.

گیریم n عددی صحیح مثبت و V فضای همه توابع n بار به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر f روی خط حقیقی باشد که در معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^n f}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{df}{dt} + a_0 f = 0 \quad (18-6)$$

صدق می‌کنند. در اینجا a_0, \dots, a_{n-1} ثابتهای مشخصی هستند. اگر C_n فضای توابع n بار به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر را نشان دهد، آنگاه V ، فضای جوابهای این معادله دیفرانسیل، زیر فضایی از C_n است. اگر D عملگر مشتق‌گیری را نشان دهد و p چندجمله‌ای

$$p = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

باشد، آنگاه V فضای پوچ عملگر $p(D)$ است، زیرا (۱۸-۶) بسادگی بیان می‌کند که $p(D)f = 0$. بنابراین، V تحت D پایاست. اکنون D را به‌عنوان عملگری خطی روی زیر فضای V محسوب می‌کنیم. در این صورت $p(D) = 0$.

اگر توابع مختلط (مقدار) مشتق‌پذیر مورد بحث باشند، آنگاه C_n و V دو فضای برداری مختلط هستند و a_0, \dots, a_{n-1} می‌توانند اعداد مختلط دلخواهی باشند. اکنون با فرض اینکه c_1, \dots, c_k اعداد مختلط متمایزی باشند می‌نویسیم

$$p = (x - c_1)^{r_1} \dots (x - c_k)^{r_k}$$

اگر W_j فضای پوچ $(D - c_j I)^{r_j}$ باشد، آنگاه قضیه ۱۲ بیان می‌کند که

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$$

به بیان دیگر، اگر f در معادله دیفرانسیل (۱۸-۶) صدق کند، آنگاه f به‌طور یکتا به‌صورت

$$f = f_1 + \dots + f_k$$

قابل توصیف است و هر f_j در معادله دیفرانسیل $(D - c_j I)^{r_j} f_j = 0$ صدق می‌کند. بنابراین، مطالعه جوابهای معادله (۱۸-۶)، به مطالعه فضای جوابهای معادله دیفرانسیلی به‌صورت

$$(D - cI)^r f = 0 \quad (19-6)$$

تحویل می‌شود. این تحویل، با روش عمومی جبر خطی، یعنی با قضیه تجزیه اولیه، صورت گرفته است.

برای توصیف فضای جوابهای (۶-۱۹) باید مطالبی در مورد معادلات دیفرانسیل بدانیم؛ یعنی باید در مورد D مطالبی سوای این واقعیت که عملگری خطی است بدانیم. با این وجود، نیازی به دانستن مطالب زیادی نداریم. با استقرا روی r بسیار آسان می‌توانیم ثابت کنیم که اگر f در C_r باشد، آنگاه

$$(D - cI)^r f = e^{ct} D^r (e^{-ct} f)$$

یعنی،

$$\frac{df}{dt} - cf(t) = e^{ct} \frac{d}{dt} (e^{-ct} f) \quad \text{و غیره.}$$

پس، $(D - cI)^r f = 0$ اگر و تنها اگر $D^r (e^{-ct} f) = 0$. تابعی چون g که $D^r g = 0$ یعنی $d^r g / dt^r = 0$ باید تابعی چندجمله‌ای از درجه $(r - 1)$ یا کمتر باشد:

$$g(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_{r-1} t^{r-1}.$$

پس f در (۶-۱۹) صدق می‌کند اگر و تنها اگر f به صورت

$$f(t) = e^{ct} (b_0 + b_1 t + \dots + b_{r-1} t^{r-1})$$

باشد. بنابراین، «توابع» $e^{ct}, te^{ct}, \dots, t^{r-1} e^{ct}$ فضای جوابهای (۶-۱۹) را پدید می‌آورند. چون توابع $1, t, \dots, t^{r-1}$ مستقل خطی هستند و تابع نمایی صفر ندارد، این r تابع $t^j e^{ct}$ ، $0 \leq j \leq r-1$ ، پایه‌ای برای فضای جوابها تشکیل می‌دهند. با بازگشت به معادله دیفرانسیل (۶-۱۸) که همان معادله

$$p(D)f = 0$$

$$p = (x - c_1)^{r_1} \dots (x - c_k)^{r_k}$$

است، می‌بینیم که n تابع $t^m e^{c_j t}$ ، $0 \leq m \leq r_j - 1$ و $1 \leq j \leq k$ ، پایه‌ای برای فضای جوابهای (۶-۱۸) تشکیل می‌دهند. بخصوص، فضای جوابها با بعد متناهی است و بعدش برابر با درجه چندجمله‌ای p است.

تمرین

۰۱ فرض کنید T عملگری خطی روی R^3 باشد که در پایه مرتب استانده با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. چندجمله‌ای مینیمال p از T را به صورت $p = p_1 p_2$ ، که در آن

p_1 و p_2 تکین و بر روی هیأت اعداد حقیقی تحویل ناپذیر باشند، بیان کنید. گیریم W_i فضای پوچ $p_i(T)$ باشد. پایه‌های \mathcal{B}_i برای فضاها W_1 و W_2 را بیابید. اگر T_i عملگر القا شده توسط T روی W_i باشد، ماتریس T_i در پایه \mathcal{B}_i (در بالا) را بیابید.

۲. فرض کنید T عملگری خطی روی R^3 باشد که با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

در پایه مرتب استانده نمایش داده می‌شود. نشان دهید عملگری قطری شدنی چون D روی R^3 و عملگری پوچ توان چون N روی R^3 وجود دارد که $T = D + N$ و $DN = ND$. ماتریسهای D و N را در پایه استانده بیابید. (عیناً اثبات قضیه ۱۲ را برای این حالت خاص تکرار کنید.)

۳. اگر V فضای همه چندجمله‌ایهای از درجه n یا کمتر بر روی هیأت F باشد، ثابت کنید که عملگر مشتق‌گیری روی V پوچ توان است.

۴. فرض کنید T عملگری خطی روی فضای V با بعد متناهی V با چندجمله‌ای سرشت‌نمای

$$f = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k}$$

و چندجمله‌ای مینیمال

$$p = (x - c_1)^{r_1} \cdots (x - c_k)^{r_k}$$

باشد. و نیز فرض کنید W_i فضای پوچ $(T - c_i I)^{r_i}$ باشد.

(الف) ثابت کنید W_i مجموعه همه بردارهای α در V است که به ازای عدد

صحیح مثبتی چون m (که ممکن است به α وابسته باشد) $(T - c_i I)^m \alpha = 0$.

(ب) ثابت کنید بعد W_i برابر d_i است. (دانهمایی: اگر T_i عملگر القا شده

توسط T روی W_i باشد، آنگاه $T_i - c_i I$ پوچ توان است. پس، چندجمله‌ای سرشت‌نمای

$T_i - c_i I$ باید x^e باشد، که در آن e_i بعد W_i است، باشد (اثبات؟). بدین‌سان، چندجمله‌ای

سرشت‌نمای T_i عبارت است از $(x - c_i)^{e_i}$. حال این واقعیت را که چندجمله‌ای

سرشت‌نمای T حاصل ضرب چندجمله‌ایهای سرشت‌نمای T_i است به کار گیرید و نشان

دهید که $e_i = d_i$.

۵. فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی بر روی هیأت اعداد مختلط باشد. فرض کنید T عملگری خطی روی V ، و D جزء قطری‌شدنی T باشد. ثابت کنید که اگر

يك چندجمله‌ای با ضرایب مختلط باشد، آنگاه جزء قطری شدنی $g(T)$ عبارت است از $g(D)$.

۶. فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی بر روی هیأت F و T عملگری خطی روی V باشد و داشته باشیم $\text{رتبه}(T) = 1$. ثابت کنید که یا T قطری شدنی است یا پوچ توان، ولی نه هر دو.

۷. فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی بر روی F و T عملگری خطی روی V باشد. فرض کنید T با هر عملگر خطی قطری شدنی روی V جابجا شود. ثابت کنید T مضربی اسکالری از عملگر همانی است.

۸. فرض کنید V فضای ماتریسهای $n \times n$ بر روی هیأت F و A ماتریس $n \times n$ ثابتی بر روی F باشد. عملگر خطی T روی V را طبق $T(B) = AB - BA$ تعریف کنید. ثابت کنید که اگر A ماتریسی پوچ توان باشد، آنگاه T عملگری پوچ توان است.

۹. دو ماتریس پوچ توان 4×4 مثال بزنید که دارای چندجمله‌ایهای مینیمال مساوی باشند (لزوماً چندجمله‌ایهای سرشت‌نمای مساوی هم دارند)، اما متشابه نباشند.

۱۰. گیریم T عملگری خطی روی فضای با بعد متناهی V و $p = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ چندجمله‌ای مینیمال آن باشد. فرض کنید $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ تجزیه اولیه T ، یعنی فضای پوچ W_j از $p_j(T)$ باشد. همچنین فرض کنید W زیرفضایی از V باشد که تحت T پایاست. ثابت کنید

$$W = (W \cap W_1) \oplus (W \cap W_2) \oplus \cdots \oplus (W \cap W_k).$$

۱۱. اشتباه «اثبات» زیر برای قضیه ۱۳ در کجاست؟ فرض کنید چندجمله‌ای مینیمال T حاصل ضربی از سازه‌های خطی باشد. در این صورت بنا بر قضیه ۵، T مثلثی شونده است. \mathcal{B} را پایه مرتبی بگیریم که $A = [T]_{\mathcal{B}}$ از بالا مثلثی باشد. گیریم D ماتریسی قطری با درایه‌های قطری a_{11}, \dots, a_{nn} باشد. در این صورت $A = D + N$ ، که در آن N اکیداً از بالا مثلثی است. بدیهی است که N پوچ توان است.

۱۲. اگر درباره تمرین ۱۱ فکر کرده‌اید، پس از مشاهده آنچه که قضیه ۷ درباره اجزای قطری شدنی و پوچ توان T می‌گوید، دوباره روی آن فکر کنید.

۱۳. فرض کنید T عملگری خطی روی V باشد که چندجمله‌ای مینیمال آن به صورت p^n ، p بر روی هیأت اسکالری مربوط تحویل‌ناپذیر باشد. نشان دهید برداری چون α در V وجود دارد که T -پوچساز α برابر p^n باشد.

۱۴. قضیه تجزیه اولیه و نتیجه تمرین ۱۳ را برای اثبات حکم زیر به کار گیرید. اگر T عملگری خطی روی فضای برداری بعد متناهی V باشد، آنگاه برداری چون α در V وجود دارد که T -پوچساز آن چندجمله‌ای مینیمال T است.

۱۵. اگر N عملگر خطی پوچ توانی روی یک فضای برداری n بعدی باشد، آنگاه چندجمله‌ای سرشت‌نمای N عبارت است از x^n .



فرمهای گویا و ژوردان

۱۰۷. زیرفضاهای دوری و پوچسازها

یکبار دیگر V فضایی برداری با بعد متناهی بر روی هیأت F و T عملگر خطی ثابتی (اما دلخواه) روی V فرض می‌شود. اگر α بردار دلخواهی از V باشد، کوچکترین زیرفضایی از V که تحت T پایا و شامل α نیز باشد، وجود دارد. این زیرفضا را می‌توان به صورت اشتراک همه زیرفضاهای T -پایا که شامل α نیز باشند، تعریف کرد؛ اما، اکنون مناسبتر است که به روش زیر به مطالب بنگریم. اگر W زیرفضایی از V باشد که تحت T پایا و شامل α باشد، آنگاه W باید شامل بردار $T\alpha$ نیز باشد؛ از این رو، W باید شامل $T^2\alpha$ و شامل $T(T\alpha) = T^2\alpha$ ، $T(T^2\alpha) = T^3\alpha$ ، و غیره نیز باشد. به بیان دیگر، W باید به ازای هر چند جمله‌ای g بر روی F ، شامل $g(T)\alpha$ نیز باشد. مجموعه همه بردارهای به صورت $g(T)\alpha$ ، به ازای g متعلق به $F[x]$ ، بوضوح تحت T پایاست، و از این رو کوچکترین زیرفضای T -پایایی است که شامل α است.

تعریف. اگر α بردار دلخواهی از V باشد، زیرفضای T -دوری تولید شده توسط α عبارت است از زیرفضای $Z(\alpha; T)$ متشکل از همه بردارهای به صورت $g(T)\alpha$ ، که g در $F[x]$ است. اگر $Z(\alpha; T) = V$ ، آنگاه α یک بردار دوری برای T نامیده می‌شود.

طریق دیگر توصیف زیرفضای $Z(\alpha; T)$ این است که $Z(\alpha; T)$ زیرفضای پدید آمده توسط بردارهای $T^k\alpha$ ، $k \geq 0$ ، و از این قرار α برداری دوری برای T است.

اگر و تنها اگر این بردارها V را پدید آورند. به خواننده هشدار می‌دهیم که در حالت کلی عملگر T ممکن است بردار دوری نداشته باشد.

مثال ۰۱. به ازای هر T ، زیر فضای T -دوری تولید شده توسط بردار صفر عبارت است از زیر فضای صفر. فضای $Z(\alpha; T)$ یک بعدی است اگر و تنها اگر α یک بردار سرشت‌نمای T باشد. برای عملگر همانی، هر بردار غیر صفر زیر فضایی دوری و یک بعدی تولید می‌کند؛ پس، اگر $\dim V > 1$ ، عملگر همانی دارای بردار دوری نیست. عملگر خطی T روی F^2 که در پایه مرتب استاندارد با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود، مثالی از عملگری است که برداری دوری دارد. در اینجا بردار دوری (یک بردار دوری) ϵ_1 است؛ زیرا، اگر $\beta = (a, b)$ ، آنگاه در ازای $g = a + bx$ داریم $\beta = g(T)\epsilon_1$. برای همین عملگر T ، زیر فضای دوری تولید شده توسط ϵ_1 ، فضای یک-بعدی پدید آمده توسط ϵ_1 است، چرا که ϵ_1 یک بردار سرشت‌نمای T است. به ازای هر T و هر α ، به روابط

$$c_0 \alpha + c_1 T \alpha + \dots + c_k T^k \alpha = 0$$

بین بردارهای $T^j \alpha$ ، یعنی، به چند جمله‌ایهای $c_0 + c_1 x + \dots + c_k x^k$ که دارای خاصیت $g(T)\alpha = 0$ باشند، علاقه‌مند هستیم. مجموعه همه g های متعلق به $F[x]$ به طوری که $g(T)\alpha = 0$ ، بوضوح یک ایدéal $F[x]$ است. این مجموعه همچنین یک ایدéal غیر صفر است، زیرا که شامل چند جمله‌ای مینیمال p از عملگر T است (به ازای هر α در V ، $(p(T)\alpha = 0$).

تعریف. اگر α بردار دلخواهی از V باشد، T -پوچساز α عبارت است از ایدéal $M(\alpha; T)$ در $F[x]$ متشکل از همه چند جمله‌ایهای g بر روی F با شرط $g(T)\alpha = 0$. چند جمله‌ای تکین یکتای p_α که این ایدéal را تولید می‌کند، نیز T -پوچساز α نامیده می‌شود.

همچنان که در بالا نشان دادیم، T -پوچساز p_α ، چند جمله‌ای مینیمال عملگر T را عادی می‌کند. خواننده باید همچنین توجه کند که $\deg(p_\alpha) > 0$ ، مگر آنکه α بردار صفر باشد.

قضیه ۰۱. گیریم α بردار غیر صفر دلخواهی از V و p_α ، T -پوچساز α باشد. (۱) درجه p_α برابر است با بعد زیر فضای دوری $Z(\alpha; T)$.

(۲) اگر درجه p_α برابر k باشد، آنگاه بردارهای $\alpha, T\alpha, T^2\alpha, \dots, T^{k-1}\alpha$ پایه‌ای برای $Z(\alpha; T)$ تشکیل می‌دهند.

(۳) اگر U عملگر خطی القاشده توسط T روی $Z(\alpha; T)$ باشد، آنگاه چندجمله‌ای مینیمال U برابر p_α است.

اثبات. فرض کنیم g يك چندجمله‌ای بر روی هیأت F باشد. می‌نویسیم

$$g = p_\alpha q + r$$

که در آن $r = 0$ یا $\deg(r) < \deg(p_\alpha) = k$. چندجمله‌ای $p_\alpha q$ در T -پوچساز قرار دارد و لذا

$$g(T)\alpha = r(T)\alpha.$$

چون $r = 0$ یا $\deg(r) < k$ ، بردار $r(T)\alpha$ ترکیبی خطی از بردارهای $\alpha, T\alpha, \dots, T^{k-1}\alpha$ است و چون $g(T)\alpha$ برداری نوعی از $Z(\alpha; T)$ است، این مطلب نشان می‌دهد که این k بردار $Z(\alpha; T)$ را پدید می‌آورند. این بردارها یقیناً مستقل خطی هستند، زیرا هر رابطه خطی غیر بدیهی بین آنها، چندجمله‌ای غیر صفری چون g را که $g(T)\alpha = 0$ و $\deg(g) < \deg(p_\alpha)$ به ما خواهد داد، که خود بی‌معنی است. این مطلب (۱) و (۲) را اثبات می‌کند.

U را عملگر خطی روی $Z(\alpha; T)$ حاصل از تحدید T به آن زیرفضا فرض می‌کنیم. اگر g چندجمله‌ای دلخواهی بر روی F باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} p_\alpha(U)g(T)\alpha &= p_\alpha(T)g(T)\alpha \\ &= g(T)p_\alpha(T)\alpha \\ &= g(T)0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

بنابراین عملگر $p_\alpha(U)$ هر بردار در $Z(\alpha; T)$ را به 0 می‌فرستد و از این‌رو، روی $Z(\alpha; T)$ عملگر صفر است. بعلاوه، اگر چندجمله‌ای h از درجه کمتر از k باشد، نمی‌توانیم داشته باشیم $h(U) = 0$ ، زیرا در آن صورت $h(U)\alpha = h(T)\alpha = 0$ که متناقض با تعریف p_α است. این نشان می‌دهد که p_α چندجمله‌ای مینیمال U است. \square

يك پیامد خاص این قضیه چنین است: اگر α بر حسب اتفاق برداری دوری برای T باشد، آنگاه چندجمله‌ای مینیمال T باید درجه‌ای برابر با بعد فضای V داشته باشد؛ از این‌رو، قضیه کیلی-همیلتن حاکی است که چندجمله‌ای مینیمال T همان چندجمله‌ای سرشت‌نمای T است. بعداً ثابت خواهیم کرد که برای هر T برداری چون α در V وجود دارد که چندجمله‌ای مینیمال T را به‌عنوان پوچساز خود داراست. پس، نتیجه خواهد شد که T دارای برداری دوری است اگر و تنها اگر چندجمله‌ای مینیمال و سرشت‌نمای T

مساوی باشند. اما تا دیدن این مطلب کمی کار در پیش است.

نقشه ما مطالعه T عمومی با استفاده از عملگرهایی است که برداری دوری داشته باشند. لذا، به عملگر خطی U روی فضای W با بعد k که برداری دوری چون α داشته باشد، توجه می‌کنیم. بنا بر قضیه ۱، بردارهای $\alpha, U\alpha, \dots, U^{k-1}\alpha$ پایه‌ای برای فضای W تشکیل می‌دهند و پوچساز p_α از α ، چندجمله‌ای مینیمال U (و از این رو، همچنین چندجمله‌ای سرشت‌نمای U) است. اگر $\alpha_i = U^{i-1}\alpha$ ، $i = 1, \dots, k$ ، فرض شود، آنگاه کنش U روی پایه مرتب $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ عبارت است از

$$\begin{aligned} U\alpha_i &= \alpha_{i+1}, \quad i = 1, \dots, k-1 \\ U\alpha_k &= -c_0\alpha_1 - c_1\alpha_2 - \dots - c_{k-1}\alpha_k \end{aligned} \quad (1-7)$$

البته $p_\alpha = c_0 + c_1x + \dots + c_{k-1}x^{k-1} + x^k$ عبارت داده شده برای $U\alpha_k$ از این حکم که $p_\alpha(U) = 0$ ، یعنی

$$U^k\alpha + c_{k-1}U^{k-1}\alpha + \dots + c_1U\alpha + c_0\alpha = 0$$

نتیجه می‌شود. این مطلب حکم می‌کند که ماتریس U در پایه مرتب \mathcal{B} عبارت باشد از

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -c_{k-1} \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

ماتریس (۲-۷)، ماتریس همدم چندجمله‌ای تکین p_α نامیده می‌شود.

قضیه ۲. اگر U عملگری خطی روی فضای بعد متناهی W باشد، آنگاه U دارای برداری دوری است، اگر و تنها اگر پایه مرتبی برای W وجود داشته باشد که در آن U توسط ماتریس همدم چندجمله‌ای مینیمال U نمایش داده شود.

اثبات. قریباً مشاهده کردیم که اگر U دارای برداری دوری باشد، آنگاه چنین پایه مرتبی برای W وجود دارد. بعکس، اگر پایه مرتبی چون $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ برای W داشته باشیم که در آن U توسط ماتریس همدم چندجمله‌ای مینیمال U نمایش داده شود، روشن است که α_1 برداری دوری برای U است. \square

نتیجه. اگر A ماتریس همدم چندجمله‌ای تکین p باشد، آنگاه p هم چندجمله‌ای مینیمال و هم چندجمله‌ای سرشت‌نمای A است.

اثبات. يك راه برای دیدن این مطلب، این است که U را عملگری خطی روی F^k بگیریم که در پایه مرتب استاندارد با A نمایش داده می‌شود و قضیه ۱ را همراه با قضیه کیلی-همیلتن مورد استفاده قرار دهیم. روش دیگر این است که با استفاده از قضیه ۱ نشان دهیم p چندجمله‌ای مینمال A است و با محاسبه‌ای مستقیم بررسی کنیم که p چندجمله‌ای سرشت‌نمای A نیز است. \square

توضیح آخر - اگر T عملگر خطی دلخواهی روی فضای V و α هر برداری از V باشد، آنگاه عملگر U که T روی زیرفضای دوری $Z(\alpha; T)$ القا می‌کند دارای برداری دوری، مثلاً α است. پس، $Z(\alpha; T)$ دارای پایه مرتبی است که در آن U توسط ماتریس همدم P_α ، T - پوچساز α ، نمایش داده می‌شود.

تمرین

۱. فرض کنید T عملگری خطی روی F^2 باشد. ثابت کنید هر بردار غیر صفری که بردار سرشت‌نمای T نباشد برای T برداری دوری است. از اینجا ثابت کنید که یا T برداری دوری دارد یا اینکه T مضربی اسکالری از عملگرهمانی است.

۲. T را عملگری خطی روی R^3 بگیرید که در پایه مرتب استاندارد با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. ثابت کنید T هیچ بردار دوری ندارد. زیرفضای T -دوری تولید شده توسط بردار $(1, -1, 3)$ چیست؟

۳. فرض کنید T عملگری خطی روی C^3 باشد که در پایه مرتب استاندارد با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -1 & 2 & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. T -پوچساز بردار $(1, 0, 0)$ و نیز T -پوچساز $(1, 0, i)$ را بیابید.

۴. ثابت کنید که اگر T^2 برداری دوری داشته باشد، آنگاه T هم برداری دوری دارد. آیا عکس مطلب درست است؟

۵. فضای برداری n بعدی V بر روی هیأت F و عملگر خطی α پوچ-توان N روی V داده شده‌اند. فرض کنید $N^{n-1} \neq 0$ و $N^{n-1} \neq 0$ باشد که $N^{n-1} \neq 0$. ثابت کنید α برداری دوری برای N است. ماتریس N در پایه مرتب $\{\alpha, N\alpha, \dots, N^{n-1}\alpha\}$ دقیقاً چیست؟

۶. اثباتی مستقیم از این مطلب که اگر A ماتریس همدم چندجمله‌ای تکین p باشد، آنگاه p چندجمله‌ای سرشت‌نمای A است، ارائه کنید.

۷. فضای برداری n بعدی V و عملگر خطی T روی V مفروض‌اند. فرض کنید T قطری-شدنی باشد.

(الف) اگر T برداری دوری داشته باشد، نشان دهید T ، n مقدار سرشت‌نمای متمایز دارد.

(ب) اگر T دارای n مقدار سرشت‌نمای متمایز، و $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه‌ای از بردارهای سرشت‌نمای T باشد، نشان دهید $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ برداری دوری برای T است.

۸. فرض کنید T عملگری خطی روی فضای برداری V با بعد متناهی V و T دارای برداری دوری باشد. ثابت کنید اگر U عملگری خطی باشد که با T جابجا می‌شود، آنگاه U یک چندجمله‌ای بر حسب T است.

۲.۷. تجزیه‌های دوری و فرم گویا

هدف اصلی این بخش اثبات این مطلب است که اگر T عملگری خطی روی فضای V با بعد متناهی مانند V باشد، آنگاه بردارهایی چون $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ در V وجود دارند که

$$V = Z(\alpha_1; T) \oplus \dots \oplus Z(\alpha_r; T).$$

به بیان دیگر، می‌خواهیم ثابت کنیم که V مجموع مستقیمی از زیرفضاهای T -دوری است. این مطلب نشان می‌دهد که T مجموع مستقیم تعدادی متناهی از عملگرهایی خطی است که هر یک دارای برداری دوری است. نتیجه این مطلب، تحویل پرسشهای بسیاری درباره عملگر خطی عمومی به پرسشهای مشابهی است در مورد عملگری که برداری دوری داشته باشد. قضیه‌ای را که اثبات خواهیم کرد (قضیه ۳) یکی از عمیق‌ترین نتایج جبر خطی و دارای نتیجه‌های جالب بسیاری است.

قضیه تجزیه دوری در رابطه نزدیک با سؤال زیر است. کدام یک از زیرفضاهای

T -پایای W دارای این خاصیت است که زیرفضای T -پایایی چون W' با شرط $V = W \oplus W'$ وجود داشته باشد؟ اگر W زیرفضایی دلخواه از فضای V باشد، آنگاه زیرفضایی چون W' وجود دارد که $V = W \oplus W'$ معمولاً این‌گونه زیرفضاهای W' زیادند، و هر یک از آنها مکمل W نامیده می‌شود. می‌خواهیم بدانیم چه وقت زیرفضایی T -پایا، زیرفضای مکملی دارد که تحت T پایا هم هست.

فرض می‌کنیم $V = W \oplus W'$ و در آن W و W' هر دو تحت T پایا باشند. حال ببینیم دربارهٔ زیرفضای W چه مطالبی را می‌توانیم کشف کنیم. هر بردار β در V به صورت $\beta = \gamma + \gamma'$ است، که در آن γ در W و γ' در W' است. اگر f یک چندجمله‌ای بر روی هیأت اسکالری باشد، آنگاه

$$f(T)\beta = f(T)\gamma + f(T)\gamma'.$$

چون W و W' تحت T پایا هستند، بردار $f(T)\gamma$ در W و بردار $f(T)\gamma'$ در W' قرار دارد. بنابراین، $f(T)\beta$ در W است اگر و تنها اگر $f(T)\gamma' = 0$. آنچه توجه ما را جلب می‌کند این حقیقت به ظاهر ساده است که اگر $f(T)\beta$ در W باشد، آنگاه

$$f(T)\beta = f(T)\gamma$$

تعریف. گیریم T عملگری خطی روی فضای برداری V و W زیرفضایی از V باشد. گوییم W زیرفضایی T -مجاز است،

(۱) اگر W تحت T پایا باشد؛

(۲) و اگر $f(T)\beta$ در W باشد، آنگاه برداری چون γ در W وجود داشته باشد که

$$f(T)\beta = f(T)\gamma$$

چنانکه قبلاً نشان دادیم اگر W پایا و دارای زیرفضای پایای مکملی باشد، آنگاه W مجاز است. یکی از پیامدهای قضیهٔ ۳ عکس این مطلب است، و از آنجا مجاز بودن زیرفضاهای پایایی را که دارای زیرفضای پایای مکمل هستند مشخص می‌کند. حال نشان می‌دهیم خاصیت مجاز بودن چگونه وارد تلاش ما در به دست آوردن تجزیه‌ای چون

$$V = Z(\alpha_1; T) \oplus \dots \oplus Z(\alpha_r; T)$$

می‌شود. روش اساسی برای دست یافتن به چنین تجزیه‌ای، انتخاب از راه استقرار بردارهای $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ است. فرض کنیم به گونه‌ای $\alpha_1, \dots, \alpha_j$ را انتخاب کرده باشیم وزیرفضای

$$W_j = Z(\alpha_1; T) + \dots + Z(\alpha_j; T)$$

سره باشد. علاقه‌مندیم بردار غیر صفری چون α_{j+1} بیابیم که

$$W_j \cap Z(\alpha_{j+1}; T) = \{0\}.$$

زیرا در این صورت زیرفضای $W_{j+1} = W_j \oplus Z(\alpha_{j+1}; T)$ دست کم یک بعد به تکمیل

V نزدیکتر خواهد بود. اما چرا باید چنین α_{j+1} موجود باشد؟ اگر $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ طوری انتخاب شده باشند که W_j زیرفضای T -مجاز باشد، آنگاه نسبتاً بسادگی دیده می‌شود که می‌توانیم α_{j+1} مناسبی بیابیم. حتی اگر نحوه بیان استدلال ما هم چنین نباشد، در واقع این همان مطلبی است که کار اثبات قضیه ۳ را به پیش می‌برد. گیریم W زیرفضای T -پایای سرهای باشد. سعی می‌کنیم بردار غیرصفری چون α بیابیم که

$$W \cap Z(\alpha; T) = \{0\}. \quad (۳-۷)$$

می‌توان برداری چون β را انتخاب کرد که در W نباشد. فضای T -هادی $S(\beta; W)$ را که متشکل از همه چندجمله‌ایهای g است که $g(T)\beta$ در W قرار دارد، در نظر می‌گیریم. یادآوری می‌کنیم که چندجمله‌ای تکین $f = s(\beta; W)$ که ایدآل $S(\beta; W)$ را تولید می‌کند نیز T -هادی β در W نامیده می‌شود. بردار $f(T)\beta$ در W است. حال، اگر W ، T -مجاز باشد، عنصری چون γ در W قرار دارد که $f(T)\beta = f(T)\gamma$. فرض کنیم $\alpha = \beta - \gamma$ و g چندجمله‌ای دلخواهی باشد. چون $\beta - \alpha$ در W قرار دارد، $g(T)\beta$ در W است اگر و تنها اگر $g(T)\alpha$ نیز در W باشد؛ به بیان دیگر، $S(\alpha; W) = S(\beta; W)$. پس، چندجمله‌ای f نیز T -هادی α در W است. اما $f(T)\alpha = 0$. این موضوع می‌رساند که $g(T)\alpha$ در W است اگر و تنها اگر $g(T)\alpha = 0$ ؛ در اینجا، زیرفضاهای $Z(\alpha; T)$ و W مستقل هستند (۳-۷) و f همان T -پوچساز α است.

قضیه ۳ (قضیه تجزیه دوری). گیریم T عملگری خطی روی فضای برداری بعد متناهی V و W_0 زیرفضای T -مجاز سرهای از V باشد. بردارهای غیرصفری چون $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ در V بترتیب با T -پوچسازهای p_1, \dots, p_r وجود دارند که

$$V = W_0 \oplus Z(\alpha_1; T) \oplus \dots \oplus Z(\alpha_r; T) \quad (۱)$$

$$(۲) \quad p_k \text{ چندجمله‌ای } p_{k-1} \text{ را عاود می‌کند، } k = 2, \dots, r.$$

بعلاوه، عدد صحیح r و پوچسازهای p_1, \dots, p_r توسط (۱)، (۲) و این واقعیت که هیچ یک از α_k ها صفر نیستند، به‌طور یکتا تعیین می‌شوند. اثبات. اثبات نسبتاً طولانی است؛ از این‌رو، آن را به چهار مرحله تقسیم می‌کنیم. گرچه در مطالعه اول، ممکن است فرض $W_0 = \{0\}$ اثبات را ساده‌تر جلوه دهد، اما واقعاً این فرض سادگی عمده‌ای را سبب نمی‌شود. در سرتاسر اثبات، $f(T)\beta$ را باختصار به صورت $f\beta$ می‌نویسیم.

مرحله ۱. بردارهای غیرصفری چون β_1, \dots, β_r وجود دارند که

$$V = W_0 + Z(\beta_1; T) + \dots + Z(\beta_r; T) \quad (\text{الف})$$

$$(\text{ب}) \quad \text{اگر } 1 \leq k \leq r$$

$$W_k = W_0 + Z(\beta_1; T) + \dots + Z(\beta_k; T)$$

آنگاه درجه هادی $p_k = s(\beta_k; W_{k-1})$ در بین همه T -هادیهای در زیرفضای W_{k-1}

ماکسیمم است؛ یعنی، به ازای هر k

$$\deg p_k = \max_{\alpha \text{ در } V} \deg s(\alpha; W_{k-1}).$$

این مرحله تنها به این امر بستگی دارد که W زیرفضای پایایی است. اگر W زیرفضای T -پایای سره ای باشد، آنگاه

$$0 < \max_{\alpha} \deg s(\alpha; W) \leq (V) \text{ بعد}$$

و می‌توانیم برداری چون β انتخاب کنیم که $\deg s(\beta; W)$ همان ماکسیمم باشد. در این صورت زیرفضای $W + Z(\beta; T)$ ، T -پایا و دارای بعدی بزرگتر از بعد (W) است. این فرایند را برای به دست آوردن β_1 روی $W = W_0$ به کار می‌بندیم. اگر β_p روی $W_p = W_0 + Z(\beta_1; T)$ هنوز هم سره باشد، آنگاه فرایند را برای به دست آوردن β_p روی W_p به کار می‌بریم. این روش را ادامه می‌دهیم. چون بعد $(W_{k-1}) > (W_k)$ باید در حداکثر بعد (V) مرحله به $W_r = V$ برسیم.

مرحله ۲. گیریم β_1, \dots, β_r بردارهای غیرصفری باشند که شرایط (الف) و (ب) از مرحله ۱ را برآورند. k را ثابت می‌گیریم، $1 \leq k \leq r$. فرض می‌کنیم β برداری دلخواه از V باشد و می‌نویسیم $f = s(\beta; W_{k-1})$. اگر

$$f\beta = \beta_0 + \sum_{1 \leq i < k} g_i \beta_i, \quad W_i \text{ در } \beta_i$$

آنگاه f همه چندجمله‌ایهای g_i را عاود می‌کند و با فرض این که γ در W_0 باشد،

$$\beta_0 = f\gamma.$$

اگر $k = 1$ ، این حکم عین این است که W_0 زیرفضایی T -مجاز باشد. جهت اثبات حکم برای $k > 1$ الگوریتم تقسیم را به کار می‌بندیم:

$$\deg r_i < \deg f \quad \text{یا} \quad r_i = 0, \quad g_i = fh_i + r_i \quad (۴-۷)$$

می‌خواهیم نشان دهیم که به ازای هر i ، $r_i = 0$. فرض کنید

$$\gamma = \beta - \sum_{i=1}^{k-1} h_i \beta_i. \quad (۵-۷)$$

چون $\beta - \gamma$ در W_{k-1} است

$$s(\gamma; W_{k-1}) = s(\beta; W_{k-1}) = f.$$

بعلاوه

$$f\gamma = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k-1} r_i \beta_i. \quad (۶-۷)$$

تصور کنید یکی از r_i ها مخالف ۰ باشد. در این حال تناقضی به دست خواهیم آورد. گیریم j بزرگترین نمایه i باشد که به ازای آن $r_i \neq 0$. در این صورت

$$f\gamma = \beta_0 + \sum_{i=1}^j r_i \beta_i \quad (7-7)$$

$\cdot \deg r_j < \deg f$ و $r_j \neq 0$

می نویسیم $p = s(\gamma; W_{j-1})$. چون W_{k-1} شامل W_{j-1} است، هادی $f = s(\gamma; W_{k-1})$ باید p را عاد کند:

$$p = fg.$$

$g(T)$ را بر هر دو طرف (۷-۷) به کار می بندیم:

$$p\gamma = gf\gamma = gr_j\beta_j + g\beta_0 + \sum_{1 \leq i < j} gr_i\beta_i \quad (8-7)$$

بنابر تعریف، $p\gamma$ در W_{j-1} است و دو جمله آخر سمت راست (۸-۷) نیز متعلق به W_{j-1} است. بنابراین، $gr_j\beta_j$ هم در W_{j-1} قرار دارد. حال از شرط (ب) مرحله ۱ استفاده می کنیم:

$$\deg(gr_j) \geq \deg s(\beta_j; W_{j-1})$$

$$= \deg p_j$$

$$\geq \deg s(\gamma; W_{j-1})$$

$$= \deg p$$

$$= \deg(fg).$$

پس $\deg r_j \geq \deg f$ ، و این موضوع با انتخاب j تناقض دارد. تا اینجا می دانیم که f همه g_i ها را عاد می کند و از این رو $\beta_0 = f\gamma$. چون W_0 زیرفضایی T -مجاز است، با فرض اینکه γ_0 در W_0 باشد، $\beta_0 = f\gamma_0$. ضمناً متذکر می شویم که مرحله ۲ صورت قویتری از این حکم است که هر یک از زیرفضاهای W_1, W_2, \dots, W_r زیرفضایی T -مجاز است.

مرحله ۳. بردارهای غیرصفری چون $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ در V وجود دارند که در شرایط (۱) و (۲) قضیه ۳ صدق می کنند.

همچون مرحله ۱، با بردارهای β_1, \dots, β_r آغاز می کنیم و k را ثابت نگه می داریم، $1 \leq k \leq r$. مرحله ۲ را بر بردار $\beta = \beta_k$ و T -هادی $f = p_k$ به کار می بندیم. داریم

$$p_k \beta_k = p_k \gamma_0 + \sum_{1 \leq i < k} p_k h_i \beta_i \quad (9-7)$$

که در آن γ_0 در W_0 است و h_1, \dots, h_{k-1} چند جمله ایهایی هستند. می نویسیم

$$\alpha_k = \beta_k - \gamma_0 - \sum_{1 \leq i < k} h_i \beta_i. \quad (10-7)$$

چون $\beta_k - \alpha_k$ در W_{k-1} است

$$s(\alpha_k; W_{k-1}) = s(\beta_k; W_{k-1}) = p_k \quad (11-7)$$

و چون $p_k \alpha_k = 0$ داریم

$$W_{k-1} \cap Z(\alpha_k; T) = \{0\}. \quad (12-7)$$

چون همه α_k ها (۱۱-۷) و (۱۲-۷) را برمی آورند، نتیجه می گیریم که

$$W_k = W_0 \oplus Z(\alpha_1; T) \oplus \dots \oplus Z(\alpha_k; T).$$

و p_k چند جمله‌ای T -پوچساز α_k است. به بیان دیگر، بردارهای $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ همان دنباله از زیرفضاهای W_1, W_2, \dots را تعریف می کنند که بردارهای β_1, \dots, β_r و نیز T -هادیهایی $p_k = s(\alpha_k; W_{k-1})$ همان خواص ماکسیمال بودن (شرط (ب) مرحله ۱) را دارا هستند. بردارهای $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ دارای این خاصیت اضافی هم هستند که زیرفضاهای $W_0, Z(\alpha_1; T), Z(\alpha_2; T), \dots$ مستقل هستند. بنا براین بررسی شرط (۲) در قضیه ۳ آسان است. چون به ازای هر i ، $p_i \alpha_i = 0$ ، رابطه بدیهی

$$p_k \alpha_k = 0 + p_1 \alpha_1 + \dots + p_{k-1} \alpha_{k-1}$$

در دست است. مرحله ۲ را با گذاشتن $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ به جای β_1, \dots, β_k و با $\beta_k = \alpha_k$ به کار می بندیم. نتیجه: p_k هر p_i را، به ازای $i < k$ ، عادی می کند.

مرحله ۴. عدد r و چند جمله‌ایهای p_1, \dots, p_r به طوری که توسط شرایط قضیه ۳ تعیین می شوند.

فرض می کنیم علاوه بر بردارهای $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ در قضیه ۳، بردارهای غیر صفر $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ بترتیب با T -پوچسازهای g_1, \dots, g_s را هم داریم به طوری که

$$V = W_0 \oplus Z(\gamma_1; T) \oplus \dots \oplus Z(\gamma_s; T) \quad (13-7)$$

و نیز به ازای $s, \dots, 2, k$ چند جمله‌ای g_k را عادی می کند

شان خواهیم داد که $r = s$ و به ازای هر i ، $p_i = g_i$.

سادگی دیده می شود که $p_1 = g_1$. چند جمله‌ای g_1 به عنوان T -هادی V در W_0 از (۱۳-۷) حاصل می شود. گیریم $S(V; W_0)$ دسته‌ای از چند جمله‌ایهایی چون f است که به ازای هر β در V ، بردار $f\beta$ در W_0 باشد؛ یعنی، چند جمله‌ایهایی چون f است که برد $f(T)$ مشمول در W_0 باشد. آنگاه $S(V; W_0)$ ایدآل غیر صفری در جبر چند جمله‌ایها است. به دلیل زیر، چند جمله‌ای g_1 مولد تکین این ایدآل است. هر β در V به صورت

$$\beta = \beta_0 + f_1 \gamma_1 + \dots + f_s \gamma_s$$

است؛ و لذا

$$g_1 \beta = g_1 \beta_0 + \sum_i g_1 f_i \gamma_i.$$

چون هر g_i چند جمله‌ای g_1 را عاد می‌کند، به‌ازای همه‌ی i ها داریم $g_1 \gamma_i = 0$ و نیز $g_1 \beta = g_1 \beta_0$ متعلق به W_0 است. پس g_1 در $S(V; W_0)$ قرار دارد. چون g_1 چند-جمله‌ای تکین از کوچکترین درجه است که γ_1 را در W_0 می‌فرستد، می‌بینیم که g_1 چند-جمله‌ای تکین از کوچکترین درجه موجود در ایدآل $S(V; W_0)$ است. با همین استدلال، p_1 مولد این ایدآل است و از اینجا $p_1 = g_1$.

اگر f یک چند جمله‌ای W زیرفضایی از V باشد، مجموعه‌ی همه‌ی بردارهای $f\alpha$ به‌ازای α در W را باختصار به‌صورت fW می‌نویسیم. اثبات سه‌حکم زیر را به‌عنوان تمرین واگذار می‌کنیم.

$$fZ(\alpha; T) = Z(f\alpha; T). \quad ۱.$$

۲. اگر $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ و هر V_i تحت T پایا باشد، آنگاه

$$fV = fV_1 \oplus \dots \oplus fV_k.$$

۳. اگر α, γ, T -پوچسازهای مساوی داشته باشند، آنگاه $f\alpha$ و $f\gamma$ نیز T -پوچسازهای مساوی دارند و (بنا بر این)

$$\text{بعد}(Z(f\alpha; T)) = \text{بعد}(Z(f\gamma; T)).$$

اکنون، برای اینکه نشان دهیم $r = s$ و به‌ازای $i = 2, \dots, r$ ، $p_i = g_i$ ، به‌استقرا به‌پیش می‌رویم. برهان بر شمارش ابعاد به‌طریق درست استوار است. ما اثبات این مطلب را که اگر $r \geq 2$ آنگاه $p_r = g_r$ ارائه می‌دهیم و امیدواریم استقرا از آن دیده شود. فرض کنیم $r \geq 2$. در این صورت

$$\text{بعد}(V) < \text{بعد}(Z(\alpha_1; T)) + \text{بعد}(W_0)$$

چون می‌دانیم $p_1 = g_1$ ، نتیجه می‌گیریم که بعدهای $Z(\alpha_1; T)$ و $Z(\gamma_1; T)$ مساوی‌اند. بنا بر این

$$\text{بعد}(V) < \text{بعد}(Z(\gamma_1; T)) + \text{بعد}(W_0).$$

که نشان می‌دهد $s \geq 2$. اکنون می‌توانیم بپرسیم که آیا $p_r = g_r$ یا نه. از دو تجزیه V ، دو تجزیه هم برای زیرفضای $p_r V$ به‌دست می‌آوریم:

$$p_r V = p_r W_0 \oplus Z(p_r \alpha_1; T) \quad (۱۴-۷)$$

$$p_r V = p_r W_0 \oplus Z(p_r \gamma_1; T) \oplus \dots \oplus Z(p_r \gamma_s; T).$$

در اینجا از احکام (۱) و (۲) بالا استفاده کرده و این حقیقت را هم که $i \geq 2$ ، $p_r \alpha_i = 0$ به‌کار برده‌ایم. چون می‌دانیم $p_1 = g_1$ ، حکم (۳) بالا می‌گوید که بعدهای $Z(p_r \alpha_1; T)$ و $Z(p_r \gamma_1; T)$ مساوی‌اند. از این‌رو، از (۱۴-۷) آشکار است که

$$(Z(p_r \gamma_i; T)) \text{ بعد} = 0. \quad i \geq 2.$$

نتیجه اینکه $p_r \gamma_r = 0$ ، و g_r چند جمله‌ای p_r را عادی می‌کند. این برهان را می‌توان معکوس کرد و نشان داد که p_r نیز g_r را عادی می‌کند. بنابراین $g_r = p_r \cdot \square$.

نتیجه. اگر T عملگری خطی روی فضای برداری با بعد متناهی باشد، آنگاه هر زیر فضای T -مجاز زیر فضای مکملی دارد که تحت T پایاست.

اثبات. گیریم W_0 زیر فضای مجازی از V باشد. اگر $W_0 = V$ مکملی که در جستجوی آن هستیم $\{0\}$ است، و اگر W_0 سره باشد، قضیه ۳ را به کار می‌بندیم می‌نویسیم

$$W'_0 = Z(\alpha_1; T) \oplus \dots \oplus Z(\alpha_r; T).$$

در این صورت W'_0 تحت T پایاست و $V = W_0 \oplus W'_0$.

نتیجه. فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای برداری بعد متناهی V باشد. (الف) برداری چون α در V وجود دارد که T -پوچساز α چند جمله‌ای مینیمال T است.

(ب) T برداری دوری دارد اگر و تنها اگر چند جمله‌ایهای سرشت نما و مینیمال T مساوی باشند.

اثبات. اگر $V = \{0\}$ به طور بدیهی درست هستند. اگر $V \neq \{0\}$ ، فرض می‌کنیم

$$V = Z(\alpha_1; T) \oplus \dots \oplus Z(\alpha_r; T). \quad (15-7)$$

در اینجا T -پوچسازهای p_1, \dots, p_r طوری هستند که به ازای $1 \leq k \leq r-1$ ، p_{k+1} چند جمله‌ای p_k را عادی می‌کند. همچنان که در اثبات قضیه ۳ ملاحظه کردیم، بسادگی نتیجه می‌شود که p_1 چند جمله‌ای مینیمال T ، یعنی T -هادی V در $\{0\}$ است. پس (الف) را اثبات کردیم.

در بخش ۱۰۷ دیدیم که اگر T دارای برداری دوری باشد چند جمله‌ای مینیمال T بر چند جمله‌ای سرشت نما منطبق است. حکم (ب) عکس این حالت را هم در بر دارد. هر α ی را همچون در (الف)، انتخاب کنید. اگر درجه چند جمله‌ای مینیمال برابر بعد (V) باشد، آنگاه $V = Z(\alpha; T)$.

قضیه ۴ (تعمیم قضیه کبلی-همیلتن). فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای برداری بعد متناهی V باشد. p و f را به ترتیب چند جمله‌ایهای مینیمال و سرشت نما T می‌گیریم. (۱) p چند جمله‌ای f را عادی می‌کند. (۲) سازه‌های اول p و f مساوی‌اند، و لسی ممکن است چندگانگیهای مختلف داشته باشند.

(۳) اگر

$$p = f_1^{r_1} \cdots f_k^{r_k} \quad (16-7)$$

تجزیه p به سازه‌های اول باشد، آنگاه

$$f = f_1^{d_1} \cdots f_k^{d_k} \quad (17-7)$$

که در آن d_i پوچی $f_i(T)^{r_i}$ تقسیم بردرجه f_i است.

اثبات. حالت بدیهی $V = \{0\}$ را منظور نمی‌کنیم. برای اثبات (۱) و (۲) تجزیه‌ای دوری چون (۷-۱۵) از V را که از قضیه ۳ به دست می‌آید در نظر می‌گیریم. همچنان که در اثبات نتیجه دوم ملاحظه کردیم $p_1 = p$ گیریم U_i تحدید T بر $Z(\alpha_i; T)$ باشد. در این صورت U_i برداری دوری دارد و لذا p_i هم چندجمله‌ای مینیمال و هم چندجمله‌ای سرشت‌نمای U_i است. بنابراین، چندجمله‌ای سرشت‌نمای f عبارت است از حاصل ضرب $p_1 \cdots p_r = f$. این مطلب از صورت بلوکی (۶-۱۴)، که ماتریس T در پایه مناسبی می‌باشد، آشکار است. واضح است که $p_1 = p$ ، f را عادی می‌کند، و (۱) اثبات می‌شود. بدیهی است که هر مقسوم‌علیه اول p ، مقسوم‌علیه اول f هم هست. بعکس، هر مقسوم‌علیه اول $p_1 \cdots p_r = f$ باید یکی از سازه‌های p_i را عادی کند و این بدیهی خود p_1 را هم عادی می‌کند.

فرض کنیم (۷-۱۶) تجزیه به سازه‌های اول p باشد. قضیه تجزیه اولیه (قضیه ۱۲ فصل ۶) را به کار می‌بریم. آن قضیه حاکی است که اگر V_i فضای پوچ $f_i(T)^{r_i}$ باشد، آنگاه

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k \quad (18-7)$$

و f_i چندجمله‌ای مینیمال عملگر T_i حاصل از تحدید T بر زیر فضای (پایه) V_i است. حال قسمت (۲) قضیه حاضر را در مورد عملگر T_i به کار می‌بندیم. چون چندجمله‌ای مینیمال آن توانی از سازه اول f_i است، چندجمله‌ای سرشت‌نمای T_i به صورت $f_i^{d_i}$ است، که در آن $d_i \geq r_i$ آشکار است که

$$d_i = \frac{\text{بعد}(V_i)}{\text{deg } f_i}$$

و (تقریباً طبق تعریف)، پوچی $(f_i(T)^{r_i}) = \dim V_i$. چون T مجموع مستقیم عملگرهای T_1, \dots, T_k است، چندجمله‌ای سرشت‌نمای f عبارت از حاصل ضرب

$$f = f_1^{d_1} \cdots f_k^{d_k} \cdot \square$$

نتیجه. اگر T عملگر خطی پوچ توانی روی فضایی برداری با بعد n باشد، آنگاه چندجمله‌ای سرشت‌نمای T عبارت است از x^n .

اکنون به نظیر ماتریسی قضیه تجزیه دوری می‌پردازیم. اگر عملگر T و تجزیه به مجموع مستقیم قضیه ۳ داده شده باشند، فرض می‌کنیم \mathcal{B}_i «پایه مرتب دوری»

$$\{\alpha_i, T\alpha_i, \dots, T^{k_i-1}\alpha_i\}$$

برای $Z(\alpha_i; T)$ باشد. در اینجا k_i بعد $Z(\alpha_i; T)$ ، یعنی درجه پوچساز p_i را نشان می‌دهد. ماتریس عملگر القا شده T_i در پایه مرتب \mathcal{B}_i ماتریس همدم چندجمله‌ای p_i است. پس، اگر \mathcal{B} را پایه مرتب V حاصل از تلفیق اجتماع \mathcal{B}_i ها، بترتیب $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$ ، فرض کنیم، آنگاه ماتریس T در پایه مرتب \mathcal{B} به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \circ & \dots & \circ \\ \circ & A_2 & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & A_r \end{bmatrix} \quad (19-7)$$

که در آن A_i ماتریس همدم $k_i \times k_i$ برای p_i است. گوئیم يك ماتریس $n \times n$ A در فرم گویا است، هرگاه A مجموع مستقیم (۱۹-۷) از ماتریسهای همدم چندجمله‌ایهای تکین غیراسکالر p_1, \dots, p_r باشد که به ازای $i=1, \dots, r-1$ ، p_{i+1} چند-جمله‌ای p_i را عادی می‌کند. قضیه تجزیه دوری درباره ماتریسها مطلب زیر را بیان می‌کند.

قضیه ۵. فرض کنیم F يك هیأت و B ماتریسی $n \times n$ بر روی F باشد. در این صورت B بر روی هیأت F با يك و تنها يك ماتریس در فرم گویا متشابه است.

اثبات. T را عملگری خطی روی F^n می‌گیریم که در پایه مرتب استاندارد با B نمایش داده می‌شود. همچنان که قبلاً ملاحظه کردیم، پایه مرتبی برای F^n وجود دارد که در آن T با ماتریسی چون A که در فرم گویا است، نمایش داده می‌شود. در این صورت B با این ماتریس A متشابه است. فرض کنیم B بر روی F با ماتریس دیگری چون C هم که در فرم گویاست متشابه باشد. و این بدین معنی است که پایه مرتبی برای F^n وجود دارد که در آن عملگر T با ماتریس C نمایش داده می‌شود. اگر C مجموع مستقیم ماتریسهای همدم c_i از چندجمله‌ایهای تکین g_1, \dots, g_s باشد که به ازای $i=1, \dots, s-1$ ، g_{i+1} چندجمله‌ای g_i را عادی کند، آنگاه آشکار است که بردارهای غیرصفر β_1, \dots, β_s در F^n ، بترتیب با T -پوچسازهای g_1, \dots, g_s ، وجود دارند که

$$V = Z(\beta_1; T) \oplus \dots \oplus Z(\beta_s; T).$$

اما در این صورت بنا بر حکم یکتایی در قضیه تجزیه دوری، چندجمله‌ایهای g_i با چند-جمله‌ایهای p_i که ماتریس A را تعریف می‌کنند مساوی هستند. پس، $C = A$. \square

چندجمله‌ایهای p_1, \dots, p_r ، سازه‌های پایای ماتریس B نامیده می‌شوند. در بخش ۴.۷ برای محاسبه سازه‌های پایای ماتریس مفروضی چون B الگوریتمی به دست خواهیم داد. وجه تسمیه فرم گویا از این واقعیت ناشی می‌شود که توسط تعداد متناهی عمل گویا روی درایدهای B محاسبه این چندجمله‌ایها امکان پذیر است.

مثال ۴. فرض کنیم فضای برداری دو بعدی V برداری هیأت F و عملگر خطی T روی V داده شده‌اند. امکانات برای تجزیه کردن T به زیر فضاهای دوری بسیار محدود است. زیرا، اگر درجه چندجمله‌ای مینیمال T ، χ باشد، خود با چندجمله‌ای سرشت‌نمای T برابر است و T دارای برداری دوری است. پس، پایه مرتبی برای V وجود دارد که در آن T با ماتریس همدم چندجمله‌ای سرشت‌نمایش نشان داده می‌شود. از طرف دیگر، اگر درجه چندجمله‌ای مینیمال T یک باشد، آنگاه T مضر بی اسکالری از عملگر همانی است. اگر $T = cI$ ، آنگاه به ازای هر دو بردار مستقل خطی α_1 و α_2 در V ، داریم

$$V = Z(\alpha_1; T) \oplus Z(\alpha_2; T)$$

$$p_1 = p_2 = x - c.$$

در مورد ماتریسها، این تحلیل حاکی است که هر ماتریس 2×2 برداری هیأت F ، دقیقاً با یکی از ماتریسهای از نوع

$$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -c_0 \\ 1 & -c_1 \end{bmatrix}$$

بر روی F متشابه است.

مثال ۳. گیریم T عملگری خطی روی R^3 باشد که در پایه مرتب استاندارد با ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. قبلاً محاسبه کرده‌ایم که چندجمله‌ای سرشت‌نمای T برابر $p = (x-1)(x-2)^2$ ، $f = (x-1)(x-2)^2$ ، و چندجمله‌ای مینیمال T برابر $p = (x-1)(x-2)^2$ است. بدین سان می‌دانیم که در تجزیه دوری برای T ، اولین بردار α_1 ، p را به عنوان T -پوچساز خود خواهد داشت. چون در فضایی سه بعدی کار می‌کنیم، تنها یک بردار دیگر چون α_2 می‌تواند در آن وجود داشته باشد. این بردار باید زیر فضایی دوری با بعد ۱ را تولید کند؛ یعنی، باید برداری سرشت‌نما برای T باشد. پوچسازش p_2 باید $(x-2)$ باشد؛ زیرا باید داشته باشیم $pp_2 = f$. توجه کنید که این مطلب بلافاصله حاکی است که ماتریس

A با ماتریس

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

متشابه است؛ بدین معنی که T در پایه مرتبی توسط B نمایش داده می‌شود. چگونه می‌توانیم بردارهای مناسب α_1 و α_2 را بیابیم؟ خوب، می‌دانیم هر برداری که زیر فضای T -دوری از بعد ۲ را تولید کند، α_1 مناسبی است. از این رو، بیابید ϵ_1 را بیازماییم. داریم

$$T\epsilon_1 = (5, -1, 3)$$

که مضربی اسکالری از ϵ_1 نیست؛ پس $Z(\epsilon_1; T)$ دارای بعد ۲ است. این فضا متشکل است از همه بردارهای $a\epsilon_1 + b(T\epsilon_1)$:

$$a(1, 0, 0) + b(5, -1, 3) = (a + 5b, -b, 3b)$$

یا همه بردارهای (x_1, x_2, x_3) که در شرط $x_3 = -3x_2$ صدق کنند. اکنون به برداری چون α_2 نیاز داریم که $T\alpha_2 = 2\alpha_2$ باشد، فضای $Z(\alpha_2; T)$ مجزا از $Z(\epsilon_1; T)$ باشد. چون α_2 باید برداری سرشت‌نما برای T باشد، فضای $Z(\alpha_2; T)$ چیزی جز فضای یک بعدی پدید آمده توسط α_2 نخواهد بود؛ و لذا شرط ما این است که α_2 در $Z(\epsilon_1; T)$ نباشد. اگر $\alpha = (x_1, x_2, x_3)$ ، بسادگی می‌توان نشان داد که $T\alpha = 2\alpha$ ، اگر و تنها اگر $2x_3 = 2x_2 + 2x_1$ ، پس، $\alpha_2 = (2, 1, 0)$ در $T\alpha_2 = 2\alpha_2$ صدق می‌کند و زیرفضایی T -دوری مجزا از $Z(\epsilon_1; T)$ تولید می‌نماید. خواننده باید مستقیماً نشان دهد که ماتریس T در پایه مرتب

$$\{(1, 0, 0), (5, -1, 3), (2, 1, 0)\}$$

ماتریس B بالا است.

مثال ۴. فرض کنیم T یک عملگر خطی قطری شدنی روی V باشد. این جالب است که تجزیه‌ای دوری برای T را به پایه‌ای که ماتریس T را قطری می‌کند مربوط بسازیم. c_1, \dots, c_k را مقادیر سرشت‌نمای متمایز T و V_i را فضای بردارهای سرشت‌نمای وابسته به مقدار سرشت‌نمای c_i می‌گیریم. در این صورت

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$$

و اگر بعد $(V_i) = d_i$ ، آنگاه

$$f = (x - c_1)^{d_1} \dots (x - c_k)^{d_k}$$

چند جمله‌ای سرشت‌نمای T است. اگر α برداری از V باشد، مربوط ساختن زیر فضای دوری $Z(\alpha; T)$ به زیرفضاهای V_1, \dots, V_k آسان است. بردارهای یکتایی چون β_1, \dots, β_k وجود دارند که β_i در V_i باشد و

$$\alpha = \beta_1 + \dots + \beta_k.$$

چون $T\beta_i = c_i\beta_i$ ، به ازای هر چندجمله‌ای f داریم

$$f(T)\alpha = f(c_1)\beta_1 + \dots + f(c_k)\beta_k. \quad (20-7)$$

با مفروض بودن اسکالرها t_1, \dots, t_k چندجمله‌ای f وجود دارد که $f(c_i) = t_i$ ، $1 \leq i \leq k$. بنا بر این، $Z(\alpha; T)$ عیناً زیر فضای پدید آمده توسط بردارهای β_1, \dots, β_k است. پوچساز α چیست؟ بنا بر (20-7)، $f(T)\alpha = 0$ اگر و تنها اگر به ازای هر i ، $f(c_i)\beta_i = 0$. به بیان دیگر، $f(T)\alpha = 0$ ، مشروط بر اینکه به ازای i هایی که به ازای آنها $\beta_i \neq 0$ داشته باشیم $f(c_i) = 0$. از این رو، پوچساز α عبارت است از حاصل ضرب

$$\prod_{\beta_i \neq 0} (x - c_i). \quad (21-7)$$

حال، $\mathcal{B}_i = \{\beta_1^i, \dots, \beta_{d_i}^i\}$ را پایه مرتبی برای V_i می‌گیریم و می‌نویسیم

$$r = \max_i d_i.$$

بردارهای $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ را توسط

$$\alpha_j = \sum_{d_i \geq j} \beta_i^j, \quad 1 \leq j \leq r \quad (22-7)$$

تعریف می‌کنیم. زیر فضای دوری $Z(\alpha_j; T)$ عبارت است از زیر فضای پدید آمده توسط بردارهای β_j^i با این شرط که i نمایه‌هایی را بپذیرد که به ازای آنها $d_i \geq j$. پوچساز α_j

$$p_j = \prod_{d_i \geq j} (x - c_i) \quad (23-7)$$

است. همچنین

$$V = Z(\alpha_1; T) \oplus \dots \oplus Z(\alpha_r; T)$$

زیرا هر β_j^i به یکی و تنها یکی از زیر فضاهای $Z(\alpha_1; T), \dots, Z(\alpha_r; T)$ تعلق دارد و $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k)$ پایه‌ای برای V است. طبق (23-7)، p_{j+1} چندجمله‌ای p_j را نیز عاد می‌کند.

تمرین

۰۱. فرض کنید T عملگری خطی روی F^2 باشد، که در پایه مرتب استاندارد با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. فرض کنید $\alpha_1 = (0, 1)$. نشان دهید $F^2 \neq Z(\alpha_1; T)$ و هیچ بردار غیر صفری چون α_2 در F^2 وجود ندارد که $Z(\alpha_2; T)$ مجزا از $Z(\alpha_1; T)$ باشد.

۴. فرض کنید T عملگری خطی روی فضای با بعد متناهی V و R برد T باشد. (الف) ثابت کنید R زیر فضای T -پایای مکملی دارد اگر و تنها اگر R مستقل از فضای پوچ N از T باشد.

(ب) اگر R و N مستقل باشند، ثابت کنید N یکتا زیر فضای T -پایای مکمل R است.

۳. فرض کنید T عملگری خطی روی R^3 باشد که در پایه مرتب استاندارد با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. فرض کنید W فضای پوچ $T - 2I$ باشد. ثابت کنید W هیچ زیر فضای T -پایای مکملی ندارد. (دانهمایی: فرض کنید $\beta = \epsilon_1$ ، و مشاهده کنید که $(T - 2I)\beta$ در W است. ثابت کنید هیچ α یسی در W وجود ندارد که $(T - 2I)\beta = (T - 2I)\alpha$.)

۴. فرض کنید T عملگری خطی روی F^4 باشد که در پایه مرتب استاندارد با ماتریس

$$\begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. فرض کنید W فضای پوچ $T - cI$ باشد.

(الف) ثابت کنید W زیر فضای پدید آمده توسط ϵ_4 است.

(ب) مولدهای تکین ایدآلهای $S(\epsilon_1; W)$ ، $S(\epsilon_2; W)$ ، $S(\epsilon_3; W)$ ، $S(\epsilon_4; W)$ را بیابید.

۵. فرض کنید T عملگری خطی روی فضای برداری V بر روی هیأت F باشد. اگر چند جمله‌ای f بر روی F و α در V باشد، می‌نویسیم $f\alpha = f(T)\alpha$. اگر

۶. V_k زیرفضاهایی T -پایا باشند و $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ ، نشان دهید
 $fV = fV_1 \oplus \dots \oplus fV_k$.

۷. F و V, T را همچون در تمرین ۵ بگیرید. فرض کنید α و β بردارهایی از V باشند که T -پوچسازهای مساوی دارند. ثابت کنید که به ازای هر چندجمله‌ای f ، بردارهای $f\alpha$ و $f\beta$ نیز T -پوچسازهای مساوی دارند.

۸. چندجمله‌ایهای مینیمال و فرمهای گویای هر یک از ماتریسهای حقیقی زیر را بیابید

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & 0 & -1 \\ 0 & c & 1 \\ -1 & 1 & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

۹. T عملگری خطی روی R^3 باشد که در پایه مرتب استاندارد با

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. بردارهای غیر صفر $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ را که در شرایط قضیه ۳ صدق می‌کنند بیابید.

۱۰. ماتریس حقیقی

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

داده شده است. ماتریس حقیقی 3×3 معکوس پذیری چون P بیابید که $P^{-1}AP$ به فرم گویا باشد.

۱۱. فرض کنید F زیرهیتی از اعداد مختلط و T عملگری خطی روی F^4 باشد که در پایه مرتب استاندارد با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b & 2 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. چندجمله‌ای سرشت‌نمای T را بیابید. حالات $a=b=1$ ؛ $a=b=0$ ؛ $a=0$ ، $b=1$ را در نظر بگیرید. در هر یک از این حالات، چندجمله‌ای مینیمال T و بردارهای غیر صفر $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ را که در شرایط قضیه ۳ صدق می‌کنند بیابید.

۱۱. ثابت کنید که اگر A و B ماتریسهای 3×3 بر روی هیأت F باشند، شرطی لازم و کافی برای اینکه A و B بر روی F متشابه باشند این است که آنها دارای چندجمله‌ایهای سرشت‌نمای مساوی و چندجمله‌ایهای مینیمال مساوی باشند. مثالی بیاورید که نشان دهد این موضوع برای ماتریسهای 4×4 غلط است.

۱۲. فرض کنید F زیرهیأتی از هیأت اعداد مختلط و A و B ماتریسهای $n \times n$ بر روی F باشند؛ ثابت کنید که اگر A و B بر روی هیأت اعداد مختلط متشابه باشند، آنگاه بر روی F نیز متشابه‌اند. (داهنمایی: ثابت کنید که فرم گویای A ، چه A به‌عنوان ماتریسی روی F در نظر گرفته شود و چه ماتریسی روی C ، یکی است؛ و به‌همین نحو برای B .)

۱۳. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های مختلط باشد. ثابت کنید که اگر همه مقادیر سرشت‌نمای A ، حقیقی باشند، آنگاه A با ماتریسی با درایه‌های حقیقی متشابه است.

۱۴. فرض کنید T عملگری خطی روی فضای بعد متناهی V باشد. ثابت کنید برداری چون α با خاصیت زیر در V وجود دارد. اگر f یک چندجمله‌ای باشد و $f(T)\alpha = 0$ ، آنگاه $f(T) = 0$ (برداری چون α ، یک بردار جداکننده برای جبر چندجمله‌ایهای در T نامیده می‌شود). هنگامی که T برداری دوری داشته باشد، اثباتی مستقیم از این مطلب که هر بردار دوری برداری جداکننده برای جبر چندجمله‌ایهای در T نیز هست، ارائه کنید.

۱۵. فرض کنید F زیرهیأتی از هیأت اعداد مختلط، A ماتریسی $n \times n$ بر روی F ، و p چندجمله‌ای مینیمال A باشد. اگر A را به‌عنوان ماتریسی بر روی C محسوب کنیم، آنگاه A به‌عنوان ماتریسی $n \times n$ بر روی C چندجمله‌ای مینیمالی چون f دارد. از قضیه‌ای درباره معادلات خطی جهت اثبات $p = f$ استفاده کنید. آیا همچنین می‌توانید دریابید که این مطلب از قضیه تجزیه دوری چگونه نتیجه می‌شود؟

۱۶. فرض کنید ماتریس A ی $n \times n$ با درایه‌های حقیقی چنان باشد که $A^2 + I = 0$. ثابت کنید n زوج است و اگر $n = 2k$ فرض شود، آنگاه A بر روی هیأت اعداد حقیقی با ماتریسی به‌صورت بلوکی

$$\begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

که در آن I ماتریس همانی $k \times k$ است، مشابه است.

۱۷. عملگر خطی T روی فضای برداری بعد متناهی V داده شده است. فرض کنید
(الف) چندجمله‌ای مینیمال T توانی از یک چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر باشد؛
(ب) چندجمله‌ای مینیمال با چندجمله‌ای سرشت نما برابر باشد.
نشان دهید که هیچ زیر فضای T -پایای غیر بدیهی، یک زیر فضای T -پایای مکمل ندارد.

۱۸. اگر T یک عملگر خطی قطری‌شدنی باشد، آنگاه هر زیر فضای T -پایا، یک زیر فضای T -پایای مکمل نیز دارد.

۱۹. گیریم T عملگری خطی روی فضای V باشد. ثابت کنید T برداری دوری دارد اگر و تنها اگر مطلب زیر درست باشد: هر عملگر خطی U که با T جابجا شود یک چندجمله‌ای بر حسب T است.

۲۰. فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی بر روی هیأت F و T عملگری خطی روی V باشد. می‌پرسیم چه وقت این مطلب درست است که هر بردار غیر صفر در V برداری دوری برای T است. ثابت کنید وضع چنین است اگر و تنها اگر چندجمله‌ای سرشت نمای T بر روی F تحویل‌ناپذیر باشد.

۲۱. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های حقیقی باشد. فرض کنید T عملگری خطی روی R^n باشد که توسط A در پایه مرتب استاندارد نمایش داده می‌شود و U عملگری خطی روی C^n باشد که آن هم در پایه مرتب استاندارد با A نمایش داده می‌شود. برای اثبات مطلب زیر از نتیجه تمرین ۲۰ استفاده کنید: اگر زیر فضاهای پایای تحت T تنها R^n و زیر فضای صفر باشند، آنگاه U قطری‌شدنی است.

۳.۷ فرم ژوردان

فرض کنیم N عملگر خطی پوچ توانی روی فضای V بعد متناهی V باشد. تجزیه دوری N حاصل از قضیه ۳ را مورد توجه قرار می‌دهیم. عدد صحیح مثبتی چون r و r بردار غیر صفر $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ در V با N -پوچسازهای p_1, \dots, p_r که

$$V = Z(\alpha_1; V) \oplus \dots \oplus Z(\alpha_r; V)$$

و به ازای $i = 1, \dots, r-1$ ، p_{i+1} چندجمله‌ای p_i را عاد می‌کند وجود دارند. چون

N پوچ توان است، k_i بی هست که $k \leq n$ و چند جمله‌ای مینیمال N به صورت x^k باشد. پس، هر p_i به صورت $p_i = x^{k_i}$ است و شرط تقسیم پذیری چیزی جز شرط

$$k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_r$$

نیست. بدیهی است که $k_1 = k$ و $k_r \geq 1$. ماتریس همدم x^{k_i} عبارت است از ماتریس

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (24-7)$$

بدین سان قضیه ۳ پایه مرتبی برای V به دست می‌دهد که نسبت به آن ماتریس N مجموع مستقیم ماتریسهای پوچ توان مقدماتی (۲۴-۷) است که وقتی i افزایش یابد اندازه‌شان کاهش می‌یابد. از این مطلب دیده می‌شود که به هر ماتریس $n \times n$ پوچ توانی عدد صحیح مثبتی چون r و r عدد صحیح مثبت k_1, \dots, k_r طوری وابسته اند که $k_1 + \dots + k_r = n$ و $k_i \geq k_{i+1}$ و نیز این اعداد صحیح مثبت فرم گویای ماتریس را تعیین؛ یعنی، ماتریس را تا میزان تشابه معین می‌کنند.

در مورد عملگر پوچ توان فوق مطلبی وجود دارد که باید آن را در اینجا خاطر نشان سازیم. عدد صحیح مثبت r دقیقاً برابر پوچی N است؛ در واقع، فضای پوچ، پایه‌ای مشتمل بر r بردار

$$N^{k_i-1} \alpha_i \quad (25-7)$$

دارد. زیرا، فرض می‌کنیم α در فضای پوچ N باشد. حال α را به صورت

$$\alpha = f_1 \alpha_1 + \dots + f_r \alpha_r$$

که در آن f_i یک چند جمله‌ای است و درجه آن را می‌توان کمتر از k_i فرض کرد، می‌نویسیم. چون $N\alpha = 0$ ، به ازای هر i داریم

$$\begin{aligned} 0 &= N(f_i \alpha_i) \\ &= N f_i (N) \alpha_i \\ &= (x f_i) \alpha_i. \end{aligned}$$

پس، $x f_i$ بر x^{k_i} تقسیم پذیر است، و چون $\deg(f_i) < k_i$ ، این بدان معنی است که به ازای

اسکالری چون c_i

$$f_i = c_i x^{k_i - 1}.$$

ولی آنگاه

$$\alpha = c_1(x^{k_1-1}\alpha_1) + \dots + c_r(x^{k_r-1}\alpha_r)$$

که نشان می‌دهد بردارهای (۲۵-۷) پایه‌ای برای فضای پوچ N تشکیل می‌دهند. خواننده باید توجه داشته باشد که این حکم از دیدگاه ماتریسی نیز کاملاً روشن است.

اکنون ما بلییم یافته‌های خود در مورد عملگرها یا ماتریسهای پوچ توان را با قضیه تجزیه اولیه از فصل ۶ تلفیق کنیم. وضع چنین است: فرض کنیم T عملگری خطی روی V باشد و نیز چند جمله‌ای سرشت نمای T بر روی F به صورت زیر به سازه‌ها تجزیه شود:

$$f = (x - c_1)^{d_1} \dots (x - c_k)^{d_k}.$$

در اینجا c_1, \dots, c_k عناصر متمایزی از F هستند و $d_i \geq 1$ در این صورت چند-جمله‌ای مینیمال T

$$p = (x - c_1)^{r_1} \dots (x - c_k)^{r_k}$$

است که در آن $1 \leq r_i \leq d_i$ اگر W_i فضای پوچ $(T - c_i I)^{r_i}$ باشد، آنگاه قضیه تجزیه اولیه حاکی است که

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$$

و نیز عملگر T_i ، القا شده توسط T روی W_i ، دارای چند جمله‌ای مینیمال $(x - c_i)^{r_i}$ است. N_i را عملگری خطی روی W_i تعریف شده توسط $N_i = T_i - c_i I$ می‌گیریم. در این صورت N_i پوچ توان و دارای چند جمله‌ای مینیمال x^{r_i} است. عملگر T روی W_i مانند حاصل جمع N_i و c_i برابر عملگر همانی عمل می‌کند. فرض کنیم پایه‌ای برای زیر فضای W_i ، متناظر به تجزیه دوری عملگر پوچ توان N_i ، انتخاب کرده باشیم. در این صورت ماتریس T_i در این پایه مرتب، مجموع مستقیم ماتریسهای

$$\begin{bmatrix} c & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & c & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ & & & c & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c \end{bmatrix} \quad (26-7)$$

است که در هر يك $c = c_i$. بعلاوه، اندازه این ماتریسها وقتی از چپ به راست خوانده شوند، کاهش می‌یابند. ماتریسی به صورت (۲۶-۷)، يك ماتریس مقدماتی ژوردان به‌ازای

مقدار سرشت‌نمای c نامیده می‌شود. حال اگر همه پایه‌های W_i را پهلوی هم قرار دهیم، پایه مرتبی برای V به دست می‌آوریم. می‌خواهیم در این پایه مرتب ماتریس A از T را توصیف کنیم.

ماتریس A عبارت است از مجموع مستقیم ماتریسهای A_1, \dots, A_k

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \circ & \dots & \circ \\ \circ & A_2 & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & A_k \end{bmatrix} \quad (27-7)$$

A_i هم به صورت

$$A_i = \begin{bmatrix} J_{n_i}^{(i)} & \circ & \dots & \circ \\ \circ & J_{n_i}^{(i)} & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & J_{n_i}^{(i)} \end{bmatrix}$$

است که در آن هر $J^{(i)}$ يك ماتریس مقدماتی ژوردان به ازای مقدار سرشت‌نمای c_i است. همچنین، داخل هر A_i ، اندازه ماتریسهای $J^{(i)}$ با افزایش نگاهش می‌یابد. گوییم ماتریسی $n \times n$ مانند A به فرم ژوردان است هر گاه همه شرایط تشریح شده در این بند را (به ازای اسکالرهای متمایزی چون c_1, \dots, c_k) بر آورد.

قریباً نشان دادیم که اگر T عملگری خطی باشد که چند جمله‌ای سرشت‌نمایش بر روی هيات اسکالری، به طور کامل به سازه‌ها تجزیه شود، آنگاه پایه مرتبی برای V وجود دارد که در آن T با ماتریسی که به فرم ژوردان است نمایش داده می‌شود. اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که این ماتریس، بدون احتساب ترتیبی که در آن مقادیر سرشت‌نمای T نوشته می‌شوند، به طور یکتا به T وابسته است. به بیان دیگر، اگر دو ماتریس به فرم ژوردان متشابه باشند، آنگاه می‌توانند تنها در ترتیب اسکالرهای c_i متفاوت باشند.

این یکنایی به صورت زیر ثابت می‌شود. فرض کنیم پایه مرتبی برای V وجود داشته باشد که در آن T با ماتریس ژوردان A توصیف شده در بند قبل، نمایش داده شود. اگر A_i ماتریسی $d_i \times d_i$ باشد، آنگاه بوضوح d_i ، چندگانگی c_i به عنوان ریشه‌ای از چند جمله‌ای سرشت‌نمای A یا T ، است. به بیان دیگر، چند جمله‌ای سرشت‌نمای T عبارت است از

$$f = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k}.$$

این مطلب نشان می‌دهد که $c_1, \dots, c_k, d_1, \dots, d_k$ بدون احتساب ترتیبی که آنها را می‌نویسیم، یکتا هستند. این واقعیت که A مجموع مستقیم ماتریسهای A_i است، تجزیه به مجموع مستقیمی چون $W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ را که تحت T پایاست ایجاب می‌کند. اکنون توجه کنید که W_i باید فضای پوچ $(T - c_i I)^n$ ، با بعد $n = (V)$ باشد؛ زیرا، روشن است که $A_i - c_i I$ پوچ توان و به ازای $j \neq i$ ، ماتریس $A_j - c_j I$ نامنفرد است. از این رو، می‌بینیم که زیرفضاهای W_i یکتا هستند. اگر T_i عملگر القا شده توسط T روی W_i باشد، آنگاه ماتریس A_i ، به عنوان فرم گویای T_i ، به طور یکتا تعیین می‌شود.

اکنون می‌خواهیم درباره عملگر T و ماتریس ژوردان A که T را در پایه مرتبی نمایش می‌دهد به مشاهده بیشتری پردازیم. فهرست یک رشته از مشاهدات چنین است:

(۱) هر درایه A که نه روی قطراسلی باشد و نه بلافاصله زیر آن برابر ۰ است. روی قطر A ، c_1, \dots, c_k مقدار سرشت نمای متمایز c_1, \dots, c_k از T قرار می‌گیرند. همچنین، c_i به تعداد d_i بار تکرار می‌شود. در اینجا d_i چندگانگی c_i به عنوان ریشه‌ای از چندجمله‌ای سرشت نماست؛ یعنی، بعد $d_i = (W_i)$.

(۲) به ازای هر i ، ماتریس A_i مجموع مستقیم n_i ماتریس مقدماتی ژوردان $J_j^{(i)}$ ، به ازای مقدار سرشت نمای c_i ، است. عدد n_i دقیقاً بعد فضای بردارهای سرشت نمای وابسته به مقدار سرشت نمای c_i است. زیرا، تعداد بلوکهای پوچ توان مقدماتی در فرم گویای $(T_i - c_i I)$ است و از این قرار برابر بعد فضای پوچ $(T - c_i I)$ است. بخصوص توجه داشته باشید که T قطری شدنی است اگر و تنها اگر به ازای هر i ، $n_i = d_i$.

(۳) به ازای هر i ، اولین بلوک $J^{(i)}$ در ماتریس A_i ماتریسی است $r_i \times r_i$ ، که در آن r_i چندگانگی c_i به عنوان ریشه‌ای از چندجمله‌ای مینیمال T است. این مطلب از این واقعیت نتیجه می‌شود که چندجمله‌ای مینیمال عملگر پوچ توان $(T_i - c_i I)$ عبارت است از x^{r_i} . البته طبق معمول این مطلب نتیجه ماتریسی ساده‌ای هم دارد. اگر B ماتریسی $n \times n$ بر روی هیأت F باشد، و اگر چندجمله‌ای سرشت نمای B بر روی F به طور کامل به سازه‌ها تجزیه شود، آنگاه B بر روی F با ماتریسی $n \times n$ چون A به فرم ژوردان مشابه است و A ، بدون احتساب پس و پیش کردن ترتیب مقادیر سرشت نمایش، یکتا است. A را فرم-ژوردان B می‌نامیم.

همچنین، توجه کنید که اگر F هیأتی بسته جبری باشد، آنگاه ملاحظات بالا در مورد هر عملگر خطی روی فضایی با بعد متناهی بر روی F ، یا بر هر ماتریس $n \times n$ بر روی F ، هم مصداق دارد. بدین سان، مثلاً، هر ماتریس $n \times n$ بر روی هیأت اعداد مختلط با ماتریسی اساساً یکتا در فرم ژوردان مشابه است.

مثال ۵. فرض کنیم T عملگری خطی روی C^2 باشد. چندجمله‌ای سرشت نمای T یا $(x - c_1)(x - c_2)$ است، که در آن c_1 و c_2 اعداد مختلط متمایزی می‌باشند، یا

$(x-c)^2$. در حالت نخست T قطری شدنی است و در پایه مرتبی با ماتریس

$$\begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. در حالت دوم، چندجمله‌ای مینیمال T ممکن است $(x-c)$ باشد که در این حالت $T = cI$ ، یا $(x-c)^2$ باشد که در این حالت T در پایه مرتبی با ماتریس

$$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 1 & c \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. بدین‌سان، هر ماتریس 2×2 بر روی هیأت اعداد مختلط، با ماتریسی از یکی از دو نوع فوق، احتمالاً با $c_1 = c_2$ ، متشابه است.

مثال ۶. فرض کنیم A ماتریس 3×3 مختلط

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & -1 \end{bmatrix}$$

باشد. چندجمله‌ای سرشت‌نمای A به طور بدیهی عبارت است از $(x-2)^2(x+1)$. یا این چندجمله‌ای مینیمال است، که در این حالت A با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

متشابه است، و یا اینکه چندجمله‌ای مینیمال $(x-2)(x+1)$ است که در این حالت A با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

متشابه است. حال

$$(A-2I)(A+I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3a & 0 & 0 \\ ac & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و بنابراین، A با ماتریسی قطری متشابه است اگر و تنها اگر $a=0$.

مثال ۷. فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a & 2 \end{bmatrix}.$$

چندجمله‌ای سرشت‌نمای A عبارت است از $(x-2)^4$. چون A مجموع مستقیم دو ماتریس 2×2 است، واضح است که $(x-2)^2$ چندجمله‌ای مینیمال A است. حال اگر $a=0$ یا اگر $a=1$ ، آنگاه ماتریس A به فرم ژوردان است. توجه کنید دو ماتریسی را که به ازای $a=0$ و $a=1$ به دست می‌آوریم، چندجمله‌ایهای سرشت‌نمای مساوی و چندجمله‌ایهای مینیمال مساوی دارند، لکن متشابه نیستند. این دو ماتریس بدین دلیل متشابه نیستند که برای اولین ماتریس فضای جواب $(A-2I)$ بعد ۳ دارد، در حالی که برای دومین ماتریس بعدش ۲ است.

مثال ۸. معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت (مثال ۱۴ در فصل ۶) مثال خوبی از فرم ژوردان به دست می‌دهند. گیریم a_0, \dots, a_{n-1} اعدادی مختلط و V فضای همه توابع n بار مشتق‌پذیر f روی فاصله‌ای از خط حقیقی باشد که در معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^n f}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{df}{dx} + a_0 f = 0$$

صدق می‌کنند. D را عملگر مشتق‌گیری می‌گیریم. در این صورت V تحت D پایاست، چرا که فضای پوچ $p(D)$ است که

$$p = x^n + \dots + a_1 x + a_0.$$

فرم ژوردان عملگر مشتق‌گیری روی V چیست؟

فرض کنیم c_1, \dots, c_k ریشه‌های مختلط متمایز p باشند:

$$p = (x-c_1)^{r_1} \dots (x-c_k)^{r_k}.$$

V_i را فضای پوچ $(D-c_i I)^{r_i}$ ، یعنی، مجموعه جوابهای معادله دیفرانسیل

$$(D-c_i I)^{r_i} f = 0$$

می‌گیریم. در این صورت همان‌گونه که در مثال ۱۵ در فصل ۶ ملاحظه کردیم، قضیه تجزیه اولیه حاکی است که

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k.$$

فرض کنیم N_i تحدید $D-c_i I$ به V_i باشد. در این صورت فرم ژوردان عملگر D (روی V) به وسیله فرمهای گویای عملگرهای پوچ‌توان N_1, \dots, N_k روی فضاهای

V_1, \dots, V_k تعیین می‌شود.

از این‌رو، آنچه را که باید (به‌ازای مقادیر مختلف c) بدانیم، فرم گویای عملگر $N = (D - cI)$ روی فضای V_c است که متشکل از جوابهای معادله

$$(D - cI)^r f = 0.$$

است. در فرم گویای N ، چند بلوک پوچ‌توان مقدماتی وجود دارد؟ تعداد آنها برابر پوچی N ، یعنی بعد فضای سرشت‌نمای وابسته به مقدار سرشت‌نمای c ، خواهد بود. این بعد ۱ است، زیرا هر تابعی که در معادله دیفرانسیل

$$Df = cf$$

صدق کند، ضربی اسکالری از تابع‌نمایی $h(x) = e^{cx}$ است. بنابراین، عملگر N (روی فضای V_c) برداری دوری دارد. انتخابی مناسب برای برداری دوری عبارت است از $g = x^{r-1}h$

$$g(x) = x^{r-1}e^{cx}.$$

از اینجا داریم

$$Ng = (r-1)x^{r-2}h$$

$$\vdots$$

$$N^{r-1}g = (r-1)!h$$

بند قبل به‌ما نشان می‌دهد که فرم ژوردان D (روی فضای V)، مجموع مستقیم k ماتریس مقدماتی ژوردان، یک ماتریس به‌ازای هر ریشه c_i ، است.

تمرین

۰۱ فرض کنید N_1 و N_2 ماتریسهای 3×3 پوچ‌توانی بر روی هیأت F باشند. ثابت کنید که N_1 و N_2 متشابه‌اند اگر و تنها اگر دارای چندجمله‌ایهای مینیمال مساوی باشند.

۰۲ از نتیجه تمرین ۱ و فرم ژوردان برای اثبات مطلب زیر استفاده کنید: فرض کنید A و B ماتریسهای $n \times n$ بر روی هیأت F باشند که چندجمله‌ایهای سرشت‌نمای مساوی

$$f = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k}$$

و چندجمله‌ایهای مینیمال مساوی دارند. اگر هیچ یک از d_i ها بزرگتر از ۳ نباشد، آنگاه A و B متشابه‌اند.

۰۳ اگر ماتریس 5×5 مختلط A با چندجمله‌ای سرشت‌نمای

$$f = (x - 2)^3(x + 7)^2$$

و چند جمله‌ای مینیمال $p = (x-2)^2(x+7)$ باشد، فرم ژوردان A را بیابید؟

۴. چه تعداد فرم ژوردان ممکن، برای یک ماتریس مختلط 6×6 با چند جمله‌ای سرشت نمای $(x+2)^4(x-1)^2$ داریم؟

۵. عملگر مشتق‌گیری روی فضای چند جمله‌ایهای از درجهٔ نایبتر از ۳، در پایهٔ مرتب «طبیعی» با ماتریس

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. فرم ژوردان این ماتریس کدام است؟ (F زیرهياتی از اعداد مختلط است.)

۶. فرض کنید A ماتریس مختلط

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

باشد. فرم ژوردان A را بیابید.

۷. اگر A ماتریسی $n \times n$ بر روی هیأت F ، با چند جمله‌ای سرشت نمای

$$f = (x-c_1)^{d_1} \cdots (x-c_k)^{d_k}$$

باشد، رد A را بیابید.

۸. بدون احتساب تشابه، همهٔ ماتریسهای مختلط 3×3 را که برای آنها $A^3 = I$ رده بندی کنید.

۹. بدون احتساب تشابه، همهٔ ماتریسهای مختلط $n \times n$ را که برای آنها $A^n = I$ رده بندی کنید.

۱۰. فرض کنید n عددی صحیح مثبت، $n \geq 2$ ، و N ماتریسی $n \times n$ بر روی هیأت F باشد که $N^n = 0$ اما $N^{n-1} \neq 0$. ثابت کنید N ریشهٔ دوم (جذر) ندارد، یعنی اینکه، هیچ ماتریس $n \times n$ A چون $A^2 = N$ وجود ندارد که $A^2 = N$.

۱۱. N_2 و N_1 دو ماتریس پوچ توان 6×6 بر روی هیأت F هستند. فرض کنید N_2 و N_1 چند جمله‌ایهای مینیمال مساوی و پوچی مساوی داشته باشند. ثابت کنید که N_2 و N_1 متشابه‌اند. نشان دهید که این مطلب در مورد ماتریسهای پوچ توان 7×7 درست نیست.

۱۲. نتیجهٔ تمرین ۱۱ و فرم ژوردان را برای اثبات مطلب ذیل به کار ببرید: فرض کنید A و B ماتریسهای $n \times n$ بر روی هیأت F باشند که دارای چند جمله‌ایهای سرشت‌نمای مساوی

$$f = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_k)^{d_k}$$

و چند جمله‌ایهای مینیمال مساوی باشند. همچنین فرض کنید به ازای هر i ، فضاهاى جواب $(A - c_i I)$ و $(B - c_i I)$ بعد مساوی داشته باشند. اگر هیچ يك از d_i ها بزرگتر از ۲ نباشد، آنگاه A و B متشابه‌اند.

۱۳. اگر N يك ماتریس $k \times k$ پوچ توان مقدماتی باشد؛ یعنی، $N^k = 0$ اما $N^{k-1} \neq 0$ ، نشان دهید N^k با N متشابه است. حال از فرم ژوردان استفاده و ثابت کنید هر ماتریس $n \times n$ مختلط با ترانزادۀ خودش متشابه است.

۱۴. چه اشتباهی در اثبات زیر وجود دارد؟ اگر A يك ماتریس $n \times n$ مختلط باشد و $A^t = -A$ ، آنگاه A ماتریس ۰ است. (اثبات: J را فرم ژوردان A می گیریم. چون $A^t = -A$ داریم $J^t = -J$. اما چون J مثلثی است، $J^t = -J$ ایجاب می کند که همهٔ درایه‌های J صفر باشند. چون $J = 0$ و A با J متشابه است، می بینیم که $A = 0$.) (مثالی از يك A ی غیر صفر بیاورید که $A^t = -A$.)

۱۵. اگر N ماتریس 3×3 پوچ توانی بر روی C باشد، ثابت کنید که در $A = I + \frac{1}{\sqrt{2}}N - \frac{1}{2}N^2$ صدق می کند؛ یعنی، A يك ریشهٔ دوم $I + N$ است. ریشهٔ دو جمله‌ای برای $(1+t)^{1/2}$ را به کار ببرید و فرمول مشابهی برای يك ریشهٔ دوم $I + N$ ، که در آن N ماتریس $n \times n$ پوچ توانی بر روی C است، به دست آورید.

۱۶. نتیجه تمرین ۱۵ را به کار ببرید و ثابت کنید که اگر c عدد مختلط غیر صفری و N ماتریس مختلط پوچ توانی باشد، آنگاه $(cI + N)$ ریشه دومی دارد. حال فرم ژوردان را جهت اثبات این حکم که هر ماتریس $n \times n$ مختلط نامنفرد ریشه دوم دارد به کار ببرید.

۴.۷. محاسبه سازه‌های پایا

فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌هایی از هیأت F باشد. می‌خواهیم روشی برای محاسبه سازه‌های پایای p_1, \dots, p_r که فرم گویای A را تعریف می‌کنند، بیابیم. از حالتی بسیار ساده که در آن A ماتریس همدم (۲.۷) چندجمله‌ای تکیننی چون

$$p = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0$$

است، آغاز می‌کنیم. در بخش ۱.۷ دیدیم که p ، هم چندجمله‌ای مینیمال و هم چندجمله‌ای سرشت‌نمای ماتریس همدم A است. اکنون، می‌خواهیم محاسبه‌ای مستقیم به دست‌دهیم که نشان می‌دهد p چندجمله‌ای سرشت‌نمای A است. در این حالت

$$xI - A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & c_0 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x + c_{n-1} \end{bmatrix}$$

x برابر سطر n را به سطر $(n-1)$ اضافه می‌کنیم. این عمل، x را از مکان $(n-1, n-1)$ برمی‌دارد، ولی دترمینان را تغییر نمی‌دهد. سپس x برابر سطر $(n-1)$ جدید را به سطر $(n-2)$ اضافه می‌کنیم. این عمل را متوالیاً ادامه می‌دهیم تا با این فرایند همه x های روی قطر اصلی برداشته شوند. نتیجه، ماتریس

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x^n + \dots + c_1x + c_0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x^{n-1} + \dots + c_2x + c_1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & x^{n-2} + \dots + c_3x + c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x^2 + c_{n-1}x + c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x + c_{n-1} \end{bmatrix}$$

است که در ترمینانش با در ترمینان $xI - A$ برابر است. بالاترین درایه سمت راست این ماتریس چند جمله‌ای p است. ستون آخر را، با افزودن مضربهای مناسبی از دیگر ستونها به آن، ساده می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

هر یک از $(n-1)$ ستون اول را در -1 ضرب، و سپس $(n-1)$ تعویض از ستونهای مجاور انجام می‌دهیم تا ستون n فعلی را به ستون اول برسانیم. اثر نهایی $2n-2$ تغییر علامت این است که در ترمینان را بدون تغییر باقی می‌گذارد. از اینجا ماتریس

$$\begin{bmatrix} p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (28-7)$$

حاصل می‌شود. پس از این واضح است که $p = \det(xI - A)$.
 می‌خواهیم نشان دهیم که به ازای هر ماتریسی $n \times n$ چون A ، یک توالی از اعمال سطری و ستونی وجود دارد که $xI - A$ را به ماتریسی بسیار شبیه به (۲۸-۷)، که در آن سازه‌های پایای A زیر قطر اصلی ظاهر می‌شوند، تبدیل می‌کند. اجازه دهید اعمالی را که به کار خواهیم برد، کاملاً روشن کنیم.

در اینجا با $F[x]^{m \times n}$ ، دسته ماتریسهای $m \times n$ با درایه‌هایی که چند جمله‌ایهای بر روی هیأت F هستند، سروکار خواهیم داشت. اگر M چنین ماتریسی باشد، یک عمل سطری مقدماتی روی M یکی از اعمال زیر است:

۱. ضرب یک سطر از M در اسکالر غیر صفری از F ؛
۲. جایگزین کردن سطر r از M ، با سطر r با اضافه f برابر سطر s ، که در آن f

چند جمله‌ای دلخواهی بر روی F است و $r \neq s$ ؛
 ۳. تعویض دوسطر M .

عمل معکوس يك عمل سطری مقدماتی نیز عملی است سطری مقدماتی و از همان نوع. توجه کنید که اگر در (۱) چند جمله‌ایهای غیر اسکالری هم منظور می‌شدند، دادن چنین حکمی امکان نداشت. يك ماتریس مقدماتی $m \times m$ ، یعنی ماتریسی مقدماتی از $F[x]^{m \times m}$ ، ماتریسی است که بتواند از ماتریس همانی $m \times m$ به وسیله تنها يك عمل سطری مقدماتی حاصل بشود. واضح است که هر عمل سطری مقدماتی روی M می‌تواند از طریق ضرب M از چپ در ماتریس مقدماتی $m \times m$ مناسبی نتیجه بشود؛ در واقع، اگر e آن عمل باشد، آنگاه

$$e(M) = e(I)M.$$

گیریم M و N دو ماتریس در $F[x]^{m \times n}$ باشند. گوییم N هم‌ارز سطری M است، هر گاه N بتواند توسط يك توالی متناهی از اعمال سطری مقدماتی از M حاصل شود:

$$M = M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_k = N.$$

بدیهی است که N هم‌ارز سطری M است اگر و تنها اگر M هم‌ارز سطری N باشد، بنا بر این می‌توانیم اصطلاح « M و N هم‌ارز سطری هستند» را به‌کار گیریم. اگر N هم‌ارز سطری M باشد، آنگاه

$$N = PM$$

که در آن ماتریس P $m \times m$ ، حاصل ضربی از ماتریسهای مقدماتی است:

$$P = E_1 \dots E_k.$$

بخصوص، P ماتریسی است معکوس‌پذیر که معکوس آن عبارت است از

$$P^{-1} = E_k^{-1} \dots E_1^{-1}.$$

مسئله، معکوس E_j از معکوس عمل سطری مقدماتی مربوط ناشی می‌شود. همه این مطالب، درست نظیر همان مطالب در مورد ماتریسهای با درایه‌های متعلق به F هستند. این مطالب با نتایج مقدماتی فصل ۱ مشابهت دارند. از این رو، مسئله بعدی که خود را می‌نمایاند، معرفی يك فرم تحویل شده سطری پلکانی برای ماتریسهای روی چند جمله‌ایهاست. در اینجا، بهمانعی جدید برمی‌خوریم. چگونه چنین ماتریسی را تحویل سطری کنیم؟ اولین مرحله این است که درایه غیر صفر مقدم سطر ۱ را انتخاب و همه درایه‌های سطر ۱ را بر آن تقسیم کنیم. وقتی که درایه‌های ماتریس چند جمله‌ای باشند، (لزوماً) نمی‌توانیم این عمل را انجام دهیم. هر چند، فرم تحویل شده سطری کاملاً مناسبی برای ماتریسی عمومی از $F[x]^{m \times n}$ وجود ندارد، ولی به طوری که در قضیه بعد خواهیم دید در حالات معینی می‌توان بر این مشکل فایز آمد. هر گاه اعمال ستونی را هم معرفی و نوع

هم‌ارزی را که از پذیرش استفاده از هر دو نوع عمل نتیجه می‌شود مطالعه کنیم، می‌توانیم فرم استانده بسیار مفیدی برای هر ماتریس به دست آوریم. ابزار اساسی لم زیر است.

لم. فرض کنیم M ماتریسی از $F[x]^{m \times n}$ باشد که اولین ستونش درایه غیرصفری داشته، و p بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک درایه‌های واقع در ستون اول M باشد. در این صورت M با ماتریسی چون N که

$$\begin{bmatrix} p \\ \circ \\ \vdots \\ \circ \end{bmatrix}$$

دا به‌عنوان اولین ستونش دارد، هم‌ارز سطری است. اثبات. در اینجا به اثبات چیزی بیش از آنچه که بیان کردیم، می‌پردازیم. نشان می‌دهیم که الگوریتمی برای یافتن N ، یعنی دستورالعملی که بتواند برای محاسبه N در تعدادی متناهی مرحله مورد استفاده یک ماشین قرار بگیرد، وجود دارد. ابتدا به نمادهایی نیازمندیم. گیریم M ماتریسی $m \times n$ با درایه‌های واقع در $F[x]$ باشد که اولین ستون غیر-صفری چون

$$M_1 = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}$$

دارد. تعریف می‌کنیم:

$$l(M_1) = \min_{f_i \neq 0} \deg f_i$$

(۲۹-۷)

$$p(M_1) = (f_1, \dots, f_m) \text{ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک}$$

z را نمایه‌ای می‌گیریم که $\deg f_i = l(M_1)$. جهت تصریح، فرض می‌کنیم z کوچکترین نمایه‌ای چون z باشد که برای آن $\deg f_i = l(M_1)$ می‌کشیم تا هر f_i را بر f تقسیم کنیم:

$$f_i = f_j g_i + r_i \quad \text{یا} \quad \deg r_i < \deg f_j \quad \text{یا} \quad r_i = 0 \quad (۳۰-۷)$$

به‌ازای هر i غیر از z ، به‌جای سطر i ماتریس M ، سطر i منهای g_i برابر سطر z را قرار

می‌دهیم. سطر z را در عکس ضریب مقدم r_z ضرب و سپس سطرهای z و 1 را تعویض می‌کنیم. نتیجه همه این اعمال ماتریسی چون M' است که اولین ستونش

$$M'_1 = \begin{bmatrix} f_z \\ r_z \\ \vdots \\ r_{z-1} \\ r_1 \\ r_{z+1} \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix} \quad (31-7)$$

است. در اینجا f_z چند جمله‌ای تکین حاصل از نرمال کردن r_z ، برای داشتن 1 به عنوان ضریب مقدم، است. تا اینجا، روشی خوش تعریف برای وابسته کردن ماتریسی چون M' با خواص زیر به هر ماتریس M عرضه کردیم:

(الف) M' هم‌ارز سطری M است.

(ب) $p(M'_1) = p(M_1)$

(پ) $I(M'_1) < I(M_1)$ یا

$$M'_1 = \begin{bmatrix} p(M_1) \\ \circ \\ \vdots \\ \circ \end{bmatrix}$$

نشان دادن (ب) و (پ) از روی (۳۰-۷) و (۳۱-۷) آسان است. خاصیت (پ) درست راه دیگر بیان این مطلب است که یا r_i وجود دارد که $r_i \neq 0$ و $\deg r_i < \deg f_z$ یا اینکه به ازای همه $r_i = 0$ (و بنابراین f_z بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک f_1, \dots, f_m است).

اکنون اثبات لم بسیار ساده می‌نماید. با ماتریس M شروع می‌کنیم و روش فوق جهت تحصیل M' را به کار می‌بندیم. خاصیت (پ) حاکی است که یا M' بجای ماتریس

N در لم به کار خواهد آمد یا اینکه $I(M_1) < I(M'_1)$. در حالت دوم، روش را بر M' به کار می‌بندیم تا ماتریس $(M')' = M^{(2)}$ را به دست آوریم. اگر $M^{(2)}$ ، N مناسبی نباشد، $M^{(3)} = (M^{(2)})'$ را تشکیل می‌دهیم، و به همین نحو ادامه می‌دهیم. نکته در اینجا است که نامساویهای اکید

$$I(M_1) > I(M'_1) > I(M^{(2)}) > \dots$$

نمی‌توانند همچنان ادامه داشته باشند. پس از حداکثر $I(M_1)$ بار تکرار این روش، باید به ماتریسی چون $M^{(k)}$ که دارای خواص مطلوب است، دست یابیم. \square

قضیه ۶. فرض کنیم ماتریس P $m \times m$ با درایه‌های متعلق به جبر چندجمله‌ای $F[x]$ داده شده باشد. احکام زیر هم‌ارزند.

(۱) P معکوس پذیر است.

(۲) دترمینان P چندجمله‌ای اسکالری غیر صفری است.

(۳) P هم‌ارز سطری ماتریس همانی $m \times m$ است.

(۴) P حاصل ضربی از ماتریسهای مقدماتی است.

اثبات. واضح است که (۲) از (۱) نتیجه می‌شود، چرا که تابع دترمینان دارای خاصیت ضربی است و تنها چندجمله‌ایهای معکوس پذیر در $F[x]$ چندجمله‌ایهای اسکالری غیر صفر هستند. حقیقت امر این است که در فصل ۵، برای اینکه نشان دهیم (۱) و (۲) هم‌ارزند، از الحاقی کلاسیک استفاده کردیم. لذا برهان اخیر، اثبات دیگری است از این مطلب که (۱) از (۲) نتیجه می‌شود. ما «چرخ فلک»

$$(1) \rightarrow (2)$$

$$\uparrow \quad \downarrow$$

$$(4) \leftarrow (3)$$

را تکمیل خواهیم کرد. تنها حکمی که بدیهی نیست، این است که (۳) از (۲) نتیجه می‌شود. (۲) را فرض می‌کنیم و اولین ستون P را در نظر می‌گیریم. این ستون شامل چندجمله‌ایهای معین p_1, \dots, p_m است و

$$1 = \text{بزرگترین مقسوم علیه مشترک}(p_1, \dots, p_m)$$

چرا که هر مقسوم علیه مشترک p_1, \dots, p_m باید (اسکالر) $\det P$ را عاقد کند. لم قبل را برای به دست آوردن ماتریسی چون

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_m \\ \circ & & & \\ \vdots & & B & \\ \vdots & & & \\ \circ & & & \end{bmatrix} \quad (32-7)$$

که هم‌ارز سطری P است بر P به‌کار می‌بندیم. هر عمل سطری مقدماتی، دترمینان ماتریس مفروضی را (حداکثر) در حد سازه اسکالری غیر صفری تغییر می‌دهد. پس، $\det Q$ يك چندجمله‌ای اسکالری غیر صفر است. بدیهی است که ماتریس B $(m-1) \times (m-1)$ در (۷-۳۲) همان دترمینان Q را دارد. بنا بر این، می‌توانیم لم اخیر را در مورد B به‌کار ببریم. اگر این روش را تا m مرحله ادامه دهیم، ماتریسی بالامثلثی چون

$$R = \begin{bmatrix} 1 & a_2 & \dots & a_m \\ 0 & 1 & \dots & b_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

را که هم‌ارز سطری P است، به‌دست می‌آوریم. معلوم است که R هم‌ارز سطری ماتریس همانی $m \times m$ است. \square

نتیجه. گیریم M و N دو ماتریس $m \times n$ با درایه‌های متعلق به جبر چندجمله‌ای $F[x]$ باشند. در این صورت N هم‌ارز سطری M است اگر و تنها اگر

$$N = PM$$

که در آن P ماتریس $m \times m$ معکوس‌پذیری است با درایه‌های متعلق به $F[x]$.

اکنون اعمال ستونی مقدماتی و هم‌ارزی ستونی را به‌صورتی شبیه به اعمال سطری و هم‌ارزی سطری تعریف می‌کنیم. نیازی به مفهومی جدید از ماتریس مقدماتی نداریم، زیرا رده ماتریسهایی که بتوانند به‌وسیله انجام يك عمل ستونی مقدماتی روی ماتریس همانی به‌دست آیند، عیناً با رده‌ای که با استفاده از تنها يك عمل سطری مقدماتی حاصل می‌شود مساوی است.

تعریف. ماتریس N با ماتریس M هم‌ارز است، هرگاه بتوانیم از M به‌وسیله دنباله‌ای از اعمال

$$M = M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_k = N$$

که هر يك عملی سطری مقدماتی یا عملی ستونی مقدماتی است، به N برسیم.

قضیه ۷. فرض کنیم M و N دو ماتریس $m \times n$ با درایه‌های متعلق به جبر چند-جمله‌ای $F[x]$ باشند. در این صورت N با M هم‌ارز است اگر و تنها اگر

$$N = PMQ$$

که در آن P ماتریسی معکوس پذیر در $F[x]^{m \times m}$ و Q ماتریسی معکوس پذیر در $F[x]^{n \times n}$ است.

قضیه ۸. فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های متعلق به هیأت F باشد و p_r, \dots, p_1 سازه‌های پایای A باشند، ماتریس $xI - A$ با ماتریس قطری $n \times n$ با درایه‌های قطری $p_r, \dots, p_1, 1, \dots, 1$ هم‌ارز است. اثبات. ماتریس $n \times n$ معکوس پذیری چون P با درایه‌های متعلق به F وجود دارد که PAP^{-1} به فرم گویا، یعنی به صورت بلوکی

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & \circ & \dots & \circ \\ \circ & A_2 & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & A_r \end{bmatrix}$$

است که در آن A_i ماتریس همدم چند جمله‌ای p_i است. بنا بر قضیه ۷ ماتریس

$$P(xI - A)P^{-1} = xI - PAP^{-1} \quad (۳۳-۷)$$

با $xI - A$ هم‌ارز است. حال

$$xI - PAP^{-1} = \begin{bmatrix} xI - A_1 & \circ & \dots & \circ \\ \circ & xI - A_2 & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & xI - A_r \end{bmatrix} \quad (۳۴-۷)$$

که در آن I های گوناگونی که به کار رفته است، ماتریسهایی همانی با اندازه‌های مناسب هستند. در آغاز این بخش نشان دادیم که $xI - A_i$ با ماتریس

$$\begin{bmatrix} p_i & \circ & \dots & \circ \\ \circ & 1 & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

هم‌ارز است. در این صورت از (۳۳-۷) و (۳۴-۷) واضح است که $xI - A$ هم‌ارز

ماتریسی قطری است که قطر اصلیش شامل چند جمله‌ایهای p_i و $(n-r)$ تا ۱ است. با چند تعویض متوالی سطرها و ستونها می‌توانیم این درایه‌های قطری را به ترتیبی دلخواه، مثلاً $p_1, \dots, p_r, 1, \dots, 1$ مرتب کنیم. \square

قضیه ۸ راه مؤثری برای محاسبهٔ مقسوم‌علیه‌های مقدماتی p_1, \dots, p_r ارائه نمی‌کند، چرا که اثبات ما به قضیهٔ تجزیهٔ دوری وابسته است. اکنون الگوریتمی صریح برای تحویل یک ماتریس چندجمله‌ای به فرم قطری ارائه می‌کنیم. قضیهٔ ۸ می‌رساند که می‌توانیم ترتیبی دهیم که عناصر متوالی روی قطر اصلی یکدیگر را عادی بکنند.

تعریف. گیریم N ماتریسی در $F[x]^{m \times n}$ باشد. گوئیم N به فرم نرمال (اسمیت^۱) است، هرگاه

(الف) هر درایهٔ بیرون از قطر اصلی N برابر ۰ باشد؛

(ب) روی قطر اصلی N (به ترتیب) چندجمله‌ایهای f_1, \dots, f_l که f_k چندجمله‌ای f_{k+1} را عادی می‌کند، $1 \leq k \leq l-1$ ، ظاهر شوند.

در این تعریف، عدد l عبارت است از $l = \min(m, n)$. درایه‌های قطر اصلی عبارتند از $f_k = N_{kk}$ ، $k = 1, \dots, l$.

قضیه ۹. فرض کنیم M ماتریسی $m \times n$ با درایه‌های متعلق به جبر چندجمله‌ای $F[x]$ باشد. در این صورت M با ماتریسی چون N که به فرم نرمال است هم‌ارز است. اثبات. اگر $M = 0$ ، چیزی برای اثبات نداریم. اگر $M \neq 0$ ، الگوریتمی برای یافتن ماتریسی چون M' که با M هم‌ارز و به صورت

$$M' = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & R & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \quad (35-7)$$

باشد، ارائه خواهیم کرد. در اینجا R ماتریسی است $(n-1) \times (m-1)$ و f_1 همهٔ درایه‌های R را عادی می‌کند. در این صورت کار تمام است، چرا که می‌توان همین روش را بر R به کار بست و f_2 را به دست آورد، و غیره.

گیریم $l(M)$ کمینهٔ درجات درایه‌های غیر صفر M باشد. اولین ستونی را که شامل درایه‌ای با درجهٔ $l(M)$ است می‌یابیم و این ستون را با ستون ۱ تعویض می‌کنیم. ماتریس

حاصل را $M^{(0)}$ می‌نامیم. حال برای یافتن ماتریسی به صورت

$$\begin{bmatrix} g & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & S & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \quad (36-7)$$

که با $M^{(0)}$ هم‌ارز باشد، روشی را شرح می‌دهیم. با به‌کار بستن روش لم قبل از قضیه ۶ بر ماتریس $M^{(0)}$ ، روشی که ما آن را PL_6 خواهیم نامید، کار خود را آغاز می‌کنیم. حاصل کار ماتریسی چون

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} p & a & \dots & b \\ 0 & c & \dots & d \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & e & \dots & f \end{bmatrix} \quad (37-7)$$

است. اگر درایه‌های a, \dots, b همگی ۰ باشند، عالی است. وگرنه، نظیر PL_6 را که می‌تواند PL_6' نامیده شود، درمورد اولین سطر به کار می‌بریم. نتیجه ماتریسی چون

$$M^{(2)} = \begin{bmatrix} g & 0 & \dots & 0 \\ a' & c' & \dots & e' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b' & d' & \dots & f' \end{bmatrix} \quad (38-7)$$

است که در آن g بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a, p, \dots, b است. در استخراج $M^{(2)}$ این امکان هست که شکل خوب ستون ۱ به هم خورده باشد. در این صورت، یک بار دیگر PL_6 را می‌توان به کار بست. نکته در این جا است: در حد اکثر $l(M)$ مرحله

$$M^{(0)} \xrightarrow{PL_6} M^{(1)} \xrightarrow{PL_6'} M^{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow M^{(l)}$$

باید به ماتریسی چون $M^{(l)}$ که به صورت (۳۶-۷) است، دست یابیم، چرا که بین هر دو مرحله

متوالی داریم $I(M^{(k)}) < I(M^{(k+1)})$ روندی را که هم اکنون تعریف کردیم، $P_{۳۶-۷}$ می نامیم:

$$M^{(0)} \xrightarrow{P_{۳۶-۷}} M^{(l)}.$$

در (۳۶-۷)، چند جمله ای g ممکن است همه درایه های S را عا د کند. در غیر این صورت، اولین ستونی را که درایه ای غیر قابل تقسیم بر g داشته باشد می یابیم و آن را به ستون ۱ اضافه می کنیم. ستون اول جدید، هم g را شامل است و هم درایه $gh+r$ را که در آن $r \neq 0$ و $\deg r < \deg g$. اکنون روند $P_{۳۶-۷}$ را که به کار بندیم نتیجه ماتریس دیگری به صورت (۳۶-۷) خواهد بود که در آن درجه g مربوط کاهش یافته است. حال باید آشکار باشد که در تعدادی متناهی مرحله، (۳۵-۷) را به دست خواهیم آورد؛ یعنی، به ماتریسی به صورت (۳۶-۷) خواهیم رسید، که در آن درجه g دیگر تقلیل پذیر نیست. \square

می خواهیم نشان دهیم که فرم نرمال وابسته به هر ماتریس M ، یکتاست. به دو مطلب برخوردیم که راهنمایهایی در مورد چگونگی تعیین یکتا گونه چند جمله ایهای f_1, \dots, f_r در قضیه ۹ توسط M به ما عرضه می کنند. اول آنکه، اعمال سطری و ستونی مقدماتی، در مینان ماتریسی مربعی را بیش از سازه اسکالری غیر صفری تغییر نمی دهند. دوم، اعمال سطری و ستونی مقدماتی بزرگترین مقسوم علیه مشترک درایه های هیچ ماتریسی را تغییر نمی دهند

تعریف. فرض کنیم M ماتریسی $m \times n$ با درایه های متعلق به $F[x]$ باشد. اگر $1 \leq k \leq \min(m, n)$ ، $\delta_k(M)$ را بزرگترین مقسوم علیه مشترک در مینانهای همه زیر-ماتریسهای $k \times k$ M تعریف می کنیم.

یاد آور می شویم که یک زیر ماتریس $k \times k$ M ماتریسی است که از حذف $m-k$ سطر و $n-k$ ستون M پدید می آید. به بیان دیگر، k تاییهای معین

$$I = (i_1, \dots, i_k) \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$$

$$J = (j_1, \dots, j_k) \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$$

را انتخاب می کنیم و ماتریس مشکله از این سطرها و این ستونهای M را در نظر می گیریم. در مینانهای

$$D_{I,J}(M) = \det \begin{bmatrix} M_{i_1 j_1} & \dots & M_{i_1 j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{i_k j_1} & \dots & M_{i_k j_k} \end{bmatrix} \quad (۳۹-۷)$$

مورد توجه ما هستند. وقتی که I و J روی k تاییهای ممکن تغییر کنند، بزرگترین مقسوم-علیه مشترک چند جمله ایهای $D_{I,J}(M)$ چند جمله ای $\delta_k(M)$ است.

قضیه ۱۰. اگر M و N ماتریسهای $m \times n$ هم اِردز و با درایه‌های متعلق به $F[x]$ باشند، آنگاه

$$\delta_k(M) = \delta_k(N), \quad 1 \leq k \leq \min(m, n). \quad (۴۰-۷)$$

اثبات. کافی است که نشان دهیم هیچ عمل سطری مقدماتی، چون e ، δ_k را تغییر نمی‌دهد. چون معکوس e نیز عملی سطری مقدماتی است، کافی است نشان دهیم که: اگر چند جمله‌ای f ، به‌ازای همه k تاییهای I و J ، $D_{I,J}(M)$ ها را عا د کند، آنگاه f چند جمله‌ایهای $(D_{I,J}(e(M)))$ را نیز عا د می‌کند. چون عملی سطری مورد توجه است، سطرها ی M را $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ می‌نامیم و از نماد

$$D_J(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}) = D_{I,J}(M)$$

نیز استفاده می‌کنیم. با مفروض بودن I و J چه رابطه‌ای بین $D_{I,J}(M)$ و $D_{I,J}(e(M))$ برقرار است؟ سه‌نوع عمل e را در نظر می‌گیریم:

(الف) ضرب سطر r در اسکالر غیر صفری چون c ؛

(ب) جایگزین کردن سطر r با سطر r باضافه g برابر s ، $r \neq s$ ؛

(پ) تعویض سطرها ی r و s ، $r \neq s$.

موقتاً عملهای نوع (پ) را فراموش و حواس خود را روی انواع (الف) و (ب) که تنها سطر r را تغییر می‌دهند، متمرکز می‌کنیم. اگر r هیچ يك از نمایه‌های i_1, \dots, i_k نباشد، آنگاه

$$D_{I,J}(e(M)) = D_{I,J}(M).$$

اگر r در بین نمایه‌های i_1, \dots, i_k باشد، آنگاه برای دو حالت فوق داریم

$$D_{I,J}(e(M)) = D_J(\alpha_{i_1}, \dots, c\alpha_r, \dots, \alpha_{i_k}) \quad (\text{الف})$$

$$= cD_J(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_r, \dots, \alpha_{i_k})$$

$$= cD_{I,J}(M)$$

$$D_{I,J}(e(M)) = D_J(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_r + g\alpha_s, \dots, \alpha_{i_k}) \quad (\text{ب})$$

$$= D_{I,J}(M) + gD_J(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_s, \dots, \alpha_{i_k})$$

در مورد عملهای از نوع (الف) واضح است هر f که $D_{I,J}(M)$ را عا د کند، $D_{I,J}(e(M))$ را نیز عا د می‌کند. در مورد حالت عملی از نوع (ب) توجه کنید که

$$D_J(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_s, \dots, \alpha_{i_k}) = 0, \quad s = i_j \text{ باشد که هر گاه } z \text{ یی باشد که } s = i_j$$

و هر گاه به‌ازای هر j ، $s \neq i_j$ ، $D_{I,J}(e(M)) = \pm D_{I',J}(M)$

I' در معادله آخر، k تایی $(i_1, \dots, s, \dots, i_k)$ است که به ترتیب صعودی مرتب شده است. اکنون باید آشکار باشد که اگر f هر $D_{I, J}(M)$ را عصاد کند، آنگاه f هر $D_{I, J}(e(M))$ را نیز عصاد می کند عمل نوع (پ) را می توان، قطع نظر از جزئیات، با استدلال مشابهی و یا با استفاده از این واقعیت که چنین عملی می تواند حاصل دنباله ای از عملهای از نوع (الف) و (ب) باشد، مورد بررسی قرار داد. \square

نتیجه. هر ماتریس M در $F[x]^{m \times n}$ دقیقاً با یک ماتریس N که در فرم نرمال باشد هم ارز است. چند جمله ایهای f_1, \dots, f_r که دوی قطراصلی N قرار می گیرند، عبارتند از

$$f_k = \frac{\delta_k(M)}{\delta_{k-1}(M)}, \quad 1 \leq k \leq \min(m, n)$$

که در آن، برای سهولت کار، $\delta_0(M) = 1$ تعریف می شود. اثبات. اگر N در فرم نرمال و با درایه های قطری f_1, \dots, f_r باشد، بسیار ساده دیده می شود که

$$\delta_k(N) = f_1 f_2 \dots f_k. \quad \square$$

بدیهی است که ماتریس N در نتیجه اخیر را فرم نرمال M بنامیم. چند جمله ایهای f_1, \dots, f_r غالباً سازه های پایای M نامیده می شوند. فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ با درایه های متعلق به F و p_1, \dots, p_r سازه های پایای A باشند. اکنون می بینیم که درایه های قطری فرم نرمال ماتریس $xI - A$ عبارتند از $p_1, \dots, p_r, \dots, p_r, \dots, p_1, \dots, p_1$. نتیجه اخیر می فهماند که p_1, \dots, p_r ، بر حسب زیرماتریسهای $xI - A$ چه هستند. عدد $n - r$ بزرگترین k یی است که $\delta_k(xI - A) = 1$. چند جمله ای مینیمال p_1 حاصل تقسیم چند جمله ای سوشن نمای A ، بر بزرگترین مقسوم علیه مشترک در مینانهای همه زیرماتریسهای $(n-1) \times (n-1)$ از $xI - A$ است، و الی آخر.

تئورم

۱. مطلب ذیل درست است یا غلط؟ هر ماتریس در $F[x]^{m \times n}$ هم ارز سطری ماتریسی از بالا مثلثی است.

۲. فرض کنید T عملگری خطی روی فضایی برداری با بعد متناهی و A ماتریس T در پایه مرتبی باشد. در این صورت T برداری دوری دارد اگر و تنها اگر در مینانهای زیرماتریسهای $(n-1) \times (n-1)$ از $xI - A$ نسبت به هم اول باشند.

۳. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ با درایه های متعلق به هیأت F و f_1, \dots, f_r درایه های

قطری فرم نرمال $xI - A$ باشند. برای کدام ماتریس A ، خاصیت $f_1 \neq 1$ برقرار است.

۴. عملگری خطی چون T با چند جمله‌ای مینیمال $x^2(x-1)^2$ و چند جمله‌ای سرشت‌نمای $x^4(x-1)^4$ بسازید. تجزیه اولیه فضای برداری تحت T را توصیف کنید و تصویرهای روی مؤلفه‌های اولیه را بیابید. پایه‌ای بیابید که در آن ماتریس T در فرم ژوردان باشد. همچنین تجزیه به مجموع مستقیم صریحی از فضا به زیرفضاهای T -دوری همانند قضیه ۳ را پیدا کنید و سازه‌های پایا را به دست آورید.

۵. فرض کنید T عملگری خطی روی R^8 باشد که در پایه استاندارد با ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود.

(الف) چند جمله‌ای سرشت‌نما و سازه‌های پایا را بیابید.

(ب) تجزیه اولیه R^8 تحت T و تصویرهای روی مؤلفه‌های اولیه را بیابید. تجزیه

دوری هر مؤلفه اولیه را، آن‌طور که در قضیه ۳ آمده است، پیدا کنید.

(پ) فرم ژوردان A را بیابید.

(ت) یک تجزیه به مجموع مستقیم از R^8 به زیرفضاهای T -دوری، همانند قضیه ۳،

پیدا کنید. (راهنمایی: یک راه برای انجام این کار استفاده از نتایج در (ب) و نیز استفاده

از تعمیمی مناسب از ایده‌های بحث شده در مثال ۴ است.)

۵.۷ خلاصه؛ عملگرهای نیم‌ساده

در دو فصل اخیر با تک عملگری خطی چون T روی فضای برداری بعد متناهی V سروکار داشتیم. برنامه کار، تجزیه T به مجموع مستقیم از عملگرهایی خطی با طبیعتی ابتدایی، به منظور کسب اطلاعاتی مفصل در این مورد که T روی فضای V چگونه «عمل می‌کند»،

بوده است. حال وضع فعلی را به طور خلاصه مرور می کنیم.

مطالعه T را با کمک مقادیر سرشت نما و بردارهای سرشت نما آغاز کردیم. عملگرهای قطری شدنی، یعنی عملگرهایی که می توانند به طور کامل بر حسب مقادیر و بردارهای سرشت نما توصیف شوند، را معرفی کردیم. سپس مشاهده نمودیم که ممکن است T حتی یک بردار سرشت نما هم نداشته باشد. حتی در مورد هیأت اسکالری بسته جبری نیز، که هر عملگر خطی به تحقیق دست کم یک بردار سرشت نما دارد، ملاحظه کردیم که بردارهای سرشت نما T لزوماً فضا را پدید نمی آورند.

سپس قضیه تجزیه دوری را اثبات کردیم که، بدون هیچ گونه فرضی در مورد هیأت اسکالری، هر عملگر خطی را به صورت مجموع مستقیم عملگرهایی با یک بردار دوری، بیان می کرد. اگر U عملگری خطی با برداری دوری باشد، آنگاه پایه ای چون $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ با خاصیت

$$U\alpha_j = \alpha_{j+1}, \quad j = 1, \dots, n-1$$

$$U\alpha_n = -c_0\alpha_1 - c_1\alpha_2 - \dots - c_{n-1}\alpha_n$$

وجود دارد. از این روکنش U روی این پایه، انتقال هر α_j به بردار بعدی α_{j+1} است، بجز اینکه $U\alpha_n$ ترکیب خطی مشخصی از بردارهای پایه است. چون عملگر خطی عمومی T مجموع مسقیم تعدادی متناهی از این گونه عملگرهای U است، توصیفی صریح و نسبتاً ابتدایی از کنش T به دست آوردیم.

آنگاه قضیه تجزیه دوری را روی عملگرهای پوچ توان به کار بستیم. در حالت هیأت اسکالری بسته جبری، این موضوع را با قضیه تجزیه اولیه تلفیق کردیم و فرم ژوردان را به دست آوردیم. فرم ژوردان، پایه ای چون $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ برای فضای V را به دست می دهد که به ازای هر j ، یا $T\alpha_j = \alpha_j$ ، یا $T\alpha_j = c\alpha_j + \alpha_{j+1}$ است. چنین پایه ای به طور قطع کنش T را به طریقی صریح و ابتدایی توصیف می کند.

اهمیت فرم گویا (یا فرم ژوردان) از این واقعیت ناشی می شود که همواره وجود دارد و نه از اینکه در حالتی خاص امکان محاسبه آن هست. بدیهی است که اگر عملگر خطی خاصی چون T مفروض باشد، و بتوان فرم ژوردان یا دوریش را محاسبه کرد، حتماً باید محاسبه را انجام داد؛ زیرا، با در دست داشتن چنین فرمی، می توان اطلاعات زیادی در مورد T جمع آوری کرد. در محاسبه این فرمهای استاندارد دو نوع اشکال بروزمی کند. یک اشکال، مسلماً طولانی بودن محاسبات است. اشکال دیگر این است که حتی اگر کسی وقت و حوصله لازم را داشته باشد، ممکن است روشی برای انجام محاسبات وجود نداشته باشد. مثلاً، در تلاش برای یافتن فرم ژوردان ماتریسی مختلط اشکال دوم رخ می دهد. اصلاً روش خوش تعریفی برای تجزیه چند جمله ای سرشت نما به سازه ها وجود ندارد و بدین سان شخص در آغاز کار بازمی ماند. فرم گویا از این اشکال صدمه نمی بیند. همان طور که در بخش ۴.۷ نشان دادیم، روشی خوش تعریف برای یافتن فرم گویای هر ماتریس

$n \times n$ مفروضی، وجود دارد؛ البته، معمولاً این گونه محاسبات بسیار طولانی هستند. در خلاصه قضایای این دو فصل آخر، تاکنون به یکی از قضایایی که اثبات کردیم اشاره‌ای نشده است. این قضیه حاکی از این است که اگر T عملگری خطی روی فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأتی بسته جبری باشد، آنگاه T به‌طور یکتا به صورت مجموع عملگری قطری‌شدنی و عملگری پوچ‌توان، که با یکدیگر جابجا می‌شوند، قابل بیان است. این نتیجه با کمک قضیه تجزیه اولیه و اطلاعات معینی در مورد عملگرهای قطری‌شدنی، اثبات شد. قضیه اخیر به عمق قضیه تجزیه دوری و یا وجود فرم ژوردان نیست، ولی یقیناً دارای کاربردهای مهم و مفیدی در بخشهایی از ریاضیات هست. در خاتمه این فصل، بدون اینکه فرض کنیم هیأت اسکالری بسته جبری است، قضیه مشابهی را اثبات خواهیم کرد. با تعریف عملگرهایی که نقش عملگرهای قطری‌شدنی را بازی می‌کنند کار را آغاز می‌کنیم.

تعریف. فرض کنیم V یک فضای برداری با بعد متناهی برداری F ، و T عملگری خطی روی V باشد. گوییم T نیم‌ساده است هرگاه هر زیرفضای T -پایا، دارای زیرفضای T -پایای مکملی باشد.

چیزی را که در شرف اثبات آن هستیم این است که با محدودیتهایی روی هیأت F ، هر عملگر خطی T به‌طور یکتا به صورت $T = S + N$ که در آن S نیم‌ساده است، N پوچ‌توان است، و $SN = NS$ قابل بیان است. ابتدا، عملگرهای نیم‌ساده را با چند جمله‌ایهای مینیمالشان مشخص می‌کنیم. این مشخص‌سازی نشان خواهد داد که وقتی T بسته جبری باشد، عملگری مفروض نیم‌ساده است اگر و تنها اگر آن عملگر قطری‌شدنی باشد.

لم. فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای برداری با بعد متناهی V و $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ تجزیه اولیه T باشد. به بیان دیگر، اگر p چند جمله‌ای مینیمال T و $p = p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$ تجزیه p به سازهای اول باشد، آنگاه W_j فضای پوچ $p_j(T)^{r_j}$ است. علاوه، فرض می‌کنیم W زیرفضایی از V باشد که تحت T پایاست. در این صورت

$$W = (W \cap W_1) \oplus \dots \oplus (W \cap W_k).$$

اثبات. برای اثبات، لازم است نتیجه‌ای از اثبات قضیه تجزیه اولیه مربوط به بخش ۸.۶ را یادآوری کنیم. اگر E_1, \dots, E_k تصویرهای وابسته به تجزیه

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$$

باشند، آنگاه هر E_j یک چند جمله‌ای در T است. یعنی، چند جمله‌ایهایی چون h_1, \dots, h_k وجود دارند که $E_j = h_j(T)$.

حال زیرفضای W را که تحت T پایاست در نظر می‌گیریم. اگر α برداری دلخواه از W باشد، آنگاه $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$ ، که در آن α_j در W_j قرار دارد. اما

هر بردار α در W به صورت $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$ است و α_j در $W \cap W_j$ اشتراک W و W_j قرار دارد. پس، می باشد. این عبارت یکتاست، زیرا $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$. بنا بر این

$$W = (W \cap W_1) \oplus \dots \oplus (W \cap W_k). \square$$

لم. T را عملگری خطی روی V می گیریم و فرض می کنیم چندجمله ای مینیمال T بردوی هیأت اسکالری F تحویل ناپذیر باشد. در این صورت T نیم ساده است.

اثبات. فرض کنیم زیر فضای W از V تحت T پایا باشد. باید ثابت کنیم W زیر فضای T -پایای مکملی دارد. بنا بر نتیجه ای از قضیه ۳، کافی است ثابت کنیم که اگر f یک چندجمله ای و β برداری از V باشد که $f(T)\beta$ در W قرار بگیرد، آنگاه برداری چون α در W وجود دارد که $f(T)\alpha = f(T)\beta$. لذا فرض می کنیم β در V و f یک چندجمله ای باشد که $f(T)\beta$ در W قرار دارد. اگر $f(T)\beta = 0$ ، فرض می کنیم $\alpha = 0$ و در این صورت α برداری در W است و $f(T)\beta = f(T)\alpha$. اگر $f(T)\beta \neq 0$ ، چند جمله ای f بر چندجمله ای مینیمال p از عملگر T تقسیم پذیر نیست. چون p اول است، این بدان معنی است که f و p نسبت به هم اول هستند و چندجمله ایهای g و h وجود دارند که $fg + ph = 1$. چون $p(T) = 0$ خواهیم داشت $f(T)g(T) = I$. از این مطلب نتیجه می شود که بردار β خود باید در زیر فضای W باشد؛ زیرا

$$\begin{aligned} \beta &= g(T)f(T)\beta \\ &= g(T)(f(T)\beta) \end{aligned}$$

در حالی که $f(T)\beta$ در W قرار دارد و W تحت T پایاست. حال می گیریم $\alpha = \beta$. \square

قضیه ۱۱. فرض کنیم T عملگری خطی روی فضای برداری بعد متناهی V باشد. یک شرط لازم و کافی برای اینکه T نیم ساده باشد این است که چندجمله ای مینیمال p از T به صورت $p = p_1 \dots p_k$ باشد و p_1, \dots, p_k نیز چندجمله ایهای تحویل ناپذیر متمایزی بردوی هیأت اسکالری F باشند.

اثبات. فرض کنیم T نیم ساده باشد. نشان خواهیم داد که در تجزیه چندجمله ای مینیمال p به سازه های اول، هیچ چندجمله ای تحویل ناپذیری تکرار نمی شود. خلاف این را فرض کنیم. آنگاه یک چندجمله ای تکین غیر اسکالری چون g وجود دارد که g^2 چند جمله ای p را عاد می کند. گیریم W فضای پوچ عملگر $g(T)$ باشد. در این صورت W تحت T پایاست. حال چندجمله ایی مانند h هست که $p = g^2 h$. چون g یک چندجمله ای اسکالری نیست، عملگر $g(T)h(T)$ عملگر صفر نیست و برداری چون β در V وجود دارد که $g(T)h(T)\beta \neq 0$ ؛ یعنی، $(gh)\beta \neq 0$. حال $(gh)\beta$ در زیر فضای W قرار دارد، چون که $g(gh\beta) = g^2 h\beta = p\beta = 0$. اما هیچ برداری چون α در W وجود ندارد که $gh\beta = g\alpha$ ؛ زیرا، اگر α در W باشد

$$(gh)\alpha = (hg)\alpha = h(g\alpha) = h(0) = 0.$$

پس، W نمی‌تواند زیرفضای T -پایای مکملی داشته باشد؛ و این خود متناقض این فرض است که T نیم‌ساده است.

حال فرض کنیم تجزیه p به‌سازهای اول به‌صورت $p = p_1 \oplus \dots \oplus p_k$ باشد و p_1, \dots, p_k هم‌چندجمله‌ایهای تکین (غیراسکالری) تحویل‌ناپذیر متمایزی باشند. گیریم W زیرفضایی از V باشد که تحت T پایاست. ثابت خواهیم کرد که W زیرفضای T -پایای مکملی دارد. $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ را تجزیه اولیه برای T می‌گیریم؛ یعنی، W_j را فضای پوچ $p_j(T)$ فرض می‌کنیم. T_j را عملگر خطی القا شده توسط T روی W_j می‌گیریم. در این صورت چندجمله‌ای مینیمال T_j چندجمله‌ای اولی چون p_j است. حال $W \cap W_j$ زیرفضایی از W_j است که تحت T_j (یا تحت T) پایا است. بنابراین آخرین لم زیرفضایی چون V_j از W_j وجود دارد که $W_j = (W \cap W_j) \oplus V_j$ و V_j تحت T_j (و از این رو تحت T) پایاست. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} V &= W_1 \oplus \dots \oplus W_k \\ &= (W \cap W_1) \oplus V_1 \oplus \dots \oplus (W \cap W_k) \oplus V_k \\ &= (W \cap W_1) + \dots + (W \cap W_k) \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_k. \end{aligned}$$

بنابراین لم فوق، $W = (W \cap W_1) \oplus \dots \oplus (W \cap W_k)$ و از اینجا، اگر $W' = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ ، آنگاه، $V = W \oplus W'$ ، و W' تحت T پایاست. \square

نتیجه. اگر T عملگری خطی روی فضایی برداری با بعد متناهی بردی هیأتی بسته جبری باشد، آنگاه T نیم‌ساده است اگر و تنها اگر T قطری‌شدنی باشد.

اثبات. اگر هیأت اسکالری F بسته جبری باشد، چندجمله‌ایهای اول تکین بر روی F همان چندجمله‌ایهای $x - c$ هستند. در این حالت، T نیم‌ساده است، اگر و تنها اگر چندجمله‌ای مینیمال T برابر $p = (x - c_1) \dots (x - c_k)$ باشد، که در آن c_1, \dots, c_k عناصر متمایزی از F هستند. این دقیقاً همان معیاری است که در فصل ۶ جهت قطری‌شدن T به‌دست آوردیم. \square

باید خاطر نشان کنیم که T نیم‌ساده است اگر و تنها اگر یک چندجمله‌ای چون f ، که حاصل‌ضربی از چندجمله‌ایهای اول متمایز است، وجود داشته باشد به‌طوری که $f(T) = 0$. تفاوت این حکم با این شرط که چندجمله‌ای مینیمال، حاصل‌ضربی از چندجمله‌ایهای اول متمایز باشد فقط ظاهری است.

اکنون باز می‌گردیم به‌اینکه، عملگری خطی را به‌صورت مجموع عملگری نیم‌ساده و عملگری پوچ‌توان که با یکدیگر جایجا هم می‌شوند، بیان کنیم. در این مورد، هیأت اسکالری را به‌زیر هیأتی از اعداد مختلط محدود می‌کنیم. خواننده آگاه توجه دارد که آنچه

مهم است این است که هیأت F هیأتی با سرشت نمای صفر باشد؛ یعنی اینکه، به ازای هر عدد صحیح مثبت n ، مجموع $1 + \dots + 1$ (n بار) هیچگاه در F برابر ۰ نباشد. برای هر چند جمله‌ای f بر روی F ، k مین مشتق صوری f را با $f^{(k)}$ نشان می‌دهیم. به بیان دیگر، $f^{(k)} = D^k f$ که در آن D عملگر مشتق‌گیری روی فضای چندجمله‌ایهاست. اگر f چندجمله‌ای دیگری باشد، $f(g)$ نتیجهٔ قراردادن g در f را، یعنی چندجمله‌ای حاصل از کار بست f به عنصر g در جبر خطی $F[x]$ را، نشان می‌دهد.

لم (فرمول تیلور). فرض کنیم F هیأتی با سرشت نمای صفر و g و h دو چندجمله‌ای بر روی F باشند. اگر f چندجمله‌ای دلخواهی بر روی F با $\deg f \leq n$ باشد، آنگاه

$$f(g) = f(h) + f^{(1)}(h)(g-h) + \frac{f^{(2)}(h)}{2!}(g-h)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(h)}{n!}(g-h)^n.$$

اثبات. چیزی را که می‌خواهیم اثبات کنیم تعمیمی از فرمول تیلور است. خواننده احتمالاً با حالت خاصی که در آن $h=c$ چندجمله‌ای اسکالری، و $g=x$ باشد، آشناست. در این حالت فرمول بیان می‌کند که

$$f = f(x) = f(c) + f^{(1)}(c)(x-c) + \frac{f^{(2)}(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

اثبات فرمول عمومی، دقیقاً کاربرد از قضیهٔ دو جمله‌ای

$$(a+b)^k = a^k + ka^{k-1}b + \frac{k(k-1)}{2!}a^{k-2}b^2 + \dots + b^k$$

است. زیرا، همان‌طور که خواننده می‌داند چون جایگزینی و مشتق‌گیری فرایندهایی خطی هستند فقط لازم است فرمول را برای حالتی که در آن $f = x^k$ اثبات کنیم. این فرمول

در مورد $f = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ با کمک ترکیب خطی نتیجه می‌شود. در حالت $f = x^k$ با شرط $k \leq n$ فرمول حاکی است که

$$g^k = h^k + kh^{k-1}(g-h) + \frac{k(k-1)}{2!}h^{k-2}(g-h)^2 + \dots + (g-h)^k$$

و این دقیقاً بسط دو جمله‌ای

$$g^k = [h + (g-h)]^k$$

است. \square

لم. فرض کنیم F زیرهیأتی از هیأت اعداد مختلط، f یک چندجمله‌ای بر روی F و f' مشتق f باشد. احکام زیر هم‌ا‌ذند:

(الف) f حاصل ضرب چندجمله‌ایهای تحویل‌ناپذیر متمایزی بر روی F است.
(ب) f و f' نسبت به هم اول هستند.

(پ) به‌عنوان یک چندجمله‌ای با ضرایب مختلط، هیچ ریشه تکراری ندارد. اثبات. ابتدا ثابت می‌کنیم که (الف) و (ب) احکامی هم‌ارز درباره f هستند. فرض کنیم در تجزیه اولیه f بر روی هیأت F ، چندجمله‌ای اولی (غیراسکالری) چون p تکرار بشود. آنگاه h در $F[x]$ هست که $f = p^2 h$. پس

$$f' = p^2 h' + 2pp'h$$

ولذا p مقسوم‌علیهی از f' نیز هست. از این‌رو، f و f' نسبت به هم اول نیستند. از این‌جا نتیجه می‌گیریم که (ب)، حکم (الف) را ایجاب می‌کند.

حال فرض کنیم $f = p_1 \cdots p_k$ و $f = p_1 \cdots p_k$ چندجمله‌ایهای تحویل‌ناپذیر غیراسکالری متمایزی بر روی F باشند. گیریم $f_j = f/p_j$. در این صورت

$$f' = p_1' f_1 + p_2' f_2 + \cdots + p_k' f_k.$$

فرض کنیم p چندجمله‌ای اولی باشد که هم f و هم f' را عاد می‌کند. در این صورت i هست که $p = p_i$. اما p_i به‌ازای $j \neq i$ ، چندجمله‌ای f_j را عاد می‌کند، و چون p_i همچنین

$$f' = \sum_{j=1}^k p_j' f_j$$

را عاد می‌کند، درمی‌یابیم که p_i باید $p_i' f_i$ را هم عاد کند. بنابراین p_i یا f_i را عاد می‌کند یا p_i' را. ولی p_i چندجمله‌ای f_i را عاد نمی‌کند چرا که p_1, \dots, p_k متمایزند. از این‌رو، p_i چندجمله‌ای p_i' را عاد می‌کند. اما این ممکن نیست، چرا که درجه p_i' یکی کمتر از درجه p_i است. پس نتیجه می‌گیریم که هیچ چندجمله‌ای اولی هر دو f و f' را عاد نمی‌کند، و یا $(f, f') = 1$.

برای دیدن این که حکم (پ) با (الف) و (ب) هم‌ارز است، تنها لازم است مطلب ذیل را مشاهده کنیم: فرض کنیم f و g دو چندجمله‌ای بر روی F ، زیرهیأتی از اعداد مختلط، باشند. می‌توانیم f و g را به‌عنوان چندجمله‌ایهایی با ضرایب مختلط نیز محسوب کنیم. این که f و g ، به‌عنوان چندجمله‌ایهایی بر روی F نسبت به هم اول هستند، هم‌ارز این حکم است که f و g ، به‌عنوان چندجمله‌ایهایی بر روی هیأت اعداد مختلط، نسبت به هم اول می‌باشند. اثبات این مطلب را به‌عنوان تمرین باقی می‌گذاریم. از این حکم با $f' = g$ استفاده می‌کنیم. توجه کنید وقتی که f به‌عنوان یک چندجمله‌ای بر روی هیأت اعداد مختلط محسوب شود، (پ) عیناً همان (الف) است. پس (ب) و (پ)، با همان استدلالی که در بالا به‌کار بردیم، هم‌ارز هستند. \square

اکنون می توانیم قضیه ای را ثابت کنیم که رابطه بین عملگرهای نیم ساده و عملگرهای قطری شدنی را از این هم آشکارتر می سازد.

قضیه ۱۲. فرض کنیم F زیرهیأتی از هیأت اعداد مختلط، V فضای برداری با بعد متناهی بردوی F ، و T عملگری خطی روی V باشد. همچنین فرض کنیم B پایه مرتبی برای V و A ماتریس T در پایه مرتب B باشد. دراین صورت T نیم ساده است اگر و تنها ماتریس A بردوی هیأت اعداد مختلط با ماتریسی قطری متشابه باشد.

اثبات. گیریم p چندجمله ای مینیمال T باشد. بنا بر قضیه ۱۱، T نیم ساده است اگر و تنها اگر $p = p_1 \dots p_k$ ، p_1 ، \dots ، p_k چندجمله ایهای تحویل ناپذیر متمایزی بر روی F باشند. به واسطه آخرین لم می بینیم که T نیم ساده است اگر و تنها اگر p هیچ ریشه مختلط تکراری نداشته باشد.

اما p چندجمله ای مینیمال ماتریس A نیز هست. می دانیم که A بردوی هیأت اعداد مختلط با ماتریسی قطری متشابه است اگر و تنها اگر چندجمله ای مینیمال آن دارای ریشه مختلط تکراری نباشد. این مطلب قضیه را اثبات می کند. \square

قضیه ۱۳. فرض کنیم F زیرهیأتی از هیأت اعداد مختلط، V فضای برداری با بعد متناهی بردوی F ، و T عملگری خطی روی V باشد. عملگر نیم ساده ای چون S روی V و عملگر پوچ توانی چون N روی V وجود دارد که

$$T = S + N \quad (1)$$

$$SN = NS \quad (2)$$

بعلاوه، عملگرهای نیم ساده S و پوچ توان N ، که در (۱) و (۲) صدق می کنند، یکتا هستند و هر یک یک چندجمله ای بر حسب T است.

اثبات. فرض می کنیم $p_1^k \dots p_r^l$ تجزیه چندجمله ای مینیمال T به سازه های اول باشد، و می نویسیم $f = p_1 \dots p_k$. گیریم بین اعداد صحیح مثبت r_1, \dots, r_k عدد r بزرگترین باشد. دراین صورت چندجمله ای f حاصل ضربی از چندجمله ایهای اول متمایز است، f^r بر چندجمله ای مینیمال T تقسیم پذیر است، و لذا

$$f(T)^r = 0.$$

می خواهیم دنباله ای از چندجمله ایهای $g_0, g_1, g_2, \dots, g_r$ بسازیم که

$$f\left(x - \sum_{j=0}^n g_j f^j\right)$$

بر f^{n+1} ، $n = 0, 1, 2, \dots$ تقسیم پذیر باشد. فرض می کنیم که در این صورت $g_0 = 0$ ، g_1, \dots, g_{n-1} را انتخاب

کرده باشیم. می‌نویسیم

$$h = x - \sum_{j=0}^{n-1} g_j f^j$$

و طبق فرض، $f(h)$ بر f^n تقسیم پذیر است. می‌خواهیم g_n را طوری انتخاب کنیم که

$$f(h - g_n f^n)$$

بر f^{n+1} تقسیم پذیر باشد. فرمول عمومی تیلور را به کار می‌بریم، و

$$f(h - g_n f^n) = f(h) - g_n f^n f'(h) + f^{n+1} b$$

را که در آن b یک چندجمله‌ای است به دست می‌آوریم. بنا به فرض $f(h) = q f^n$. پس، برای آنکه $f(h - g_n f^n)$ بر f^{n+1} تقسیم پذیر باشد، تنها لازم است g_n را طوری انتخاب کنیم که $(q - g_n f'(h))$ بر f تقسیم پذیر باشد. این امر قابل اجراء است، زیرا f سازه‌های اول تکراری ندارد و لذا f و f' نسبت به هم اول هستند. اگر a و e چندجمله‌ایهایی باشند که $af + ef' = 1$ و اگر $g_n = eq$ گرفته شود، آنگاه $q - g_n f'$ بر f تقسیم پذیر است.

حال دنباله‌ای چون g_0, g_1, \dots را داریم که f^{n+1} چندجمله‌ای

$$f\left(x - \sum_{j=0}^n g_j f^j\right)$$

را عادی می‌کند. فرض می‌کنیم $n = r - 1$ ، و در این صورت چون $f(T)^r = 0$ ،

$$f\left(T - \sum_{j=0}^{r-1} g_j(T) f(T)^j\right) = 0.$$

فرض کنیم

$$N = \sum_{j=1}^{r-1} g_j(T) f(T)^j = \sum_{j=0}^{r-1} g_j(T) f(T)^j.$$

چون $\sum_{j=1}^n g_j f^j$ بر f تقسیم پذیر است، می‌بینیم که $N^r = 0$ و لذا N پوچ توان است. فرض

کنیم $S = T - N$. در این صورت $f(S) = f(T - N) = 0$. چون f سازه‌های اول متمایز دارد S نیم‌ساده است.

حال $T = S + N$ را که در آن S نیم‌ساده و N پوچ توان است داریم، و هر کدام یک چندجمله‌ای بر حسب T است. برای اثبات حکم یکتایی، از هیأت اسکالری F به هیأت اعداد مختلط می‌رویم. \mathcal{B} را پایه مرتبی برای فضای V می‌گیریم. در این صورت داریم

$$[T]_{\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{B}} + [N]_{\mathcal{B}}$$

که در آن $[S]_{\mathcal{B}}$ بر روی اعداد مختلط قطری‌شدنی است و $[N]_{\mathcal{B}}$ هم پوچ توان است. این ماتریسهای قطری‌شدنی و پوچ توان که با یکدیگر جابجا هم می‌شوند، همان گونه که در فصل ۶ نشان دادیم، به طور یکتا تعیین می‌شوند. □

تمرین

۰۱ اگر N عملگر خطی پوچ توانی روی V باشد نشان دهید که به ازای هر چند جمله‌ای f ، جزء نیم‌ساده $f(N)$ مضربی اسکالری از عملگر همانی است (F زیرهیأتی از C است).

۰۲ فرض کنید F زیرهیأتی از اعداد مختلط، V فضایی برداری با بعد متناهی بر روی F ، و T عملگر خطی نیم‌ساده‌ای روی V باشد. اگر f یک چندجمله‌ای بر روی F باشد، ثابت کنید که $f(T)$ نیم‌ساده است.

۰۳ فرض کنید T عملگری خطی روی فضایی با بعد متناهی بر روی زیرهیأتی از C باشد. ثابت کنید T نیم‌ساده است اگر و تنها اگر مطلب ذیل درست باشد: اگر f یک چندجمله‌ای و $f(T) = 0$ پوچ توان باشد، آنگاه $f(T) = 0$.



فضاهای ضرب داخلی

۱.۸. ضربهای داخلی

در سراسر این فصل، تنها فضاهای برداری حقیقی و مختلط؛ یعنی، فضاهای برداری بر روی هیأت اعداد حقیقی و یا هیأت اعداد مختلط در نظر گرفته می‌شوند. مقصود اصلی ما مطالعه فضاهایی برداری است که در آنها سخن گفتن از «طول» یک بردار و «زاویه» بین دو بردار معنی داشته باشد. این کار را با مطالعه نوع خاصی از توابع اسکالری، معروف به ضرب داخلی، روی جفت بردارها انجام خواهیم داد. مثالی از ضرب داخلی همان ضرب نقطه‌ای یا اسکالری بردارهای در R^3 است. ضرب اسکالری بردارهای

$$\beta = (y_1, y_2, y_3) \text{ و } \alpha = (x_1, x_2, x_3)$$

در R^3 عبارت است از عدد حقیقی

$$(\alpha|\beta) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

از نظر هندسی، این ضرب نقطه‌ای عبارت است از حاصل ضرب طول α در طول β در کسینوس زاویه بین α و β . بنابراین مفاهیم هندسی «طول» و «زاویه» در R^2 را می‌توان با ضرب اسکالری R^2 به‌طور جبری تعریف می‌شود نیز تعریف کرد.

یک ضرب داخلی روی فضایی برداری عبارت است از تابعی با خواصی مشابه با خواص ضرب نقطه‌ای در R^3 و برحسب یک چنین ضرب داخلی «طول» و «زاویه» را

می توان تعریف کرد. اظهارات مادر باره مفهوم عمومی زاویه، به ایده عمود بودن (یا تعامد) بردارها محدود خواهد بود. در این بخش اول، خواهیم گفت که يك ضرب داخلی چیست، چند مثال خاص را بررسی خواهیم کرد، و چند خاصیت اساسی ضربهای داخلی را به دست خواهیم داد. سپس به کار بحث درباره طول و تعامد باز خواهیم گشت.

تعریف. فرض کنیم F هیأت اعداد حقیقی یا هیأت اعداد مختلط و V فضایی برداری بردوی F باشد. يك ضرب داخلی روی V تابعی است که به هر جفت مرتب از بردارهای β, α در V اسکالری چون $(\alpha|\beta)$ در F را طوری اختصاص می دهد که به ازای همه α ها، β ها، و γ های در V و همه اسکالرهایی c داشته باشیم:

$$(\alpha + \beta | \gamma) = (\alpha | \gamma) + (\beta | \gamma) \quad (\text{الف})$$

$$(c\alpha | \beta) = c(\alpha | \beta) \quad (\text{ب})$$

$$(\beta | \alpha) = \overline{(\alpha | \beta)} \quad (\text{پ})$$

$$(\alpha | \alpha) > 0, \alpha \neq 0. \quad (\text{ت})$$

مشاهده می شود که شرایط (الف)، (ب) و (پ) ایجاب می کنند که

$$(\alpha | c\beta + \gamma) = \bar{c}(\alpha | \beta) + (\alpha | \gamma) \quad (\text{ث})$$

نکته دیگری را هم باید خاطر نشان کنیم. وقتی F هیأت اعداد حقیقی R باشد، مزدوجهای مختلطی که در (پ) و (ث) ظاهر می شوند، غیر ضرور هستند؛ اما، در حالت مختلط برای سازگاری شرایط لازم می باشند. بدون این مزدوجهای مختلط، با تناقض ذیل مواجه خواهیم شد:

$$(\alpha | \alpha) > 0 \quad \text{و} \quad (i\alpha | i\alpha) = -1(\alpha | \alpha) > 0$$

در مثالهایی که در ذیل می آیند، و نیز در سراسر این فصل، F یا هیأت اعداد حقیقی است یا هیأت اعداد مختلط.

مثال ۰۱. روی F^n ضربی داخلی وجود دارد که ما آن را ضرب داخلی استاندارد

می نامیم. این داخلی روی $\alpha = (x_1, \dots, x_n)$ و $\beta = (y_1, \dots, y_n)$ با

$$(\alpha | \beta) = \sum_j x_j \bar{y}_j \quad (1-8)$$

تعریف می شود. وقتی که $F = R$ این قاعده را می توان به صورت

$$(\alpha | \beta) = \sum_j x_j y_j$$

نیز نوشت. ضرب داخلی استاندارد در حالت حقیقی غالباً ضرب نقطه ای یا اسکالری نامیده و توسط $\beta \cdot \alpha$ نشان داده می شود.

مثال ۲. به ازای $\alpha = (x_1, x_2)$ و $\beta = (y_1, y_2)$ در R^2 ، فرض کنیم

$$(\alpha|\beta) = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4x_2 y_2.$$

چون $(\alpha|\alpha) = (x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2$ ، نتیجه می شود که اگر $\alpha \neq 0$ ، $(\alpha|\alpha) > 0$. شرایط (الف)، (ب)، و (پ) تعریف نیز بسادگی نشان داده می شوند.

مثال ۳. فرض کنیم V فضای همه ماتریسهای $n \times n$ بر روی F ، یعنی $F^{n \times n}$ ، باشد.

در این صورت V به طریقی طبیعی با F^{n^2} یکرخیخت است. بنا بر این، از مثال ۱ نتیجه می شود که معادله

$$(A|B) = \sum_{j,k} A_{jk} \bar{B}_{jk}$$

ضربی داخلی روی V تعریف می کند. بعلاوه، اگر ماتریس ترانژاده مزدوج B^* را که در آن $B^*_{kj} = \bar{B}_{jk}$ ، معرفی کنیم، می توانیم این ضرب داخلی روی $F^{n \times n}$ را بر حسب تابع رد نیز بیان کنیم:

$$(A|B) = \text{tr}(AB^*) = \text{tr}(B^*A)$$

زیرا

$$\begin{aligned} \text{tr}(AB^*) &= \sum_j (AB^*)_{jj} \\ &= \sum_j \sum_k A_{jk} B^*_{kj} \\ &= \sum_j \sum_k A_{jk} \bar{B}_{jk}. \end{aligned}$$

مثال ۴. گیریم $F^{n \times 1}$ فضای ماتریسهای (ستونی) $n \times 1$ بر روی F و Q یک

ماتریس معکوس پذیر $n \times n$ بر روی F باشد. به ازای X و Y در $F^{n \times 1}$ می نویسیم

$$(X|Y) = Y^* Q X.$$

در اینجا ماتریس 1×1 سمت راست را با تک درایه آن یکی گرفته ایم. هنگامی که Q ماتریس همانی باشد، این ضرب داخلی اساساً با ضرب داخلی در مثال ۱ یکی است؛ ما این ضرب داخلی را ضرب داخلی استاندارد روی $F^{n \times 1}$ می نامیم. خواننده باید متوجه باشد که اصطلاح «ضرب داخلی استاندارد» در دو زمینه خاص به کار می رود. برای یک فضای برداری با بعد متناهی دلخواه بر روی F ، ضرب داخلی آشکاری که بتوان آن را استاندارد نامید وجود ندارد.

مثال ۵. گیریم V فضای برداری همه توابع مختلط پیوسته روی فاصله یک

$0 \leq t \leq 1$ باشد. فرض کنیم

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)} dt.$$

احتمالاً خواننده با فضای توابع پیوسته حقیقی روی فاصلهٔ یکه بیشتر آشنا باشد. برای چنین فضایی علامت مزدوج مختلط روی g باید حذف گردد.

مثال ۶. این مثال در واقع رده‌ای است از مثالها. با روش زیر از ضرب داخلی مفروضی می‌توان ضربهای داخلی جدیدی به وجود آورد. V و W را فضاهایی برداری بر روی F می‌گیریم و فرض می‌کنیم $(\quad | \quad)$ ضربی داخلی روی W باشد. اگر T تبدیل خطی نامنفردی از V در W باشد، آنگاه معادلهٔ

$$p_T(\alpha, \beta) = (T\alpha|T\beta)$$

ضرب داخلی p_T روی V را تعریف می‌کنند. ضرب داخلی در مثال ۴ حالت خاصی از این ضرب است. ضربهای داخلی ذیل نیز حالت‌هایی خاص از آن هستند.

(الف) گیریم V فضایی برداری با بعد متناهی و

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

پایهٔ مرتبی برای V باشد. $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ را بردارهای پایهٔ استاندارد F^n ، و T را تبدیل خطی از V در F^n می‌گیریم که $T\alpha_j = \epsilon_j$ ، $j = 1, \dots, n$. به عبارت دیگر، T را یکریختی «طبیعی» از V بروی F^n که توسط \mathcal{B} تعیین می‌شود می‌گیریم. اگر ضرب داخلی استاندارد روی F^n را اتخاذ کنیم، آنگاه

$$p_T\left(\sum_j x_j \alpha_j, \sum_k y_k \alpha_k\right) = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j.$$

پس، به ازای هر پایهٔ V ، ضربی داخلی روی V با این خاصیت که $(\alpha_j|\alpha_k) = \delta_{jk}$ وجود دارد؛ در واقع، بسادگی می‌توان نشان داد که تنها یک ضرب داخلی از این نوع وجود دارد. بعداً نشان خواهیم داد که هر ضرب داخلی روی V ، توسط پایه‌ای چون \mathcal{B} و به طریق بالا تعیین می‌شود.

(ب) دوباره به مثال ۵ برمی‌گردیم و فرض می‌کنیم که $V = W$. با این فرض که W فضای توابع پیوسته روی فاصلهٔ یکه باشد، T را عملگر خطی «ضرب در t » یعنی $(Tf)(t) = tf(t)$ ، $0 \leq t \leq 1$ ، می‌گیریم. با آسانی دیده می‌شود که T خطی است. همچنین T نامنفرد است؛ زیرا فرض کنیم $Tf = 0$. در این صورت به ازای $0 \leq t \leq 1$ ، $tf(t) = 0$ از این رو، به ازای $t > 0$ ، $f(t) = 0$. چون f پیوسته است، همچنین داریم $f(0) = 0$ یا $f = 0$. حال با استفاده از ضرب داخلی مثال ۵ ضرب داخلی جدیدی با قرارداد

$$\begin{aligned} p_T(f, g) &= \int_0^1 (Tf)(t) \overline{(Tg)(t)} dt \\ &= \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} t^x dt \end{aligned}$$

روی V بنا می‌کنیم.

اکنون به چند مشاهده عمومی درباره ضربهای داخلی می‌پردازیم. فرض کنیم V یک فضای برداری مختلط با ضربی داخلی باشد. در این صورت به ازای هر α و β در V ,

$$(\alpha|\beta) = \operatorname{Re}(\alpha|\beta) + i \operatorname{Im}(\alpha|\beta)$$

که در آن $\operatorname{Re}(\alpha|\beta)$ و $\operatorname{Im}(\alpha|\beta)$ اجزای حقیقی و موهومی عدد مختلط $(\alpha|\beta)$ هستند. اگر z عددی مختلط باشد، آنگاه $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}(-iz)$. نتیجه اینکه

$$\operatorname{Im}(\alpha|\beta) = \operatorname{Re}[-i(\alpha|\beta)] = \operatorname{Re}(\alpha|i\beta).$$

پس، ضرب داخلی به‌طور کامل توسط «جزء حقیقی» اش طبق

$$(\alpha|\beta) = \operatorname{Re}(\alpha|\beta) + i \operatorname{Re}(\alpha|i\beta) \quad (۲-۸)$$

تعیین می‌شود.

گاهی بسی مفید است بدانیم که هر ضرب داخلی روی یک فضای برداری حقیقی یا مختلط، توسط تابع دیگری موسوم به فرم درجه دوم تعیین شده توسط آن ضرب داخلی هم تعیین می‌شود. برای تعریف آن، ابتدا ریشه دوم مثبت $(\alpha|\alpha)$ را با $\|\alpha\|$ نشان می‌دهیم؛ $\|\alpha\|$ ، نرم α نسبت به ضرب داخلی نامیده می‌شود. با مشاهده ضربهای داخلی استاندارد در \mathbb{R}^1 ، C^1 ، \mathbb{R}^2 و \mathbb{R}^3 ، خواننده باید بتواند خود را متقاعد سازد که تصور نرم α به عنوان «طول» یا «اندازه» α بیجا نیست. فرم درجه دوم تعیین شده توسط ضرب داخلی عبارت است از تابعی که به هر بردار α اسکالر $\|\alpha\|^2$ را اختصاص می‌دهد. از خواص ضرب داخلی چنین نتیجه می‌شود که به ازای هر بردار α و β ،

$$\|\alpha \pm \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 \pm 2 \operatorname{Re}(\alpha|\beta) + \|\beta\|^2.$$

پس، در حالت حقیقی

$$(\alpha|\beta) = \frac{1}{4} \|\alpha + \beta\|^2 - \frac{1}{4} \|\alpha - \beta\|^2. \quad (۳-۸)$$

در حالت مختلط، (۲-۸) را به کار می‌بریم و عبارت پیچیده‌تر

$$(\alpha|\beta) = \frac{1}{4} \|\alpha + \beta\|^2 - \frac{1}{4} \|\alpha - \beta\|^2 + \frac{i}{4} \|\alpha + i\beta\|^2 - \frac{i}{4} \|\alpha - i\beta\|^2 \quad (۴-۸)$$

را به دست می‌آوریم. معادلات (۳-۸) و (۴-۸)، اتحادهای قطبی نامیده می‌شوند. توجه

کنید که (۴-۸) می تواند به صورت ذیل نیز نوشته شود:

$$(\alpha|\beta) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{n=1}^n i^n \|\alpha + i^n \beta\|^2.$$

خواصی که در بالا به دست آمدند برای هر ضرب داخلی روی هر فضای برداری حقیقی یا مختلط V ، بدون توجه به بعد، برقرارند. اکنون به حالتی که در آن V با بعد متناهی است، بازمی گردیم. همان طور که ممکن است حدس زده شود، یک ضرب داخلی روی یک فضای با بعد متناهی، همواره می تواند بر حسب پایه ای مرتب با یک ماتریس توصیف شود.

فرض کنیم بعد V متناهی و

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

پایه مرتبی برای V باشد و نیز ضرب داخلی خاصی روی V داده شده باشد؛ نشان خواهیم داد که این ضرب داخلی به طور کامل توسط مقادیر

$$G_{jk} = (\alpha_k | \alpha_j) \quad (5-8)$$

که به جفت بردارهای \mathcal{B} تعلق می گیرد، تعیین می شود. اگر $\alpha = \sum_k x_k \alpha_k$ و $\beta = \sum_j y_j \alpha_j$ آنگاه

$$\begin{aligned} (\alpha|\beta) &= \left(\sum_k x_k \alpha_k \middle| \beta \right) \\ &= \sum_k x_k (\alpha_k | \beta) \\ &= \sum_k x_k \sum_j \bar{y}_j (\alpha_k | \alpha_j) \\ &= \sum_{j,k} \bar{y}_j G_{jk} x_k \\ &= Y^* G X. \end{aligned}$$

در اینجا X و Y ماتریسهای مختصات α و β در پایه مرتب \mathcal{B} ، و G ماتریس با درایه های $G_{jk} = (\alpha_k | \alpha_j)$ است. G را ماتریس ضرب داخلی در پایه مرتب \mathcal{B} می نامیم. از (۵-۸) نتیجه می شود که G هرمیتی است؛ یعنی، $G = G^*$ ؛ اما G نوع نسبتاً خاصی از ماتریسهای هرمیتی است. زیرا G باید در شرط اضافی

$$X^* G X > 0, \quad X \neq 0 \quad (6-8)$$

نیز صدق کند. بخصوص، G باید معکوس پذیر باشد. زیرا، در غیر این صورت یک $X \neq 0$ وجود دارد که $G X = 0$ و به ازای چنین X ی (۶-۸) غیر ممکن است. به طور صریحتر، (۶-۸) حاکی است که به ازای همه اسکالرهایی چون x_1, \dots, x_n که دست کم یکی از

آنها صفر نباشد

$$\sum_{j,k} \bar{x}_j G_{jk} x_k > 0. \quad (7-8)$$

از این مطالب بلافاصله می بینیم که همه درایه های قطری G باید مثبت باشند؛ با این وجود، برای اطمینان از درستی (۶-۸) این شرط روی درایه های قطری به هیچ وجه کافی نیست. شرایط کافی برای درستی (۶-۸) بعداً ارائه خواهند شد.

روند بالا وارونه پذیر است؛ بدین معنی که اگر G ماتریسی $n \times n$ روی F باشد که در (۶-۸) و شرط $G = G^*$ صدق کند، آنگاه G ماتریس یک ضرب داخلی روی V در پایه مرتب \mathcal{B} است. این ضرب داخلی با معادله

$$(\alpha|\beta) = Y^*GX$$

که در آن X و Y ماتریسهای مختصات α و β در پایه مرتب \mathcal{B} هستند تعیین می شود.

تمرین

۰۱. فرض کنید V فضای برداری و $(|)$ ضربی داخلی روی V باشد.

(الف) نشان دهید به ازای هر β در V ، $(0|\beta) = 0$.

(ب) نشان دهید که اگر به ازای هر β در V ، $(\alpha|\beta) = 0$ آنگاه $\alpha = 0$.

۰۲. فرض کنید V فضای برداری بر روی F باشد. نشان دهید مجموع دو ضرب داخلی

روی V ، ضربی داخلی روی V است. آیا تفاضل دو ضرب داخلی هم یک ضرب داخلی

است؟ نشان دهید که ضربی مثبت از یک ضرب داخلی، ضربی داخلی است.

۰۳. همه ضربهای داخلی روی R^1 و روی C^1 را به طور صریح تشریح کنید.

۰۴. نشان دهید که ضرب داخلی استاندارد روی F^n ضربی داخلی است.

۰۵. $(|)$ را ضرب داخلی استاندارد روی R^2 بگیرد.

(الف) فرض کنید $\alpha = (1, 2)$ و $\beta = (-1, 1)$. اگر γ برداری باشد که

$$(\alpha|\gamma) = -1 \quad \text{و} \quad (\beta|\gamma) = 3$$

را بیابید.

(ب) نشان دهید که به ازای هر α در R^2 داریم $\alpha = (\alpha|\epsilon_1)\epsilon_1 + (\alpha|\epsilon_2)\epsilon_2$

۰۶. $(|)$ را ضرب داخلی استاندارد روی R^2 و T را عملگر خطی

$$T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$$

بگیرد. T «دوران به اندازه 90° » است و این خاصیت را دارد که به ازای هر α در

R^2 ، $(\alpha|T\alpha) = 0$. همه ضربهای داخلی $(|)$ روی R^2 را که به ازای هر α ،

$$(\alpha|T\alpha) = 0$$

بیابید.

۰۷ (|) را ضرب داخلى استازده روى C^2 بگيريد و ثابت كنيد كه هيچ عملگر خطى غيرصفرى روى C^2 وجود ندارد كه به ازاي هر α در C^2 ، $(\alpha|T\alpha) = 0$. اين مطلب را تعميم دهيد.

۰۸ فرض كنيد A ماتريسى 2×2 با درايه‌هاى حقيقي باشد. به ازاي X و Y در $R^{2 \times 1}$ فرض كنيد

$$f_A(X, Y) = Y'AX.$$

نشان دهيد f ضربى داخلى روى $R^{2 \times 1}$ است اگر و تنها اگر $A = A'$ ، $A_{11} > 0$ ، $A_{22} > 0$ و $\det A > 0$.

۰۹ فرض كنيد V يك فضاى بردارى حقيقي يا مختلط با ضربى داخلى باشد. نشان دهيد كه فرم درجه دوم تعيين شده توسط ضرب داخلى در قانون متوازى الاضلاع

$$\|\alpha + \beta\|^2 + \|\alpha - \beta\|^2 = 2\|\alpha\|^2 + 2\|\beta\|^2$$

صدق مى‌كند.

۰۱۰ فرض كنيد (|) ضرب داخلى روى R^2 باشد كه در مثال ۲ تعريف شد و \mathcal{B} پايه مرتب استازده براى R^2 باشد. ماتريس اين ضرب داخلى را نسبت به \mathcal{B} بيايد.

۰۱۱ نشان دهيد كه فرمول

$$\left(\sum_j \alpha_j x^j \mid \sum_k b_k x^k \right) = \sum_{j,k} \frac{a_j b_k}{j+k+1}$$

ضربى داخلى روى فضاى $R[x]$ ، چندجمله‌اىهاى بر روى هيات R ، تعريف مى‌كند. W را زيرفضاى متشكل از چندجمله‌اىهاى از درجه كمتر از n برابر با n بگيريد. ضرب داخلى مذكور را به W محدود كنيد و ماتريس اين ضرب داخلى روى W را نسبت به پايه مرتب $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ بيايد. (داهنمايى: براى اينكه نشان دهيد اين فرمول يك ضرب داخلى تعريف مى‌كند، مشاهده كنيد كه

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

و روى اين انتگرال كار كنيد.)

۰۱۲ فرض كنيد V فضاى بردارى با بعد متناهى و $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پايه‌اى براى V باشد. فرض كنيد (|) ضربى داخلى روى V باشد. اگر c_1, \dots, c_n و c_j اسكلر دلخواه باشند، نشان دهيد دقيقاً يك بردار چون α در V وجود دارد كه $\langle \alpha | \alpha_j \rangle = c_j$ ، $j = 1, \dots, n$.

۱۳. فرض کنید V یک فضای برداری مختلط باشد. تابعی چون J از V در V یک تزویج نامیده می‌شود، هرگاه به‌ازای هر اسکالر c و هر α و β در V ،

$$J(J(\alpha)) = \alpha \text{ و } J(c\alpha) = \bar{c}J(\alpha), J(\alpha + \beta) = J(\alpha) + J(\beta)$$

اگر J یک تزویج باشد، نشان دهید

(الف) مجموعه W متشکل از همه α های در V با ویژگی $J\alpha = \alpha$ نسبت به عملهای تعریف شده در V یک فضای برداری بر روی R است.

(ب) به‌ازای هر α در V ، بردارهای یکتایی چون β و γ در W وجود دارند که $\alpha = \beta + i\gamma$

۱۴. فرض کنید V یک فضای برداری مختلط و W زیرمجموعه‌ای از V با خواص ذیل باشد:

(الف) W نسبت به عملهای تعریف شده در V ، یک فضای برداری حقیقی است.

(ب) به‌ازای هر α در V ، بردارهای یکتایی چون β و γ در W وجود دارند که $\alpha = \beta + i\gamma$

نشان دهید معادله $J\alpha = \beta - i\gamma$ ، یک تزویج روی V تعریف می‌کند با این خاصیت که $J\alpha = \alpha$ اگر و تنها اگر α متعلق به W باشد؛ و نیز نشان دهید که J تنها تزویج روی V با این خاصیت است.

۱۵. همه تزویجهای روی C_1 و C_2 را بیابید.

۱۶. فرض کنید W زیرفضایی حقیقی با بعد متناهی از یک فضای برداری مختلط V باشد. نشان دهید که W در شرط (ب) از تمرین ۱۴ صدق می‌کند اگر و تنها اگر هر پایه W پایه‌ای برای V نیز باشد.

۱۷. فرض کنید V یک فضای برداری مختلط، J یک تزویج روی V ، W مجموعه α های در V با ویژگی $J\alpha = \alpha$ و f ضربی داخلی روی W باشد. نشان دهید:

(الف) ضرب داخلی یکتایی چون g روی V وجود دارد که به‌ازای هر α و β در W ، $g(\alpha, \beta) = f(\alpha, \beta)$

(ب) به‌ازای هر α و β در V ، $g(J\alpha, J\beta) = g(\beta, \alpha)$

قسمت (الف) درباره رابطه بین ضربهای داخلی استاندارد روی R^1 و C^1 یا روی R^n و C^n چه می‌گوید؟

۲.۸. فضاهای ضرب داخلی

اکنون که ایده‌هایی درباره ضرب داخلی پیدا کرده‌ایم، توجه خود را به آنچه درباره

تركيب يك فضاى بردارى و يك ضرب داخلى خاص روى آن مى توان گفت، معطوف مى كنيم. بويژه، خواص بنيادى مفاهيم «طول» و «تعامد» را كه به وسيله ضرب داخلى روى فضا تحمیل مى شوند، به دست مى آوريم.

تعريف. يك فضاى ضرب داخلى عبارت است از يك فضاى بردارى حقيقي يا مختلط همراه با ضرب داخلى مشخصى روى آن فضا.

يك فضاى ضرب داخلى حقيقي با بعد متناهي، غالباً يك فضاى اقليدسى هم ناميده مى شود. از يك فضاى ضرب داخلى مختلط، بيشتر به عنوان يك فضاى يكاني نام برده مى شود.

قضيه ۱. اگر V يك فضاى ضرب داخلى باشد، آنگاه به ازاي هر دو بردار α و β در V و هر اسكالر c

$$(1) \quad \|\alpha c\| = |c| \|\alpha\|$$

$$(2) \quad \|\alpha\| > 0, \alpha \neq 0$$

$$(3) \quad |(\alpha|\beta)| \leq \|\alpha\| \|\beta\|$$

$$(4) \quad \|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$$

اثبات. احكام (۱) و (۲) تقريباً بلافاصله از تعريف گوناگون مربوط به نتيجه مى شوند. وقتى $\alpha = 0$ نامساوى (۳) بوضوح درست است. اگر $\alpha \neq 0$ ، مى نويسيم

$$\gamma = \beta - \frac{(\beta|\alpha)}{\|\alpha\|^2} \alpha.$$

در اين صورت $(\gamma|\alpha) = 0$ و

$$0 \leq \|\gamma\|^2 = \left(\beta - \frac{(\beta|\alpha)}{\|\alpha\|^2} \alpha \mid \beta - \frac{(\beta|\alpha)}{\|\alpha\|^2} \alpha \right)$$

$$= (\beta|\beta) - \frac{(\beta|\alpha)(\alpha|\beta)}{\|\alpha\|^2}$$

$$= \|\beta\|^2 - \frac{|(\alpha|\beta)|^2}{\|\alpha\|^2}.$$

از اين رو، $|(\alpha|\beta)|^2 \leq \|\alpha\|^2 \|\beta\|^2$. حال با استفاده از (۳) به دست مى آوريم

$$\|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + (\alpha|\beta) + (\beta|\alpha) + \|\beta\|^2$$

$$= \|\alpha\|^2 + 2\operatorname{Re}(\alpha|\beta) + \|\beta\|^2$$

$$\leq \|\alpha\|^2 + 2\|\alpha\| \|\beta\| + \|\beta\|^2$$

$$= (\|\alpha\| + \|\beta\|)^2.$$

$$\square \cdot \|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\| \text{، پس}$$

نامساوی (۳)، نامساوی کوشی-شوارتز نامیده می‌شود. این نامساوی کار برده‌ای گوناگون فراوانی دارد. اثبات نشان می‌دهد که اگر (مثلاً) α غیر صفر باشد، آنگاه $\|\alpha\| \|\beta\| < |\langle \alpha, \beta \rangle|$ ، مگر اینکه

$$\beta = \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\|\alpha\|^2} \alpha.$$

بدین‌سان، در (۳) تساوی برقرار است اگر و تنها اگر α و β وابسته خطی باشند.

مثال ۷. اگر نامساوی کوشی-شوارتز را به ضربهای داخلی مفروض در مثالهای ۱، ۲، ۳، ۵ به کار بندیم، نامساویهای ذیل را به دست می‌آوریم:

$$|\sum x_k \bar{y}_k| \leq (\sum |x_k|^2)^{1/2} (\sum |y_k|^2)^{1/2} \quad (\text{الف})$$

$$|x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + x_2 y_2| \quad (\text{ب})$$

$$\leq ((x_1 - x_2)^2 + x_2^2)^{1/2} ((y_1 - y_2)^2 + y_2^2)^{1/2}$$

$$|\text{tr}(AB^*)| \leq (\text{tr}(AA^*))^{1/2} (\text{tr}(BB^*))^{1/2} \quad (\text{پ})$$

$$\left| \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx \right| \leq \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |g(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad (\text{ت})$$

تعریف. فرض کنیم α و β بردارهایی از یک فضای ضرب داخلی V باشند. در این صورت α بر β متعامد است هرگاه $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ ؛ چون این تساوی ایجاب می‌کند که β نیز بر α متعامد باشد، اغلب فقط می‌گوییم که α و β متعامدند. اگر S مجموعه‌ای از بردارهای متعلق به V باشد، S یک مجموعه متعامد نامیده می‌شود هرگاه همه جفت بردارهای متمایز در S متعامد باشند. یک مجموعه متعامد یک مجموعه متعامدی چون S است همراه با این خاصیت اضافی که به ازای هر α در S ، $\|\alpha\| = 1$.

بردار صفر بر همه بردارهای V متعامد است و تنها برداری است که این ویژگی را دارد. بجاست که یک مجموعه متعامد یک به عنوان مجموعه‌ای از بردارهای دوه‌دو متعامد که همه دارای طول ۱ باشند، تصور شود.

مثال ۸. پایه استاندارد R^n یا C^n نسبت به ضرب داخلی استاندارد یک مجموعه متعامد یکه است.

مثال ۹. بردار (x, y) در R^2 ، نسبت به ضرب داخلی استاندارد بر $(-y, x)$ متعامد

است، زیرا

$$((x, y) | (-y, x)) = -xy + yx = 0.$$

اما، اگر R^2 با ضرب داخلى مثال ۲ تجهيز شود، آنگاه (x, y) و $(-y, x)$ متعامد خواهند بود اگر و تنها اگر

$$y = \frac{1}{4}(-3 \pm \sqrt{13})x.$$

مثال ۱۰. V فضاى ماتريسهائى $n \times n$ مختلط $C^{n \times n}$ و E^{pq} راماتريسى مى گيريم كه تنها درايهٔ غيرصفرش يك ۱ در سطر p و ستون q باشد. آنگاه مجموعهٔ همهٔ اين چنين ماتريسهائى E^{pq} ، نسبت به ضرب داخلى مفروض در مثال ۳ متعامد يكه است. زیرا

$$(E^{pq} | E^{sr}) = \text{tr}(E^{pq} E^{sr}) = \delta_{qs} \text{tr}(E^{pr}) = \delta_{qs} \delta_{pr}.$$

مثال ۱۱. گيريم V فضاى توابع مختلط (يا حقيقي) پيوسته روى فاصلهٔ $0 \leq x \leq 1$ با ضرب داخلى

$$(f | g) = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$$

باشد. فرض كنيم $f_n(x) = \sqrt{2} \cos 2\pi n x$ و $g_n(x) = \sqrt{2} \sin 2\pi n x$. در اين صورت $\{1, f_1, g_1, f_2, g_2, \dots\}$ يك مجموعهٔ متعامد يكه نامتناهى است. در حالت مختلط، مى توانيم تركيبات خطى

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(f_n + i g_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

را نيز تشكيل دهيم. بدين طريق، مجموعهٔ متعامد يكهٔ جديدي چون S متشكل از همهٔ توابع به صورت

$$h_n(x) = e^{2\pi i n x}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

را به دست مى آوريم. مجموعهٔ S' حاصل از الحاق تابع ثابت ۱ به S نيز متعامد يكه است. در اینجا فرض مى كنيم خواننده بسا محاسبهٔ انتگرالهاى مورد بحث آشنائى داشته باشد. مجموعه‌هاى متعامد يكهٔ ارائه شده در مثالهاى بالا همگى مستقل خطى هستند. اکنون نشان مى دهيم كه همواره چنين است.

قضيهٔ ۲. هر مجموعهٔ متعامد از بردارهاى غيرصفر، مستقل خطى است.

اثبات. گيريم S مجموعه‌اى متعامد متناهى يا نامتناهى از بردارهاى غيرصفر فضاى ضرب داخلى مفروضى باشد. فرض كنيم $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ بردارهاى متمایزی از S

باشند، و

$$\beta = c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \dots + c_m \alpha_m.$$

در این صورت

$$\begin{aligned} (\beta | \alpha_k) &= \left(\sum_j c_j \alpha_j | \alpha_k \right) \\ &= \sum_j c_j (\alpha_j | \alpha_k) \\ &= c_k (\alpha_k | \alpha_k). \end{aligned}$$

چون $(\alpha_k | \alpha_k) \neq 0$ ، نتیجه می‌شود که

$$c_k = \frac{(\beta | \alpha_k)}{\|\alpha_k\|^2}, \quad 1 \leq k \leq m.$$

پس وقتی که $\beta = 0$ ، به ازای هر k ، $c_k = 0$ ؛ بنابراین، S مجموعه‌ای مستقل است. \square

نتیجه. اگر برداری چون β ، ترکیبی خطی از یک دنباله متعامد از بردارهای غیرصفر $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ باشد، آنگاه β عبارت است از ترکیب خطی خاص

$$\beta = \sum_{k=1}^m \frac{(\beta | \alpha_k)}{\|\alpha_k\|^2} \alpha_k.$$

این نتیجه از اثبات قضیه منتج می‌شود. نتیجه دیگری هم هست که گرچه بدیهی است، ولی ذکرش لازم است. اگر $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ مجموعه متعامدی از بردارهای غیرصفر یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی V باشد، آنگاه $m \leq \dim V$. این مطلب حاکی است که تعداد جهت‌های دوه‌دو عمود برهم در V ، نمی‌تواند از بعد جبری V تجاوز کند. تعداد ماکزیمم جهت‌های دو به دو عمود برهم در V ، عددی است که می‌تواند با درک مستقیم و به‌طور حسی به‌عنوان بعد هندسی V محسوب شود، و قریباً دیدیم که این بعد از بعد جبری بیشتر نیست. این واقعیت که این دو بعد برابر هستند، نتیجه‌ای خاص از قضیه بعدی است.

قضیه ۳. گیریم V یک فضای ضرب داخلی β_1, \dots, β_n بردارهایی مستقل از V باشند. در این صورت می‌توان بردارهای متعامدی چون $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (یا چنان در V ساخت که به‌ازای هر $k = 1, 2, \dots, n$ ، مجموعه

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$$

پایه‌ای برای زیرفضای پدید آمده توسط β_1, \dots, β_k باشد.

اثبات. بردارهای $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ با ساختمانی معروف به فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت^۱، به دست خواهند آمد. ابتدا می‌گیریم $\alpha_1 = \beta_1$ ، سپس بردارهای دیگر به‌طور

استقرایی به صورت زیر به دست می آید: فرض کنیم $\alpha_m, \dots, \alpha_1$ ($1 \leq m < n$) طوری انتخاب شده باشد که به ازای هر k ,

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}, \quad 1 \leq k \leq m$$

پایه متعامدی برای زیر فضای V پدید آمده توسط β_1, \dots, β_m باشد. برای ساختن بردار بعدی یعنی α_{m+1} ، قرار می دهیم:

$$\alpha_{m+1} = \beta_{m+1} - \sum_{k=1}^m \frac{(\beta_{m+1} | \alpha_k)}{\|\alpha_k\|^2} \alpha_k. \quad (9-8)$$

آنگاه $\alpha_{m+1} \neq 0$. زیرا در غیر این صورت β_{m+1} ترکیبی خطی از $\alpha_m, \dots, \alpha_1$ ، و از این رو ترکیبی خطی از β_1, \dots, β_m است. بعلاوه، اگر $1 \leq j \leq m$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} (\alpha_{m+1} | \alpha_j) &= (\beta_{m+1} | \alpha_j) - \sum_{k=1}^m \frac{(\beta_{m+1} | \alpha_k)}{\|\alpha_k\|^2} (\alpha_k | \alpha_j) \\ &= (\beta_{m+1} | \alpha_j) - (\beta_{m+1} | \alpha_j) \\ &= 0. \end{aligned}$$

بنابراین، $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}\}$ مجموعه متعامدی متشکل از $m+1$ بردار غیر صفر از زیر فضای پدید آمده توسط $\beta_1, \dots, \beta_{m+1}$ است. بنا بر قضیه ۲، این مجموعه پایه ای برای این زیر فضا است. پس بردارهای $\alpha_m, \dots, \alpha_1$ یکی پس از دیگری، طبق (9-8) می توانند ساخته شوند. بخصوص، وقتی که $n=4$ ، داریم

$$\alpha_1 = \beta_1$$

$$\alpha_2 = \beta_2 - \frac{(\beta_2 | \alpha_1)}{\|\alpha_1\|^2} \alpha_1$$

$$\alpha_3 = \beta_3 - \frac{(\beta_3 | \alpha_1)}{\|\alpha_1\|^2} \alpha_1 - \frac{(\beta_3 | \alpha_2)}{\|\alpha_2\|^2} \alpha_2 \quad (10-8)$$

$$\alpha_4 = \beta_4 - \frac{(\beta_4 | \alpha_1)}{\|\alpha_1\|^2} \alpha_1 - \frac{(\beta_4 | \alpha_2)}{\|\alpha_2\|^2} \alpha_2 - \frac{(\beta_4 | \alpha_3)}{\|\alpha_3\|^2} \alpha_3. \quad \square$$

نتیجه. هر فضای ضرب داخلی با بعد متناهی دارای يك پایه متعامد يکه است.

اثبات. V را يك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ را پایه ای برای V می گیریم. فرایند گرام-اشمیت را به کار می بندیم و پایه متعامد $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ را می سازیم. آنگاه برای به دست آوردن يك پایه متعامد يکه، به جای هر بردار α_k بردار $\alpha_k / \|\alpha_k\|$ را قرار می دهیم. \square

یکی از مزایای عمده‌ای که پایه‌های متعامد یکه بر پایه‌های دلخواه دارند این است که در آنها محاسبات مربوط به مختصات ساده تر هستند. برای این که کلاً نشان دهیم که چرا این مطلب درست است، فرض می‌کنیم V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی باشد. آنگاه، مانند بخش قبل، می‌توانیم معادله (۸-۵) را برای وابسته کردن ماتریسی چون G به هر پایه مرتب $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ از V ، به کار ببریم. با استفاده از این ماتریس که در آن

$$G_{jk} = (\alpha_k | \alpha_j)$$

می‌توانیم ضربهای داخلی را بر حسب مختصات محاسبه کنیم. اگر \mathcal{B} یک پایه متعامد یکه باشد، آنگاه G ماتریس همانی است و به ازای همه اسکالره‌های x_j و y_k

$$\left(\sum_j x_j \alpha_j \mid \sum_k y_k \alpha_k \right) = \sum_j x_j \bar{y}_j.$$

بدین گونه، بر حسب یک پایه متعامد یکه، ضرب داخلی در V مثل ضرب داخلی استاندارد در F^n به نظر می‌رسد.

جالب است بدانیم که فرایند گرام - اشمیت می‌تواند برای آزمایش وابستگی خطی نیز مورد استفاده قرار گیرد؛ هر چند این کاربرد در محاسبات مختلف دارای استفاده‌های عملی محدودی است. زیرا، فرض کنیم β_1, \dots, β_m بردارهایی وابسته خطی در یک فضای ضرب داخلی V باشند. برای اینکه حالتی بدیهی را مستثنی کنیم، فرض می‌کنیم $\beta_1 \neq 0$. m را بزرگترین عدد صحیحی می‌گیریم که به ازای آن β_1, \dots, β_m مستقل باشند. در این صورت $n > m$ را بردارهای حاصل از به کار بستن فرایند متعامدسازی به β_1, \dots, β_m فرض می‌کنیم. در این صورت بردار α_{m+1} حاصل از (۸-۹)، لزوماً ۰ است. چرا که α_{m+1} در زیر فضای پدیدآمده توسط $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ قرار دارد و بر هر یک از این بردارها عمود است، از این رو، بنا بر (۸-۸)، برابر ۰ می‌باشد. بعکس، اگر $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ مخالف ۰ باشند و $\alpha_{m+1} = 0$ ، آنگاه $\beta_1, \dots, \beta_{m+1}$ وابسته خطی هستند.

مثال ۰۹۴. بردارهای

$$\beta_1 = (3, 0, 2)$$

$$\beta_2 = (-1, 0, 7)$$

$$\beta_3 = (2, 9, 11)$$

در R^3 ، مجهز به ضرب داخلی استاندارد را در نظر می‌گیریم. با به کار بستن فرایند گرام - اشمیت به $\beta_3, \beta_2, \beta_1$ بردارهای زیر به دست می‌آیند.

$$\alpha_1 = (3, 0, 4)$$

$$\alpha_2 = (-1, 0, 7) - \frac{((-1, 0, 7)|(3, 0, 4))}{25} (3, 0, 4)$$

$$= (-1, 0, 7) - (3, 0, 4)$$

$$= (-4, 0, 3)$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= (2, 9, 11) - \frac{((2, 9, 11)|(3, 0, 4))}{25} (3, 0, 4) \\ &\quad - \frac{((2, 9, 11)|(-4, 0, 3))}{25} (-4, 0, 3) \end{aligned}$$

$$= (2, 9, 11) - 2(3, 0, 4) - (-4, 0, 3)$$

$$= (0, 9, 0)$$

بدیهی است که این بردارها غیر صفر هستند و دو به دو برهم متعامد. از این رو، $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ پایه متعامدی برای R^3 است. برای بیان یک بردار دلخواه (x_1, x_2, x_3) در R^3 به صورت ترکیبی خطی از $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$ لزومی به حل هیچ معادله خطی نیست؛ زیرا، کافی است (۸-۱) به کار بسته شود. پس، بسادگی نشان داده می شود که

$$(x_1, x_2, x_3) = \frac{3x_1 + 4x_2}{25} \alpha_1 + \frac{-4x_1 + 3x_2}{25} \alpha_2 + \frac{x_2}{9} \alpha_3.$$

بخصوص،

$$(1, 2, 3) = \frac{3}{5} (3, 0, 4) + \frac{1}{5} (-4, 0, 3) + \frac{2}{9} (0, 9, 0).$$

آنچه را که نشان داده ایم به عبارتی دیگر چنین است: پایه $\{f_1, f_2, f_3\}$ از $(R^3)^*$ که دوگان پایه $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ است، به طور صریح طبق معادلات

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{3x_1 + 4x_2}{25}$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{-4x_1 + 3x_2}{25}$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_2}{9}$$

تعریف می شود. این معادلات می توانند به صورت کلیتر

$$f_j(x_1, x_2, x_3) = \frac{((x_1, x_2, x_3) | \alpha_j)}{\|\alpha_j\|^2}$$

نیز نوشته شوند. سرانجام، توجه کنید که از $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ پایه متعامد یکه

$$\frac{1}{5}(3, 0, 4), \frac{1}{5}(-4, 0, 3), (0, 1, 0)$$

به دست می آید.

مثال ۱۳. فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و در آن a, b, c, d اعداد مختلطی باشند.

می نویسیم $\beta_1 = (a, b)$ و $\beta_2 = (c, d)$ و فرض می کنیم $\beta_1 \neq 0$. اگر فرایند متعامدسازی را با استفاده از ضرب داخلی استاندارد در C^2 روی β_1 و β_2 به کار بندیم، بردارهای زیر را به دست می آوریم:

$$\alpha_1 = (a, b)$$

$$\alpha_2 = (c, d) - \frac{((c, d) | (a, b))}{|a|^2 + |b|^2} (a, b)$$

$$= (c, d) - \frac{(c\bar{a} + d\bar{b})}{|a|^2 + |b|^2} (a, b)$$

$$= \left(\frac{cb\bar{b} - d\bar{b}a}{|a|^2 + |b|^2}, \frac{d\bar{a}a - c\bar{a}b}{|a|^2 + |b|^2} \right)$$

$$= \frac{\det A}{|a|^2 + |b|^2} (-b, \bar{a}).$$

حال نظریه عمومی حاکی است که $\alpha_2 \neq 0$ اگر و تنها اگر β_1 و β_2 مستقل خطی باشند. از طرف دیگر، فرمول α_2 نشان می دهد که این مطلب برقرار است اگر و تنها اگر $\det A \neq 0$.

در اصل، فرایند گرام-اشمیت متشکل از کاربسته های مکرر يك عمل هندسی بنیادی موسوم به تصویر متعامد است، و از این دیدگاه است که به بهترین وجه مفهوم می شود. روش تصویر متعامد، به طور طبیعی در حل يك مسئله مهم تقریب نیز پیش می آید.

فرض کنیم W زیرفضایی از يك فضای ضرب داخلی V باشد و β بردار دلخواهی از V . مسئله عبارت است از یافتن بهترین تقریب ممکن برای β توسط بردارهای W . این مطلب بدین معنی است که می خواهیم برداری چون α را بیابیم که به ازای آن

$\|\beta - \alpha\|$ تا حد ممکن كوچك باشد، منوط به اين محدوديت كه α به W تعلق داشته باشد. حال گفته شويد را دقيقتر بيان كنيم.

يك بهترين تقريبنه برای β توسط بردارهای W برداری است مانند α در W كه به ازای هر بردار γ در W

$$\|\beta - \alpha\| \leq \|\beta - \gamma\|.$$

با توجه به همین مسئله در R^2 ياد R^2 ، به طور شهودی درمی یابيم كه بهترين تقريبنه برای β توسط بردارهای W باید برداری چون α در W باشد كه $\beta - \alpha$ بر W عمود باشد، و نیز اينكه باید دقیقاً يك چنین α يی وجود داشته باشد. اين ایده های شهودی برای زیر-فضاهای با بعد منتهای، و نیز برای برخی از، ولی نه همه، زیرفضاهای با بعد نامتناهی درست هستند. چون وضعیت دقيق بسیار پیچیده تر از آن است كه بتواند در اینجا مورد بحث قرار گیرد، تنها قضیه زیر را اثبات می كنيم.

قضیه ۴. فرض كنيم W زیر فضایی از يك فضای ضرب داخلى V و β برداری از V باشد.

(۱) بزرگ α در W ، يك بهترين تقريبنه برای β توسط بردارهای W است اگر وقتها اگر $\beta - \alpha$ بر هر بردار W عمود باشد.

(۲) اگر يك بهترين تقريبنه برای β توسط بردار های W وجود داشته باشد، يكتاست.

(۳) اگر W با بعد منتهای و $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ يك پایه متعامد يكه برای W باشد، آنگاه بردار

$$\alpha = \sum_k (\beta | \alpha_k) \alpha_k \quad (11-8)$$

بهترين تقريبنه (يكتای) β توسط بردارهای W است.

اثبات. ابتدا توجه كنيد كه اگر γ برداری دلخواه در V باشد، آنگاه

$$\beta - \gamma = (\beta - \alpha) + (\alpha - \gamma)$$

$$\|\beta - \gamma\|^2 = \|\beta - \alpha\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\beta - \alpha | \alpha - \gamma) + \|\alpha - \gamma\|^2.$$

حال فرض كنيم $\beta - \alpha$ بر هر بردار W عمود باشد، γ در W باشد، و $\gamma \neq \alpha$. در اين صورت، چون $\alpha - \gamma$ در W قرار دارد، نتيجه می شود كه

$$\begin{aligned} \|\beta - \gamma\|^2 &= \|\beta - \alpha\|^2 + \|\alpha - \gamma\|^2 \\ &> \|\beta - \alpha\|^2. \end{aligned}$$

بعكس، فرض كنيم به ازای هر γ در W ، $\|\beta - \gamma\| \geq \|\beta - \alpha\|$. آنگاه از اولين معادله بالا نتيجه می شود كه به ازای هر γ در W ،

$$2\operatorname{Re}(\beta - \alpha | \alpha - \gamma) + \|\alpha - \gamma\|^2 \geq 0.$$

چون هر بردار در W می تواند به صورت $\alpha - \gamma$ ، به ازای γ یسی در W ، بیان شود ، می بینیم که به ازای هر τ در W

$$2\operatorname{Re}(\beta - \alpha | \tau) + \|\tau\|^2 \geq 0.$$

بخصوص ، اگر γ در W باشد و $\gamma \neq \alpha$ ، می توانیم داشته باشیم

$$\tau = -\frac{(\beta - \alpha | \alpha - \gamma)}{\|\alpha - \gamma\|^2}(\alpha - \gamma).$$

در این صورت نامساوی به حکم زیر تحویل می شود

$$-2\frac{|(\beta - \alpha | \alpha - \gamma)|^2}{\|\alpha - \gamma\|^2} + \frac{|(\beta - \alpha | \alpha - \gamma)|^2}{\|\alpha - \gamma\|^2} \geq 0.$$

این نامساوی برقرار است اگر و تنها اگر $(\beta - \alpha | \alpha - \gamma) = 0$. بنا براین $\beta - \alpha$ بر هر بردار W عمود است. این مطلب اثبات هم ارزی دو شرط داده شده در (۱) روی α را کامل می کند. بدیهی است شرط تعامد حداکثر توسط يك بردار W بر آورده می شود و این (۲) را اثبات می کند.

حال فرض کنیم W يك زیر فضای با بعد متناهی V باشد. در این صورت به عنوان نتیجه ای از قضیه ۳ می دانیم که W يك پایه متعامد يکه دارد. $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ را يك پایه متعامد يکه برای W می گیریم و α را طبق (۸-۱۱) تعریف می کنیم. در این صورت ، طبق محاسبه موجود در اثبات قضیه ۳ ، $\beta - \alpha$ بر هر بردار α_k عمود است $(\beta - \alpha | \alpha_k) = 0$ که در آخرین مرحله ، وقتی که فرایند متعامد سازی بر $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ، به کار بسته می شود ، به دست می آید). پس ، $\beta - \alpha$ بر هر ترکیب خطی $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ، یعنی بر هر بردار W عمود است. اگر γ در W باشد و $\gamma \neq \alpha$ ، نتیجه می شود که $\|\beta - \gamma\| > \|\beta - \alpha\|$. بنا براین α بهترین تقریب برای β است که در W قرار دارد. \square

تعریف. گیریم V يك فضای ضرب داخلی و S مجموعه ای از بردارهای V باشد . مکمل متعامد S عبارت است از مجموعه S^\perp متشکل از همه بردارهایی از V که بر همه بردارهای S عمود باشند.

مکمل متعامد V عبارت است از زیر فضای صفر و بعکس $V^\perp = \{0\}$. اگر S زیر-مجموعه ای از V باشد ، مکمل متعامد آن S^\perp (عمود S) همواره زیر فضایی از V است. زیرا S^\perp غیر تهی است ، چرا که شامل 0 است و در صورتی که α و β در S^\perp و c اسکالر دلخواه باشد ، به ازای هر γ در S

$$\begin{aligned} (c\alpha + \beta | \gamma) &= c(\alpha | \gamma) + (\beta | \gamma) \\ &= c \cdot 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

پس، $c\alpha + \beta$ نیز در S قرار می‌گیرد. بنا بر قضیه ۴، خاصیت مشخص بردار α این است که تنها بردار W است که $\beta - \alpha$ به W^\perp تعلق دارد.

تعریف. در صورتی که بردار α در قضیه ۴ وجود داشته باشد، تصویر متعامد β روی W نامیده می‌شود. اگر بردار V تصویر متعامدی روی W داشته باشد، نگاشتی که به هر بردار V تصویر متعامد آن روی W را اختصاص می‌دهد، تصویر متعامد V روی W نام دارد.

طبق قضیه ۴، تصویر متعامد هر فضای ضرب داخلی روی يك زیر فضای با بعد متناهی، همواره وجود دارد. قضیه ۴ همچنین نتیجهٔ زیر را ایجاب می‌کند.

نتیجه. گیریم V يك فضای ضرب داخلی، W يك زیر فضای با بعد متناهی، و E تصویر متعامد V روی W باشد. در این صورت نگاشت

$$\beta \rightarrow \beta - E\beta$$

تصویر متعامد V روی W^\perp است.

اثبات. β را بردار دلخواهی از V می‌گیریم. آنگاه $\beta - E\beta$ در W^\perp قرار دارد و به ازای هر γ در W^\perp ، $\beta - E\beta - \gamma$ ، چون $\beta - \gamma = E\beta + (\beta - E\beta - \gamma)$ ، $\beta - E\beta - \gamma$ متعلق به W^\perp است، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \|\beta - \gamma\|^2 &= \|E\beta\|^2 + \|\beta - E\beta - \gamma\|^2 \\ &\geq \|\beta - (\beta - E\beta)\|^2 \end{aligned}$$

و وقتی $\gamma \neq \beta - E\beta$ ، نامساوی اکید است. بنابراین، $\beta - E\beta$ بهترین تقریب برای β توسط بردارهای W^\perp است. \square

مثال ۱۴. به R^3 ضرب داخلی استاندارد را می‌دهیم. در این صورت تصویر متعامد $(-10, 2, 8)$ روی زیر فضای W ، پدید آمده توسط $(3, 12, -1)$ ، عبارت است از بردار

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{((-10, 2, 8) | (3, 12, -1))}{9 + 144 + 1} (3, 12, -1) \\ &= \frac{-14}{154} (3, 12, -1). \end{aligned}$$

تصویر متعامد R^3 روی W تبدیل خطی E تعریف شده توسط

$$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow \left(\frac{3x_1 + 12x_2 - x_3}{154} \right) (3, 12, -1)$$

است. مسلماً رتبه E برابر ۱ است؛ و از این رو، پوچیش برابر ۲ است. از طرف دیگر

$$E(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$$

اگر و تنها اگر $3x_1 + 12x_2 - x_3 = 0$ و این منطبق بر قرار است اگر و تنها اگر (x_1, x_2, x_3) در W^\perp باشد. بنابراین، فضای پوچ E است و $\dim(W^\perp) = 2$ با محاسبه

$$(x_1, x_2, x_3) - \left(\frac{3x_1 + 12x_2 - x_3}{154} \right) (3, 12, -1)$$

می بینیم که تصویر متعامد R^3 روی W^\perp عبارت است از تبدیل خطی $I - E$ که بردار (x_1, x_2, x_3) را روی بردار

$$\frac{1}{154}(145x_1 - 36x_2 + 3x_3, -36x_1 + 10x_2 +$$

$$12x_3, 3x_1 + 12x_2 + 153x_3)$$

می نگارد.

مشاهداتی که در مثال ۱۴ به عمل آمد، به گونه زیر تعمیم می یابند.

قضیه ۵. فرض کنیم W زیرفضایی با بعد متناهی از فضای ضرب داخلی V و $E \in V$ تصویر متعامد V روی W باشد. در این صورت E تبدیل خطی خودتوانی از V روی W است، W^\perp فضای پوچ E است، و

$$V = W \oplus W^\perp.$$

اثبات. β را برداری دلخواه در V می گیریم. در این صورت $E\beta$ بهترین تقریب برای β است که در W قرار دارد. بخصوص، وقتی که β متعلق به W باشد، $E\beta = \beta$. بنابراین، به ازای هر $\beta \in V$ ، $E(E\beta) = E\beta$ ؛ یعنی، E خودتوان است: $E^2 = E$. برای اینکه ثابت کنیم E تبدیلی خطی است، α و β را بردارهایی از V ، و c را اسکالری دلخواه می گیریم. در این صورت، بنا بر قضیه ۴، $\alpha - E\alpha$ و $\beta - E\beta$ هر دو بر هر بردار W عمود هستند. از این رو، بردار

$$c(\alpha - E\alpha) + (\beta - E\beta) = (c\alpha + \beta) - (cE\alpha + E\beta)$$

نیست؛ به W^\perp متعلق دارد. چون $cE\alpha + E\beta$ برداری است در W ، از قضیه ۴ نتیجه می شود که

$$E(c\alpha + \beta) = cE\alpha + E\beta.$$

بدیهی است که می‌توان خطی بودن E را با استفاده از (۸-۱۱) نیز اثبات کرد. مجدداً β را برداری از V می‌گیریم. آنگاه $E\beta$ یک‌ا بردار در W است که $\beta - E\beta$ در W^\perp قرار دارد. پس، وقتی که β در W^\perp باشد، $E\beta = 0$. بعکس، وقتی که β در W است. پس، W^\perp فضای پوچ E است. معادله

$$\beta = E\beta + \beta - E\beta$$

نشان می‌دهد که $V = W + W^\perp$ ؛ بعلاوه، $W \cap W^\perp = \{0\}$. زیرا اگر α برداری در $W \cap W^\perp$ باشد، آنگاه $(\alpha|\alpha) = 0$. بنابراین $\alpha = 0$ ، و V مجموع مستقیم W و W^\perp می‌باشد. \square

نتیجه. تحت شرایط قضیه فوق، $I - E$ تصویر متعامد V روی W^\perp است. این تصویر تبدیل خطی خودتوانی از V روی W^\perp و با فضای پوچ W است. اثبات. پیش از این دیدیم که نگاشت $\beta \rightarrow \beta - E\beta$ تصویر متعامد V روی W^\perp است. چون E تبدیلی خطی است، این تصویر روی W^\perp تبدیل خطی $I - E$ می‌باشد. از خواص هندسی این تبدیل خطی مشهود است که $I - E$ تبدیل خودتوانی از V روی W است. این موضوع از محاسبه

$$\begin{aligned} (I - E)(I - E) &= I - E - E + E^2 \\ &= I - E \end{aligned}$$

نیز نتیجه می‌شود. بعلاوه، $(I - E)\beta = 0$ اگر و تنها اگر $\beta = E\beta$ ؛ این مطلب برقرار است اگر و تنها اگر β در W باشد. بنابراین W فضای پوچ $I - E$ است. \square

اکنون فرایند گرام-اشمیت را می‌توان به‌طور هندسی به‌طریق زیر تشریح کرد. با مفروض بودن یک فضای ضرب داخلی V و بردارهای β_1, \dots, β_n در V ، عملگر P_k ($k > 1$) را تصویر متعامد V روی مکمل متعامد زیرفضای پدیدآمده توسط $\beta_1, \dots, \beta_{k-1}$ می‌گیریم و قرار می‌دهیم $P_k = I$. در این صورت بردارهایی که از به‌کار بستن فرایند متعامد سازی روی β_1, \dots, β_n به‌دست می‌آیند، با معادلات

$$\alpha_k = P_k \beta_k \quad 1 \leq k \leq n \quad (12-8)$$

تعریف می‌شوند.

قضیه ۵ نتیجه دیگری را نیز ايجاب می‌کند که به نامسوی بسل مشهور است.

نتیجه. فرض کنیم $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ مجموعه‌ای متعامد از بردارهای غیرصفر فضایی

ضرب داخلی V باشد. اگر β برداری از V باشد، آنگاه

$$\sum_k \frac{|\langle \beta | \alpha_k \rangle|^2}{\|\alpha_k\|^2} \leq \|\beta\|^2$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر

$$\beta = \sum_k \frac{\langle \beta | \alpha_k \rangle}{\|\alpha_k\|^2} \alpha_k.$$

اثبات. فرض کنیم $\gamma = \sum_k [\langle \beta | \alpha_k \rangle / \|\alpha_k\|^2] \alpha_k$ در این صورت $\beta = \gamma + \delta$ و در

آن $(\gamma | \delta) = 0$ از این رو

$$\|\beta\|^2 = \|\gamma\|^2 + \|\delta\|^2.$$

اکنون کافی است ثابت کنیم که

$$\|\gamma\|^2 = \sum_k \frac{|\langle \beta | \alpha_k \rangle|^2}{\|\alpha_k\|^2}.$$

ایین محاسبه سرراستی است که در آن از این مطلب که به ازای $j \neq k$ ، $(\alpha_j | \alpha_k) = 0$ استفاده می‌شود. \square

در حالت خاصی که در آن $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ یک مجموعه متعامد یکه باشد، نامساوی بسل می‌گوید که

$$\sum_k |\langle \beta | \alpha_k \rangle|^2 \leq \|\beta\|^2.$$

این نتیجه همچنین حاکی است که در این حالت β در زیر فضای پدید آمده توسط $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ قرار دارد اگر و تنها اگر

$$\beta = \sum_k \langle \beta | \alpha_k \rangle \alpha_k$$

یا اگر و تنها اگر نامساوی بسل واقعاً یک تساوی باشد. بدیهی است در موردی که V با بعد متناهی و $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ یک پایه متعامد یکه برای V باشد، فرمول بالا برای هر بردار β در V برقرار است. به بیان دیگر، اگر $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ یک پایه متعامد یکه برای V باشد، k مین مختص β در پایه مرتب $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ عبارت است از $\langle \beta | \alpha_k \rangle$.

مثال ۱۵. نتیجه اخیر را روی مجموعه‌های متعامد توصیف شده در مثال ۱۱ به کار می‌بندیم و به دست می‌آوریم که

$$\sum_{k=-n}^n \left| \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i k t} dt \right|^2 \leq \int_0^1 |f(t)|^2 dt \quad (\text{الف})$$

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=-n}^n c_k e^{x_n ikt} \right|^2 dt = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \quad (\text{ب})$$

$$\cdot \int_0^1 (\sqrt{2} \cos 2\pi t + \sqrt{2} \sin 4\pi t)^2 dt = 1 + 1 = 2 \quad (\text{پ})$$

تمرین

۰۱. R^4 با ضرب داخلی استاندارد را در نظر بگیرید. W را زیرفضایی از R^4 متشکل از همه بردارهایی که هم بر $\alpha = (1, 0, -1, 1)$ و هم بر $\beta = (2, 3, -1, 2)$ عمود هستند فرض کنید و پایه‌ای برای W بیابید.

۰۲. فرایند گرام - اشمیت را بر بردارهای $\beta_1 = (1, 0, 1)$ ، $\beta_2 = (1, 0, -1)$ ، و $\beta_3 = (0, 3, 4)$ به کار بندید تا پایه متعامدیکه‌ای برای R^3 با ضرب داخلی استاندارد به دست آورید.

۰۳. C^3 را با ضرب داخلی استاندارد در نظر بگیرید. یک پایه متعامدیکه برای زیرفضای پدیدآمده توسط $\beta_1 = (1, 0, i)$ و $\beta_2 = (2, 1, 1+i)$ بیابید.

۰۴. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی باشد. فاصله بین دو بردار α و β در V با

$$d(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\|$$

تعریف می‌شود. نشان دهید که

$$; d(\alpha, \beta) \geq 0 \quad (\text{الف})$$

$$; \alpha = \beta \text{ اگر و تنها اگر } d(\alpha, \beta) = 0 \quad (\text{ب})$$

$$; d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha) \quad (\text{پ})$$

$$. d(\alpha, \beta) \leq d(\alpha, \gamma) + d(\gamma, \beta) \quad (\text{ت})$$

۰۵. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی باشد، و α و β بردارهایی از V باشند. نشان دهید $\alpha = \beta$ اگر و تنها اگر به ازای هر γ در V ، $(\alpha|\gamma) = (\beta|\gamma)$.

۰۶. فرض کنید W زیرفضایی از R^2 پدیدآمده توسط بردار $(3, 4)$ باشد. با استفاده از ضرب داخلی استاندارد، E را تصویر متعامد R^2 بروی W بگیرید. مطلوب است:

$$; E(x_1, x_2) \text{ فرمولی برای}$$

$$; \text{ماتریس } E \text{ در پایه مرتب استاندارد}$$

$$; W^\perp$$

$$; \text{پایه متعامدیکه‌ای که در آن } E \text{ با ماتریس}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نمایش داده شود.

۷. فرض کنید V فضای داخلی متشکل از R^2 همراه با ضرب داخلی باشد که فرم درجه دوم آن طبق

$$\|(x_1, x_2)\|^2 = (x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2$$

تعریف می شود. E را تصویر متعامد V بروی زیر فضای W پدید آمده توسط بردار $(3, 4)$ می گیریم. اکنون به چهار پرسش تمرین ۶ پاسخ دهید.

۸. ضربی داخلی روی R^2 بیابید که $(\epsilon_1, \epsilon_2) = 2$.

۹. فرض کنید V زیرفضایی از $R[x]$ متشکل از چندجمله‌ایهای از درجه حداکثر ۳ باشد. V را به ضرب داخلی

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

مجهز کنید.

(الف) مکمل متعامد زیرفضای چندجمله‌ایهای اسکالری را بیابید.

(ب) فرایند گرام - اشمیت را بر پایه $\{1, x, x^2, x^3\}$ به کار بندید.

۱۰. فرض کنید V فضای برداری همه ماتریسهای $n \times n$ بر روی C با ضرب داخلی $(A|B) = \text{tr}(AB^*)$ باشد. مکمل متعامد زیرفضای ماتریسهای قطری را بیابید.

۱۱. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ یک پایه متعامدیکه برای V باشد. نشان دهید که به ازای هر دو بردار α و β در V

$$(\alpha|\beta) = \sum_{k=1}^n (\alpha|\alpha_k)(\beta|\alpha_k).$$

۱۲. فرض کنید W زیرفضایی با بعد متناهی از یک فضای ضرب داخلی V ، و E تصویر متعامد V روی W باشد. ثابت کنید که بازای هر α و β در V ، $(E\alpha|\beta) = (\alpha|E\beta)$.

۱۳. S را زیر مجموعه‌ای از یک فضای ضرب داخلی V می گیریم. نشان دهید $(S^\perp)^\perp$ زیرفضای پدید آمده توسط S را در بر دارد. وقتی که V با بعد متناهی باشد، نشان دهید $(S^\perp)^\perp$ همان زیرفضای پدید آمده توسط S است.

۱۴. فرض کنید V يك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ يك پایه متعامد يکه برای V باشد. فرض کنید T عملگری خطی روی V و A ماتریس T در پایه مرتب \mathcal{B} باشد. ثابت کنید

$$A_{ij} = (T\alpha_j | \alpha_i).$$

۱۵. فرض کنید $V = W_1 \oplus W_2$ و f_1 و f_2 بترتیب ضربیهایی داخلی روی W_1 و W_2 باشند. نشان دهید ضرب داخلی یکنایی چون f روی V وجود دارد که

$$W_2 = W_1^\perp \quad (\text{الف})$$

$$f(\alpha, \beta) = f_k(\alpha, \beta) \text{ باشد، } k = 1, 2, W_k \text{ در } \beta \text{ و } \alpha \text{ وقتی}$$

۱۶. فرض کنید V يك فضای ضرب داخلی و W زیرفضایی با بعد متناهی از V باشد. (معمولاً) تصویرهای بسیاری یافت می‌شوند که بردشان W است. یکی از اینها، که تصویر متعامد روی W است، این خاصیت را دارد که به ازای هر α در V ، $\|E\alpha\| \leq \|\alpha\|$. ثابت کنید که اگر E يك تصویر با برد W باشد و به ازای هر α در V ، $\|E\alpha\| \leq \|\alpha\|$ ، آنگاه E تصویر متعامد روی W است.

۱۷. فرض کنید V فضای ضرب داخلی حقیقی متشکل از فضای ترابع پیوسته حقیقی روی فاصله $1 \leq t \leq 1$ — با ضرب داخلی

$$(f|g) = \int_{-1}^{+1} f(t)g(t)dt$$

باشد. W را زیرفضای توابع فرد، یعنی ترابعی که در $f(-t) = -f(t)$ صدق می‌کنند، می‌گیریم. مکمل متعامد W را بیابید.

۳.۸. تابعهای خطی و الحاقیها

قسمت اول این بخش به بحث در مورد تابعهای خطی روی يك فضای ضرب داخلی و رابطه آنها با ضرب داخلی اختصاص دارد. نتیجه بنیادی این است که هر تابع خطی f روی يك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی، «ضربی داخلی درازای برداری ثابت از فضا» است؛ یعنی، چنین f ی به ازای β ثابتی از V به صورت $f(\alpha) = (\alpha|\beta)$ است. این نتیجه را برای اثبات وجود «الحاقی» عملگری خطی چون T روی V ، که خود عملگری خطی چون T^* باشد $(T\alpha|\beta) = (\alpha|T^*\beta)$ به ازای همه α ها و β های در V است، به کار می‌بریم. با استفاده از يك پایه متعامد يکه، این عمل الحاقی روی عملگرهای خطی (رسیدن از T به T^*) همانند با عمل تشکیل ترانهادة مزدوج T ماتریس، گسرتنه می‌شود. سپس درباره شباهت بین عمل الحاقی و مزدوج گیری در اعداد مختلط به اندک کاوشی می‌پردازیم. فرض کنیم V فضای ضرب داخلی دلخواه و β بردار ثابتی از V باشد. تابعی چون

f_β از V درهیات اسکالری را طبق

$$f'_\beta(\alpha) = (\alpha|\beta)$$

تعریف می کنیم. این تابع f_β تابعکی خطی روی V است؛ زیرا، بنا بر تعریف، $(\alpha|\beta)$ به عنوان تابعی از α خطی است. اگر V با بعد متناهی باشد، هر تابع خطی روی V بدین طریق از برداری چون β حاصل می شود.

قضیه ۶. فرض کنیم V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و f تابعکی خطی روی V باشد. در این صورت بردار یکتایی چون β در V وجود دارد. که به ازای هر α در V ، $f(\alpha) = (\alpha|\beta)$.

اثبات. فرض کنیم $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ یک پایه متعامدیکه برای V باشد.

می نویسیم

$$\beta = \sum_{j=1}^n \overline{f(\alpha_j)} \alpha_j \quad (13-8)$$

و فرض می کنیم f تابع خطی تعریف شده توسط

$$f_\beta(\alpha) = (\alpha|\beta)$$

باشد. در این صورت

$$f_\beta(\alpha_k) = (\alpha_k | \sum_j \overline{f(\alpha_j)} \alpha_j) = f(\alpha_k).$$

چون این مطلب به ازای هر α_k درست است، نتیجه می شود که $f = f_\beta$. حال فرض کنیم γ برداری در V باشد به طوری که به ازای هر α ، $(\alpha|\beta) = (\alpha|\gamma)$. آنگاه $(\beta - \gamma | \beta - \gamma) = 0$ و $\beta = \gamma$. پس، دقیقاً یک بردار چون β وجود دارد که تابع خطی f را به طریقه ای که ذکر شد، تعیین می کند. \square

اثبات این قضیه می تواند به صورت دیگری بر حسب نمایش تابعهای خطی در یک پایه هم بیان شود. اگر پایه متعامدیکه $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ را برای V انتخاب کنیم، ضرب داخلی $\beta = y_1 \alpha_1 + \dots + y_n \alpha_n$ و $\alpha = x_1 \alpha_1 + \dots + x_n \alpha_n$ برابر است با

$$(\alpha|\beta) = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n.$$

اگر f تابعکی خطی روی V باشد، آنگاه f به ازای اسکالرهایی ثابتی چون c_1, \dots, c_n که توسط این پایه تعیین می شوند، به صورت

$$f(\alpha) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

نوشته می‌شود. بدیهی است که $c_j = f(\alpha_j)$. اگر بخواهیم برداری چون β در V بیابیم که به ازای هر α ، $(\alpha|\beta) = f(\alpha)$ ، روشن است که مختصات y_j از β باید در $\bar{y}_j = c_j$ یا $y_j = \overline{f(\alpha_j)}$ صدق کنند. از این رو،

$$\beta = \overline{f(\alpha_1)}\alpha_1 + \dots + \overline{f(\alpha_n)}\alpha_n$$

بردار مطلوب است.

چند توضیح دیگر هم در پیش است. اثباتی را که برای قضیه ۶ ارائه کردیم به طور رضایت بخشی خلاصه است، اما بر این واقعیت مهم هندسی که β در مکمل متعامد فضای پوچ f قرار دارد هیچ تأکید نمی‌کند. گیریم W فضای پوچ f باشد. در این صورت $V = W + W^\perp$ و f توسط مقادیرش روی W^\perp کاملاً تعیین می‌شود. در واقع، اگر P تصویر متعامد V روی W^\perp باشد، آنگاه به ازای هر α در V

$$f(\alpha) = f(P\alpha).$$

فرض کنیم $f \neq 0$. آنگاه f از رتبه ۱ است و $1 = \text{بعد}(W^\perp)$. اگر γ برداری غیر صفر در W^\perp باشد، نتیجه می‌شود که به ازای هر α در V

$$P\alpha = \frac{(\alpha|\gamma)}{\|\gamma\|^2} \gamma.$$

پس، به ازای هر α

$$f(\alpha) = (\alpha|\gamma) \cdot \frac{f(\gamma)}{\|\gamma\|^2}$$

$$\beta = [f(\gamma)/\|\gamma\|^2] \gamma \text{ و}$$

مثال ۱۶. بهتر است مثالی بزنیم که نشان دهد قضیه ۶ بدون این فرض که V با بعد متناهی است، درست نیست. V را فضای برداری چند جمله‌ایهای بر روی هیأت اعداد مختلط با ضرب داخلی

$$(f|g) = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt$$

می‌گیریم. این ضرب داخلی رامی‌توان به‌طور جبری نیز تعریف کرد. اگر $f = \sum \alpha_k x^k$ و $g = \sum b_k x^k$ ، آنگاه

$$(f|g) = \sum_{j,k} \frac{1}{j+k+1} \alpha_j \bar{b}_k.$$

گیریم z عدد مختلط ثابتی و L تابع خطی «تعیین مقدار در z » باشد:

$$L(f) = f(z).$$

آیا يك چند جمله‌ای چون g وجود دارد که به ازای هر f ، $(f|g) = L(f)$ ؟ جواب منفی است؛ زیرا فرض کنیم به ازای هر f داشته باشیم

$$f(z) = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt.$$

با فرض $h = x - z$ ، به ازای هر f داریم $(hf)(z) = 0$. در این صورت به ازای هر f

$$0 = \int_0^1 h(t) f(t) \overline{g(t)} dt.$$

بخصوص، این تساوی برای $f = \bar{h}g$ نیز برقرار است، پس

$$\int_0^1 |h(t)|^2 |g(t)|^2 dt = 0$$

و از این رو، $hg = 0$. چون $h \neq 0$ ، باید داشته باشیم $g = 0$. ولی L تابع صفر نیست؛ بنابراین، چنین g ی وجود ندارد.

این مثال را می‌توان تا اندازه‌ای به حالتی که در آن L ترکیبی خطی از تعیین مقدارهای نقطه‌ای باشد تعمیم داد. فرض کنیم اعداد مختلط ثابتی چون z_1, \dots, z_n و اسکالرهایی چون c_1, \dots, c_n انتخاب شده باشند و

$$L(f) = c_1 f(z_1) + \dots + c_n f(z_n)$$

را در نظر بگیریم. در این صورت L تابعی خطی روی V است، اما هیچ g با خاصیت $L(f) = (f|g)$ وجود ندارد مگر آنکه $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$. حال عیناً استدلال بالا را با $h = (x - z_1) \dots (x - z_n)$ تکرار می‌کنیم. اکنون به مفهوم الحاقی يك عملگر خطی بازمی‌گردیم.

قضیه ۷. به ازای هر عملگر خطی T روی يك فضای ضرب داخلی بعدمتناهی V ، عملگر خطی یکتایی چون T^* روی V وجود دارد که به ازای هر α و هر β از V ،

$$(T\alpha|\beta) = (\alpha|T^*\beta). \quad (۱۴-۸)$$

اثبات. گیریم β برداری دلخواه از V باشد. در این صورت $(T\alpha|\beta)$ از $\alpha \rightarrow$ تابعی خطی روی V است. بنا بر قضیه ۶، برداریکتایی چون β' در V وجود دارد که به ازای هر α در V ، $(T\alpha|\beta) = (\alpha|\beta')$. فرض کنیم T^* نگاشت $\beta' \rightarrow \beta$ را نشان دهد:

$$\beta' = T^* \beta.$$

لذا (۸-۱۴) برقرار است، اما باید نشان دهیم که T^* عملگری خطی است. گیریم β و γ در V و c يك اسكالر باشد. در این صورت به ازای هر α ،

$$\begin{aligned} (\alpha | T^*(c\beta + \gamma)) &= (T\alpha | c\beta + \gamma) \\ &= (T\alpha | c\beta) + (T\alpha | \gamma) \\ &= c(T\alpha | \beta) + (T\alpha | \gamma) \\ &= c(\alpha | T^*\beta) + (\alpha | T^*\gamma) \\ &= (\alpha | cT^*\beta) + (\alpha | T^*\gamma) \\ &= (\alpha | cT^*\beta + T^*\gamma). \end{aligned}$$

پس، $T^*(c\beta + \gamma) = cT^*\beta + T^*\gamma$ و T^* خطی است.

یکتایی T^* واضح است. به ازای هر β در V ، بردار $T^*\beta$ به عنوان بردار β' با این شرط که به ازای هر α ، $(T\alpha | \beta) = (\alpha | \beta')$ به طور یکتا تعیین می‌شود. \square

قضیه ۸. فرض کنیم V يك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ يك پایه متعامد يکه (مرتب) برای V باشد. T را عملگری خطی روی V و A را ماتریس T در پایه مرتب \mathcal{B} می‌گیریم، آنگاه $A_{kj} = (T\alpha_j | \alpha_k)$. اثبات. چون \mathcal{B} يك پایه متعامد يکه است، داریم

$$\alpha = \sum_{k=1}^n (\alpha | \alpha_k) \alpha_k.$$

ماتریس A با

$$T\alpha_j = \sum_{k=1}^n A_{kj} \alpha_k$$

تعریف می‌شود، و چون

$$T\alpha_j = \sum_{k=1}^n (T\alpha_j | \alpha_k) \alpha_k$$

داریم

$$\square \cdot A_{kj} = (T\alpha_j | \alpha_k)$$

نتیجه. گیریم V يك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و T عملگری خطی روی V

باشد. در هر پایه متعامد یکه برای V ، ماتریس T^* عبارت است از ترانزپوزیته مزدوج ماتریس T .

اثبات. $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ را پایه متعامد یکه ای برای V می گیریم و فرض می کنیم

$$B = [T^*]_{\mathcal{B}}, A = [T]_{\mathcal{B}}$$

بنا بر قضیه ۸

$$A_{kj} = (T\alpha_j | \alpha_k)$$

$$B_{kj} = (T^*\alpha_j | \alpha_k).$$

در این صورت طبق تعریف T^* داریم

$$B_{kj} = (T^*\alpha_j | \alpha_k)$$

$$= \overline{(\alpha_k | T^*\alpha_j)}$$

$$= \overline{(T\alpha_k | \alpha_j)}$$

$$= \overline{A_{jk}}. \square$$

مثال ۱۷. فرض کنیم V فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و E تصویر متعامد روی V یک زیر فضای W باشد. در این صورت به ازای هر دو بردار α و β در V ،

$$(E\alpha | \beta) = (E\alpha | E\beta + (1-E)\beta)$$

$$= (E\alpha | E\beta)$$

$$= (E\alpha + (1-E)\alpha | E\beta)$$

$$= (\alpha | E\beta).$$

بنا بر یکتایی عملگر E^* نتیجه می شود که $E^* = E$. حال تصویر E توصیف شده در مثال ۱۴ را در نظر می گیریم. در این صورت

$$A = \frac{1}{154} \begin{bmatrix} 9 & 36 & -3 \\ 36 & 144 & -12 \\ -3 & -12 & 1 \end{bmatrix}$$

عبارت است از ماتریس E در پایه متعامد یکه استاندارد. چون $E = E^*$ ، $A = A^*$ و چون $A = A^*$ ، این مطلب ناقص نتیجه فوق نیست. از طرف دیگر، فرض کنیم

$$\alpha_1 = (154, 0, 0)$$

$$\alpha_2 = (145, -36, 3)$$

$$\alpha_3 = (-36, 10, 12).$$

در این صورت $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ يك پایه است و

$$E\alpha_1 = (9, 36, -3)$$

$$E\alpha_2 = (0, 0, 0)$$

$$E\alpha_3 = (0, 0, 0).$$

چون $B = (9, 36, -3) = -(154, 0, 0) - (145, -36, 3)$ ماتریس E در پایه $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ ، با تساوی

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تعریف می شود. در این حالت، $B^* \neq B$ و B^* ماتریس $E^* = E$ در پایه $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ نیست. با به کار بستن نتیجه فوق درمی یابیم که $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ يك پایه متعامد يکه نیست. البته، به هر حال این مطلب آشکار هست.

تعریف. گیریم T عملگری خطی روی يك فضای ضرب داخلى V باشد. در این صورت گوییم T دارای يك الحاقی روی V است، هرگاه عملگری خطی چون T^* روی V موجود باشد که به ازای هر α و β در V ، $(T\alpha|\beta) = (\alpha|T^*\beta)$.

بنابرضیة ۷، هر عملگر خطی روی يك فضای ضرب داخلى با بعد متناهی V دارای يك الحاقی روی V است. در حالت با بعد نامتناهی، این مطلب همیشه درست نیست. ولی در هر صورت، حداکثر يك چنین عملگر T^* وجود دارد؛ وقتی که این عملگر وجود داشته باشد، آن را الحاقی T می نامیم. در حالت بعد متناهی، تذکر دو مطلب لازم است.

- الحاقی T نه تنها به T ، بلکه به ضرب داخلى نیز وابسته است.
- همان طور که در مثال ۱۷ نشان داده شد، در پایه مرتب دلخواهی چون \mathcal{B} ، رابطه بین $[T]_{\mathcal{B}}$ و $[T^*]_{\mathcal{B}}$ پیچیده تر از آن است که در نتیجه فوق ارائه شد.

مثال ۱۸. V را $C^n \times 1$ ، فضای ماتریسهای $n \times 1$ مختلط، با ضرب داخلى $(X|Y) = Y^*X$ می گیریم. اگر A ماتریسی $n \times n$ با درایه های مختلط باشد، الحاقی عملگر خطی $X \rightarrow AX$ عبارت است از عملگر $X \rightarrow A^*X$ زیرا،

$$(AX|Y) = Y^*AX = (A^*Y)^*X = (X|A^*Y).$$

خواننده باید خود را متقاعد کند که این مثال در واقع حالت خاصی از نتیجهٔ اخیر است.

مثال ۱۹. این مثال مشابه مثال ۱۸ است. V را $C^n \times C^n$ بنا ضرب داخلی می‌گیریم. فرض کنیم M ماتریس $n \times n$ ثابتی بر روی C باشد. الحاقی ضرب از چپ در M ، برابر ضرب از چپ در M^* است. بدیهی است که «ضرب از چپ در M » عملگر خطی L_M تعریف شده با $L_M(A) = MA$ است.

$$\begin{aligned} (L_M(A)|B) &= \text{tr}(B^*(MA)) \\ &= \text{tr}(MAB^*) \\ &= \text{tr}(AB^*M) \\ &= \text{tr}(A(M^*B)^*) \\ &= (A|L_M^*(B)). \end{aligned}$$

پس $(L_M)^* = L_M^*$. در محاسبهٔ بالا از خاصیت مشخص تابع رد: $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ دوبار استفاده شده است.

مثال ۲۰. فرض کنیم V فضای چندجمله‌ایهای بر روی هیأت اعداد مختلط با ضرب

داخلی

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)} dt$$

باشد. اگر f چندجمله‌ای $f = \sum a_k x^k$ باشد، فرض می‌کنیم $\bar{f} = \sum \bar{a}_k x^k$ در حقیقت، \bar{f} آن چندجمله‌ای است که تابع چندجمله‌ای وابسته بدان مزدوج مختلط تابع چندجمله‌ای برای f است:

$$\bar{f}(t) = \overline{f(t)} \quad \text{حقیقی و}$$

عملگر «ضرب در f »، یعنی عملگر خطی M_f تعریف شده توسط $M_f(g) = fg$ را در نظر می‌گیریم. این عملگر دارای يك الحاقی، یعنی عملگر ضرب در \bar{f} است. زیرا

$$\begin{aligned} (M_f(g)|h) &= (fg|h) \\ &= \int_0^1 f(t)g(t)\overline{h(t)} dt \\ &= \int_0^1 g(t)[\overline{f(t)h(t)}] dt \end{aligned}$$

$$= (g|\bar{f}h)$$

$$= (g|M_{\bar{f}}(h))$$

واز این رو، $(M_{\bar{f}})^* = M_f$.

مثال ۲۱. در مثال ۲۰ دیدیم که برخی از عملگرهای خطی روی فضاهای ضرب داخلی با بعد نامتناهی نیز دارای الحاقی هستند. به طوری که قبلاً توضیح دادیم، برخی نیز الحاقی ندارند. گیریم V فضای ضرب داخلی مثال ۲۰ و D عملگر مشتق گیری روی $C[x]$ باشد. انتگرال گیری جزء به جزء نشان می دهد که

$$(Df|g) = f(1)g(1) - f(0)g(0) - f(Dg)$$

g را ثابت می گیریم و تحقیق می کنیم که چه وقت یک چندجمله ای چون D^*g وجود دارد که به ازای هر f ، $(Df|g) = (f|D^*g)$. اگر چنین D^*g بی وجود داشته باشد، خواهیم داشت

$$(f|D^*g) = f(1)g(1) - f(0)g(0) - (f|Dg)$$

یا

$$(f|D^*g + Dg) = f(1)g(1) - f(0)g(0).$$

با g ثابت، $L(f) = f(1)g(1) - f(0)g(0)$ تابعکی خطی از نوع در نظر گرفته شده در مثال ۱۶ است و نمی تواند به صورت $L(f) = (f|h)$ باشد مگر آنکه $L = 0$. اگر D^*g وجود داشته باشد، آنگاه به ازای $h = D^*g + Dg$ ، البته داریم $L(f) = (f|h)$ و از این رو $g(1) = g(0) = 0$. وجود چندجمله ای مناسبی چون D^*g ایجاب می کند که $g(1) = g(0) = 0$. بعکس، اگر $g(1) = g(0) = 0$ ، وجود چندجمله ای $D^*g = -Dg$ ، اگر یک g انتخاب کنیم که به ازای آن $g(0) \neq 0$ یا $g(1) \neq 0$ ، نمی توانیم D^*g را به صورت مناسبی تعریف کنیم و از این رو نتیجه می گیریم که D دارای الحاقی نیست.

امیدواریم که این مثالها درک خواننده را در مورد الحاقی عملگرهای خطی بیفزاید. می بینیم که عمل الحاقی، از T به T^* رسیدن، به نحوی شبیه به مزدوج گیری روی اعداد مختلط رفتار می کند. قضیه زیر این شباهت را تقویت می کند.

قضیه ۹. گیریم V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی باشد. اگر T و U عملگرهای خطی روی V باشند و c یک اسکالر باشد،

$$:(T+U)^* = T^* + U^* \quad (۱)$$

$$:(cT)^* = cT^* \quad (۲)$$

$$:(TU)^* = U^*T^* \quad (۳)$$

$$.(T^*)^* = T \quad (۴)$$

اثبات. برای اثبات (۱)، α و β را بردارهایی دلخواه از V می‌گیریم. در این

صورت

$$\begin{aligned} ((T+U)\alpha|\beta) &= (T\alpha+U\alpha|\beta) \\ &= (T\alpha|\beta) + (U\alpha|\beta) \\ &= (\alpha|T^*\beta) + (\alpha|U^*\beta) \\ &= (\alpha|T^*\beta+U^*\beta) \\ &= (\alpha|(T^*+U^*)\beta). \end{aligned}$$

بنابریکتایی الحاقی، داریم $(T+U)^* = T^*+U^*$. اثبات (۲) را به‌خواننده واگذار می‌کنیم. (۳) و (۴) را از روابط

$$\begin{aligned} (TU\alpha|\beta) &= (U\alpha|T^*\beta) = (\alpha|U^*T^*\beta) \\ (T^*\alpha|\beta) &= \overline{(\beta|T^*\alpha)} = \overline{(T\beta|\alpha)} = (\alpha|T\beta) \end{aligned}$$

به‌دست می‌آوریم. \square

قضیه ۹ غالباً به‌صورت زیر بیان می‌شود: نگاشت $T \rightarrow T^*$ پاد یکرختی خطی مزدوجی با دوره تناوب ۲ است. شباهت این عمل با مزدوج‌گیری مختلط، که در بالا ذکر شد، مسلماً بر پایه‌ی این مشاهده استوار است که مزدوج‌گیری مختلط دارای خواص ترتیب دریک ضرب، که عمل الحاقی ایجاب می‌کند، رعایت شود: $(UT)^* = T^*U^*$. همچنان که به‌مطالعه خود درباره‌ی عملگرهای خطی روی یک فضای ضرب داخلی ادامه می‌دهیم، گسترش این شباهت را نیز ذکر می‌کنیم. اکنون می‌توانیم مطلبی در این زمینه بیان کنیم. یک عدد مختلط z حقیقی است اگر و تنها اگر $\bar{z} = z$. ممکن است تصور شود که عملگر خطی T با شرط $T = T^*$ بوجهی شبیه به اعداد حقیقی عمل می‌کند. در واقع همین‌طور است. مثلاً، اگر T عملگری خطی روی یک فضای ضرب داخلی مختلط با بعد متناهی باشد، آنگاه

$$T = U_1 + iU_2 \quad (۱۵-۸)$$

که در آن $U_1 = U_1^*$ و $U_2 = U_2^*$. پس، به یک معنی، T دارای یک «جزء حقیقی» و یک «جزء موهومی» است. عملگرهای U_1 و U_2 ، که در $U_1 = U_1^*$ ، $U_2 = U_2^*$ ، و (۱۵-۸) صدق می‌کنند، یکتا هستند، و از روابط

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (T + T^*)$$

$$U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (T - T^*)$$

به دست مى آيند.

عملگرى خطى مانند T که $T = T^*$ ، خودالحاق (يا هرميتى) ناميده مى شود. اگر \mathcal{B} پایه متعامد يک‌ه‌اى برآى V باشد، آنگاه

$$[T^*]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^*$$

ولذا T خودالحاق است اگر و تنها اگر ماتريس آن در هر پایه متعامد يک‌ه‌اى ماتريسى خودالحاق باشد. عملگرهاى خودالحاق، نه تنها بدین دليل ساده که نوعى اجزای حقيقى و موهومى برآى عملگر خطى عمومى فراهم مى آورند، بلکه به دلایل زیر نيز از اهميت برخوردارند: (۱) عملگرهاى خودالحاق دارای خواص ويژه بسيارى هستند. مثلاً، برآى يك چنین عملگرى، پایه متعامد يک‌ه‌اى از بردارهاى سرشت نما وجود دارد. (۲) بسيارى از عملگرهاى که در عمل پيش مى آيند خودالحاق هستند. خواص ويژه عملگرهاى خودالحاق را بعداً مورد رسيدگى قرار خواهيم داد.

تمرين

۰۱. V را فضاى C^2 با ضرب داخلى استاندارد بگيريد و فرض کنيد T عملگر خطى تعريف شده توسط $T\epsilon_1 = (1, -2)$ و $T\epsilon_2 = (i, -1)$ باشد. اگر $\alpha = (x_1, x_2)$ آنگاه $T^*\alpha$ را بيابيد.

۰۲. فرض کنيد T عملگرى خطى روى C^2 باشد که با $T\epsilon_1 = (1+i, 2)$ و $T\epsilon_2 = (i, i)$ تعريف مى شود. با استفاده از ضرب داخلى استاندارد، ماتريس T^* در پایه مرتب استاندارد را بيابيد. آيا T با T^* جابجا مى شود؟

۰۳. فرض کنيد V فضاى C^3 با ضرب داخلى استاندارد باشد. فرض کنيد T عملگرى خطى روى V باشد که ماتريس آن در پایه مرتب استاندارد با

$$A_{jk} = i^{j+k}, \quad (i^2 = -1)$$

تعريف مى شود. پايه‌اى برآى فضاى پوچ T^* بيابيد.

۰۴. فرض کنيد V يك فضاى ضرب داخلى با بعد متناهى و T عملگرى خطى روى V باشد. نشان دهيد که برد T^* مکمل متعامد فضاى پوچ T است.

۰۵. فرض کنيد V يك فضاى ضرب داخلى با بعد متناهى و T عملگرى خطى روى V باشد.

اگر T معکوس پذیر باشد. نشان دهید که T^* نیز معکوس پذیر است و $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

۶. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی و β و γ بردارهای ثابتی از V باشند. نشان دهید که $T\alpha = (\alpha | \beta)\gamma$ عملگری خطی روی V تعریف می کند. همچنین نشان دهید T دارای یک الحاقی است، و T^* را هم به طور صریح توصیف کنید.

اکنون فرض کنید V فضای C^n با ضرب داخلی استاندارد باشد و $\beta = (y_1, \dots, y_n)$ و $\gamma = (x_1, \dots, x_n)$ و درایه k, j ماتریس T در پایه مرتب استاندارد چیست؟ رتبه این ماتریس چند است؟

۷. نشان دهید حاصلضرب دو عملگر خودالحاق، عملگری است خودالحاق اگر و تنها اگر دو عملگر با یکدیگر جابجا شوند.

۸. فرض کنید V فضای برداری چند جمله ایهای بر روی R با درجه حداکثر ۳ و با ضرب داخلی

$$(f | g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

باشد. اگر t عددی حقیقی باشد، چند جمله ای g_t در V را که برای آن به ازای هر f در V ، $(f | g_t) = f(t)$ بیابید.

۹. V را فضای ضرب داخلی تمرین ۸ و D را عملگر مشتق گیری روی V بگیرید. D^* را بیابید.

۱۰. فرض کنید V فضای ماتریسهای $n \times n$ بر روی اعداد مختلط با ضرب داخلی $(A, B) = \text{tr}(AB^*)$ باشد. فرض کنید P ماتریس معکوس پذیر ثابتی از V و T_P عملگری خطی روی V تعریف شده توسط $T_P(A) = P^{-1}AP$ باشد. الحاقی T_P را بیابید.

۱۱. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و E عملگر خطی خودتوانی روی V باشد، بدین معنی که $E^2 = E$. ثابت کنید E خودالحاق است اگر و تنها اگر $EE^* = E^*E$.

۱۲. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی مختلط با بعد متناهی و T عملگری خطی روی V باشد. ثابت کنید که T خودالحاق است اگر و تنها اگر به ازای هر α در V ، $(T\alpha | \alpha)$ حقیقی باشد.

۴.۸. عملگرهای یکانی

در این بخش، مفهوم یکرختی بین دو فضای ضرب داخلی را مورد توجه قرار می‌دهیم. اگر V و W فضاهایی برداری باشند، یک یکرختی از V بروی W تبدیل خطی یک به یکی از V بروی W ، یعنی، تناظری یک به یک بین عناصر V و عناصر W است که عملهای فضای برداری را هم حفظ می‌کند. اما یک فضای ضرب داخلی متشکل است از یک فضای برداری و یک ضرب داخلی مشخص روی آن فضا. پس وقتی که V و W فضاهای ضرب داخلی باشند، به چنان یکرختی از V بروی W نیاز خواهیم داشت که نه تنها عملهای خطی بلکه ضربهای داخلی را نیز حفظ کند. یک یکرختی از یک فضای ضرب داخلی بروی خودش یک «عملگر یکانی» روی آن فضا نامیده می‌شود. ما مثالهای گوناگونی از عملگرهای یکانی را مورد رسیدگی قرار خواهیم داد و خواص بنیادی آنها را محقق خواهیم ساخت.

تعریف. گیریم V و W دو فضای ضرب داخلی برداری یک هیأت و T تبدیلی خطی از V در W باشد. گوئیم T ضربهای داخلی را حفظ می‌کند هرگاه به ازای هر α و هر β در V ، $(T\alpha | T\beta) = (\alpha | \beta)$. یک یکرختی از V بروی W عبارت است از یک یکرختی فضای برداری مانند T از V بروی W که ضربهای داخلی را نیز حفظ کند.

اگر T ضربهای داخلی را حفظ کند، آنگاه $\|T\alpha\| = \|\alpha\|$ و لذا T لزوماً نامنفرد است. پس یک یکرختی از V بروی W را همچنین می‌توان به عنوان تبدیلی خطی از V بروی W که ضربهای داخلی را نیز حفظ می‌کند، تعریف کرد. اگر T یک یکرختی از V بروی W باشد، آنگاه T^{-1} یک یکرختی از W بروی V است؛ از این رو، وقتی که چنین T یی موجود باشد، به طور ساده خواهیم گفت که V و W یکرخت هستند. بدیهی است که یکرختی فضاهای ضرب داخلی، یک رابطه هم‌ارزی است.

قضیه ۱۰. گیریم V و W دو فضای ضرب داخلی با بعدمتناهی و با ابعاد برابر برداری یک هیأت باشند. اگر T تبدیلی خطی از V در W باشد، احکام ذیل هم‌ارزند.

(۱) T ضربهای داخلی را حفظ می‌کند.

(۲) T یک یکرختی (فضای ضرب داخلی) است.

(۳) هر پایه متعامد یکه از V را بروی یک پایه متعامد یکه از W انتقال می‌دهد.

(۴) T پایه متعامد یکه‌ای از W را بروی یک پایه متعامد یکه از V انتقال می‌دهد.

اثبات. (۲) \rightarrow (۱). اگر T ضربهای داخلی را حفظ کند، آنگاه به ازای هر α در

V ، $\|T\alpha\| = \|\alpha\|$. پس، T نامنفرد است، و چون $\text{بعد}(W) = \text{بعد}(V)$ ، می‌دانیم که T یک یکرختی فضایی برداری است.

(۳) \rightarrow (۲). فرض کنیم T یک یکرختی باشد. $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ را یک پایه

متعامد یکه برای V می‌گیریم. چون T یک یکرختی فضای برداری است و

$\text{بعد}(V) = \text{بعد}(W)$ ، نتیجه می‌شود که $\{T\alpha_1, \dots, T\alpha_n\}$ پایه‌ای برای W است.

چون T ضربهای داخلی را نیز حفظ می کند، $(T\alpha_j | T\alpha_k) = (\alpha_j | \alpha_k) = \delta_{jk}$ ،
 (۴) \rightarrow (۳). این مرحله نیازی به توضیح ندارد.

(۱) \rightarrow (۴). فرض کنیم $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ چنان پایه متعامد یکه ای برای V باشد که $\{T\alpha_1, \dots, T\alpha_n\}$ نیز یک پایه متعامد یکه برای W باشد. آنگاه

$$(T\alpha_j | T\alpha_k) = (\alpha_j | \alpha_k) = \delta_{jk}.$$

به ازای هر $\alpha = x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n$ و $\beta = y_1\alpha_1 + \dots + y_n\alpha_n$ در V ، داریم

$$(\alpha | \beta) = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j$$

$$(T\alpha | T\beta) = \left(\sum_j x_j T\alpha_j \mid \sum_k y_k T\alpha_k \right)$$

$$= \sum_j \sum_k x_j \bar{y}_k (T\alpha_j | T\alpha_k)$$

$$= \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j$$

ولذا T حاصلضربهای داخلی را حفظ می کند. \square

نتیجه. گیریم V و W دو فضای ضرب داخلی با بعد متناهی بردوی یک هیأت باشند. در این صورت V و W یکریخت اند اگر و تنها اگر دارای ابعاد برابر باشند.

اثبات. اگر $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ یک پایه متعامد یکه برای V و $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ یک پایه متعامد یکه برای W باشد، فرض می کنیم T تبدیلی خطی از V در W باشد که $T\alpha_j = \beta_j$ تعریف می شود. در این صورت T یک یکریختی از V بروی W است. \square

مثال ۲۲. اگر V یک فضای ضرب داخلی n بعدی باشد، آنگاه هر پایه متعامد یکه مرتب $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ یک یکریختی از V بروی F^n با ضرب داخلی استاندارد، تعیین می کند. این یکریختی چیزی نیست جز تبدیل خطی

$$T(x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n) = (x_1, \dots, x_n).$$

یکریختی ظاهراً متفاوتی از V بروی فضای $F^{n \times 1}$ با $(X|Y) = Y^*X$ به عنوان ضرب داخلی هم وجود دارد که با \mathcal{B} تعیین می شود. این یکریختی عبارت است از

$$\alpha \rightarrow [\alpha]_{\mathcal{B}}$$

یعنی تبدیلی که α را به ماتریس مختصات آن در پایه مرتب \mathcal{B} می فرستد. به ازای هر پایه مرتب \mathcal{B} ، این یک یکریختی فضای برداری است؛ اما، این یکریختی، یک یکریختی از دو فضای ضرب داخلی است اگر و تنها اگر \mathcal{B} متعامد یکه باشد.

مثال ۲۳. در اینجا به یکریختی پرمایه تری می پردازیم. گیریم W فضای همه

ماتریسهای 3×3 چون A بر روی R که مقارن کج هستند، یعنی $A^t = -A$ باشد. W را به ضرب داخلی $(A|B) = \frac{1}{4} \text{tr}(AB^t)$ مجهز می‌کنیم؛ $\frac{1}{4}$ صرفاً به منظور راحتی گذاشته شده است. V را فضای R^3 با ضرب داخلی استاندارد می‌گیریم. فرض کنیم T تبدیلی خطی از V در W تعریف شده توسط

$$T(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

باشد. در این صورت T فضای V را بر روی W می‌نگارد و با قراردادن

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{bmatrix}$$

داریم

$$\begin{aligned} \text{tr}(AB^t) &= x_3 y_3 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_1 y_1 \\ &= 2(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3). \end{aligned}$$

پس، $(\alpha|\beta) = (T\alpha|T\beta)$ و T یک یکرختی فضای برداری است. توجه کنید که T پایه استاندارد $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ را بر روی پایه متعامد یکه متشکل از سه ماتریس

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

انتقال می‌دهد.

مثال ۲۴. تشریح یک یکرختی همیشه بر حسب پایه‌های متعامد یکه نیست که راحت است. مثلاً، $G = P^*P$ را که در آن P ماتریس $n \times n$ معکوس‌پذیری با درایه‌های مختلط است در نظر می‌گیریم. فرض کنیم فضای ماتریسهای $1 \times n$ مختلط با ضرب داخلی $[X|Y] = Y^*G X$ باشد. W را همان فضای برداری ولسی با ضرب داخلی استاندارد $(X|Y) = Y^*X$ می‌گیریم. می‌دانیم که V و W دوفضای ضرب داخلی یکرخت هستند. به نظر می‌رسد که مناسبترین راه برای تشریح یک یکرختی بین V و W طریق زیر باشد:

گیریم T تبدیلی خطی از V در W تعریف شده با $T(X) = PX$ باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}(TX | TY) &= (PX | PY) \\ &= (PY)^*(PX) \\ &= Y^* P^* P X \\ &= Y^* G X \\ &= [X | Y].\end{aligned}$$

از این رو، T یک یکرختی است.

مثال ۲۵. گیریم V فضای همه توابع حقیقی پیوسته روی فاصله $۱ \leq t \leq ۰$ با ضرب داخلی

$$[f | g] = \int_0^1 f(t)g(t)t^x dt$$

باشد. W را همان فضای برداری ولی با ضرب داخلی

$$(f | g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

می‌گیریم. فرض کنیم T تبدیلی خطی از V در W باشد که با

$$(Tf)(t) = tf(t)$$

داده می‌شود. در این صورت $[f | g] = (Tf | Tg)$ ، و لذا T ضربهای داخلی را حفظ می‌کند؛ ولی T یک یکرختی از V بروی W نیست، چرا که برد T برابر تمام W نیست. بدیهی است، این امر به این دلیل رخ می‌دهد که بعد فضای برداری زمینه منتهی نیست.

قضیه ۱۱۴. گیریم W دوفضای ضرب داخلی بردی یک هیات و T تبدیلی خطی از V در W باشد. در این صورت T ضربهای داخلی را حفظ می‌کند اگر و تنها اگر به ازای هر α در V ، $\|T\alpha\| = \|\alpha\|$.

اثبات. اگر T ضربهای داخلی را حفظ کند، «نرمها را نیز حفظ می‌کند». فرض کنیم به ازای هر α در V ، $\|T\alpha\| = \|\alpha\|$. در این صورت $\|T\alpha\|^2 = \|\alpha\|^2$. حال با استفاده از اتحاد قطبی مناسبی چون (۳-۸) یا (۴-۸) و این واقعیت که T خطی است، به آسانی دیده می‌شود که به ازای هر α و هر β در V ، $(\alpha | \beta) = (T\alpha | T\beta)$.

تعریف. یک عملگر یکانی T روی یک فضای ضرب داخلی، عبارت است از یک یکرختی از آن فضا بروی خودش.

حاصل ضرب دو عملگر يکاني عملگرى است يکاني زيرا، اگر U_1 و U_2 يکاني باشند، آنگاه $U_1 U_2$ معکوس پذير است و به ازای هر α ، $\|U_1 U_2 \alpha\| = \|U_2 \alpha\| = \|\alpha\|$. همچنين، معکوس يك عملگر يکاني عملگرى است يکاني؛ زيرا $\|U\alpha\| = \|\alpha\|$ حاکی است که $\|U^{-1}\beta\| = \|\beta\|$ ؛ در اینجا $\beta = U\alpha$. چون عملگر دمانی به وضوح يکاني است، می بینیم که مجموعه همه عملگرهای يکاني روی يك فضای ضرب داخلى تحت عمل ترکیب يك گروه است. اگر V يك فضای ضرب داخلى با بعد متناهی و U عملگرى خطى روی V باشد، قضیه ۱۰ حاکی است که U يکاني است اگر و تنها اگر به ازای هر α و β در V ، $(U\alpha|U\beta) = (\alpha|\beta)$ ؛ یا، اگر و تنها اگر به ازای يك (هر) پایه متعامد يکه $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ، این درست باشد که $\{U\alpha_1, \dots, U\alpha_n\}$ هم يك پایه متعامد يکه است.

قضیه ۱۲. گیریم U عملگرى خطى روی يك فضای ضرب داخلى V باشد. آنگاه U يکاني است اگر و تنها اگر U^* ، الحاقی U ، وجود داشته باشد $UU^* = U^*U = I$. اثبات. فرض کنیم U يکاني باشد. در این صورت U معکوس پذير است و به ازای هر α و هر β

$$(U\alpha|\beta) = (U\alpha|UU^{-1}\beta) = (\alpha|U^{-1}\beta).$$

از این رو U^{-1} الحاقی U است.

بعکس، فرض کنیم U^* وجود داشته باشد و $UU^* = U^*U = I$. آنگاه U معکوس-پذير است و $U^{-1} = U^*$. لذا، کافی است نشان دهیم که U ضربهای داخلى را حفظ می کند به ازای همه α ها و همه β ها داریم

$$\begin{aligned} (U\alpha|U\beta) &= (\alpha|U^*U\beta) \\ &= (\alpha|I\beta) \\ &= (\alpha|\beta). \quad \square \end{aligned}$$

مثال ۲۶. $C^{n \times n}$ را با ضرب داخلى $(X|Y) = Y^*X$ در نظر می گیریم. فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ بر روی C و U عملگر خطى تعريف شده توسط $U(X) = AX$ باشد. آنگاه به ازای هر X و هر Y

$$(UX|UY) = (AX|AY) = Y^*A^*AX.$$

از این رو، U يکاني است اگر و تنها اگر $A^*A = I$.

تعريف. ماتریس $n \times n$ مختلط A يکاني نامیده می شود، هرگاه $A^*A = I$.

قضیه ۱۳. فرض کنیم V يك فضای ضرب داخلى با بعد متناهی و U عملگرى خطى روی V باشد. در این صورت U يکاني است اگر و تنها اگر ماتریس U در يك (یا هر) پایه

متعامد یکه مرتب ماتریسی یکانی باشد.

اثبات. در این مرحله از کار، این چندان قضیه‌ای نیست، ولی ما عمدتاً آن را برای تأکید بیان می‌کنیم. اگر $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه متعامد یکه مرتبی برای V و A ماتریس U نسبت به \mathcal{B} باشد، آنگاه $A^*A = I$ اگر و تنها اگر $U^*U = I$. اکنون نتیجه از قضیه ۱۲ حاصل می‌شود. \square

گیریم A ماتریس $n \times n$ باشد. این عبارت که A یکانی است، به طور ساده بدین معنی است که

$$(A^*A)_{jk} = \delta_{jk}$$

یا

$$\sum_{r=1}^n \overline{A_{rj}} A_{rk} = \delta_{jk}.$$

به بیان دیگر، معنی آن این است که ستونهای A مجموعه متعامد یکه‌ای از ماتریسهای ستونی، نسبت به ضرب داخلی استاندارد $(X|Y) = Y^*X$ ، تشکیل می‌دهند. چون $A^*A = I$ اگر و تنها اگر $AA^* = I$ ، می‌بینیم که A دقیقاً وقتی یکانی است که سطرهای A متضمن مجموعه متعامد یکه‌ای از n تاییهای واقع در C^n (باضرب داخلی استاندارد) باشند. لذا، با به کارگیری ضربهای داخلی استاندارد، A یکانی است اگر و تنها اگر سطرها و ستونهای A مجموعه‌های متعامد یکه باشند. در اینجا مثالی از قدرت این قضیه حاکی از اینکه هر معکوس یک طرفه یک ماتریس یک معکوس دوطرفه آن هم هست، به چشم می‌خورد. همان طور که در بالا هم انجام دادیم، با به کار بستن این قضیه مثلاً روی ماتریسهای حقیقی، نتیجه زیر عاید می‌شود. فرض کنیم یک آرایه مربعی از اعداد حقیقی داشته باشیم به طوری که مجموع توانهای دوم درایه‌های هر سطر برابر ۱، و سطرهای متمایز متعامد باشند. آنگاه مجموع توانهای دوم درایه‌های هر ستون برابر ۱ است و ستونهای متمایز هم متعامد هستند. اگر بدون استفاده از هر گونه معلوماتی درباره ماتریسها، اثبات این مطلب را برای یک آرایه 3×3 بنویسید، مسلماً تحت تأثیر قرار خواهید گرفت.

تعریف. یک ماتریس $n \times n$ حقیقی یا مختلط A ، متعامد نامیده می‌شود، هرگاه $A^*A = I$.

هر ماتریس متعامد حقیقی، یکانی هم هست؛ و هر ماتریس یکانی متعامد است اگر و تنها اگر همه درایه‌هایش حقیقی باشند.

مثال ۲۷. حال چند مثال از ماتریسهای یکانی و متعامد عرضه می‌کنیم.

(الف) ماتریس 1×1 ، $[c]$ متعامد است اگر و تنها اگر $c = \pm 1$ و یکانی است اگر

وتنها اگر $1 = \bar{c}c$ ، شرط دوم (بدطور بدیهی) بدین معنی است که $|c| = 1$ یا $c = e^{i\theta}$ که در آن θ حقیقی است.
(ب) فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

آنگاه A متعامد است اگر و تنها اگر

$$A' = A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

بسادگی دیده می‌شود که در مینان هر ماتریس متعامد برابر ± 1 است. پس A متعامد است اگر و تنها اگر

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

یا

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$$

که در آن $1 = a^2 + b^2$. این دو حالت به وسیلهٔ مقدار $\det A$ مشخص می‌شوند.
(پ) روابط معروف بین توابع مثلثاتی نشان می‌دهند که ماتریس

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

متعامد است. اگر θ عددی حقیقی باشد، آنگاه A_θ عبارت است از ماتریس عملگر خطی U_θ ، دوران به اندازهٔ زاویهٔ θ ، در پایهٔ مرتب استاندارد R^2 . این بیان که A_θ يك ماتریس متعامد حقیقی (و از این رو یکانی) است، جز اینکه U_θ عملگری یکانی است معنایی ندارد و این هم بدین معنی است که ضربهای نقطه‌ای حفظ می‌شوند.
(ت) فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

آنگاه A یکانی است اگر و تنها اگر

$$\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

قدرمطلق دترمینان هر ماتریس یکانی برابر ۱ است و از این رو عددی مختلط به صورت $e^{i\theta}$ ، به ازای عدد حقیقی θ ، است. پس، A یکانی است اگر و تنها اگر

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -e^{i\theta}\bar{b} & e^{i\theta}\bar{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$$

که در آن θ عددی حقیقی است و a و b اعدادی مختلط با شرط $|a|^2 + |b|^2 = 1$ هستند.

همان طور که قبلاً هم ذکر شد، عملگرهایی یکانی روی یک فضای ضرب داخلی یک گروه تشکیل می‌دهند. از این مطلب و قضیه ۱۳ نتیجه می‌شود که مجموعه $U(n)$ متشکل از همه ماتریسهای یکانی $n \times n$ نیز یک گروه است. پس، معکوس یک ماتریس یکانی و حاصل ضرب دو ماتریس یکانی ماتریسی است یکانی. البته این مطلب به‌طور مستقیم هم به‌آسانی دیده می‌شود. ماتریس $n \times n$ ای مانند A با درایه‌های مختلط یکانی است اگر و تنها اگر $A^{-1} = A^*$. بنابراین، اگر A یکانی باشد، داریم $(A^{-1})^* = A = (A^*)^{-1} = (A^{-1})^{-1}$. اگر A و B دو ماتریس یکانی $n \times n$ باشند، آنگاه

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^*A^* = (AB)^*.$$

فرایند گرام - اشمیت در C^n نتیجه‌ای جالب برای ماتریسها دارد که متضمن گروه $U(n)$ است.

قضیه ۱۴. به‌ازای هر ماتریس $n \times n$ مختلط معکوس پذیر B ماتریس پایین مثلثی یکتایی چون M ، با درایه‌های مثبت (وی قطر اصلی، وجود دارد که MB یکانی است. اثبات. سطرهای β_1, \dots, β_n از B یک پایه برای C^n تشکیل می‌دهند. گیریم $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ بردارهای حاصل از β_1, \dots, β_n با فرایند گرام - اشمیت باشند. در این صورت، به‌ازای $1 \leq k \leq n$ ، $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ پایه متعامدی برای زیر فضای پدید آمده توسط $\{\beta_1, \dots, \beta_k\}$ است و

$$\alpha_k = \beta_k - \sum_{j < k} \frac{(\beta_k | \alpha_j)}{\|\alpha_j\|^2} \alpha_j.$$

از این رو، به‌ازای هر k اسکالرهای یکتا چون C_{kj} وجود دارند که

$$\alpha_k = \beta_k - \sum_{j < k} C_{kj} \beta_j.$$

گیریم U ماتریسی یکانی با سطرهای

$$\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}, \dots, \frac{\alpha_n}{\|\alpha_n\|}$$

و M ماتریس تعریف شده توسط

$$M_{kj} = \begin{cases} -\frac{1}{\|\alpha_k\|} C_{kj} & , \text{ هر گاه } j < k \\ \frac{1}{\|\alpha_k\|} & , \text{ هر گاه } j = k \\ 0 & , \text{ هر گاه } j > k \end{cases}$$

باشد. در این صورت M پایین مثلثی است، به این معنی که درایه‌های بالای قطر اصلی آن هستند. درایه‌های M_{kk} از M که روی قطر اصلی قرار دارند همه مثبت هستند و

$$\frac{\alpha_k}{\|\alpha_k\|} = \sum_{j=1}^n M_{kj} \beta_j, \quad 1 \leq k \leq n.$$

مسلماً این تساویها چیزی جز

$$U = MB$$

را بیان نمی‌کنند. برای اثبات یکتایی M ، فرض کنیم $T^+(n)$ مجموعه همه ماتریسهای پایین مثلثی $n \times n$ مختلط با درایه‌های مثبت روی قطر اصلی را نشان دهد. فرض کنیم M_1 و M_2 عناصری از $T^+(n)$ باشند که به ازای $i = 1, 2$ در $M_i B$ در $U(n)$ قرار داشته باشد. در این صورت چون $U(n)$ یک گروه است

$$(M_1 B)(M_2 B)^{-1} = M_1 M_2^{-1}$$

نیز در $U(n)$ قرار می‌گیرد. از طرف دیگر، هر چند کلاً آشکار نیست، $T^+(n)$ نیز تحت ضرب ماتریسی یک گروه است. راهی برای دیدن این مطلب، در نظر گرفتن خواص هندسی تبدیلهای خطی

$$X \rightarrow MX, \quad (M \text{ در } T^+(n))$$

روی فضای ماتریسهای ستونی است. پس M_2^{-1} ، $M_1 M_2^{-1}$ ، $(M_1 M_2^{-1})^{-1}$ همه در $T^+(n)$ قرار دارند. اما چون $M_1 M_2^{-1}$ در $U(n)$ است، $(M_1 M_2^{-1})^{-1} = (M_1 M_2^{-1})^*$ ، بنابراین، یا ترانواده یا ترانواده مزدوج هر ماتریس پایین مثلثی، یک ماتریس بالا مثلثی است. بنابراین، $M_1 M_2^{-1}$ هم بالا مثلثی و هم پایین مثلثی است، یعنی قطری است. یک ماتریس قطری یکانی است اگر و تنها اگر قدرمطلق هر یک از درایه‌های روی قطر اصلی آن مساوی ۱ باشد؛ اگر درایه‌های قطری همه مثبت باشند، باید برابر ۱ باشند. از این رو، $M_1 M_2^{-1} = I$ و $M_1 = M_2$ □

فرض کنیم $GL(n)$ مجموعه همه ماتریسهای $n \times n$ مختلط معکوس پذیر را نشان دهد.

آنگاه $GL(n)$ نیز تحت ضرب ماتریسی يك گروه است. این گروه را گروه خطی عمومی می نامیم. قضیه ۱۴ با نتیجه ذیل هم ارز است.

نتیجه. به ازای هر B در $GL(n)$ ماتریسهای یکتایی چون N و U وجود دارند که N در $T^+(n)$ و U در $U(n)$ است، و

$$B = N \cdot U.$$

اثبات. بنا بر قضیه، ماتریس یکتایی چون M در $T^+(n)$ وجود دارد که MB در $U(n)$ است. فرض کنیم $MB = U$ و $N = M^{-1}$. در این صورت، N در $T^+(n)$ است و $B = N \cdot U$. از طرف دیگر، اگر دو ماتریس N و U داده شده باشند به طوری که N در $T^+(n)$ و U در $U(n)$ باشد و $B = N \cdot U$ ، آنگاه $N^{-1}B$ در $U(n)$ قرار دارد و N^{-1} همان ماتریس یکتای M است که قضیه مشخص می کند؛ علاوه بر این، U لزوماً همان $N^{-1}B$ است. \square

مثال ۲۸. گیریم x_1 و x_2 اعدادی حقیقی باشند که $x_1^2 + x_2^2 = 1$ و $x_1 \neq 0$. فرض کنیم

$$B = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

با به کار بستن فرایند گرام - اشمیت بر سطرهای B ، بردارهای

$$\alpha_1 = (x_1, x_2, 0)$$

$$\alpha_2 = (0, 1, 0) - x_2(x_1, x_2, 0)$$

$$= x_1(-x_2, x_1, 0)$$

$$\alpha_3 = (0, 0, 1)$$

حاصل می شوند. U را ماتریسی با سطرهای $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ می گیریم. در این صورت U یکانی است و

$$U = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ -x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{x_2}{x_1} & \frac{1}{x_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

حال با ضرب در معکوس ماتریس

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{x_2}{x_1} & \frac{1}{x_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

درمی یابیم که

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ -x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

اکنون با اختصار تغییر مختصات در یک فضای ضرب داخلی را بررسی می‌کنیم. فرض

کنیم V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ و $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$ دو پایه متعامد یک‌مرتبه برای V باشند. ماتریس $n \times n$ (لزوماً معکوس‌پذیر) یکتایی چون P وجود دارد که به ازای هر α در V

$$[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}}.$$

اگر V یکتا عملگر خطی روی V تعریف شده توسط $U\alpha_j = \alpha'_j$ باشد، آنگاه P عبارت است از ماتریس U در پایه \mathcal{B} مرتبه \mathcal{B} :

$$\alpha'_k = \sum_{j=1}^n P_{jk} \alpha_j.$$

چون \mathcal{B}' و \mathcal{B} دو پایه متعامدیکه هستند، U عملگری یکانی و P ماتریسی یکانی است. اگر T عملگر خطی دلخواهی روی V باشد، آنگاه

$$[T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P = P^*[T]_{\mathcal{B}}P.$$

تعریف. گیریم A و B دو ماتریس $n \times n$ مختلط باشند. گوئیم B هم‌ارز یکانی با A است، هرگاه ماتریس یکانی $n \times n$ P وجود داشته باشد به طوری که $B = P^{-1}AP$. گوئیم B هم‌ارز متعامد با A است، هرگاه ماتریس متعامد $n \times n$ P وجود داشته باشد به طوری که $B = P^{-1}AP$.

با این تعریف آنچه را که در بالا مشاهده کردیم می‌توانیم به شرح ذیل بیان کنیم: اگر \mathcal{B}' و \mathcal{B} دو پایه متعامد یک‌مرتبه برای V باشند، آنگاه به ازای هر عملگر خطی T

روی V ماتریس $[T]_{\mathcal{B}}$ هم‌ارز یکانی با ماتریس $[T]_{\mathcal{B}}$ است. درحالتی که V یک فضای ضرب داخلی حقیقی باشد، این ماتریسها، با واسطهٔ یک ماتریس متعامد حقیقی، هم‌ارز متعامد هستند.

تمرین

۱. ماتریسی یکانی بیابید که متعامد نباشد، و ماتریس متعامدی بیابید که یکانی نباشد.

۲. فرض کنید V فضای ماتریسهای $n \times n$ مختلط با ضرب داخلی $(A|B) = \text{tr}(AB^*)$ باشد. به ازای هر M در V ، T_M را عملگری خطی بگیرد که با $T_M(A) = MA$ تعریف می‌شود. نشان دهید که T_M یکانی است اگر و تنها اگر M ماتریسی یکانی باشد.

۳. فرض کنید V مجموعهٔ اعداد مختلط باشد که به عنوان یک فضای برداری حقیقی در نظر گرفته شده است.

(الف) نشان دهید $(\alpha|\beta) = \text{Re}(\alpha\bar{\beta})$ ضربی داخلی روی V تعریف می‌کند.
 (ب) یک بکریختی (فضای ضرب داخلی) از V بروی R^2 با ضرب داخلی استاندارد عرضه کنید.

(پ) به ازای هر γ در V ، M_γ را عملگر خطی روی V تعریف شده با $M_\gamma\alpha = \gamma\alpha$ بگیرد و نشان دهید $(M_\gamma)^* = M_{\bar{\gamma}}$

(ت) به ازای کدام اعداد مختلط مانند γ ، ماتریس M_γ خودالحاق است؟

(ث) به ازای کدام γ ، ماتریس M_γ یکانی است؟

(ج) به ازای کدام γ ، ماتریس M_γ مثبت است؟

(چ) $\det(M_\gamma)$ چیست؟

(ح) ماتریس M_γ را در پایهٔ $\{1, i\}$ به دست آورید.

(خ) اگر T عملگری خطی روی V باشد، شرایطی لازم و کافی برای T بیابید که

به ازای γ بی‌مساوی M_γ باشد.

(د) عملگری یکانی روی V بیابید که به ازای هر γ مساوی M_γ نباشد.

۴. فرض کنید V فضای R^2 با ضرب داخلی استاندارد باشد. اگر U عملگری یکانی روی V باشد، نشان دهید ماتریس U در پایهٔ مرتب‌استانده، به ازای θ بی‌حقیقی، $0 \leq \theta < 2\pi$ یکی از دو ماتریس زیر است:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

U_θ را عملگر خطی متناظر به اولین ماتریس، یعنی U_θ را دوران به اندازه زاویه θ بگیرد. حال خود را متقاعد کنید که هر عملگر یکانی روی V یا یک دوران است یا یک انعکاس حول محور ϵ_1 و به دنبالش یک دوران.

(الف) $U_\theta U_\phi$ چیست؟

(ب) نشان دهید که $U_\theta^* = U_\theta$.

(پ) فرض کنید \emptyset یک عدد حقیقی ثابت و $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ پایه متعامد یک‌حاصل از دوران $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ به اندازه زاویه \emptyset باشد، یعنی $\alpha_j = U_\phi \epsilon_j$. اگر θ عدد حقیقی دیگری باشد، ماتریس U_θ در پایه مرتب \mathcal{B} چیست؟

۵. فرض کنید V فضای R^3 با ضرب داخلی استاندارد باشد. فرض کنید W صفحه پدید آمده توسط $\alpha = (1, 1, 1)$ و $\beta = (1, 1, -2)$ باشد. U را عملگری خطی بگیرد که به طور هندسی، به صورت زیر تعریف می‌شود: U دوران به اندازه زاویه θ حول خط مستقیم مار از مبدأ است که بر W عمود است. عملاً دو دوران از این نوع وجود دارد. یکی را انتخاب کنید و ماتریس U را در پایه مرتب استاندارد بیابید. (یکی از راههایی را که می‌توان در پیش گرفت این است. α_1 و α_2 بی راکه پایه متعامدیکه‌ای برای W تشکیل می‌دهند، بیابید. α_3 را برداری بانرم ۱ بگیرد که بر W عمود باشد. ماتریس U در پایه $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ را بیابید. یک تغییر پایه انجام دهید.)

۶. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و W زیرفضایی از V باشد. در این صورت $V = W \oplus W^\perp$ ؛ یعنی، هر α در V به طور یکتا به صورت $\alpha = \beta + \gamma$ با β در W و γ در W^\perp . قابل بیان است. حال عملگری خطی چون U را طبق $U\alpha = \beta - \gamma$ تعریف کنید.

(الف) ثابت کنید U هم خود الحاق است و هم یکانی.

(ب) اگر V فضای R^3 با ضرب داخلی استاندارد و W زیرفضای پدید آمده توسط $(1, 0, 1)$ باشد، ماتریس U را در پایه مرتب استاندارد بیابید.

۷. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی مختلط و T عملگر خطی خودالحاقی روی V باشد. نشان دهید

(الف) به ازای هر α در V ، $\|\alpha + iT\alpha\| = \|\alpha - iT\alpha\|$ ،

(ب) $\alpha + iT\alpha = \beta + iT\beta$ اگر و تنها اگر $\alpha = \beta$.

(پ) $I + iT$ نامنفرد است.

(ت) $I - iT$ نامنفرد است.

(ث) حال فرض کنید V با بعد متناهی باشد. ثابت کنید

$$U = (I - iT)(I + iT)^{-1}$$

عملگری یکانی است؛ U را مبدل کیلی برای T می نامیم. به معنای تخصصی، $U = f(t)$ و

$$f(x) = \frac{1-ix}{1+ix}$$

۸. اگر θ عددی حقیقی باشد، ثابت کنید ماتریسهای ذیل به طور یکانی هم ارزند.

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix}$$

۹. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی، T عملگر خطی مثبتی روی V و P_T ضرب داخلی روی V تعریف شده با $p_T(\alpha, \beta) = (T\alpha | \beta)$ باشد. فرض کنید U عملگری خطی روی V و U^* الحاقی آن نسبت به $(|)$ باشد. ثابت کنید که U نسبت به ضرب داخلی p_T یکانی است اگر و تنها اگر $T = U^*TU$.

۱۰. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی باشد. به ازای هر α و β در V ، $T_{\alpha, \beta}$ را عملگر خطی روی V تعریف شده با $T_{\alpha, \beta}(\gamma) = (\gamma | \beta)\alpha$ بگیرد و نشان دهید:

$$T_{\alpha, \beta}^* = T_{\beta, \alpha} \quad (\text{الف})$$

$$\text{tr}(T_{\alpha, \beta}) = (\alpha | \beta) \quad (\text{ب})$$

$$T_{\alpha, \beta} T_{\gamma, \delta} = T_{\alpha, (\beta | \gamma)\delta} \quad (\text{پ})$$

(ت) تحت چه شرایطی $T_{\alpha, \beta}$ خودالحاق است؟

۱۱. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی m بعدی بر روی هیأت F و $L(V, V)$ فضای عملگرهای خطی روی V باشد. نشان دهید یک ضرب داخلی یکتا روی $L(V, V)$ با این خاصیت وجود دارد که به ازای هر α و β در V ، $\|T_{\alpha, \beta}\|^2 = \|\alpha\|^2 \|\beta\|^2$. این عملگر $T_{\alpha, \beta}$ تعریف شده در تمرین ۱۰ است. یک یکرختی بین $L(V, V)$ با این ضرب داخلی و فضای ماتریسهای $n \times n$ بر روی F با ضرب داخلی $(AB) = \text{tr}(AB^*)$ بیابید.

۱۲. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی باشد. در تمرین ۶ نشان دادیم که عملگرهایی خطی روی V که هم خودالحاق و هم یکانی باشند چگونه ساخته می شوند. حال ثابت کنید که عملگر دیگری از این نوع وجود ندارد، یعنی ثابت کنید که هر عملگر یکانی خودالحاق، از زیرفضایی چون W طبق آنچه که در تمرین ۶ تشریح شد ناشی می شود.

۱۳. فرض کنید V و W دو فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و با ابعاد مساوی باشند. فرض کنید U یک یکرختی از V بر روی W باشد. نشان دهید:

(الف) نگاشت $T \rightarrow UTU^{-1}$ يك يکریختی از فضای برداری $L(V, V)$ بروی فضای برداری $L(W, W)$ است.

(ب) به ازای هر T در $L(V, V)$ ، $\text{tr}(UTU^{-1}) = \text{tr}(T)$.

(پ) $UT_{\alpha, \beta}U^{-1} = T_{U\alpha, U\beta}$ در تمرین ۱۰ تعریف شده است.

(ت) $(UTU^{-1})^* = UT^*U^{-1}$.

(ث) اگر $L(V, V)$ را به ضرب داخلی $(T_1 | T_2) = \text{tr}(T_1 T_2)^*$ مجهز و به همین

نحو در مورد $L(W, W)$ عمل کنیم، آنگاه $T \rightarrow UTU^{-1}$ يك يکریختی فضاهای ضرب داخلی خواهد بود.

۱۴. اگر V يك فضای ضرب داخلی باشد، يك حرکت صلب عبارت است از تابعی چون T (نه لزوماً خطی) از V در V ، به طوری که به ازای هر α و β در V ،

$$\|T\alpha - T\beta\| = \|\alpha - \beta\|.$$

هر عملگر یکانی خطی مثالی از حرکت صلب است. مثالی دیگر، انتقال به اندازه يك بردار ثابت γ است:

$$T_\gamma(\alpha) = \alpha + \gamma$$

(الف) فرض کنید V فضای R^2 با ضرب داخلی استاندارد باشد. فرض کنید T حرکتی صلب از V باشد، و نیز $T(0) = 0$. ثابت کنید T خطی و عملگری یکانی است.

(ب) نتیجه قسمت (الف) را به کار بگیرید و ثابت کنید که هر حرکت صلب از R^2 ترکیبی است از يك انتقال و به دنبال آن عملگری یکانی.

(پ) اکنون نشان دهید که هر حرکت صلب از R^2 یا انتقالی است که يك دوران به دنبال آن می آید یا انتقالی است که به دنبالش يك انعکاس و سپس يك دوران می آید.

۱۵. يك عملگریکانی روی R^4 (با ضرب داخلی استاندارد) به طور ساده عملگری خطی است که فرم درجه دوم

$$\|(x, y, z, t)\|_L^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

را حفظ می کند، یعنی عملگری خطی چون U است که به ازای هر α در R^4 ، $\|U\alpha\|_L^2 = \|\alpha\|_L^2$. در بخش معینی از نظریهٔ نسبیّت یافتن عملگر خطی T که فرم

$$\|(x, y, z, t)\|_L^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

را حفظ کند، مورد نظر است. $\| \cdot \|_L$ منتج از ضربی داخلی نیست، بلکه از چیزی به نام «متریک لورنتس» (که وارد بحث آن نمی شویم) ناشی می شود. بدین دلیل، عملگری خطی چون T روی R^4 که به ازای هر α در R^4 ، $\|T\alpha\|_L^2 = \|\alpha\|_L^2$ ، يك تبدیلی لورنتس نامیده می شود.

(الف) نشان دهید تابع U که با

$$U(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} t+x & y+iz \\ y-iz & t-x \end{bmatrix}$$

تعریف می‌شود، یک یکرختی از R^4 بروی فضای برداری حقیقی H متشکل از همه ماتریسهای مختلط 2×2 خودالحاق است.

(ب) نشان دهید $\|\alpha\|_2^2 = \det(U\alpha)$.

(پ) فرض کنید T یک عملگر خطی (حقیقی) روی فضای H متشکل از ماتریسهای خودالحاق 2×2 باشد. نشان دهید $L = U^{-1}TU$ عملگری خطی روی R^4 است.

(ت) گیریم M یک ماتریس مختلط 2×2 باشد. نشان دهید که $T_M(A) = M^*AM$ عملگری خطی چرن T_M روی H تعریف می‌کند. (حتماً بررسی کنید که $H \cdot T_M$ در H می‌نگارد.)

(ث) اگر M ماتریسی 2×2 باشد با $|\det M| = 1$ ، نشان دهید که $L_M = U^{-1}T_MU$ یک تبدیل لورنتس روی R^4 است.

(ج) یک تبدیل لورنتس بیابید که به صورت L_M نباشد.

۵.۸. عملگرهای نرمال

هدف اصلی در این بخش حل مسئله زیر است. اگر T عملگری خطی روی یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی V باشد، تحت چه شرایطی V دارای یک پایه متعامد یک‌متشکل از بردارهای سرشت‌نمای T است؟ به بیان دیگر، چه وقت یک پایه متعامد یک‌متشکل \mathcal{B} برای V وجود دارد که ماتریس T در پایه \mathcal{B} قطری باشد؟

کار خود را با استخراج چند شرط لازم روی T که بعداً نشان خواهیم داد این شرایط کافی نیز هستند، آغاز می‌کنیم. فرض کنیم $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه متعامد یک‌ای برای V با خاصیت

$$T\alpha_j = c_j\alpha_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (16-8)$$

باشد. این شرط صرفاً بیان می‌کند که ماتریس T در پایه مرتب \mathcal{B} ماتریسی قطری با درایه‌های قطری c_1, \dots, c_n است. عملگر الحاقی T^* در همین پایه مرتب توسط ماتریس ترانزپوزیته مزدوج، یعنی ماتریس قطری با درایه‌های قطری $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n$ نمایش داده می‌شود. اگر V یک فضای ضرب داخلی حقیقی باشد، اسکالرهایی c_1, \dots, c_n (مسلماً حقیقی هستند) و از این رو باید داشته باشیم $T = T^*$. به بیان دیگر، اگر V یک فضای ضرب داخلی حقیقی با بعد متناهی باشد و T هم عملگری خطی که برایش یک پایه متعامد یک‌ای از بردارهای سرشت‌نما وجود دارد، آنگاه T باید خودالحاق باشد. اگر V یک فضای ضرب داخلی مختلط باشد، لزومی ندارد که اسکالرهایی c_1, \dots, c_n حقیقی باشند، یعنی لازم نیست که T خودالحاق باشد. ولی توجه کنید که T باید در

$$TT^* = T^*T \quad (17-8)$$

صدق کند. زیرا، هر دو ماتریس قطری با هم جابجا می‌شوند و چون T و T^* در پایه مرتب \mathcal{B} هر دو توسط ماتریسهای قطری نمایش داده می‌شوند، (۱۷-۸) برقرار است. این واقعیت، نسبتاً جالب است که در حالت مختلط هم این شرط برای ايجاب وجود يك پایه متعامدیکه از بردارهای سرشت نماكافی است.

تعریف. گیریم V يك فضای ضرب داخلى با بعد متناهی و T عملگری خطی روی V باشد. گوئیم T نرمال است، هرگاه با الحاقیش جابجا شود، یعنی $TT^* = T^*T$.

هر عملگر خودالحاق نرمال است، همان طور که هر عملگر یکانی هم نرمال است. هر ضرب اسکالری هر عملگر نرمال عملگری است نرمال. اما، مجموع و حاصل ضرب عملگرهای نرمال، در حالت عمومی نرمال نیستند. گرچه به هیچ وجه لازم نیست، ولى ما مطالعه درباره عملگرهای نرمال را با بررسی عملگرهای خودالحاق آغاز می‌کنیم.

قضیه ۱۵. گیریم V يك فضای ضرب داخلى و T عملگر خطی خودالحاق روی V باشد. در این صورت هر مقدار سرشت نماي T حقیقی است و بردارهای سرشت نماي T وابسته به مقادیر سرشت نماي متمایز، متعامد هستند.

اثبات. فرض کنیم C يك مقدار سرشت نماي T باشد، یعنی، به ازای بردار غیر صفری چون α ، $T\alpha = c\alpha$. در این صورت:

$$\begin{aligned} c(\alpha|\alpha) &= (c\alpha|\alpha) \\ &= (T\alpha|\alpha) \\ &= (\alpha|T\alpha) \\ &= (\alpha|c\alpha) \\ &= \bar{c}(\alpha|\alpha). \end{aligned}$$

چون $(\alpha|\alpha) \neq 0$ ، باید داشته باشیم $c = \bar{c}$. همچنین فرض کنیم داشته باشیم $T\beta = d\beta$ با $\beta \neq 0$. آنگاه

$$\begin{aligned} c(\alpha|\beta) &= (T\alpha|\beta) \\ &= (\alpha|T\beta) \\ &= (\alpha|d\beta) \\ &= \bar{d}(\alpha|\beta) \\ &= d(\alpha|\beta). \end{aligned}$$

اگر $c \neq d$ ، آنگاه $(\alpha|\beta) = 0$. \square

باید خاطر نشان کنیم که قضیه ۱۵ طلبی درباره وجود مقادیر سرشت نما و یا بردارهای سرشت نما بیان نمی کند.

قضیه ۱۶. روی یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی مثبت، هر عملگر خودالحاق دارای یک بردار سرشت نما (غیرصفر) است.

اثبات. گیریم V یک فضای ضرب داخلی با بعد $n > 0$, n عملگر خودالحاقی روی V باشد. پایه متعامد یکه ای چون \mathcal{B} برای V انتخاب و فرض می کنیم $A = [T]_{\mathcal{B}}$. چون $T = T^*$ داریم $A = A^*$. حال گیریم W فضای ماتریسهای $n \times 1$ روی C با ضرب داخلی $(X|Y) = Y^*X$ باشد. در این صورت $U(X) = AX$ عملگر خطی خودالحاق U روی W را تعریف می کند. چند جمله ای سرشت نما، $\det(\alpha I - A)$ ، یک چند جمله ای درجه n بر روی اعداد مختلط است؛ و هر چند جمله ای بر روی C از درجه مثبت یک ریشه دارد. پس عدد مختلطی چون c وجود دارد که $\det(cI - A) = 0$. این بدان معنی است که $A - cI$ منفرد است، یا اینکه X غیر صفری وجود دارد که $AX = cX$. چون عملگر U (ضرب در A) خودالحاق است، از قضیه ۱۵ نتیجه می شود که c حقیقی است. اگر V یک فضای برداری حقیقی باشد، می توانیم X را طوری انتخاب کنیم که درایه های حقیقی باشند. زیرا در آن صورت A و $A - cI$ دارای درایه های حقیقی هستند و چون $A - cI$ منفرد است، دستگاه $(A - cI)X = 0$ یک جواب حقیقی غیر صفر X دارد. نتیجه اینکه بردار غیر صفری چون α در V وجود دارد که $T\alpha = c\alpha$. \square

چند نکته در مورد اثبات وجود دارد که بهتر است به ذکر آنها پرداخته شود.

- (۱) اثبات وجود X غیر صفری که $AX = cX$ ، ربطی به این واقعیت که A هرمیتی (خودالحاق) است ندارد. این اثبات نشان می دهد که هر عملگر خطی روی یک فضای برداری مختلط با بعد متناهی، دارای برداری سرشت نماست. در مورد یک فضای ضرب داخلی حقیقی، از خاصیت خود الحاقی A قویاً استفاده می شود تا به ما بفهماند که مقادیر سرشت نما A حقیقی هستند و از این رو می توانیم X مناسبی با درایه های حقیقی بیابیم.
- (۲) استدلال نشان می دهد که چند جمله ای سرشت نما هر ماتریس خودالحاق، علی رغم اینکه درایه های این ماتریس ممکن است حقیقی نباشند، ضرایب حقیقی دارد.
- (۳) این فرض که V با بعد متناهی است برای اثبات قضیه لازم است؛ یک عملگر خود-الحاق روی یک فضای ضرب داخلی با بعد نامتناهی ممکن است حتی یک مقدار سرشت نما هم نداشته باشد.

مثال ۲۹. گیریم V فضای برداری توابع مختلط (یا حقیقی) پیوسته روی فاصله $0 \leq t \leq 1$ ، با ضرب داخلی

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)} dt$$

باشد. عملگر «ضرب توسط t »، $(Tf)(t) = tf(t)$ ، خودالحاق است. فرض می‌کنیم $Tf = cf$ در این صورت

$$(t-c)f(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

و از این رو، به ازای $t \neq c$ ، $f(t) = 0$. چون f پیوسته است، $f = 0$. پس، T هیچ مقدار (بردار) سرشت‌نما ندارد.

قضیه ۱۷. گیریم V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و T عملگر خطی روی V باشد. فرض کنیم W زیرفضایی از V باشد که تحت T پایاست. در این صورت مکمل متعامد W تحت T^* هم پایاست.

اثبات. یادآوری می‌کنیم این واقعیت که W تحت T پایاست بدین معنی نیست که هر بردار W توسط T ثابت نگه‌داشته می‌شود؛ بلکه بدین معنی است که اگر α در W باشد، آنگاه $T\alpha$ نیز در W قرار دارد. β را در W^\perp می‌گیریم. باید نشان دهیم که $T^*\beta$ در W^\perp قرار دارد، یعنی باید نشان دهیم که به ازای هر α در W ، اگر α در W باشد، آنگاه $T\alpha$ هم در W قرار دارد و از این رو $(T\alpha | \beta) = 0$. ولی

$$\square (T\alpha | \beta) = (\alpha | T^*\beta)$$

قضیه ۱۸. گیریم V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و T عملگر خطی خودالحاقی روی V باشد. در این صورت پایه متعامد یکه‌ای برای V وجود دارد که هر بردار آن یک بردار سرشت‌نمای T است.

اثبات. فرض کنیم $0 < \dim(V)$. بنا بر قضیه ۱۶، T دارای بردار سرشت‌نمایی چون α است. بردار $\alpha_1 = \alpha / \|\alpha\|$ را در نظر می‌گیریم و در این صورت α_1 یک بردار سرشت‌نمای T است که $\|\alpha_1\| = 1$. اگر $\dim(V) = 1$ ، کار تمام است. اکنون به استقرا روی بعد V پیش می‌رویم. فرض کنیم قضیه برای فضاهای ضرب داخلی با ابعاد کمتر از بعد (V) درست باشد. W را زیرفضای یک بعدی پدید آمده توسط بردار α_1 می‌گیریم. این حکم که α_1 یک بردار سرشت‌نمای T است، به طور ساده بدین معنی است که W تحت T پایاست. بنا بر قضیه ۱۷، مکمل متعامد W^\perp تحت $T^* = T$ پایاست. حال W^\perp با ضرب داخلی V ، یک فضای ضرب داخلی است که بعدش یکی کمتر از بعد V است. U را عملگر خطی القا شده توسط T روی W^\perp ، یعنی تحدید T به W^\perp می‌گیریم. آنگاه U خودالحاق است، و بنا بر فرض استقرا، W^\perp پایه متعامد یکه‌ای چون $\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ متشکل از بردارهای سرشت‌نمای U دارد. حال هر یک از این بردارها یک بردار سرشت‌نمای T هم هست و چون $V = W \oplus W^\perp$ ، نتیجه می‌گیریم که $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه مطلوب برای V است. \square

نتیجه. فرض کنیم A یک ماتریس هرمیتی (خودالحاقی) $n \times n$ باشد. در این صورت

ماتریسی یکانی چون P وجود دارد که $P^{-1}AP$ قطری است (A هم‌ارز یکانی با ماتریسی قطری است). اگر A یک ماتریس متقارن حقیقی باشد، یک ماتریس متعامد حقیقی چون P وجود دارد که $P^{-1}AP$ قطری است.

اثبات. گیریم V فضای $C^{n \times 1}$ با ضرب داخلی استاندارد و T عملگری خطی روی V باشد که در پایه مرتب استاندارد توسط A نمایش داده می‌شود. چون $A = A^*$ داریم $T = T^*$. فرض کنیم $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه متعامد یک‌مرتبی برای V باشد که $T\alpha_j = c_j\alpha_j$ ، $j = 1, \dots, n$. اگر $D = [T]_{\mathcal{B}}$ ، آنگاه D ماتریسی قطری با درایه‌های قطری c_1, \dots, c_n است. P را ماتریسی با بردارهای ستونی $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ می‌گیریم. در این صورت $D = P^{-1}AP$.

درحالی‌که همه درایه‌های A حقیقی باشند، می‌توان V را فضای R^n با ضرب داخلی استاندارد گرفت و استدلال را تکرار کرد. در این حالت، P ماتریسی یکانی با درایه‌های حقیقی، یعنی یک ماتریس متعامد حقیقی خواهد بود. \square

از ترکیب قضیه ۱۸ با نکاتی که در ابتدای این بخش ذکر شد نتیجه ذیل حاصل می‌شود: اگر V یک فضای ضرب داخلی حقیقی با بعد منتهای T عملگری خطی روی V باشد، آنگاه V یک پایه متعامد یک‌مرتبی از بردارهای سرشت‌نمای T دارد اگر و تنها اگر A خودالحاق باشد. به بیانی هم‌ارز، اگر A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های حقیقی باشد، یک ماتریس متعامد حقیقی چون P وجود دارد که $P^{-1}AP$ قطری است اگر و تنها اگر $A = A'$. برای ماتریسهای متقارن مختلط چنین نتیجه‌ای وجود ندارد. به بیان دیگر، برای ماتریسهای مختلط، بین شرایط $A = A^*$ و $A = A'$ تفاوت عمده‌ای وجود دارد.

با تعیین تکلیف حالت خودالحاق، اکنون به مطالعه حالت عمومی عملگرهای نرمال بازمی‌گردیم. نظیر قضیه ۱۸ را برای عملگرهای نرمال درحالت مختلط، اثبات خواهیم کرد. البته دلیلی برای این محدودیت وجود دارد. یک عملگر نرمال روی یک فضای ضرب داخلی حقیقی ممکن است هیچ بردار سرشت‌نمای غیرصفری نداشته باشد. به عنوان مثال، این امر برای همه دورانهای در R^2 ، بجز دوتا، صادق است.

قضیه ۱۹. فرض کنیم V یک فضای ضرب داخلی با بعد منتهای، T عملگری نرمال روی V و α برداری در V باشد. در این صورت α یک بردار سرشت‌نمای T با مقدار سرشت‌نمای c است اگر و تنها اگر α یک بردار سرشت‌نمای T^* با مقدار سرشت‌نمای \bar{c} باشد.

اثبات. فرض می‌کنیم U عملگری نرمال روی V باشد. آنگاه $\|U\alpha\| = \|U^*\alpha\|$. زیرا با به کار بردن شرط $UU^* = U^*U$ دیده می‌شود که

$$\begin{aligned} \|U\alpha\|^2 &= (U\alpha|U\alpha) = (\alpha|U^*U\alpha) \\ &= (\alpha|UU^*\alpha) = (U^*\alpha|U^*\alpha) = \|U^*\alpha\|^2. \end{aligned}$$

اگر c اسکالر دلخواهى باشد، عملگر $U = T - cI$ نرمال است. زیرا

$$(T - cI)^* = T^* - \bar{c}I$$

و بسادگى ثابت مى شود که $UU^* = U^*U$. پس

$$\|(T - cI)\alpha\| = \|(T^* - \bar{c}I)\alpha\|.$$

از اين رو، $(T - cI)\alpha = 0$ اگر و تنها اگر $(T^* - \bar{c}I)\alpha = 0$.

تعريف. ماتريس $n \times n$ مختلط A نرمال ناميده مى شود هرگاه $AA^* = A^*A$.

درک اينکه نرمال بودن ماتريسها يا عملگرها واقعاً به چه معنى است، چندان آسان نيست؛ اما، در تلاش جهت ايجاد تصويرى براى اين مفهوم، لازم است توجه شود که ماتريسى مثلى نرمال است اگر و تنها اگر قطرى باشد.

قضيه ۲۰. گيريم V يك فضاى ضرب داخلى با بعد متناهى، T عملگرى خطى روى V ، و \mathcal{B} پايه متعامد يکهاى براى V باشد. فرض کنيم A ، ماتريس T در پايه \mathcal{B} بالامثلى باشد. در اين صورت T نرمال است. اگر و تنها اگر A ماتريسى قطرى باشد. اثبات. چون \mathcal{B} يك پايه متعامد يکهاى است، A^* ماتريس T^* در \mathcal{B} است. اگر A قطرى باشد، آنگاه $AA^* = A^*A$ ، و اين مطلب ايجاب مى کند که $TT^* = T^*T$. بعکس، فرض کنيم T نرمال باشد و $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. آنگاه، چون A بالامثلى است، $T\alpha_1 = A_{11}\alpha_1$. بنا بر قضيه ۱۹، اين مطلب ايجاب مى کند که $T^*\alpha_1 = \bar{A}_{11}\alpha_1$. از طرف ديگر،

$$\begin{aligned} T^*\alpha_1 &= \sum_j (A^*)_{j1}\alpha_j \\ &= \sum_j \bar{A}_{1j}\alpha_j. \end{aligned}$$

بنابراين، به ازاي هر $j > 1$ ، $A_{1j} = 0$ بخصوص، و چون A بالامثلى است، نتيجه مى گيريم که

$$T\alpha_2 = A_{22}\alpha_2.$$

پس، $T^*\alpha_2 = \bar{A}_{22}\alpha_2$ و به ازاي هر $j \neq 2$ ، $A_{2j} = 0$. با ادامه اين روش درمى يابيم که A قطرى است. \square

قضيه ۲۱. فرض کنيم V يك فضاى ضرب داخلى مختلط با بعد متناهى و T عملگرى خطى روى V باشد. در اين صورت پايه متعامد يکهاى براى V وجود دارد که در آن ماتريس T بالامثلى است.

اثبات. گيريم n بعد V باشد. وقتى $n = 1$ ، قضيه درست است. با استقرا روى n پيش مى رويم و فرض مى کنيم که نتيجه براى عملگرهاى خطى روى فضاهاى ضرب داخلى

مختلط با بعد $n-1$ درست باشد. چون V يك فضای ضرب داخلی مختلط با بعد متناهی است، بردار یکه‌ای چون α در V و اسکالری چون c وجود دارند که

$$T^* \alpha = c \alpha.$$

گیریم W مکمل متعامد زیر فضای پدید آمده توسط α و S تحدید T به W باشد. بنا بر قضیه ۱۷، فضای W تحت T پایاست. پس S عملگری خطی روی W است. چون W دارای بعد $n-1$ است، فرض استقرا وجود پایه متعامد یکه‌ای چون $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ برای W را ایجاب می‌کند که در آن ماتریس S بالامثلثی است. حال فرض می‌کنیم $\alpha_n = \alpha$. آنگاه $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه متعامد یکه‌ای برای V است که در آن ماتریس T بالامثلثی است. \square

این قضیه برای ماتریسها نتیجه زیر را ایجاب می‌کند.

نتیجه. به‌ازای هر ماتریس $n \times n$ مختلط A ماتریسی یکانی چون U وجود دارد که $U^{-1}AU$ بالامثلثی است.

اکنون با ترکیب قضیه ۲۱ و قضیه ۲۰، بلافاصله مشابه قضیه ۱۸ را به‌شرح زیر برای عملگرهای نرمال به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۲۲. فرض می‌کنیم V يك فضای ضرب داخلی مختلط با بعد متناهی و T عملگر نرمالی روی V باشد. در این صورت V دارای پایه متعامد یکه‌ای متشکل از بردارهای سرشت‌نمای T است.

مجدداً تعبیری ماتریسی هم وجود دارد.

نتیجه. به‌ازای هر ماتریس نرمال A ، ماتریسی یکانی چون P وجود دارد که $P^{-1}AP$ ماتریسی قطری است.

تمرین

۰۱. برای هر يك از ماتریسهای متقارن حقیقی A در ذیل، يك ماتریس متعامد حقیقی چون P بیابید که $P^t AP$ قطری باشد.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

۰۲. آیا هر ماتریس متقارن مختلط، خودالحاق است؟ آیا نرمال است؟

۰۳ برای

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

یک ماتریس متعامد حقیقی چون P وجود دارد که $P^t A P = D$ قطری است. یکی از این ماتریسهای قطری D را بیابید.

۰۴ V را C^2 با ضرب داخلی استاندارد بگیرید. T را عملگری خطی روی V بگیرید که در پایه مرتب استاندارد توسط ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

نمایش داده می‌شود. نشان دهید که T نرمال است و پایه متعامد یکه‌ای، متشکل از بردارهای سرشت‌نمای T برای V بیابید.

۰۵ مثالی از یک ماتریس 2×2 چون A بیابید که A^2 نرمال باشد ولی A نرمال نباشد.

۰۶ فرض کنید T عملگر نرمالی روی یک فضای ضرب داخلی مختلط با بعد متناهی باشد. ثابت کنید بر حسب اینکه همه مقادیر سرشت‌نمای T حقیقی، مثبت، یا با قدر مطلق ۱ باشند، T خودالحاق، مثبت، یا یکانی است. (از قضیه ۲۲ برای تحویل مسئله به‌سؤالی مشابه درباره ماتریسهای قطری استفاده کنید.)

۰۷ T را عملگری خطی روی فضای ضرب داخلی بعد متناهی V بگیرید و فرض کنید T هم‌مثبت و هم‌یکنی باشد. ثابت کنید $T = I$.

۰۸ ثابت کنید T نرمال است اگر و تنها اگر $T = T_1 + iT_2$ که در آن T_1 و T_2 عملگرهای خودالحاقی هستند که با یکدیگر جابجا می‌شوند.

۰۹ ثابت کنید که هر ماتریس متقارن حقیقی دارای یک ریشه سوم متقارن حقیقی است، یعنی اگر A متقارن حقیقی باشد، ماتریسی متقارن حقیقی چون B وجود دارد که $B^3 = A$.

۱۰ ثابت کنید که هر ماتریس مثبت، مربع یک ماتریس مثبت است.

۱۱ ثابت کنید که هر عملگر نرمال و پوچ توان برابر عملگر صفر است.

۱۲ اگر T عملگری نرمال باشد، ثابت کنید بردارهای سرشت‌نمای T وابسته به مقادیر

سروشت نمای متمایز، متعامدند.

۱۳. فرض کنید T عملگری نرمال روی یک فضای ضرب داخلی مختلط با بعدمتناهی باشد. ثابت کنید یک چندجمله‌ای چون f با ضرایب مختلط وجود دارد که $T^* = f(T)$.
(T را توسط ماتریسی قطری نمایش دهید و ببینید f چه باید باشد.)

۱۴. اگر دو عملگر نرمال (با یکدیگر) جابجا شوند، ثابت کنید که حاصل ضرب آنها نیز نرمال است.

عملگرهای روی فضاهای ضرب داخلی

۱.۹. مقدمه

بیشتر مطالب مورد بحث در فصل ۸ بنیانی هستند و هر کسی باید آنها را بداند. فصل حاضر برای دانشجویان پیشرفته‌تر یا برای خوانندگان در نظر گرفته شده است که مشتاق‌اند معلومات خود را درباره عملگرهای روی فضاهای ضرب داخلی گسترش دهند. به استثنای قضیهٔ محور اصلی که اساساً چیزی جز فرمول بندی دیگری از قضیهٔ ۱۸ دربارهٔ قطری کردن متعامد عملگرهای خودالحاق نیست و بجز سایر قضایای بخش ۲.۹ مربوط به فرمها، مطالب ارائه شده پیچیده‌تر و عموماً درگیر مسایل فنی تری هستند. عیناً همان‌طور که در قسمت‌های آخر فصل‌های ۵ و ۷ انتظار زیادتری داشتیم در این فصل نیز از خواننده توقع بیشتری داریم. استدلالها و اثباتها به‌شیوه‌ای فشرده‌تر نوشته شده‌اند و تقریباً هیچ مثالی جهت هموار ساختن راه وجود ندارد. با این وجود سعی کرده‌ایم تعداد زیادی تمرین در دسترس خواننده بگذاریم.

سه بخش اول به نتایج مربوط به فرمهای روی فضاهای ضرب داخلی و رابطهٔ بین فرمها و عملگرهای خطی اختصاص داده شده‌اند. بخش بعد مربوط به نظریهٔ طیفی است؛ یعنی با نتایج قضایای ۱۸ و ۲۲ از فصل ۸ دربارهٔ قطری کردن عملگرهای نرمال و خودالحاق سروکار دارد. در بخش آخر، مطالعهٔ عملگرهای نرمال را دنبال می‌کنیم؛ بخصوص به حالت حقیقی می‌پردازیم و ضمن عمل، این پرسش را که قضیهٔ تجزیهٔ اولیه از فصل ۶ دربارهٔ

عملگرهای نرمال چه می گویند، مورد بررسی قرار می دهیم.

۲.۹. فرمهای روی فضاهای ضرب داخلی

اگر T عملگری خطی روی یک فضای ضرب داخلی بعد متناهی V باشد، تابع تعریف شده روی $V \times V$ طبق

$$f(\alpha, \beta) = (T\alpha | \beta)$$

ممکن است به عنوان نوعی جانشین برای T محسوب شود. بسیاری از پرسشهای درباره T با سؤالاتی درباره f هم ارز هستند. در حقیقت، بسادگی دیده می شود که f عملگر T را مشخص می کند. زیرا اگر $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه متعامدیکه ای برای V باشد، آنگاه درایه های ماتریس T در \mathcal{B} با

$$A_{jk} = f(\alpha_k, \alpha_j)$$

تعیین می شوند. فهم این نکته مهم است که از دیدگاهی بیشتر تجربیدی چگونه f عملگر T را مشخص می کند. تعریف ذیل خواص بسیار مهم f را تشریح می کند.

تعریف. یک فرم (یک و نیم خطی) روی یک فضای برداری حقیقی یا مختلط V ، تابعی f چون f روی $V \times V$ با مقادیر درحیأت اسکالرهاست که به ازای هر α, β, γ و c دهه اسکالرهایی c

$$f(c\alpha + \beta, \gamma) = cf(\alpha, \gamma) + f(\beta, \gamma) \quad (\text{الف})$$

$$f(\alpha, c\beta + \gamma) = cf(\alpha, \beta) + f(\alpha, \gamma) \quad (\text{ب})$$

پس، یک فرم یک و نیم خطی f تابعی روی $V \times V$ است که به ازای یک β ثابت $f(\alpha, \beta)$ تابعی خطی از α باشد و به ازای یک α ثابت تابع خطی مزدوجی از β . درحالت حقیقی $f(\alpha, \beta)$ به عنوان تابعی از هر یک از شناسه ها، خطی است، به بیان دیگر، یک فرم دوخطی است. درحالت مختلط، فرم یک و نیم خطی f دوخطی نیست، مگر آنکه $f = 0$. در باقیمانده این فصل، بجز در مواردی که ذکر آن مهم به نظر برسد صفت «یک و نیم خطی» را حذف خواهیم کرد.

اگر f و g دو فرم روی V باشند و c یک اسکالر، به آسانی می توان نشان داد که $cf + g$ نیز یک فرم است. از این مطلب نتیجه می شود که هر ترکیب خطی از فرمهای روی V ، مجدداً یک فرم است. از این رو، مجموعه همه فرمهای روی V زیرفضایی از فضای برداری همه توابع اسکالری روی $V \times V$ است.

قضیه ۱: گیریم V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و f یک فرم روی V باشد. در این صورت عملگر خطی یکتایی چون T روی V وجود دارد که به ازای هر α و β در V

$$f(\alpha, \beta) = (T\alpha | \beta)$$

و نگاشت $T \rightarrow f$ يك يکریختی از فضای فرمها بروی $L(V, V)$ است.

المبات. بردار ثابت β از V را در نظر می گیریم. آنگاه $\alpha \rightarrow f(\alpha, \beta)$ تابعی (تابعکی) خطی روی V است. بنا بر قضیه ۶ از فصل ۸ بردار یکتایی چون β' در V وجود دارد که به ازای هر α ، $f(\alpha, \beta) = (\alpha | \beta')$ تابعی چون U از V در V را با قراردادن $U\beta = \beta'$ تعریف می کنیم. در این صورت به ازای هر α ، β ، و γ در V همه اسکالرهایی

$$\begin{aligned} f(\alpha | c\beta + \gamma) &= (\alpha | U(c\beta + \gamma)) \\ &= c f(\alpha, \beta) + f(\alpha, \gamma) \\ &= c(\alpha | U\beta) + (\alpha | U\gamma) \\ &= (\alpha | cU\beta + U\gamma). \end{aligned}$$

پس U عملگری خطی روی V است و $T = U^*$ عملگری است که به ازای هر α و هر β داریم $f(\alpha, \beta) = (T\alpha | \beta)$. اگر همچنین داشته باشیم $f(\alpha, \beta) = (T'\alpha | \beta)$ ، آنگاه به ازای هر α و هر β ،

$$(T\alpha - T'\alpha | \beta) = 0$$

و از این رو، به ازای هر α داریم $T\alpha = T'\alpha$. پس، به ازای هر فرم f ، عملگر خطی یکتایی چون T_f وجود دارد که به ازای هر α و β در V

$$f(\alpha, \beta) = (T_f \alpha | \beta).$$

اگر f و g دو فرم باشند و c يك اسکالر، آنگاه به ازای هر α و β در V

$$\begin{aligned} (cf + g)(\alpha, \beta) &= (T_{cf+g} \alpha | \beta) \\ &= cf(\alpha, \beta) + g(\alpha, \beta) \\ &= c(T_f \alpha | \beta) + (T_g \alpha | \beta) \\ &= ((cT_f + T_g) \alpha | \beta). \end{aligned}$$

بنابراین

$$T_{cf+g} = cT_f + T_g$$

و از این رو، $f \rightarrow T_f$ نگاشتی خطی است. به ازای هر T در $L(V, V)$ ، تساوی

$$f(\alpha, \beta) = (T\alpha | \beta)$$

فرمی تعریف می کند که $T_f = T$ و $T_f = 0$ اگر و تنها اگر $f = 0$. بنابراین، $f \rightarrow T_f$ يك يکریختی است. \square

نتیجه. تساوی

$$(f | g) = \text{tr}(T_f T_g^*)$$

ضربی داخلی روی فضای فرمها با این خاصیت تعریف می‌کند که به ازای هر پایه متعامدیکه V از $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$

$$(f | g) = \sum_{j,k} f(\alpha_k, \alpha_j) \overline{g(\alpha_k, \alpha_j)}.$$

اثبات. از مثال ۳ فصل ۸ بسادگی نتیجه می‌شود که $(T, U) = \text{tr}(TU^*)$ ضربی داخلی روی $L(V, V)$ است. چون $f \rightarrow T_f$ یک یکره‌بخشی است، مثال ۶ از فصل ۸ نشان می‌دهد که

$$(f | g) = \text{tr}(T_f T_g^*)$$

نیز یک ضرب داخلی است. حال فرض کنیم A و B ماتریسهای T_f و T_g در پایه متعامدیکه $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ در این صورت

$$A_{jk} = (T_f \alpha_k | \alpha_j) = f(\alpha_k, \alpha_j)$$

و $B_{jk} = (T_g \alpha_k | \alpha_j) = g(\alpha_k, \alpha_j)$ چون AB^* ماتریس $T_f T_g^*$ در پایه \mathcal{B} است، نتیجه می‌گیریم که

$$(f | g) = \text{tr}(AB^*) = \sum_{j,k} A_{jk} \overline{B_{jk}}. \quad \square$$

تعریف. اگر f یک فرم باشد و $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه مرتب دلخواهی از V ، ماتریس A با درایه‌های

$$A_{jk} = f(\alpha_k, \alpha_j)$$

ماتریس f در پایه مرتب \mathcal{B} نامیده می‌شود.

وقتی که \mathcal{B} یک پایه متعامدیکه باشد، ماتریس f در \mathcal{B} ماتریس تبدیل خطی T_f نیز هست، اما در حالت عمومی این‌طور نیست.

اگر A ماتریس f در پایه مرتب $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ باشد، نتیجه می‌گیریم که به ازای همه اسکالرهای x_r و y_s ($1 \leq r, s \leq n$)

$$f\left(\sum_r x_r \alpha_r, \sum_s y_s \alpha_s\right) = \sum_{r,s} \bar{y}_s A_{rs} x_r. \quad (1-9)$$

به بیان دیگر، ماتریس A دارای این خاصیت است که

$$f(\alpha, \beta) = Y^* A X.$$

در اینجا X و Y بترتیب ماتریسهای مختصات α و β در پایه مرتب \mathcal{B} هستند. ماتریس f

در پایه دیگر

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^n P_{ij} \alpha_i, \quad (1 \leq j \leq n)$$

بنا بر معادله
(۲-۹)

$$A' = P^* A P$$

تعیین می شود. زیرا

$$\begin{aligned} A'_{jk} &= f(\alpha'_k, \alpha'_j) \\ &= f\left(\sum_s P_{sk} \alpha_s, \sum_r P_{rj} \alpha_r\right) \\ &= \sum_{r,s} \overline{P_{rj}} A_{rs} P_{sk} \\ &= (P^* A P)_{jk}. \end{aligned}$$

چون برای ماتریسهای یکانی، $P^* = P^{-1}$ ، از (۲-۹) چنین برمی آید که نتایج مربوط به هم ارزی یکانی را می توان در مطالعه فرمها هم به کار برد.

قضیه ۲. گیریم f فرمی روی يك فضای ضرب داخلی مختلط بعدمتناهی V باشد. در این صورت پایه متعامدیکه ای برای V وجود دارد که در آن ماتریس f بالامثلثی است. اثبات. فرض کنیم T عملگری خطی روی V باشد که به ازای هر α و β ، $f(\alpha, \beta) = (T\alpha | \beta)$ بنا بر قضیه ۲۱، پایه متعامدیکه ای چون $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ وجود دارد که در آن ماتریس T بالامثلثی است. از این رو وقتی که $j > k$

$$f(\alpha_k, \alpha_j) = (T\alpha_k | \alpha_j) = 0. \quad \square$$

تعریف. يك فرم f روی يك فضای برداری حقیقی یا مختلط V هرمیتی نامیده می شود، هرگاه به ازای هر α و β در V

$$f(\alpha, \beta) = \overline{f(\beta, \alpha)}.$$

اگر T عملگری خطی روی يك فضای ضرب داخلی با بعدمتناهی V باشد و f فرم

$$f(\alpha, \beta) = (T\alpha | \beta)$$

آنگاه $(T\alpha | \beta) = f(\beta, \alpha) = \overline{f(\alpha, T\beta)} = (T^* \alpha | \beta)$ ؛ از این رو، f هرمیتی است اگر و تنها اگر T خود الحاق باشد.

وقتی که f هرمیتی باشد، به ازای هر α ، مقدار $f(\alpha, \alpha)$ حقیقی است و این خاصیت روی فضاهاى مختلط فرمهای هرمیتی را مشخص می سازد.

قضیه ۳. گیریم V يك فضای برداری مختلط باشد و f فرمی روی V که به ازای هر α ، $f(\alpha, \alpha)$ حقیقی است. در این صورت f هرمیتی است. اثبات. گیریم α و β بردارهایی از V باشند. باید نشان دهیم که

$$f(\alpha, \beta) = \overline{f(\beta, \alpha)}$$

اما

$$f(\alpha + \beta, \alpha + \beta) = f(\alpha, \alpha) + f(\alpha, \beta) + f(\beta, \alpha) + f(\beta, \beta).$$

چون $f(\alpha + \beta, \alpha + \beta)$ ، $f(\alpha, \alpha)$ ، $f(\beta, \beta)$ و $f(\beta, \alpha)$ همه حقیقی هستند، عدد $f(\alpha, \beta) + f(\beta, \alpha)$ هم حقیقی است. با استفاده از همین برهان ولی با $\alpha + i\beta$ به جای $\alpha + \beta$ ، می بینیم که $-if(\alpha, \beta) + if(\beta, \alpha)$ نیز حقیقی است. با این نتیجه گیری که دو عدد حقیقی هستند، آنها را برابر مزدوجهای مختلطشان قرار می دهیم و به دست می آوریم که

$$f(\alpha, \beta) + f(\beta, \alpha) = \overline{f(\alpha, \beta) + f(\beta, \alpha)}$$

$$-if(\alpha, \beta) + if(\beta, \alpha) = \overline{-if(\alpha, \beta) + if(\beta, \alpha)}.$$

اگر معادله دوم را در i ضرب کنیم و نتیجه را به معادله اول بیفزاییم، داریم

$$2f(\alpha, \beta) = 2\overline{f(\beta, \alpha)}. \square$$

نتیجه. گیریم T عملگری خطی روی يك فضای ضرب داخلى با بعد متناهی مختلط باشد. در این صورت T خودالحاق است اگر و تنها اگر به ازای هر $\alpha \in V$ ، $(T\alpha | \alpha)$ حقیقی باشد.

قضیه ۴. (قضیه محور اصلی). به ازای هر فرم هرمیتی f روی يك فضای ضرب داخلى بعد متناهی V ، پایه متعامد یکه ای برای V وجود دارد که در آن f با يك ماتریس قطری با دراپه های حقیقی نمایش داده می شود.

اثبات. گیریم T عملگری خطی باشد که به ازای هر $\alpha \in V$ در $(T\alpha | \beta)$ ، $f(\alpha, \beta) =$ در این صورت چون $f(\alpha, \beta) = \overline{f(\beta, \alpha)}$ و $(\alpha | T\beta) = (T\beta | \alpha)$ ، نتیجه می شود که به ازای هر α و β

$$(T\alpha | \beta) = \overline{f(\beta, \alpha)} = (\alpha | T\beta)$$

و از این رو، $T = T^*$. بنا بر قضیه ۱۸ از فصل ۸، پایه متعامد یکه ای برای V وجود دارد که مشکل از بردارهای سرشت نمای T است. فرض کنیم $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ يك پایه متعامد یکه باشد و به ازای هر $1 \leq j \leq n$

$$T\alpha_j = c_j \alpha_j.$$

در این صورت

$$f(\alpha_k, \alpha_j) = (T\alpha_k | \alpha_j) = \delta_{kj} c_k$$

و بنا بر قضیه ۱۵ در فصل ۸ همه c_k ها حقیقی هستند. \square

نتیجه. تحت شرایط بالا

$$f\left(\sum_j x_j \alpha_j, \sum_k y_k \alpha_k\right) = \sum_j c_j x_j \bar{y}_j.$$

تمرین

۱. کدامیک از توابع f ذیل، تعریف شده روی بردارهای $\alpha = (x_1, x_2)$ ، $\beta = (y_1, y_2)$ در C^2 ، فرمهایی (یک و نیم خطی) روی C^2 هستند؟

$$f(\alpha, \beta) = 1 \quad (\text{الف})$$

$$f(\alpha, \beta) = (x_1 - \bar{y}_1)^2 + x_2 \bar{y}_2 \quad (\text{ب})$$

$$f(\alpha, \beta) = (x_1 + \bar{y}_1)^2 - (x_1 - \bar{y}_1)^2 \quad (\text{پ})$$

$$f(\alpha, \beta) = x_1 \bar{y}_2 - \bar{x}_2 y_1 \quad (\text{ت})$$

۲. فرض کنید f فرمی روی R^2 باشد که با

$$f(x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

تعریف می‌شود. ماتریس f در هر یک از پایه‌های ذیل را بیابید:

$$\{(1, 0), (0, 1)\}, \{(1, -1), (1, 1)\}, \{(1, 2), (3, 4)\}.$$

۳. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$$

و g فرم (روی فضای ماتریسهای مختلط 2×1) تعریف شده توسط $g(X, Y) = Y^* A X$ باشد. آیا g ضربی داخلی است؟

۴. فرض کنید V یک فضای برداری مختلط و f فرم (یک و نیم خطی) متقارنی روی V باشد: $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$ چیست؟

۵. فرض کنید f فرمی باشد که توسط

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1$$

تعیین می‌شود. پایه مرتبی بیابید که در آن f توسط ماتریسی قطری نمایش داده شود.

۶. فرم f را **ناتبگون** (چپ) نامیم، هرگاه بردار 0 تنها بردار α با این خاصیت باشد که به ازای هر β ، $f(\alpha, \beta) = 0$ بگیریم f فرمی روی یک فضای ضرب داخلی باشد. ثابت کنید f **ناتبگون** است اگر و تنها اگر عملگر خطی وابسته T_f (قضیه ۱) نامنفرد باشد.

۷. فرض کنید f فرمی روی يك فضای برداری بعد متناهی V باشد. به تعریف ناتبهگونی چپ ارائه شده در تمرین ۶ توجه کنید. ناتبهگونی راست را تعریف و ثابت کنید که فرم f ناتبهگون چپ است اگر و تنها اگر f ناتبهگون راست باشد.

۸. فرض کنید f فرمی ناتبهگون (تمرینهای ۶ و ۷) روی يك فضای بعد متناهی V باشد. فرض کنید L تابعکی خطی روی V باشد. نشان دهید يك و تنها يك بردار چون β در V وجود دارد که به ازای هر α ، $L(\alpha) = f(\alpha, \beta)$.

۹. فرض کنید f فرمی ناتبهگون روی يك فضای بعد متناهی V باشد. نشان دهید هر عملگر خطی S دارای يك «الحاقی نسبت به f » است، یعنی عملگری چون S' وجود دارد که به ازای همه α ها و β ها، $f(S\alpha, \beta) = f(\alpha, S'\beta)$.

۳.۹. فرمهای مثبت

در این بخش، درباره فرمهای (یکونیم خطی) نامنفی و رابطه آنها با ضرب داخلی مفروض روی فضای برداری زمینه بحث می کنیم.

تعاریف. يك فرم f روی يك فضای برداری حقیقی یا مختلط V نامنفی است، هرگاه هرمیتی باشد و به ازای هر $\alpha \in V$ ، $f(\alpha, \alpha) \geq 0$. فرم f مثبت است، هرگاه f هرمیتی و به ازای هر $\alpha \neq 0$ ، $f(\alpha, \alpha) > 0$ باشد. يك فرم مثبت روی V چیزی جز ضربی داخلی روی V نیست. هر فرم نامنفی در همه خواص يك ضرب داخلی صدق می کند با این استثنا که برخی از بردارهای غیرصفر ممکن است بر خودشان عمود باشند.

گیریم f فرمی روی فضای با بعد متناهی V باشد. فرض کنیم $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه مرتبی برای V و ماتریس f در پایه \mathcal{B} باشد؛ یعنی، $A_{jk} = f(\alpha_k, \alpha_j)$. اگر $\alpha = x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n$ آنگاه

$$\begin{aligned} f(\alpha, \alpha) &= f\left(\sum_j x_j \alpha_j, \sum_k x_k \alpha_k\right) \\ &= \sum_j \sum_k x_j \bar{x}_k f(\alpha_j, \alpha_k) \\ &= \sum_j \sum_k A_{kj} x_j \bar{x}_k. \end{aligned}$$

از این رو، می بینیم که f نامنفی است اگر و تنها اگر

$$A = A^*$$

و

$$(۳-۹) \quad \sum_j \sum_k A_{kj} x_j \bar{x}_k \geq 0 \quad x_n, \dots, x_1 \text{ به‌ازای همه اسکارهای } x_1, \dots, x_n$$

برای اینکه f مثبت باشد، باید به‌ازای همه $(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ نامساوی (۳-۹) اکیده باشد. شرایط استخراج شده حاکی از این هستند که f فرمی مثبت روی V است اگر و تنها اگر تابع

$$g(X, Y) = Y^* A X$$

فرمی مثبت روی فضای ماتریسهای ستونی $n \times 1$ بر روی هیأت اسکارها باشد.

قضیه ۵. گیریم F هیأت اعداد حقیقی یا هیأت اعداد مختلط A ماتریسی $n \times n$ بر روی F باشد. تابع g تعریف شده توسط

$$(۴-۹) \quad g(X, Y) = Y^* A X$$

فرمی مثبت روی فضای $F^{n \times 1}$ است اگر و تنها اگر ماتریس $n \times n$ معکوس‌پذیری چون P با درایه‌های واقع در F وجود داشته باشد به‌طوری که $A = P^* P$.

اثبات. به‌ازای هر ماتریس $n \times n$ دلخواهی مانند A ، تابع g در (۴-۹) روی فضای ماتریسهای ستونی یک فرم است. قصدمان این است که ثابت کنیم g مثبت است اگر و تنها اگر $A = P^* P$. ابتدا، فرض کنیم $A = P^* P$. در این صورت g هرمیتی است، و

$$\begin{aligned} g(X, X) &= X^* P^* P X \\ &= (P X)^* P X \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

اگر P معکوس‌پذیر باشد و $X \neq 0$ ، آنگاه $(P X)^* P X > 0$.

حال، فرض کنیم g فرمی مثبت روی فضای ماتریسهای ستونی باشد. در این صورت g ضربی داخلی است و از این رو، ماتریسهای ستونی چون Q_1, \dots, Q_n وجود دارند که

$$\begin{aligned} \delta_{jk} &= g(Q_j, Q_k) \\ &= Q_k^* A Q_j. \end{aligned}$$

اما این مطلب دقیقاً حاکی است که اگر Q ماتریسی یا ستونها Q_1, \dots, Q_n باشد، آنگاه $Q^* A Q = I$. چون $\{Q_1, \dots, Q_n\}$ یک پایه است، Q معکوس‌پذیر می‌باشد. حال با فرض $P = Q^{-1}$ ، داریم $A = P^* P$. \square

در عمل، بررسی اینکه ماتریس مفروضی چون A معیار مثبت بودن را که تا اینجا عرضه کرده‌ایم ارضا می‌کند، آسان نیست. پیامدی از قضیه اخیر این است که اگر g مثبت باشد، آنگاه $\det A > 0$ ، زیرا

$$\det A = \det(P^* P) = \det P^* \det P = |\det P|^2.$$

این واقعیت که $\det A > 0$ به‌هیچ وجه برای تضمین مثبت بودن g کافی نیست؛ اما، وابسته

به A ، n دترمینان وجود دارند که خاصیت ذیل را دارند: اگر $A = A^*$ و اگر هر يك از این دترمینانها مثبت باشند. آنگاه g فرمی مثبت است.

تعریف. گیریم A ماتریسی $n \times n$ بردوی هیأت F باشد. کهای اصلی A اسکالرهایی $\Delta_k(A)$ تعریف شده به صورت

$$\Delta_k(A) = \det \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & & A_{kk} \end{bmatrix}, 1 \leq k \leq n$$

هستند.

لم. گیریم A ماتریس $n \times n$ معکوس پذیری با درایه های واقع در هیأتی چون F باشد. دو حکم ذیل هم ارزند.

(الف) ماتریسی بالا مثلثی چون P با $P_{kk} = 1$ ($1 \leq k \leq n$) وجود دارد که ماتریس $B = AP$ پایین مثلثی است.

(ب) کهای اصلی A همگی مخالف ۰ هستند.

اثبات. P را ماتریس $n \times n$ دلخواهی می گیریم و قرار می دهیم $B = AP$. آنگاه

$$B_{jk} = \sum_r A_{jr} P_{rk}.$$

اگر P بالا مثلثی و به ازای هر k ، $P_{kk} = 1$ باشد آنگاه

$$\sum_{r=1}^{k-1} A_{jr} P_{rk} = B_{jk} - A_{kk}, \quad k > 1.$$

اما، B پایین مثلثی است مشروط به اینکه به ازای $j < k$ ، $B_{jk} = 0$. پس، B پایین مثلثی خواهد بود اگر و تنها اگر

$$\sum_{r=1}^{k-1} A_{jr} P_{rk} = -A_{kk}, \quad \begin{matrix} 1 \leq j \leq k-1 \\ 2 \leq k \leq n. \end{matrix} \quad (5-9)$$

از این رو، می بینیم که حکم (الف) هم ارز با این حکم است که اسکالرهایی چون P_{rk} ، $1 \leq r \leq k$ ، $1 \leq k \leq n$ وجود دارند که در (5-9) صدق می کنند و $P_{kk} = 1$ ، $1 \leq k \leq n$. در (5-9)، به ازای هر $k > 1$ دستگاهی از $k-1$ معادله خطی با مجهولهای P_{1k} ، P_{2k} ، \dots ، $P_{k-1,k}$ وجود دارد. ماتریس ضرایب این دستگاه عبارت است از

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1,k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k-1,1} & & A_{k-1,k-1} \end{bmatrix}$$

و دترمینان آن برابر کهاد اصلی $\Delta_{k-1}(A)$ است. اگر هر $\Delta_{k-1}(A) \neq 0$ دستگامهای (۵-۹) دارای جوابهای یکتا می‌باشند. تا اینجا نشان داده‌ایم که حکم (ب) حکم (الف) را ایجاب می‌کند و ماتریس P یکتاست

حال فرض کنیم که (الف) برقرار باشد. آنگاه، همان‌طور که خواهیم دید

$$\begin{aligned} \Delta_k(A) &= \Delta_k(B) \\ &= B_{11} B_{22} \cdots B_{kk}, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (6-9)$$

برای بررسی (۶-۹)، فرض کنیم A_1, \dots, A_n و B_1, \dots, B_n بترتیب ستونهای A و B باشند. در این صورت

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \\ B_r &= \sum_{j=1}^{r-1} P_{jr} A_j + A_r, \quad r > 1 \end{aligned} \quad (7-9)$$

حال k را ثابت می‌گیریم $1 \leq k \leq n$. از (۷-۹) بر می‌آید که r مین ستون ماتریس

$$\begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{k1} & \cdots & B_{kk} \end{bmatrix}$$

با افزودن ترکیبی خطی از دیگر ستونها به ستون r

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & \cdots & A_{kk} \end{bmatrix}$$

به دست می‌آید. چنین اعمالی دترمینان را تغییر نمی‌دهند. این مطلب، (۶-۹) را ثابت می‌کند، به استثنای این مطلب بدیهی که چون B مثلثی است، $\Delta_k(B) = B_{11} \cdots B_{kk}$. چون A و P معکوس پذیرند B نیز معکوس پذیر است. بنابراین

$$\Delta(B) = B_{11} \cdots B_{nn} \neq 0$$

و از این رو $\Delta_k(A) \neq 0$ ، $k = 1, \dots, n$ □

قضیه ۶. گیریم f یک فرم روی یک فضای برداری بعد منتهای V و A ماتریس f در یک پایه مرتب \mathcal{B} باشد. در این صورت f یک فرم مثبت است اگر و تنها اگر $A = A^*$ و کهای A همگی مثبت باشند.

اثبات. ابتدا نیمه جالب قضیه را انجام می دهیم. فرض کنیم $A = A^*$ و $\langle \Delta_k(A) \rangle > 0$ ، $1 \leq k \leq n$. طبق لم، یک ماتریس بالا مثلثی P با $P_{kk} = 1$ وجود دارد که $B = AP$ پایین مثلثی است. ماتریس P^* نیز پایین مثلثی است، بنا بر این $P^*B = P^*AP$ نیز پایین مثلثی است. چون A خود الحاق است، ماتریس $D = P^*AP$ هم خودالحاق می باشد. هر ماتریس مثلثی خودالحاق لزوماً ماتریسی قطری است. با همان استدلالی که منجر به (۹-۶) شد داریم

$$\begin{aligned}\Delta_k(D) &= \Delta_k(P^*B) \\ &= \Delta_k(B) \\ &= \Delta_k(A).\end{aligned}$$

چون D قطری است کهای اصلی آن عبارتند از

$$\Delta_k(D) = D_{11} \cdots D_{kk}.$$

بنابر $\langle \Delta_k(D) \rangle > 0$ ، $1 \leq k \leq n$ ، به ازای هر k ، داریم $D_{kk} > 0$.

اگر A ماتریس فرم f در پایه مرتب $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ باشد، آنگاه $D = P^*AP$ ماتریس f در پایه $\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$ تعریف شده توسط

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^n P_{ij} \alpha_i$$

است. حال به (۹-۲) توجه کنید. چون D قطری است و درایه های روی قطرش مثبت هستند، بدیهی است که

$$X^*DX > 0, \quad X \neq 0$$

که از آن نتیجه می شود f فرمی مثبت است.

حال، فرض کنیم با فرم مثبتی چون f آغاز کرده باشیم. می دانیم که $A = A^*$ چگونه نشان دهیم که $\langle \Delta_k(A) \rangle > 0$ ، $1 \leq k \leq n$ ؟ فرض می کنیم V_k زیر فضای پدید آمده توسط $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ و f تحدید f به $V_k \times V_k$ باشد. به بیانی هم ارز، f فرمی مثبت روی V_k است و در پایه $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ با ماتریس

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k1} & \cdots & A_{kk} \end{bmatrix}$$

نمایش داده می شود، به عنوان پیامدی از قضیه ۵، ملاحظه کردیم که مثبت بودن یک فرم

ایجاب می کند که دترمینان هر ماتریس نمایش آن هم مثبت باشد. □

برای تکمیل بحث خود درباره رابطه بین فرمهای مثبت و ماتریسها، چند نکته وجود دارد که باید آنها را متذکر شویم. چه چیزی مشخص کننده ماتریسهای مثبت است که فرمهای مثبت را نمایش می دهند؟ اگر f فرمی روی یک فضای برداری مختلط و A ماتریس f در پایه مرتبی باشد، آنگاه f مثبت خواهد بود اگر و تنها اگر $A = A^*$ و

$$(۸-۹) \quad \text{به ازای هر } X \neq 0 \text{ مختلط} \quad X^* A X > 0.$$

از قضیه ۳ نتیجه می شود که شرط $A = A^*$ زاید است، یعنی (۸-۹) شرط $A = A^*$ را هم ایجاب می کند. از طرف دیگر، اگر با یک فضای برداری حقیقی سروکار داشته باشیم، فرم f مثبت خواهد بود اگر و تنها اگر $A = A'$ و

$$(۹-۹) \quad \text{به ازای هر } X \neq 0 \text{ حقیقی} \quad X' A X > 0.$$

باید تأکید کنیم که اگر ماتریسی حقیقی چون A در (۹-۹) صدق کند، نتیجه نمی شود که $A = A'$. مطلبی که درست است این است که اگر $A = A'$ و (۹-۹) برقرار باشد، آنگاه (۸-۹) نیز برقرار است. این امر بدین دلیل است که

$$\begin{aligned} (X + iY)' A (X + iY) &= (X' - iY') A (X + iY) \\ &= X' A X + Y' A Y + i[X' A Y - Y' A X] \end{aligned}$$

و اگر $A = A'$ آنگاه $Y' A X = X' A Y$.

اگر A ماتریسی $n \times n$ با درایه های مختلط باشد و اگر A در (۸-۹) صدق کند، A را یک ماتریس مثبت خواهیم نامید. نکاتی را که قبلاً متذکر شدیم با گفتن مطلب ذیل می توان خلاصه کرد: در هر یک از حالات حقیقی یا مختلط، فرمی چون f مثبت است اگر و تنها اگر ماتریس آن در یک (درواقع، در هر) پایه مرتب، ماتریس مثبت باشد.

حال فرض کنیم V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی باشد و f فرمی نامنفی روی V . عملگر خطی خودالحاق یکتایی چون T روی V وجود دارد که

$$(۱۰-۹) \quad f(\alpha, \beta) = (T\alpha | \beta).$$

بعلاوه T دارای این خاصیت اضافی نیز هست که $(T\alpha | \alpha) \geq 0$

تعریف. عملگری خطی چون T روی یک فضای ضرب داخلی بعد متناهی V نامنفی است هرگاه $T = T^*$ و به ازای هر α در V ، $(T\alpha | \alpha) \geq 0$. یک عملگر خطی مثبت عملگری مانند T است که $T = T^*$ و به ازای هر $\alpha \neq 0$ ، $(T\alpha | \alpha) > 0$.

اگر V یک فضای برداری (حقیقی یا مختلط) با بعد متناهی و $(\cdot | \cdot)$ ضربی داخلی روی V باشد، روی V رده وابسته ای از عملگرهای خطی مثبت وجود دارد. به واسطه

(۹-۱۰) تناظری يك به يك بين اين رده از عملگرهای مثبت و دسته همه فرمهای مثبت روی V یافت می شود. جهت تأکید روی روابط بين عملگرهای مثبت، فرمهای مثبت، و ماتریسهای مثبت از تمرینات اين بخش استفاده خواهیم کرد. آنچه را که گفتیم خلاصه می کنیم.

اگر A ماتریسی $n \times n$ بر روی هیأت اعداد مختلط باشد، احکام زیر هم ارزند.
(۱) A مثبت است، یعنی وقتی که x_1, \dots, x_n اعدادی مختلط باشند و لااقل یکی از آنها $\neq 0$ نباشد، آنگاه $\sum_j \sum_k A_{jk} x_j \bar{x}_k > 0$.

(۲) $(X|Y) = Y^* A X$ ضربی داخلی روی فضای ماتریسهای مختلط $n \times 1$ است.

(۳) نسبت به ضرب داخلی استاندارد $(X|Y) = Y^* X$ روی ماتریسهای $n \times 1$ ، عملگر

خطی $AX \rightarrow X$ مثبت است.

(۴) به ازای ماتریس $n \times n$ معکوس پذیری چون P روی C ، $A = P^* P$.

(۵) $A = A^*$ و کهادهای اصلی A همه مثبت هستند.

اگر همه درایه های A حقیقی باشند، این مطالب هم ارزند با:

(۶) $A = A^t$ و $\sum_j \sum_k A_{jk} x_j x_k > 0$ در صورتی که x_1, \dots, x_n اعدادی حقیقی

باشند، و لااقل یکی از آنها صفر نباشد.

(۷) $(X|Y) = Y^t A X$ ضربی داخلی روی فضای ماتریسهای حقیقی $n \times 1$ است.

(۸) نسبت به ضرب داخلی استاندارد $(X|Y) = Y^t X$ روی ماتریسهای حقیقی $n \times 1$

عملگر خطی $AX \rightarrow X$ مثبت است.

(۹) ماتریس $n \times n$ معکوس پذیری چون P با درایه های حقیقی وجود دارد که

$$A = P^t P$$

تمرین

۰۱ فرض کنید V فضای C^2 با ضرب داخلی استاندارد باشد. به ازای کدام بردار α در V ،

عملگر خطی مثبتی چون T وجود دارد که $\alpha = T\epsilon_1$ ؟

۰۲ فرض کنید V فضای R^2 با ضرب داخلی استاندارد باشد. اگر θ عددی حقیقی باشد، T

را عملگر خطی «دوران به اندازه θ » بگیرد:

$$T_\theta(x_1, x_2) = (x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta, x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta).$$

به ازای کدام مقادیر θ ، عملگر T_θ مثبت است؟

۰۳ V را فضای ماتریسهای $n \times 1$ بر روی C با ضرب داخلی $(X|Y) = Y^* G X$ (که در آن

G ماتریس $n \times n$ است که تابع اخیر يك ضرب داخلی باشد) بگیرد. فرض کنید A

ماتریسی $n \times n$ و T عملگر خطی $T(X) = AX$ باشد. T^* را بیابید. اگر Y عنصر

ثابتی از V باشد، عنصر Z از V را که تابع خطی $X \rightarrow Y^* X$ را تعیین می کند،

بیابید. به بیان دیگر، Z را بیابید که به ازای هر X در V ، $Y^*X = (X|Z)$.

۴. فرض کنید V فضای ضرب داخلی با بعد متناهی باشد. اگر T و U دو عملگر خطی مثبت روی V باشند ثابت کنید $(T+U)$ هم مثبت است. مثالی بیاورید که نشان دهد TU لزوماً مثبت نیست.

۵. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

(الف) نشان دهید که A مثبت است.

(ب) V را فضای ماتریسهای حقیقی 2×1 با ضرب داخلی $(X|Y) = Y^*AX$ بگیرد. با به کار بستن فرایند گرام-اشمیت بر پایه $\{X_1, X_2\}$ با فرض

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

پایه متعامد یکه‌ای برای V بیابید.

(پ) ماتریس حقیقی 2×2 معکوس پذیری چون P بیابید که $A = P^*P$

۶. کدام یک از ماتریسهای ذیل مثبت اند؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

۷. مثالی از ماتریسی $n \times n$ بیاورید که همه کهادهای اصلی آن مثبت باشند ولی خود ماتریسی مثبت نباشد.

۸. آیا $(x_1, x_2)|(y_1, y_2) = x_1\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_1 + 2x_1\bar{y}_2 + x_2\bar{y}_2$ ضربی داخلی روی C^2 تعریف می‌کند؟

۹. ثابت کنید که همه دراپه‌های روی قطر اصلی ماتریسی مثبت اعدادی مثبت هستند.

۱۰. فرض کنید V يك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی باشد. اگر T و U عملگرهایی خطی روی V باشند می‌نویسیم $T < U$ هرگاه $U - T$ عملگر مثبتی باشد. احکام زیر را ثابت کنید:

(الف) $T < U$ و $U < T$ غیرممکن است.

(ب) اگر $T < U$ و $U < S$ ، آنگاه $T < S$.

(پ) اگر $T < U$ و $S < 0$ لزومی ندارد که $ST < SU$.

۱۱. فرض کنید V يك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و E تصویر متعامد V بروی زیر فضای دلخواهی باشد.

(الف) ثابت کنید که به‌ازای هر عدد مثبت c ، عملگر $cI + E$ مثبت است.

(ب) عملگر خطی خودالحاق T را که $T^2 = I + E$ برحسب E بیان کنید.

۱۲. فرض کنید n عددی صحیح مثبت و A ماتریس $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

باشد. ثابت کنید A مثبت است.

۱۳. فرض کنید A ماتریس $n \times n$ خودالحاقی باشد. ثابت کنید عددی حقیقی چون c وجود دارد که ماتریس $cI + A$ مثبت باشد.

۱۴. ثابت کنید حاصل ضرب دو عملگر خطی مثبت عملگری است مثبت اگر و تنها اگر آن دو عملگر جابجا شوند.

۱۵. فرض کنید S و T دو عملگر مثبت باشند. ثابت کنید که همه مقادیر سرشت‌نمای ST مثبت هستند.

۳.۹. چند مطلب دیگر درباره فرمها

این بخش شامل دو قضیه است که اطلاعات مشروح تری درباره فرمهای (يك ونیم خطی) به دست می دهند.

قضیه ۷. گیریم فرمی روی يك فضای برداری حقیقی یا مختلط V و $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ پایه ای برای زیر فضای بعد متناهی W از V باشد. فرض کنیم M ماتریسی $r \times r$ با درایه های

$$M_{jk} = f(\alpha_k, \alpha_j)$$

و W' مجموعه همه بردارهایی چون β از V باشد که به ازای هر α در W ، $f(\alpha, \beta) = 0$ در این صورت W' زیر فضایی از V است و $W \cap W' = \{0\}$ اگر و تنها اگر M معکوس پذیر باشد. در صورت وقوع چنین وضعی $V = W + W'$

اثبات. اگر β و γ بردارهایی از W' باشند و c يك اسکالر، آنگاه به ازای هر α در W

$$\begin{aligned} f(\alpha, c\beta + \gamma) &= c f(\alpha, \beta) + f(\alpha, \gamma) \\ &= 0. \end{aligned}$$

از این رو، W' يك زیر فضای V است.

حال فرض کنیم $\alpha = \sum_{k=1}^r x_k \alpha_k$ و $\beta = \sum_{j=1}^r y_j \alpha_j$ در این صورت

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) &= \sum_{j,k} \bar{y}_j M_{jk} x_k \\ &= \sum_k \left(\sum_j \bar{y}_j M_{jk} \right) x_k. \end{aligned}$$

از این مطلب نتیجه می شود که $W \cap W' \neq \{0\}$ اگر و تنها اگر دستگاه همگن

$$\sum_{j=1}^r \bar{y}_j M_{jk} = 0, \quad 1 \leq k \leq r$$

دارای يك جواب غیر صفر (y_1, \dots, y_r) باشد. از این رو، $W \cap W' = \{0\}$ اگر و تنها اگر M^* معکوس پذیر باشد. اما معکوس پذیری M^* هم ارز با معکوس پذیری M است. فرض کنیم M معکوس پذیر باشد و بگیریم

$$A = (M^*)^{-1} = (M^{-1})^*.$$

g را روی V بنا بر معادله

$$g_j(\beta) = \sum_{k=1}^r A_{jk} \overline{f(\alpha_k, \beta)}$$

تعریف می کنیم. آنگاه

$$\begin{aligned} g_j(c\beta + \gamma) &= \sum_k \overline{A_{jk} f(\alpha_k, c\beta + \gamma)} \\ &= c \sum_k \overline{A_{jk} f(\alpha_k, \beta)} + \sum_k \overline{A_{jk} f(\alpha_k, \gamma)} \\ &= c g_j(\beta) + g_j(\gamma). \end{aligned}$$

از این رو، هر g_j تابعی خطی روی V است. پس، می‌توانیم عملگری خطی چون E روی V را با قراردادادن

$$E\beta = \sum_{j=1}^r g_j(\beta) \alpha_j$$

تعریف کنیم. چون

$$\begin{aligned} g_j(\alpha_n) &= \sum_k \overline{A_{jk} f(\alpha_k, \alpha_n)} \\ &= \sum_k \overline{A_{jk} (M^*)_{kn}} \\ &= \delta_{jn} \end{aligned}$$

نتیجه می‌شود که به ازای $1 \leq n \leq r$ ، $E(\alpha_n) = \alpha_n$. این مطلب ایجاب می‌کند که به ازای هر α در W ، $E\alpha = \alpha$. بنا بر این E ، V را بروی W می‌نگارد و $E^2 = E$. اگر β برداری دلخواه از V باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} f(\alpha_n, E\beta) &= f(\alpha_n, \sum_j g_j(\beta) \alpha_j) \\ &= \sum_j \overline{g_j(\beta)} f(\alpha_n, \alpha_j) \\ &= \sum_j (\sum_k \overline{A_{jk} f(\alpha_k, \beta)}) f(\alpha_n, \alpha_j). \end{aligned}$$

چون $A^* = M^{-1}$ ، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} f(\alpha_n, E\beta) &= \sum_k (\sum_j (M^{-1})_{kj} M_{jn}) f(\alpha_k, \beta) \\ &= \sum_k \delta_{kn} f(\alpha_k, \beta) \\ &= f(\alpha_n, \beta). \end{aligned}$$

این مطلب ایجاب می‌کند که به ازای هر α در W ، $f(\alpha, E\beta) = f(\alpha, \beta)$. از این رو به ازای هر α در W و هر β در V

$$f(\alpha, \beta - E\beta) = 0.$$

پس، $I - E$ را در V می‌نگارد. تساوی

$$\beta = E\beta + (I - E)\beta$$

نشان می‌دهد که $V = W + W'$. سرانجام به يك نکته نهایی هم باید اشاره کنیم. چون $W \cap W' = \{0\}$ ، هر بردار در V به‌طور یکتا عبارت است از مجموع يك بردار در W و يك بردار در W' . اگر β در W' باشد، نتیجه می‌شود که $E\beta = 0$. از این رو، $V, I - E$ را بروی W' می‌نگارد. \square

تصویر E را که در اثبات ساخته شد می‌توان به‌شرح ذیل مشخص کرد: $E\beta = \alpha$ اگر و تنها اگر α در W و $\beta - \alpha$ متعلق به W' باشد. پس، E مستقل از پایه‌ای از W است که در ساختش به‌کار رفت. از این رو، می‌توان به E به‌عنوان تصویر V روی W که توسط تجزیه به‌مجموع مستقیم

$$V = W \oplus W'$$

تعیین می‌شود ارجاع کرد. توجه کنید که E يك تصویر متعامد است اگر و تنها اگر $W' = W^\perp$

قضیه ۸. گیریم f یک فرم روی يك فضای برداری حقیقی یا مختلط V و A ماتریس f در پایه مرتب $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ از V باشد. فرض کنیم کهادهای اصلی A همگی مخالف ۰ باشند. در این صورت ماتریس بالامثلثی یکتایی چون P با $P_{kk} = 1$ ، $(1 \leq k \leq n)$ وجود دارد که

$$P^*AP$$

نیز بالامثلثی باشد.

اثبات. چون $\overline{\Delta_k(A)} = \Delta_k(A^*)$ ، $(1 \leq k \leq n)$ ، کهادهای اصلی A^* همگی مخالف ۰ هستند. از این رو، بنا بر لمی که در اثبات قضیه ۶ به‌کار رفت ماتریس بالامثلثی چون P با $P_{kk} = 1$ وجود دارد که A^*P پایین‌مثلثی باشد. بنابراین، $P^*A = (A^*P)^*$ بالامثلثی است. چون حاصل ضرب دو ماتریس بالامثلثی خود بالامثلثی است، نتیجه می‌گیریم که P^*AP بالامثلثی می‌باشد. این مطلب وجود P ، و نه یکتایی P ، را نشان می‌دهد. اما، استدلالی بیشتر هندی هم وجود دارد که می‌تواند هم برای اثبات وجود و هم برای اثبات یکتایی P به‌کار رود.

گیریم W_k زیر فضای پدیدآمده توسط $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ و W'_k مجموعه همه β های در V باشد که به‌ازای هر α در W_k ، $f(\alpha, \beta) = 0$. چون $\Delta_k(A) \neq 0$ ، ماتریس M با درایه‌های

$$M_{ij} = f(\alpha_j, \alpha_i) = A_{ij}$$

يك ماتریس $k \times k$ معکوس پذیر است. بنا بر قضیه ۷

$$V = W_k \oplus W'_k.$$

E_k را تصویر V روی W_k که توسط این تجزیه تعیین می‌شود می‌گیریم و قرار می‌دهیم $E_0 = 0$. فرض کنیم

$$\beta_k = \alpha_k - E_{k-1}\alpha_k, \quad (1 \leq k \leq n).$$

در این صورت $\beta_1 = \alpha_1$ و به ازای هر $k > 1$ ، $E_{k-1}\alpha_k$ به W_{k-1} تعلق دارد. پس وقتی که $k > 1$ اسکالره‌ای یکتایی چون P_{jk} وجود دارند که

$$E_{k-1}\alpha_k = -\sum_{j=1}^{k-1} P_{jk}\alpha_j.$$

پس از قرار دادن $P_{kk} = 1$ و به ازای $j > k$ ، $P_{jk} = 0$ و $P_{kk} = 1$ با $P_{kk} = 1$ و

$$\beta_k = \sum_{j=1}^k P_{jk}\alpha_j.$$

به ازای $k = 1, \dots, n$ را خواهیم داشت. فرض کنیم $1 \leq i < k$. آنگاه β_i در W_i است و $W_i \subset W_{k-1}$ چون β_k به W_{k-1} تعلق دارد، نتیجه می‌گیریم که $f(\beta_i, \beta_k) = 0$. فرض کنیم B ماتریس f در پایه مرتب $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ را نشان دهد. در این صورت

$$B_{ki} = f(\beta_i, \beta_k)$$

و از این رو، وقتی که $k > i$ ، $B_{ki} = 0$ پس B بالامتلی است. از طرف دیگر

$$B = P^*AP.$$

بعکس، فرض کنیم P ماتریس بالامتلی با $P_{kk} = 1$ باشد که P^*AP هم بالامتلی است. حال می‌نویسیم

$$\beta_k = \sum_j P_{jk}\alpha_j, \quad (1 \leq k \leq n).$$

آنگاه $\{\beta_1, \dots, \beta_k\}$ به طور آشکار پایه‌ای برای W_k می‌باشد. فرض کنیم $k > 1$. در این صورت $\{\beta_1, \dots, \beta_{k-1}\}$ پایه‌ای برای W_{k-1} است و چون وقتی که $i < k$ ، $f(\beta_i, \beta_k) = 0$ می‌بینیم که برداری از W_{k-1} است. معادله‌ای که β_k را تعریف می‌کند ایجاب می‌نماید که

$$\alpha_k = -\left(\sum_{j=1}^{k-1} P_{jk}\alpha_j\right) + \beta_k.$$

حال $\sum_{j=1}^{k-1} P_{jk}\alpha_j$ متعلق به W_{k-1} است، و β_k در W_{k-1} قرار دارد. بنابراین، $P_{1k}, \dots, P_{k-1,k}$ اسکالره‌ای یکتایی هستند که

$$E_{k-1}\alpha_k = -\sum_{j=1}^{k-1} P_{jk}\alpha_j$$

و از این رو P همان ماتریس ساخته شده قبلی است. \square

۵.۹. نظریه طیفی

در این بخش، پیامدهای قضایای ۱۸ و ۲۲ در فصل ۸ را در رابطه با قطری کردن عملگرهای خودالحاق و نرمال دنبال می‌کنیم.

قضیه ۹ (قضیه طیفی). گیریم T عملگری نرمال روی یک فضای ضرب داخلی مختلط بعد متناهی V یا عملگری خودالحاق روی یک فضای ضرب داخلی حقیقی بعد متناهی V باشد. فرض کنیم c_1, \dots, c_k مقادیر سرشت‌نمای متمایز T باشند. فرض کنیم W_j فضای سرشت‌نمای وابسته به c_j در E_j تصویر متعامد V روی W_j باشد. در این صورت، وقتی $j \neq i$ بر W_i عمود است، فضای V مجموع مستقیم W_1, \dots, W_k است و

$$T = c_1 E_1 + \dots + c_k E_k. \quad (11-9)$$

اثبات. α را برداری از W_j ، β را برداری از W_i می‌گیریم و فرض می‌کنیم $i \neq j$. در این صورت $(\alpha|\beta) = (T\alpha|\beta) = (\alpha|T^*\beta) = (\alpha|c_j\beta) = (c_j - c_i)(\alpha|\beta) = 0$ و چون $c_j - c_i \neq 0$ ، نتیجه می‌شود که $(\alpha|\beta) = 0$. پس وقتی $j \neq i$ بر W_i عمود است. بنابراین واقعیت که V دارای پایه متعامد یکه‌ای متشکل از بردارهای سرشت‌نماست (با قضایای ۱۸ و ۲۲ فصل ۸ مقایسه شود) نتیجه می‌گیریم که $V = W_1 + \dots + W_k$. اگر α_j به W_j ($1 \leq j \leq k$) تعلق داشته باشد و $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 0$ آنگاه به ازای هر i

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha_i | \sum_j \alpha_j) = \sum_j (\alpha_i | \alpha_j) \\ &= \|\alpha_i\|^2 \end{aligned}$$

و از این رو، V برابر مجموع مستقیم W_1, \dots, W_k است. بنابراین $E_1 + \dots + E_k = I$ و

$$\begin{aligned} T &= TE_1 + \dots + TE_k \\ &= c_1 E_1 + \dots + c_k E_k. \quad \square \end{aligned}$$

تجزیه (۱۱-۹)، تفکیک طیفی T نامیده می‌شود. این اصطلاح تا اندازه‌ای از کاربردهای فیزیکی که موجب تعریف طیف یک عملگر خطی روی یک فضای برداری با بعد متناهی، به عنوان مجموعه مقادیر سرشت‌نمای آن عملگر شدند ناشی می‌شود. این مهم است بدانیم که تصویرهای E_1, \dots, E_k به‌طور متعارف به T وابسته‌اند؛ در حقیقت،

اینها چند جمله‌ایهایی بر حسب T هستند.

نتیجه، اگر $e_j = \prod_{i \neq j} \left(\frac{x - c_i}{c_j - c_i} \right)$ ، آنگاه به ازای $1 \leq j \leq k$ ، $E_j = e_j(T)$.

اثبات. چون وقتی $i \neq j$ ، $E_i E_j = 0$ ، لذا نتیجه می‌شود که

$$T^r = c_1^r E_1 + \dots + c_k^r E_k.$$

و نیز با برهان استقرایی ساده‌ای به ازای هر عدد صحیح $n \geq 0$ ، داریم

$$T^n = c_1^n E_1 + \dots + c_k^n E_k.$$

به ازای هر چند جمله‌ای دلخواه

$$f = \sum_{n=0}^r a_n x^n$$

داریم

$$\begin{aligned} f(T) &= \sum_{n=0}^r a_n T^n \\ &= \sum_{n=0}^r a_n \sum_{j=1}^k c_j^n E_j \\ &= \sum_{j=1}^k \left(\sum_{n=0}^r a_n c_j^n \right) E_j \\ &= \sum_{j=1}^k f(c_j) E_j. \end{aligned}$$

از آنجا که $e_j(c_m) = \delta_{jm}$ ، نتیجه می‌شود که $e_j(T) = E_j$. \square

چون E_1, \dots, E_k به طور متعارف به T وابسته هستند و

$$I = E_1 + \dots + E_k$$

خانواده تصویرهای $\{E_1, \dots, E_k\}$ ، تفکیک همانی تعریف شده توسط T نامیده می‌شود. نکته‌ای درباره اثبات قضیه طیفی وجود دارد که باید تذکر داده شود. ما این قضیه را با استفاده از قضایای ۱۸ و ۲۲ فصل ۸ در باره قطری کردن عملگرهای خودالحاق و نرمال استنتاج کردیم. اثبات دیگری هم وجود دارد که بیشتر جبری است و در آن ابتدا باید نشان داد که چند جمله‌ای مینیمال هر عملگر نرمال برابر حاصل ضربی از سازه‌های اول متمایز است. آنگاه همچون اثبات قضیه تجزیه اولیه (قضیه ۱۲ در فصل ۶) می‌توان به پیش رفت. چنین اثباتی را در بخش بعد ارائه خواهیم کرد.

در کاربردهای گوناگون لازم است بدانیم که آیا می‌توان توابع معینی از عملگرها و ماتریسها، مثلاً ریشه دوم آنها را محاسبه کرد یا خیر. این امر را می‌توان به طور نسبتاً

ساده در مورد عملگرهای نرمال قطری شدنی انجام داد.

تعریف. گیریم T يك عملگر نرمال قطری شدنی روی يك فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و

$$T = \sum_{j=1}^k f(c_j) E_j$$

تفکیک طیفی آن باشد. فرض کنیم f تابعی باشد که دامنه‌اش طیف T را شامل است و مقادیرش در هیأت اسکالرها هستند. در این صورت عملگر خطی $f(T)$ بنا بر معادله

$$f(T) = \sum_{j=1}^k f(c_j) E_j \quad (۱۲-۹)$$

تعریف می‌شود.

قضیه ۱۰. گیریم T يك عملگر نرمال قطری شدنی با طیف S روی يك فضای ضرب داخلی بعد متناهی V باشد. فرض کنیم f تابعی باشد که دامنه‌اش S را شامل است و مقادیرش در هیأت اسکالرها هستند. در این صورت $f(T)$ يك عملگر نرمال قطری شدنی با طیف $f(S)$ است. اگر U نگاشتی یکانی از V بروی V' باشد و $T' = UTU^{-1}$ ، آنگاه S' طیف T' هم هست و

$$f(T') = U f(T) U^{-1}.$$

اثبات. نرمال بودن $f(T)$ با محاسبه ساده‌ای از (۱۲-۹) و با استفاده از این واقعیت که

$$f(T)^* = \overline{f(c_j)} E_j$$

نتیجه می‌شود. علاوه بر این، واضح است که به‌ازای هر α در $E_j(V)$

$$f(T)\alpha = f(c_j)\alpha.$$

پس مجموعه $f(S)$ متشکل از همه $f(c)$ ها، به‌ازای c در S ، در طیف $f(T)$ جای دارد. بعکس، فرض کنیم $\alpha \neq 0$ و

$$f(T)\alpha = b\alpha.$$

آنگاه $\alpha = \sum_j E_j \alpha$ و

$$\begin{aligned} f(T)\alpha &= \sum_j f(T) E_j \alpha \\ &= \sum_j f(c_j) E_j \alpha \end{aligned}$$

$$= \sum_j b E_j \alpha.$$

از این رو،

$$\begin{aligned} \left\| \sum_j (f(c_j) - b) E_j \alpha \right\|^2 &= \sum_j |f(c_j) - b|^2 \|E_j \alpha\|^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

بنابراین، $f(c_j) = b$ یا $E_j \alpha = 0$. بنا به فرض، $\alpha \neq 0$ و لذا نمایه‌ای چون i وجود دارد که $E_i \alpha = 0$. حال نتیجه می‌گیریم که $f(c_i) = b$ و لذا $f(S)$ خود طیف $f(T)$ است. در واقع فرض کنیم

$$f(S) = \{b_1, \dots, b_r\}$$

که در آن $b_m \neq b_n$ هر گاه $m \neq n$. گیریم X_m مجموعه‌ی نمایه‌هایی چون i باشد که $f(c_i) = b_m$ و $1 \leq i \leq k$. فرض می‌کنیم $P_m = \sum_i E_i$. در اینجا مجموع بر روی نمایه‌های i در X_m گرفته می‌شود. در این صورت P_m تصویر متعامد V روی زیرفضای بردارهای سرشت‌نمای متعلق به مقدار سرشت‌نمای b_m از $f(T)$ است و

$$f(T) = \sum_{m=1}^r b_m P_m$$

تفکیک طیفی $f(T)$ است.

حال فرض کنیم U تبدیلی یکانی از V بروی V' باشد و $T' = UTU^{-1}$. در این صورت معادله

$$T\alpha = c\alpha$$

برقرار است اگر و تنها اگر

$$T'U\alpha = cU\alpha.$$

پس، S طیف T' است و U هر زیرفضای سرشت‌نما برای T را بروی زیرفضای متناظرش برای T' می‌نگارد. در واقع، با استفاده از (۹-۱۲)، می‌بینیم که

$$T' = \sum_j c_j E'_j, \quad E'_j = U E_j U^{-1}$$

تفکیک طیفی T' است. از این رو،

$$\begin{aligned} f(T') &= \sum_j f(c_j) E'_j \\ &= \sum_j f(c_j) U E_j U^{-1} \end{aligned}$$

$$= U \left(\sum_j f(c_j) E_j \right) U^{-1}$$

$$= U f(T) U^{-1}. \square$$

هنگام تفکر روی بحث قبل، این مهم است به خاطر داشته باشیم که طیف عملگر نرمال T مجموعه

$$S = \{c_1, \dots, c_k\}$$

از مقادیر سرشت نمای متمایز است. وقتی T توسط ماتریسی قطری در پایه‌ای از بردارهای سرشت نما نمایش داده می‌شود، لازم است که هر مقدار c_j به تعداد بعد فضای بردارهای سرشت نمای متناظرش تکرار بشود. علت تغییر نماد و در نتیجه ذیل همین امر است.

نتیجه. با فرضهای قضیه ۱۰، فرض کنیم T در پایه مرتب $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ توسط ماتریس قطری D ، با درایه‌های قطری d_1, \dots, d_n ، نمایش داده شود. آنگاه در پایه \mathcal{B} ، $f(T)$ توسط ماتریس قطری $f(D)$ با درایه‌های قطری $f(d_1), \dots, f(d_n)$ ، نمایش داده می‌شود. اگر $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$ پایه مرتب دیگری بوده و P ماتریسی باشد که

$$\alpha'_j = \sum_i P_{ij} \alpha_i$$

آنگاه $P^{-1} f(D) P$ عبارت است از ماتریس $f(T)$ در پایه \mathcal{B}' . اثبات. به ازای هر نمایه i ، نمایه j یکتایی وجود دارد که $1 \leq j \leq k$ ، α_i متعلق به $E_j(V)$ است، و $d_i = c_j$. پس، به ازای هر i ، $f(T)\alpha_i = f(d_i)\alpha_i$ و

$$f(T)\alpha'_j = \sum_i P_{ij} f(T)\alpha_i$$

$$= \sum_i f(d_i) P_{ij} \alpha_i$$

$$= \sum_i (f(D)P)_{ij} \alpha_i$$

$$= \sum_i (f(D)P)_{ij} \sum_k P_{ki}^{-1} \alpha'_k$$

$$= \sum_k (P^{-1} f(D) P)_{kj} \alpha'_k. \square$$

از این نتیجه چنین استنباط می‌شود که می‌توان از هر ماتریس نرمال توابع معینی تشکیل داد. زیرا فرض کنیم A ماتریسی نرمال باشد. در این صورت ماتریس معکوس پذیری چون P ، و در واقع ماتریسی یکانی چون P وجود دارد که PAP^{-1} ماتریس قطری، مثلاً D با درایه‌های d_1, \dots, d_n باشد. گیریم f تابع مختلطی باشد که بتواند روی d_1, \dots, d_n به کار بسته شود و $f(D)$ ماتریس قطری با درایه‌های $f(d_1), \dots, f(d_n)$

باشد. در این صورت $P^{-1}f(D)P$ مستقل از D است و به معنی ذیل دقیقاً تابعی از A است. اگر Q ماتریس معکوس پذیر دیگر باشد که QAQ^{-1} ماتریسی قطری چون D' است، آنگاه f را می توان بردرایه های قطری D' به کار بست و

$$P^{-1}f(D)P = Q^{-1}f(D')Q.$$

تعریف. تحت شرایط بالا، $f(A)$ به صورت $P^{-1}f(D)P$ تعریف می شود.

ماتریس $f(A)$ را می توان به طریق دیگری هم مشخص کرد. برای انجام این امر، ذیلاً برخی از نتایج مربوط به ماتریسهای نرمال را که با فرمولبندی نظیر ماتریسی قضیه قبل به دست می آیند بدون اثبات بیان می کنیم.

قضیه ۱۱. گیریم A ماتریسی نرمال c_1, \dots, c_k ریشه های مختلط متمایز $\det(xI - A)$ باشند. فرض کنیم

$$e_i = \prod_{j \neq i} \left(\frac{x - c_j}{c_i - c_j} \right)$$

و $E_i = e_i(A)$ ($1 \leq i \leq k$). در این صورت $E_i E_j = 0$ (هرگاه $i \neq j$)، $E_i^2 = E_i$ ، $E_i^* = E_i$ و

$$I = E_1 + \dots + E_k.$$

اگر f تابع مختلطی باشد که دامنه آن شامل c_1, \dots, c_k است، آنگاه

$$f(A) = f(c_1)E_1 + \dots + f(c_k)E_k$$

و بخصوص، $A = c_1 E_1 + \dots + c_k E_k$.

یادآوری می کنیم که هر عملگر روی یک فضای ضرب داخلی V نامنفی است، هرگاه T خودالحاق باشد و به ازای هر α در V ، $(T\alpha|\alpha) \geq 0$.

قضیه ۱۲. فرض کنیم T یک عملگر نرمال قطری شدنی روی یک فضای ضرب داخلی بعد متناهی V باشد. در این صورت T خودالحاق، نامنفی، پایکانی است، بر حسب اینکه هر مقدار سرشت نمای T حقیقی، نامنفی، یا با قدر مطلق ۱ باشد.

اثبات. اگر T دارای تکفیک طیفی $T = c_1 E_1 + \dots + c_k E_k$ باشد، آنگاه $T^* = \bar{c}_1 E_1 + \dots + \bar{c}_k E_k$. این گفته که T خودالحاق است عیناً مثل این است که بگوییم $T = T^*$ یا

$$(c_1 - \bar{c}_1)E_1 + \dots + (c_k - \bar{c}_k)E_k = 0.$$

با استفاده از این واقعیت که به ازای $i \neq j$ ، $E_i E_j = 0$ و نیز از اینکه هیچ یک از E_j ها عملگر صفر نیست، می بینیم که T خودالحاق است اگر و تنها اگر $c_j = \bar{c}_j$ ، $j = 1, \dots, k$.

برای تشخیص عملگرهای نرمالی که نامنفی می باشند، به

$$\begin{aligned}(T\alpha|\alpha) &= \left(\sum_{j=1}^k c_j E_j \alpha \middle| \sum_{i=1}^k E_i \alpha \right) \\ &= \sum_i \sum_j c_j (E_j \alpha | E_i \alpha) \\ &= \sum_j c_j \|E_j \alpha\|^2\end{aligned}$$

توجه کنید. در اینجا از این واقعیت که به ازای $i \neq j$ ، $(E_j \alpha | E_i \alpha) = 0$ استفاده کرده ایم. از این مطلب آشکار است که شرط $(T\alpha|\alpha) \geq 0$ بر آورده می شود اگر و تنها اگر به ازای هر j ، $c_j \geq 0$. برای تشخیص عملگرهای یکانی مشاهده می کنیم که

$$\begin{aligned}TT^* &= c_1 c_1 E_1 + \dots + c_k c_k E_k \\ &= |c_1|^2 E_1 + \dots + |c_k|^2 E_k.\end{aligned}$$

اگر $TT^* = I$ ، آنگاه $I = |c_1|^2 E_1 + \dots + |c_k|^2 E_k$ و با اثر دادن E_j ،

$$E_j = |c_j|^2 E_j.$$

چون $E_j \neq 0$ داریم $|c_j|^2 = 1$ یا $|c_j| = 1$. بعکس، اگر به ازای هر j ، $|c_j|^2 = 1$ واضح است که $TT^* = I$. \square

توجه به این نکته که این قضیه، قضیه ای در مورد عملگرهای نرمال است حائز اهمیت است. اگر T یک عملگر خطی عمومی روی V با مقادیر سرشت نمای حقیقی باشد، نتیجه نمی توان گرفت که T خودالحاق است. این قضیه حکم می کند که اگر T دارای مقادیر سرشت نمای حقیقی باشد و اگر T قطری شدنی و نرمال باشد، آنگاه T خودالحاق است. قضیه ای از این نوع، شباهت بین عمل الحاق و فرایند تشکیل مزدوج اعداد مختلط را تقویت می کند. اگر به ازای عدد مختلط z داشته باشیم $z = \bar{z}$ یا $\bar{z}z = 1$ ، آنگاه z عددی حقیقی است یا قدرمطلقش ۱ است. همچنین، اگر به ازای عملگر T داشته باشیم $T = T^*$ یا $T^*T = I$ آنگاه یا T عملگری است خودالحاق یا یکانی.

اکنون می خواهیم دو قضیه اثبات کنیم که نظیر دو حکم زیر هستند:

(۱) هر عدد نامنفی یک جذر (ریشه دوم) نامنفی یکتا دارد.

(۲) هر عدد مختلط، به صورت ru ، که در آن r نامنفی و $|u| = 1$ ، قابل بیان است.

این همان تجزیه قطبی $z = re^{i\theta}$ برای اعداد مختلط است.

قضیه ۱۳. گیریم V یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و T عملگری نامنفی روی V باشد. در این صورت T دارای یک جذر (ریشه دوم) نامنفی یکتاست، یعنی یک و تنها یک عملگر نامنفی چون N روی V وجود دارد که $N^2 = T$.

اثبات. $T = c_1 E_1 + \dots + c_k E_k$ را تفكيك طيفى T مى گيريم. بنا بر قضيه ۱۲، هر c_j نامنفى است. اگر c يك عدد حقيقى نامنفى باشد، فرض مى كنيم \sqrt{c} جذر نامنفى c را نشان دهد. در اين صورت، بنا بر قضيه ۱۱ و $N = \sqrt{T}$ (۱۲-۹) عملگر نرمال قطرى-شدنى خوش تعريفى روى V است. بنا بر قضيه ۱۲ اين عملگر نامنفى است و با محاسبه اى ساده $N^2 = T$.

حال گيريم P عملگرى نامنفى روى V باشد و $P^2 = T$. ثابت خواهيم كرد كه $P = N$ فرض كنيم

$$P = d_1 F_1 + \dots + d_r F_r,$$

تفكيك طيفى P باشد. در اين صورت به ازاي هر j ، $d_j \geq 0$ چرا كه P نامنفى است. بنا بر $P^2 = T$ داريم

$$T = d_1^2 F_1 + \dots + d_r^2 F_r.$$

حال F_1, \dots, F_r در شرايط $F_i F_j = 0, I = F_1 + \dots + F_r$ به ازاي $i \neq j$ و اينكه هيچ يك از F_j ها 0 نيست، صدق مى كنند. اعداد d_1^2, \dots, d_r^2 متمايزند، چرا كه اعداد نامنفى متمايز داراي جذرهاى متمايز هستند. بنا بر يكتايى تفكيك طيفى بايد داشته باشيم $r = k$ (احياناً با تغيير ترتيب) $F_j = E_j$ و $d_j^2 = c_j$ پس $P = N$. \square

قضيه ۱۴. فرض كنيم V يك فضاى ضرب داخلى با بعد متناهى و T عملگرى خطى روى V باشد. در اين صورت عملگرى يکانى چون U روى V و عملگرى نامنفى چون N روى V وجود دارند به طوري كه $T = UN$ عملگر نامنفى N يکتاست. اگر T معكوس پذير باشد، عملگر U نيز يکتاست.

اثبات. فرض كنيم داشته باشيم $T = UN$ كه در آن U يکانى و N نامنفى است. در اين صورت $T^* = (UN)^* = N^* U^* = NU^*$ پس، $T^* T = NU^* UN = N^2$. اين مطلب نشان مى دهد كه N به گونه اى يکتا به عنوان جذر نامنفى عملگر نامنفى $T^* T$ تعيين مى شود.

از اين رو، براى شروع اثبات وجود U و N قضيه ۱۳ را براى تعريف N به عنوان يکتا جذر نامنفى $T^* T$ به كار مى بريم. اگر T معكوس پذير باشد، آنگاه N نيز معكوس پذير است، چرا كه

$$(N\alpha | N\alpha) = (N^2 \alpha | \alpha) = (T^* T \alpha | \alpha) = (T \alpha | T \alpha).$$

در اين حالت $U = TN^{-1}$ را تعريف و اثبات مى كنيم كه U يکانى است. اما پس $U^* = (TN^{-1})^* = (N^{-1})^* T^* = (N^*)^{-1} T^* = N^{-1} T^*$

$$\begin{aligned} UU^* &= TN^{-1} N^{-1} T^* \\ &= T(N^{-1})^2 T^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= T(N^\gamma)^{-1}T^* \\
 &= T(T^*T)^{-1}T^* \\
 &= TT^{-1}(T^*)^{-1}T^* \\
 &= I
 \end{aligned}$$

و U یکانی است.

اگر T معکوس پذیر نباشد، برای تعریف U ناگزیر به انجام کمی کار بیشتر هستیم. ابتدا U را روی برد N تعریف می کنیم. گیریم α برداری در برد N ، مثلاً $\alpha = N\beta$ باشد. با این انگیزه که می خواهیم $UN\beta = T\beta$ باشد، $U\alpha$ را مساوی $T\beta$ تعریف می کنیم. باید نشان دهیم که U روی برد N خوش تعریف است؛ به بیان دیگر، اگر $N\beta' = N\beta$ ، آنگاه $T\beta' = T\beta$. قبلاً نشان دادیم که به ازای هر $\gamma \in V$ ، $\|T\gamma\|^2 = \|N\gamma\|^2$. پس، به ازای $\gamma = \beta - \beta'$ می بینیم که $N(\beta - \beta') = 0$ اگر و تنها اگر $T(\beta - \beta') = 0$. از این رو، U روی برد N خوش تعریف و واضح است که در جایی که تعریف شود، خطی است. حال اگر W برد N باشد، U را روی W^\perp تعریف می کنیم. برای انجام این کار، به مطالب ذیل نیازمندیم. چون فضاهای پوچ T و N مساوی هستند، بعد بردشان نیز مساوی است. در نتیجه، W^\perp همان بعدی را دارد که مکمل متعامد برد T . بنابراین، یک یکریختی (فضای ضرب داخلی) چون U از W^\perp بروی $T(V)^\perp$ وجود دارد. تا اینجا U را روی W تعریف کرده ایم، و حالا روی W^\perp ، U را همان U تعریف می کنیم.

اجازه دهید تعریف U را تکرار کنیم. چون $V = W \oplus W^\perp$ ، هر $\alpha \in V$ به طور یکتا به صورت $\alpha = N\beta + \gamma$ قابل بیان است. در اینجا $N\beta$ در W ، یعنی در برد N است و γ در W^\perp حال تعریف می کنیم

$$U\alpha = T\beta + U_0\gamma.$$

این U بوضوح خطی است و قبلاً نشان دادیم که خوش تعریف نیز هست. همچنین

$$\begin{aligned}
 (U\alpha|U\alpha) &= (T\beta + U_0\gamma|T\beta + U_0\gamma) \\
 &= (T\beta|T\beta) + (U_0\gamma|U_0\gamma) \\
 &= (N\beta|N\beta) + (\gamma|\gamma) \\
 &= (\alpha|\alpha).
 \end{aligned}$$

پس، V یکانی است. بعلاوه به ازای هر β داریم $UN\beta = T\beta$. □

$T = UN$ را تجزیه ای قطبی برای T می نامیم. مسلماً نمی توانیم آن را تنها تجزیه قطبی بنامیم، چرا که U یکتا نیست. حتی وقتی که T معکوس پذیر و در نتیجه U یکتا باشد این مشکل را داریم که U و N ممکن است جابجا نشوند. در واقع، آنها جابجا می شوند

اگر تنها اگر T نرمال باشد. مثلاً، اگر به ازای N نامنفى U يكانى $T = UN = NU$ آنگاه

$$TT^* = (NU)(NU)^* = NUU^*N = N^2 = T^*T.$$

عملگر عمومى T نیز تجزیه‌ای چون $T = N_1U_1$ با N_1 نامنفى و U_1 يكانى خواهد داشت. در اینجا، N_1 جذر نامنفى TT^* است. این نتیجه را می‌توان با به‌کار بستن قضیه‌ای که قریباً اثبات شد، روی عملگر T^* و سپس با گرفتن الحاقی، به‌دست آورد. اکنون به مسئله قطری کردن همزمان خانواده‌های جابجا شونده عملگرهای نرمال باز می‌گردیم برای این منظور، اصطلاح ذیل مناسب است.

تعاریف. \mathcal{F} خانواده‌ای از عملگرهای روی يك فضای ضرب داخلى V باشد. تابعی چون r روی \mathcal{F} با مقادیر در هیأت اسکالرهاى F ، يك ریشه \mathcal{F} نامیده می‌شود هرگاه α غیر صفری در V وجود داشته باشد که به‌ازای هر T در \mathcal{F}

$$T\alpha = r(T)\alpha.$$

به‌ازای هر تابع r از \mathcal{F} به F ، $V(r)$ را مجموعه همه α های در V می‌گیریم که به‌ازای هر T در \mathcal{F}

$$T\alpha = r(T)\alpha$$

در این صورت $V(r)$ زیرفضایی از V و r ریشه‌ای از \mathcal{F} است اگر و تنها اگر $V(r) \neq \{0\}$. هر α غیر صفر در $V(r)$ به‌طور همزمان يك بردار سرشت‌نما برای همه T های در \mathcal{F} است.

قضیه ۱۵. \mathcal{F} خانواده جابجا شونده‌ای از عملگرهای نرمال قطری شدنی روی يك فضای ضرب داخلى بعد متناهی V باشد. در این صورت \mathcal{F} تنها دارای تعدادی متناهی ریشه است. اگر r_1, \dots, r_k ریشه‌های متمایز \mathcal{F} باشند، آنگاه

$$(1) \text{ وقتی } i \neq j \text{ بر } V(r_i) \text{ و } V(r_j) \text{ عمود است، و}$$

$$(2) V = V(r_1) \oplus \dots \oplus V(r_k)$$

اثبات. فرض کنیم r و s ریشه‌های متمایز \mathcal{F} باشند. در این صورت عملگری چون T در \mathcal{F} وجود دارد که $r(T) = s(T)$. از آنجا که بردارهای سرشت‌نمای متعلق به مقادیر سرشت‌نمای متمایز T لزوماً متعامد می‌باشند، نتیجه می‌شود که $V(r)$ بر $V(s)$ عمود است. چون V با بعد متناهی است این مطلب ایجاب می‌کند که \mathcal{F} حداکثر تعداد متناهی ریشه داشته باشد. r_1, \dots, r_k را ریشه‌های \mathcal{F} می‌گیریم. فرض کنیم $\{T_1, \dots, T_m\}$ يك زیرمجموعه مستقل خطی ماکسیمال \mathcal{F} باشد و

$$\{E_{i1}, E_{i2}, \dots\}$$

تفکیک همانی تعریف شده توسط T_i ($1 \leq i \leq m$). آنگاه تصویرهای E_{ij} خانواده‌ای

جا بجایی تشکیل می دهند. زیرا هر E_{ij} يك چند جمله ای در T_i است و T_1, \dots, T_m با یکدیگر جا بجا می شوند. چون

$$I = \left(\sum_{j_1} E_{1j_1} \right) \left(\sum_{j_2} E_{2j_2} \right) \cdots \left(\sum_{j_m} E_{mj_m} \right)$$

هر بردار α در V را می توان به صورت

$$\alpha = \sum_{j_1, \dots, j_m} E_{1j_1} E_{2j_2} \cdots E_{mj_m} \alpha \quad (13-9)$$

نوشت. فرض کنیم j_1, \dots, j_m نمایه هایی باشند که به ازای آنها

$$\beta = E_{1j_1} E_{2j_2} \cdots E_{mj_m} \alpha \neq 0$$

می نویسیم

$$\beta_i = \left(\prod_{n \neq i} E_{nj_n} \right) \alpha.$$

در این صورت $\beta = E_{ij} \beta_i$ ؛ پس اسکالری چون c_i وجود دارد که

$$T_i \beta = c_i \beta, \quad 1 \leq i \leq m.$$

به ازای هر T در \mathcal{T} اسکالرهایی یکنایی چون b_i وجود دارند که

$$T = \sum_{i=1}^m b_i T_i.$$

پس

$$\begin{aligned} T\beta &= \sum_i b_i T_i \beta \\ &= \left(\sum_i b_i c_i \right) \beta. \end{aligned}$$

بدیهی است تابع $T \rightarrow \sum_i b_i c_i$ یکی از ریشه های \mathcal{T} ، مثلا r_i ، است و β هم در $V(r_i)$ قرار دارد. بنا بر این، هر جمله غیر صفر در (۱۳-۹) به یکی از فضاها $V(r_1), \dots, V(r_k), \dots, V(r_m)$ تعلق دارد. از اینجا نتیجه می شود که V مجموع مستقیم متعامد $V(r_1), \dots, V(r_k), \dots, V(r_m)$ است. \square

نتیجه. تحت فرضهای قضیه فوق، P_j را تصویر متعامد $V(r_j)$ روی $V(r_j)$ می گیریم. آنگاه وقتی که $i \neq j$ ، $P_i P_j = 0$ ،

$$I = P_1 + \cdots + P_k$$

و هر T در \mathcal{T} می تواند به صورت

$$T = \sum_j r_j(T) P_j \quad (14-9)$$

نوشته شود.

تعاریف. خانواده تصویرهای متعامد $\{P_1, \dots, P_k\}$ به تفکیک همانی تعیین شده توسط \mathcal{P} و (۹-۱۴) به تفکیک طیفی T بر حسب این خانواده، موسوم است. با اینکه تصویرهای P_1, \dots, P_k در نتیجه قبل به طور متعارف به خانواده \mathcal{P} وابسته اند، عموماً نه در \mathcal{P} قرار دارند و نه حتی ترکیبهایی خطی از عملگرهای واقع در \mathcal{P} هستند؛ با این وجود نشان خواهیم داد که این تصویرها را می توان از تشکیل حاصل-ضربهای معینی از چند جمله ایهایی از اعضای \mathcal{P} به دست آورد. در مطالعه هر خانواده ای از عملگرهای خطی روی یک فضای ضرب داخلی، در نظر گرفتن جبر خودالحاق تولید شده توسط این خانواده معمولاً سودمند است.

تعریف. یک جبر خودالحاق از عملگرهای روی یک فضای ضرب داخلی V زیرجبری خطی از $L(V, V)$ است که شامل الحاقی هر یک از عناصرش باشد.

مثالی از یک جبر خودالحاق، خود $L(V, V)$ است. چون اشتراك هر دسته از جبرهای خودالحاق مجدداً جبری خودالحاق است، اصطلاح ذیل بامعنی است.

تعریف. اگر \mathcal{P} خانواده ای از عملگرهای خطی روی یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی باشد، جبر خودالحاق تولید شده توسط \mathcal{P} عبارت است از کوچکترین جبر خودالحاقی که شامل \mathcal{P} باشد.

قضیه ۱۶. گیریم \mathcal{P} خانواده ای جا بجا شونده از عملگرهای نرمال قطری شدنی روی یک فضای ضرب داخلی بعد متناهی V و \mathcal{A} جبر خودالحاق تولید شده توسط \mathcal{P} و عملگر همانی باشد. فرض کنیم $\{P_1, \dots, P_k\}$ تفکیک همانی تعریف شده توسط \mathcal{P} باشد. در این صورت \mathcal{A} مجموعه همه عملگرهای به صورت

$$T = \sum_{j=1}^k c_j P_j \quad (15-9)$$

روی V است که در آنها c_1, \dots, c_k اسکالرهایی دلخواه هستند.

اثبات. فرض کنیم \mathcal{A} مجموعه همه عملگرهای به صورت (۹-۱۵) روی V را نشان دهد. در این صورت \mathcal{A} شامل عملگر همانی والحاقی

$$T^* = \sum_j \bar{c}_j P_j$$

از هر یک از عناصرش است. اگر $T = \sum_j c_j P_j$ و $U = \sum_j d_j P_j$ ، آنگاه به ازای هر

اسکالر a

$$aT + U = \sum_j (ac + d_j) P_j$$

$$\begin{aligned} TU &= \sum_{i,j} c_i d_j P_i P_j \\ &= \sum_j c_j d_j P_j \\ &= UT. \end{aligned}$$

پس \mathcal{C} جبر جابجایی خودالحاقی است شامل \mathcal{C} و عملگر همانی. بنابراین \mathcal{C} شامل α هم هست.

حال فرض کنیم r_1, \dots, r_k همه ریشه‌های \mathcal{C} باشند. آنگاه به ازای هر جفت از نمایه‌های (i, n) با $i \neq n$ ، در \mathcal{C} عملگری چون T_{in} وجود دارد که $r_i(T_{in}) \neq r_n(T_{in})$. فرض کنیم $a_{in} = r_i(T_{in}) - r_n(T_{in})$ و $b_{in} = r_n(T_{in})$. در این صورت عملگر خطی

$$Q_i = \prod_{n \neq i} a_{in}^{-1} (T_{in} - b_{in} I)$$

عنصری از جبر \mathcal{C} است. نشان خواهیم داد که $Q_i = P_i$ ($1 \leq i \leq k$). برای این منظور، فرض کنیم $j \neq i$ و نیز α بردار دلخواهی از $V(r_j)$ باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} T_{ij} \alpha &= r_j(T_{ij}) \alpha \\ &= b_{ij} \alpha \end{aligned}$$

پس $(T_{ij} - b_{ij} I) \alpha = 0$. چون سازه‌های در Q_i همگی (با یکدیگر) جابجا می‌شوند، نتیجه می‌گیریم که $Q_i \alpha = 0$. پس در صورتی که $Q_i, j \neq i$ روی $V(r_j)$ با P_i مساوی است. حال فرض کنیم α برداری از $V(r_i)$ باشد. آنگاه $T_{in} \alpha = r_i(T_{in}) \alpha$ و

$$a_{in}^{-1} (T_{in} - b_{in} I) \alpha = a_{in}^{-1} [r_i(T_{in}) - r_n(T_{in})] \alpha = \alpha.$$

پس، $Q_i \alpha = \alpha$ و Q_i روی $V(r_i)$ با P_i مساوی است؛ بنابراین به ازای $i = 1, \dots, k$ ، $Q_i = P_i$. از این مطلب نتیجه می‌شود که $\mathcal{C} = \alpha$. \square

این قضیه نشان می‌دهد که جبر \mathcal{C} جابجایی است و هر عنصر \mathcal{C} یک عملگر نرمال قطری‌شدنی است. حال نشان می‌دهیم که \mathcal{C} یک تک مولد هم دارد.

نتیجه. تحت فرضهای قضیه، عملگری چون T در \mathcal{C} وجود دارد که هر عنصر \mathcal{C} یک چند-جمله‌ای بر حسب T است.

اثبات. فرض کنیم $T = \sum_{j=1}^k t_j P_j$ و t_1, \dots, t_k اسکالرهایی متمایز باشند. در این صورت به ازای $n = 1, 2, \dots$

$$T^n = \sum_{j=1}^k t_j^n P_j.$$

اگر

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} f(T) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n T^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k a_n t_j^n P_j \\ &= \sum_{j=1}^k \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n t_j^n \right) P_j \\ &= \sum_{j=1}^k f(t_j) P_j. \end{aligned}$$

به‌ازای هر عملگر دلخواه در \mathcal{A} مانند

$$U = \sum_{j=1}^k c_j P_j$$

یک چندجمله‌ای چون f وجود دارد که $f(t_j) = c_j$ ، $1 \leq j \leq k$ ؛ و به‌ازای هر f به این صورت داریم $\square \cdot U = f(T)$

تمرین

۱. تعریفی معقول از یک ماتریس $n \times n$ نامنفی ارائه کنید، و سپس ثابت کنید که چنین ماتریسی دارای جذری نامنفی و یکتاست.

۲. فرض کنید A ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های مختلط با شرط $A^* = -A$ باشد و فرض

کنید $B = e^A$. نشان دهید که

$$\det B = e^{\operatorname{tr} A} \quad (\text{الف})$$

$$B^* = e^{-A} \quad (\text{ب})$$

(پ) B یکانی است.

۳. اگر U و T عملگرهای نرمالی باشند که جابجا شوند، ثابت کنید UT و $U+T$ نیز نرمال‌اند.

۴. فرض کنید T عملگری خطی روی فضای ضرب داخلی مختلط بعد متناهی V باشد.

ثابت کنید که ده حکم ذیل درباره T هم‌ارزند.

(الف) T نرمال است.

(ب) به‌ازای هر α در V ، $\|T\alpha\| = \|T^*\alpha\|$.

- (پ) $T_1 T_2 = T_2 T_1$ و در آن $T = T_1 + iT_2$ خودالحاق‌اند و T_1 و T_2 خودالحاق‌اند و $T_1 T_2 = T_2 T_1$
- (ت) اگر α یک بردار و c یک اسکالر باشد و $T\alpha = c\alpha$ ، آنگاه $T^*\alpha = \bar{c}\alpha$
- (ث) پایهٔ متعامد یک‌ای متشکل از بردارهای سرشت‌نمای T برای V وجود دارد.
- (ج) پایهٔ متعامد یک‌ای چون \mathcal{B} وجود دارد که $[T]_{\mathcal{B}}$ قطری است.
- (چ) یک چندجمله‌ای چون g با ضرایب مختلط وجود دارد که $T^* = g(T)$
- (ح) هر زیرفضایی که تحت T پایا باشد تحت T^* نیز پایا است.
- (خ) $T = NU$ که در آن N نامنفی و U یکانی است و نیز N با U جابجا می‌شود.
- (د) در آن $T = c_1 E_1 + \dots + c_k E_k$ که $I = E_1 + \dots + E_k$ ، به ازای $i \neq j$ داریم $E_i E_j = 0$ و $E_j^2 = E_j$

۵. تمرین ۳ را برای اثبات این مطلب به کار ببرد که هر خانوادهٔ جابجاشونده‌ای از عملگرهای نرمال (نه لزوماً عملگرهایی قطری‌شدنی) روی یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی، یک جبر خودالحاق جابجایی از عملگرهای نرمال تولید می‌کند.

۶. فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی مختلط با بعد متناهی و U عملگری یکانی روی V باشد که $U\alpha = \alpha$ ایجاب کند $\alpha = 0$. فرض کنید

$$f(z) = i \frac{(1+z)}{(1-z)}, \quad z \neq 1$$

و نشان دهید که

$$f(U) = i(I+U)(I-U)^{-1} \quad (\text{الف})$$

(ب) $f(U)$ خودالحاق است؛

(پ) به ازای هر عملگر خودالحاق T روی V ، عملگر

$$U = (T - iI)(T + iI)^{-1}$$

یکانی است و دارای خاصیت $T = f(U)$ است.

۷. فرض کنید V فضای ماتریسهای $n \times n$ مختلط مجهز به ضرب داخلی

$$(A|B) = \text{tr}(AB^*)$$

باشد. اگر B عنصری از V باشد، فرض کنید L_B ، R_B و T_B عملگرهای خطی روی V تعریف شده توسط

$$L_B(A) = BA \quad (\text{الف})$$

$$R_B(A) = AB \quad (\text{ب})$$

$$T_B(A) = BA - AB \quad (\text{پ})$$

را نشان بدهند. سه خانواده از عملگرهای حاصل از تغییر B روی همهٔ ماتریسهای

قطرى را در نظر بگيريد. نشان دهيد هر يك از اين خانواده ها يك جبر خودالحاق جا بجايى است و تفكيكهاى طيفيشان را نيز بياييد.

۸. اگر B عنصرى دلخواه از فضاى ضرب داخلى در تمرين ۷ باشد، نشان دهيد كه L_B به طور يكانى با R_{B^t} هم ارز است.

۹. فرض كنيد V فضاى ضرب داخلى در تمرين ۷ و G گروه ماتريسهاى يكانى در V باشد. اگر B در G باشد، فرض كنيد C_B عملگر خطى روى V تعريف شده توسط

$$C_B(A) = BAB^{-1}$$

را نشان دهد. ثابت كنيد كه

(الف) C_B يك عملگر يكانى روى V است؛

(ب) $C_{B_1 B_2} = C_{B_1} C_{B_2}$ ؛

(پ) هيچ تبديلى يكانى چون U روى V وجود ندارد كه به ازاي هر B در G

$$UL_B U^{-1} = C_B.$$

۱۰. فرض كنيد \mathcal{F} خانواده اى دلخواه از عملگرهاى خطى روى يك فضاى ضرب داخلى

بعد متناهى V و \mathcal{A} جبر خودالحاق توليد شده توسط \mathcal{F} باشد. نشان دهيد كه

(الف) هر ريشه α ريشه اى از \mathcal{F} را تعريف مى كند؛

(ب) هر ريشه r از \mathcal{A} يك تابع خطى ضربى روى A است؛ يعنى، به ازاي همه T ها

و U هاى در \mathcal{A} و همه اسكالرهاى c

$$r(TU) = r(T)r(U)$$

$$r(cT + U) = cr(T) + r(U).$$

۱۱. فرض كنيد \mathcal{F} خانواده جا بجا شونده اى از عملگرهاى نرمال قطرى شدى روى يك

فضاى ضرب داخلى بعد متناهى V باشد و فرض كنيد \mathcal{A} جبر خودالحاق توليد شده

توسط \mathcal{F} و عملگرهمانى I باشد. نشان دهيد هر ريشه α مخالف 0 است و به ازاي

هر ريشه r از \mathcal{F} ريشه يكتايى چون s از \mathcal{A} وجود دارد كه به ازاي هر T در \mathcal{F} ،

$$s(T) = r(T)$$

۱۲. فرض كنيد \mathcal{F} خانواده جا بجا شونده اى از عملگرهاى نرمال قطرى شدى روى يك فضاى

ضرب داخلى با بعد متناهى V و A_0 جبر خودالحاق توليد شده توسط \mathcal{F} باشد. \mathcal{A} را

جبر خودالحاق توليد شده توسط \mathcal{F} و عملگرهمانى I بگيريد. نشان دهيد كه

(الف) \mathcal{A} مجموعه همه عملگرهاى روى V به صورت $cI + T$ است كه در آن c يك

اسكالر و T عملگرى در A_0 است.

(ب) حداکثریک ریشه چون r از α وجود دارد که به ازای هر T در A_0 ، $r(T) = 0$ (پ) اگر یکی از ریشه‌های α روی A_0 برابر 0 باشد، تصویرهای P_1, \dots, P_k در تفکیک همانی تعریف شده توسط ρ را می‌توان به طوری نمایه‌گذاری کرد که A_0 متشکل از همه عملگرهای روی V به صورت

$$T = \sum_{j=1}^k c_j P_j$$

باشد. در اینجا c_1, \dots, c_k همه اسکالرهایی دلخواه هستند.

(ت) $\alpha = A_0$ اگر و تنها اگر به ازای هر ریشه r از α عملگری چون T در A_0 موجود باشد که $r(T) \neq 0$.

۶.۹ چند خاصیت دیگر از عملگرهای نرمال

در بخش ۵.۸ خواص اساسی عملگرهای خودالحاق و نرمال را با استفاده از ساده‌ترین و مستقیم‌ترین روش‌های ممکن گسترش دادیم. در بخش ۵.۹ صورگوناگون نظریه طیفی را بررسی کردیم. در اینجا به اثبات برخی قضایا که از ماهیتی بیشتر فنی برخوردارند و عمدتاً درباره عملگرهای نرمال روی فضاها حقیقی هستند می‌پردازیم. با اثبات صورت دقیقتری از قضیه تجزیه اولیه از فصل ۶ در مورد عملگرهای نرمال، کار خود را آغاز می‌کنیم. این اثبات در هر دو حالت حقیقی و مختلط به کار می‌رود.

قضیه ۱۷. گیریم T عملگری نرمال روی یک فضای ضرب داخلی بعد متناهی V باشد. فرض کنیم p چندجمله‌ای مینیمال T و p_1, \dots, p_k سازه‌های اول تکین متمایز آن باشند. در این صورت هر P_j با چندگانگی ۱ در تجزیه p ظاهر می‌شود و دارای درجه ۱ یا ۲ است. فرض کنیم W_j فضای پوچ $p_j(T)$ باشد. در این صورت

(۱) هر گاه $i \neq j$ ، فضای W_i بر W_j عمود است؛

(۲) $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ ؛

(۳) W_j تحت T پایاست و چندجمله‌ای مینیمال T به W_j همان p_j است.

(۴) به ازای هر z ، یک چندجمله‌ای چون e_z با ضرایب در هیأت اسکالری وجود

دارد که $e_z(T)$ تصویر متعامد V روی W_j است.

در اثبات از احکام اساسی معینی استفاده خواهیم کرد که آنها را به صورت لمهایی

بیان می‌کنیم.

لم ۱. گیریم N عملگری نرمال روی یک فضای ضرب داخلی W باشد. در این صورت فضای پوچ N مکمل متعامد برد آن است.

اثبات. فرض کنیم به ازای همه β ‌های در W ، $(\alpha | N\beta) = 0$. در این صورت به ازای همه β ‌ها $(N^* \alpha | \beta) = 0$. از این رو، $N^* \alpha = 0$. بنابراین قضیه ۱۹ از فصل ۸، این امر را ایجاب

می کند که $N\alpha = 0$. بعکس، اگر $N\alpha = 0$ ، آنگاه $N^*\alpha = 0$ و به ازای همه β های در W

$$(N^*\alpha|\beta) = (\alpha|N\beta) = 0. \quad \square$$

لم ۲. اگر N عملگری نرمال و α برداری باشد که $N^2\alpha = 0$ ، آنگاه $N\alpha = 0$. اثبات. فرض کنیم N نرمال باشد و $N^2\alpha = 0$. در این صورت $N\alpha$ در برد N و نیز در فضای بوج N واقع می شود. بنا بر لم ۱، این ایجاب می کند که $N\alpha = 0$. \square

لم ۳. گیریم T عملگری نرمال و f چندجمله ای دلخواهی با ضرایب درهیات اسکالری باشد. در این صورت $f(T)$ نیز نرمال است. اثبات. فرض کنیم $f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$. در این صورت

$$f(T) = a_0I + a_1T + \dots + a_nT^n$$

$$f(T)^* = \bar{a}_0I + \bar{a}_1T^* + \dots + \bar{a}_n(T^*)^n.$$

چون $T^*T = TT^*$ ، نتیجه می گیریم که $f(T)$ با $f(T)^*$ جابجا می شود. \square

لم ۴. گیریم T عملگری نرمال و f و g دو چندجمله ای نسبت به هم اول و با ضرایب درهیات اسکالری باشند. فرض کنیم α و β بردارهایی باشند که $f(T)\alpha = 0$ و $g(T)\beta = 0$. در این صورت $(\alpha|\beta) = 0$.

اثبات. چندجمله ایهایی چون a و b با ضرایب درهیات اسکالری وجود دارند که $af + bg = 1$ پس

$$a(T)f(T) + b(T)g(T) = I$$

و نتیجه اینکه $\alpha = g(T)b(T)\alpha$

$$(\alpha|\beta) = (g(T)b(T)\alpha|\beta) = (b(T)\alpha|g(T)^*\beta).$$

طبق فرض $g(T)\beta = 0$. بنا بر لم ۳، $g(T)$ نرمال است. بنا بر این طبق قضیه ۱۹ از فصل ۸، $g(T)^*\beta = 0$ ؛ پس، $(\alpha|\beta) = 0$. \square

اثبات قضیه ۱۷. به یار آورید که چندجمله ای مینیمال T عبارت است از چندجمله ای تکین با کوچکترین درجه در بین همه چندجمله ایهایی مانند f که $f(T) = 0$ وجود چنین چندجمله ایهایی از این فرض ناشی می شود که V با بعد متناهی است. فرض کنیم سازه اولی چون p_j از p تکرار شده باشد. در این صورت به ازای يك چندجمله ای چون g ، $p = p_j^2g$ چون $p(T) = 0$ ، نتیجه می گیریم که به ازای هر α در V

$$(p_j(T))^2g(T)\alpha = 0.$$

بنابر لم ۳، $p_j(T)$ نرمال است. پس، لم ۲ ایجاب می‌کند که به‌ازای هر α در V

$$p_j(T)g(T)\alpha = 0.$$

ولی این مطلب با این فرض که p در بین همه f هایی که $f(T) = 0$ دارای کوچکترین درجه است متناقض است. بنابراین، $p = p_1 \dots p_k$. اگر V یک فضای ضرب داخلی مختلط باشد هر p_j لزوماً به‌صورت

$$P_j = x - c_j$$

است که c_j حقیقی یا مختلط است. از طرف دیگر، اگر V یک فضای ضرب داخلی حقیقی باشد، آنگاه یا $p_j = x - c_j$ و c_j در R است، یا

$$p_j = (x - c)(x - \bar{c})$$

و c عدد مختلطی غیر حقیقی است.

حال فرض می‌کنیم $P_j = \frac{p}{p_j}$. در این صورت چون f_1, \dots, f_k نسبت به هم

اول‌اند چندجمله‌ایهایی چون g_j با ضرایب در حیات اسکالری وجود دارند که

$$1 = \sum_j f_j g_j. \quad (16-9)$$

حال به‌طور خلاصه نشان می‌دهیم که چگونه چنین g_j هایی را می‌توان ساخت. اگر $p_j = x - c_j$ ، آنگاه $f_j(c_j) \neq 0$ و برای g_j چندجمله‌ای اسکالری $1/f_j(c_j)$ را برمی‌گزینیم. وقتی که هر p_j بدین صورت باشد، $f_j g_j$ ها چندجمله‌ایهای آشنای لاگرانژ وابسته به c_1, \dots, c_k هستند. و (۱۶-۹) بوضوح درست است. فرض کنیم یک p_j به‌صورت $p_j = (x - c)(x - \bar{c})$ باشد که در آن c یک عدد مختلط غیر حقیقی است. در این صورت V یک فضای ضرب داخلی حقیقی است و می‌نویسیم

$$g_j = \frac{x - \bar{c}}{s} + \frac{x - c}{\bar{s}}$$

که در آن $s = (c - \bar{c})f_j(c)$ آنگاه

$$g_j = \frac{(s + \bar{s})x - (cs + \bar{c}\bar{s})}{s\bar{s}}$$

پس، g_j یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی است. اگر درجه p برابر n باشد، آنگاه

$$1 - \sum_j f_j g_j$$

یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی و با درجه حداکثر $n - 1$ است؛ علاوه، این چندجمله‌ای به‌ازای هر یک از n ریشه (مختلط) p صفر می‌شود و لذا متحداً برابر ۰ است.

حال گیریم α برداری دلخواه از V باشد. در این صورت بنابر (۱۶-۹)

$$\alpha = \sum_j f_j(T) g_j(T) \alpha$$

و چون $p_j(T) f_j(T) = 0$ ، نتیجه می‌شود که به‌ازای هر j ، $f_j(T) g_j(T) \alpha$ در W_j قرار دارد. طبق لم ۴، در صورتی که $i \neq j$ فضای W_j بر W_i عمود است. بنا براین، V مجموع مستقیم متعامد W_1, \dots, W_k است. اگر β برداری از W_j باشد، آنگاه

$$p_j(T) T \beta = T p_j(T) \beta = 0$$

پس W_j تحت T پایاست. گیریم T_j تحدید T روی W_j باشد. در این صورت $p_j(T_j) = 0$ و از این رو P_j بر چند جمله‌ای مینیمال T_j تقسیم پذیر است. چون p_j بر روی هیأت اسکالر T_j تحویل ناپذیر است نتیجه می‌گیریم که p_j چند جمله‌ای مینیمال T_j است.

حال، فرض کنیم $e_j = f_j g_j$ و $E_j = e_j(T)$. در این صورت به‌ازای هر بردار α در V ، بردار $E_j \alpha$ در W_j قرار دارد و

$$\alpha = \sum_j E_j \alpha.$$

پس، $\alpha - E_i \alpha = \sum_{j \neq i} E_j \alpha$ ؛ چون وقتی $j \neq i$ فضای W_j بر W_i عمود است، این مطلب ایجاب می‌کند که $\alpha - E_i \alpha$ در W_i^\perp قرار داشته باشد. اکنون از قضیه ۴ در فصل ۸ نتیجه می‌شود که E_i تصویر متعامد V روی W_i است. \square

تعریف. زیرفضاهای W_j ($1 \leq j \leq k$) را مؤلفه‌های اولیه V تحت T می‌نامیم.

نتیجه. گیریم T عملگری نرمال روی یک فضای ضرب داخلی بعد متناهی V و W_1, \dots, W_k مؤلفه‌های اولیه V تحت T باشند. فرض کنیم W زیرفضایی از V باشد که تحت T پایاست. در این صورت

$$W = \sum_j W \cap W_j.$$

اثبات. واضح است که W شامل $\sum_j W \cap W_j$ است. از طرف دیگر، W که تحت T پایاست تحت هر چند جمله‌ای بر حسب T نیز پایاست. بخصوص، W تحت تصویر متعامد E_j از V روی W_j پایاست. اگر α در W باشد نتیجه می‌گیریم که $E_j \alpha$ در $W \cap W_j$ است و در عین حال $\alpha = \sum_j E_j \alpha$. بنا بر این W مشمول $\sum_j W \cap W_j$ است. \square

قضیه ۱۷ نشان می‌دهد که هر عملگر نرمال T روی یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی به‌طور متعارف توسط تعدادی متناهی از عملگرهای نرمال T_j مشخص می‌شود، و این عملگرهای نرمال روی مؤلفه‌های اولیه W_j از V تحت T تعریف می‌شوند و هر یک از چند جمله‌ایهای مینیمالشان بر روی هیأت اسکالرها تحویل ناپذیر است. برای تکمیل

استنباط خود از عملگرهای نرمال، لازم است که عملگرهای نرمال از این نوع خاص را بررسی کنیم.

واضح است عملگر نرمالی که چندجمله‌ای مینیمالش از درجه ۱ باشد دقیقاً مضرری اسکالری از عنصر همانی است. از طرف دیگر، وقتی که چندجمله‌ای مینیمال، تحویل ناپذیر و از درجه ۲ باشد وضعیت پیچیده‌تر است.

مثال ۰۱. فرض کنیم $r > 0$ و θ عددی حقیقی باشد که مضرری درست از π نیست. گیریم T عملگر نرمال روی R^2 باشد که ماتریس آن در پایه متعامد یکه استانده عبارت است از

$$A = r \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

در این صورت T مضرری اسکالری از تبدیلی متعامد، ولذا نرمال است گیریم p چندجمله‌ای سرشت نمای T باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} p &= \det(xI - A) \\ &= (x - r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta \\ &= x^2 - 2r \cos \theta x + r^2. \end{aligned}$$

فرض کنیم $a = r \cos \theta$ ، $b = r \sin \theta$ و $c = a + ib$. آنگاه $b \neq 0$ ، $c = re^{i\theta}$.

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

و $p = (x - c)(x - \bar{c})$. از این رو، p بر روی R تحویل ناپذیر است. چون p بر چندجمله‌ای مینیمال T تقسیم پذیر است، نتیجه می‌گیریم که p خود چندجمله‌ای مینیمال است.

این مثال حالت عکسی را پیشنهاد می‌کند که ذیلاً عرضه می‌شود.

قضیه ۰۱۸. گیریم T عملگری نرمال روی یک فضای ضرب داخلی حقیقی بعد n و V چندجمله‌ای مینیمال آن باشد. فرض کنیم

$$p = (x - a)^2 + b^2$$

که در آن a و b اعدادی حقیقی هستند و $b \neq 0$. آنگاه عددی صحیح چون $s > 0$ وجود دارد که p^s چندجمله‌ای سرشت نمای T است و زیرفضاهایی چون V_1, \dots, V_s از V وجود دارند که

(۱) وقتی $i \neq j$ ، فضای V_i بر V_j عمود است،

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r \quad (۲)$$

(۳) هر V_i دارای پایه متعامدیکه‌ای چون $\{\alpha_i, \beta_i\}$ با خاصیت ذیل است

$$T\alpha_i = a\alpha_i + b\beta_i$$

$$T\beta_i = -b\alpha_i + a\beta_i.$$

به بیان دیگر، اگر $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ و θ به نحوی انتخاب شود که $a = r \cos \theta$ و $b = r \sin \theta$ ، آنگاه V مجموع مستقیم متعامدی از زیرفضاهای دو بعدی V_i است که T روی هر یک همچون « r برابر دوران به اندازه زاویه θ » عمل می‌کند. اثبات قضیه ۱۸ بر پایه لم ذیل استوار خواهد بود.

لم. گیریم V یک فضای ضرب داخلی حقیقی و S عملگر نرمالی روی V باشد که $S^2 + I^2 = 0$. فرض کنیم α برداری دلخواه از V باشد و $\beta = S\alpha$. در این صورت

$$S^*\alpha = -\beta \quad (۱۷-۹)$$

$$S^*\beta = \alpha,$$

$$\|\alpha\| = \|\beta\| \text{ و } (\alpha|\beta) = 0$$

اثبات. داریم $S\alpha = \beta$ و $S\beta = S^2\alpha = -\alpha$. بنابراین

$$\begin{aligned} 0 &= \|S\alpha - \beta\|^2 + \|S\beta + \alpha\|^2 = \|S\alpha\|^2 - 2(S\alpha|\beta) + \|\beta\|^2 \\ &\quad + \|S\beta\|^2 + 2(S\beta|\alpha) + \|\alpha\|^2. \end{aligned}$$

چون S نرمال است نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} 0 &= \|S^*\alpha\|^2 - 2(S^*\beta|\alpha) + \|\beta\|^2 + \|S^*\beta\|^2 + 2(S^*\alpha|\beta) + \|\alpha\|^2 \\ &= \|S^*\alpha + \beta\|^2 + \|S^*\beta - \alpha\|^2. \end{aligned}$$

این تساوی (۱۷-۹) را ایجاب می‌کند، و در نتیجه

$$\begin{aligned} (\alpha|\beta) &= (S^*\beta|\beta) = (\beta|S\beta) \\ &= (\beta|-\alpha) \\ &= -(\alpha|\beta) \end{aligned}$$

و $(\alpha|\beta) = 0$. به طور مشابه

$$\|\alpha\|^2 = (S^*\beta|\alpha) = (\beta|S\alpha) = \|\beta\|^2.$$

اثبات قضیه ۱۸. گیریم V_1, \dots, V_r دسته ماکسیمالی از زیرفضاهای دو بعدی باشند که شرایط (۱) و (۲)، و نیز شرایط اضافی

$$\begin{aligned} T^* \alpha_j &= a \alpha_j - b \beta_j, \\ T^* \beta_j &= b \alpha_j + a \beta_j, \end{aligned} \quad 1 \leq j \leq s \quad (18-9)$$

را برمی آورند. همچنین فرض کنیم $W = V_1 + \dots + V_s$. در این صورت W مجموع مستقیم متعامد V_1, \dots, V_s است. نشان خواهیم داد که $W = V$. فرض کنیم این طور نباشد، آنگاه $W^\perp \neq \{0\}$. بعلاوه، چون (۳) و (۱۸-۹) ایجاب می کنند که W تحت T و T^* پایا باشد، نتیجه می گیریم که W^\perp تحت T^* پایاست و $T = T^*$. گیریم $S = b^{-1}(T - aI)$ در این صورت $S^* = b^{-1}(T^* - aI)$ و $S^* S = S S^*$ ، $S^\perp + I = 0$ و $S^\perp + I = 0$ نتیجه می گیریم که $S^\perp + I = 0$ و $S^\perp + I = 0$ بر داری با نرم ۱ از W^\perp در نظر می گیریم و می نویسیم $\beta = S \alpha$. آنگاه β در W^\perp قرار دارد و $S \beta = -\alpha$. چون $T = aI + bS$ ، این مطلب ایجاب می کند که

$$T \alpha = a \alpha + b \beta$$

$$T \beta = -b \alpha + a \beta.$$

مطابق لم، $S^* \beta = \alpha$ ، $S^* \alpha = -\beta$ ، $\|\beta\| = 1$ و $(\alpha | \beta) = 0$. چون $T^* = aI + bS^*$ نتیجه می شود که

$$T^* \alpha = a \alpha - b \beta$$

$$T^* \beta = b \alpha + a \beta.$$

ولی این مطلب با این واقعیت که V_1, \dots, V_s دستهٔ ماکسیمالی از زیر فضاهایی است که در (۱)، (۳)، و (۱۸-۹) صادق می کنند متناقض است. بنابراین $W = V$ ، و نظر به اینکه

$$\det \begin{bmatrix} x-a & b \\ -b & x-a \end{bmatrix} = (x-a)^2 + b^2$$

از (۱)، (۲)، و (۳) نتیجه می گیریم که

$$\det(xI - T) = [(x-a)^2 + b^2]^s. \quad \square$$

نتیجه. تحت شرایط قضیهٔ فوق، T معکوس پذیر است و

$$T^* = (a^2 + b^2) T^{-1}.$$

اثبات. چون

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$$

از (۳) و (۹-۱۸) نتیجه می‌شود که $TT^* = (a^2 + b^2)I$ پس T معکوس پذیر است و

$$\square \quad T^* = (a^2 + b^2)T^{-1}$$

قضیه ۱۹. گیریم T عملگری نرمال روی يك فضای ضرب داخلی بعد متناهی V باشد. در این صورت هر عملگر خطی که با T جابجا شود با T^* نیز جابجا می‌شود. بعلاوه، هر زیرفضای پایای تحت T تحت T^* نیز پایاست.

اثبات. فرض کنیم U عملگری خطی روی V باشد که با T جابجا می‌شود. E_j را تصویر متعامد V روی مؤلفه اولیه W_j ($1 \leq j \leq k$) از V تحت T می‌گیریم. آنگاه E_j يك چندجمله‌ای بر حسب T است و از این رو با U جابجا می‌شود. پس،

$$E_j U E_j = U E_j = U E_j.$$

بدین سان، $U(W_j)$ زیر مجموعه‌ای از W_j است. فرض کنیم T_j و U_j تحدیده‌های U و T روی W_j را نشان دهند. فرض کنیم I_j عملگر همانی روی W_j باشد. در این صورت U_j با T_j جابجا می‌شود و اگر $T_j = c_j I_j$ ، بوضوح U_j نیز با $T_j^* = \bar{c}_j I_j$ جابجا می‌شود. از طرف دیگر، اگر T_j مضر بسی اسکالری از I_j نباشد، آنگاه T_j معکوس پذیر است و اعدادی حقیقی چون a_j و b_j وجود دارند که

$$T_j^* = (a_j^2 + b_j^2)T_j^{-1}.$$

چون $U_j T_j = T_j U_j$ ، نتیجه می‌گیریم که $T_j^{-1} U_j = U_j T_j^{-1}$. بنابراین U_j در هر دو حالت با T_j^* جابجا می‌شود. اما T^* نیز با E_j جابجا می‌شود و از این رو W_j تحت T^* پایاست. بعلاوه به ازای هر α و β در W_j

$$(T_j \alpha | \beta) = (T \alpha | \beta) = (\alpha | T^* \beta) = (\alpha | T_j^* \beta).$$

چون $T^*(W_j)$ مشمول W_j است، این مطلب ایجاب می‌کند که T_j^* تحدید T^* روی W_j باشد. بنابراین، به ازای هر α_j در W_j

$$U T^* \alpha_j = T^* U \alpha_j.$$

چون V مجموع W_1, \dots, W_k است، نتیجه می‌گیریم که به ازای هر α در V

$$U T^* \alpha = T^* U \alpha,$$

پس U با T^* جابجا می‌شود.

حال فرض کنیم W زیرفضایی از V باشد که تحت T پایاست، و نیز فرض کنیم $Z_j = W \cap W_j$. بنا بر نتیجه قضیه ۱۷، $W = \sum_j Z_j$. پس کافی است نشان دهیم که هر

Z_j تحت T_j^* پایاست. هر گاه $T_j = c_j I$ این مطلب روشن است. وقتی این طور نباشد، T_j معکوس پذیر است و Z_j را در، و از این رو روی Z_j ، می‌نگارد. بنابراین، $T_j^{-1}(Z_j) = Z_j$ و چون

$$T_j^* = (a_j^2 + b_j^2) T_j^{-1}$$

نتیجه می‌گیریم که به ازای هر j ، $T^*(Z_j)$ مشمول Z_j است. □

فرض کنیم T عملگری نرمال روی یک فضای ضرب داخلی بعد متناهی V باشد و W زیرفضایی پایا تحت T . در این صورت نتیجه قبل نشان می‌دهد که W تحت T^* نیز پایاست. از این مطلب نتیجه می‌شود که W^\perp تحت $T^{**} = T$ (و در نتیجه تحت T^* نیز) پایاست. با استفاده از این واقعیت، آسانی می‌توان حالت تقویت شده ذیل از قضیه تجزیه دوری را که در فصل ۷ آمده است، اثبات کرد.

قضیه ۲۰. گیریم T عملگر خطی نرمالی روی یک فضای ضرب داخلی بعد متناهی V (≥ 1 بعد V) باشد. در این صورت r بردار غیر صفر $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ در V بترتیب با T -پوچسازهای e_1, \dots, e_r وجود دارند که

$$V = Z(\alpha_1; T) \oplus \dots \oplus Z(\alpha_r; T) \quad (1)$$

(۲) اگر $1 \leq k \leq r-1$ ، آنگاه e_{k+1} چند جمله‌ای e_k را عا د می‌کند؛

(۳) وقتی $j \neq k$ ، فضای $Z(\alpha_j; T)$ بر $Z(\alpha_k; T)$ عمود است. بعلاوه عدد صحیح r و پوچسازهای e_1, \dots, e_r به طور یکتا توسط شرایط (۱) و (۲) و این واقعیت که هیچ یک از α_k ها صفر نیستند تعیین می‌شوند.

نتیجه. اگر A ماتریس نرمالی با درایه‌های حقیقی (مختلط) باشد، آنگاه یک ماتریس متعامد حقیقی (یکانی) چون P وجود دارد که $P^{-1}AP$ در فرم متعارف گویاست.

نتیجه اینکه دو ماتریس نرمال A و B به طور یکانی هم‌ارزند اگر و تنها اگر دارای فرم گویای مساوی باشند؛ A و B به طور متعامد هم‌ارز هستند هر گاه دارای درایه‌های حقیقی باشند و فرم گویای مساوی هم داشته باشند. از طرف دیگر، معیار ساده‌تری هم برای هم‌ارزی یکانی ماتریسهای نرمال و عملگرهای نرمال وجود دارد.

تعاریف. گیریم V و V' دو فضای ضرب داخلی بردوی هیأت مفروضی باشند. تبدیلی خطی چون

$$U: V \rightarrow V'$$

یک تبدیل یکانی نامیده می‌شود، هرگاه V را بروی V' بنگارد و ضربهای داخلی را حفظ کند. اگر T عملگری خطی روی V و T' عملگری خطی روی V' باشد، آنگاه T هم‌ارز یکانی با T' است، هرگاه تبدیلی یکانی چون U از V بروی V' وجود داشته باشد که

$$UTU^{-1} = T'.$$

لم. گیریم V و V' دو فضای ضرب داخلی با بعد متناهی بر روی هیأت مفروضی باشند. فرض کنیم T عملگری خطی روی V و T' عملگری خطی روی V' باشد. آنگاه T هم‌ارزیکانی با T' است اگر و تنها اگر پایه متعامدیکه‌ای چون \mathcal{B} از V و نیز پایه متعامدیکه‌ای چون \mathcal{B}' از V' وجود داشته باشد به طوری که

$$[T]_{\mathcal{B}} = [T']_{\mathcal{B}'}$$

اثبات. فرض کنیم تبدیلی یکسانی چون U از V بروی V' وجود داشته باشد به طوری که $UTU^{-1} = T'$ را پایه متعامدیکه (مرتب) دلخواهی برای V می‌گیریم. همچنین فرض می‌کنیم $\alpha'_j = U\alpha_j$ ($1 \leq j \leq n$). آنگاه $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$ پایه متعامدیکه‌ای برای V' است و با قرار دادن

$$T\alpha_j = \sum_{k=1}^n A_{kj}\alpha_k$$

دیده می‌شود که

$$\begin{aligned} T'\alpha'_j &= UT\alpha_j \\ &= \sum_k A_{kj}U\alpha_k \\ &= \sum_k A_{kj}\alpha'_k. \end{aligned}$$

پس $[T]_{\mathcal{B}} = A = [T']_{\mathcal{B}'}$.

بعکس، فرض کنیم پایه متعامدیکه‌ای چون \mathcal{B} از V و پایه متعامدیکه‌ای چون \mathcal{B}' برای V' وجود داشته باشد به طوری که

$$[T]_{\mathcal{B}} = [T']_{\mathcal{B}'}$$

می‌گیریم $A = [T]_{\mathcal{B}}$. همچنین فرض کنیم $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ و $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$. اگر U تبدیل خطی از V در V' باشد $U\alpha_j = \alpha'_j$ ($1 \leq j \leq n$) باشد، آنگاه U تبدیلی یکسانی از V بروی V' است و

$$\begin{aligned} UTU^{-1}\alpha'_j &= UT\alpha_j \\ &= U\sum_k A_{kj}\alpha_k \\ &= \sum_k A_{kj}\alpha'_k. \end{aligned}$$

بنابراین، $UTU^{-1}\alpha'_j = T'\alpha'_j$ ($1 \leq j \leq n$)، که خود ايجاب می‌کند که $UTU^{-1} = T'$.

از لم بلافاصله نتیجه می‌شود که عملگرهای هم‌ارزیکانی روی فضاهای با بعد

متناهی چندجمله‌ای سرشت‌نمای مساوی دارند. برای عملگرهای نرمال، حالت عکس هم درست است.

قضیه ۰۲۱. گیریم V و V' دو فضای ضرب داخلی با بعد متناهی بروی هیأت مفروضی باشند. فرض کنیم T عملگری نرمال روی V و T' عملگری نرمال روی V' باشد. آنگاه T هم‌ارزیکانی با T' است اگر وقتها اگر T و T' دارای چندجمله‌ایهای سرشت‌نمای مساوی باشند.

اثبات. فرض کنیم T و T' دارای چندجمله‌ای سرشت‌نمای مساوی f باشند. W_j ها $(1 \leq j \leq k)$ را مؤلفه‌های اولیه V تحت T و T_j را تحدید T روی W_j می‌گیریم. فرض کنیم I_j عملگر همانی روی W_j باشد. در این صورت

$$f = \prod_{j=1}^k \det(xI_j - T_j).$$

p_j را چندجمله‌ای مینیمال T_j می‌گیریم. اگر $p_j = x - c_j$ ، روشن است که

$$\det(xI_j - T_j) = (x - c_j)^{s_j}$$

و در آن s_j بعد W_j است. از طرف دیگر، اگر $p_j = (x - a_j)^2 + b_j^2$ که در آن a_j, b_j اعدادی حقیقی‌اند و $b_j \neq 0$ آنگاه از قضیه ۱۸ نتیجه می‌شود که

$$\det(xI_j - T_j) = p_j^{s_j}$$

و در این حالت s_j بعد W_j است. بنابراین $f = \prod_j p_j^{s_j}$ حال می‌توانیم f را با همین

روش و با استفاده از مؤلفه‌های اولیه V' تحت T' هم محاسبه کنیم. چون p_1, \dots, p_k سازه‌های اول متمایزی هستند، از یکتایی تجزیه به سازه‌های اول f نتیجه می‌شود که دقیقاً k مؤلفه اولیه W'_j ($1 \leq j \leq k$) از V' تحت T' وجود دارد و این مؤلفه‌ها را می‌توان طوری نمایه‌گذاری کرد که p_j ، چندجمله‌ای مینیمال برای T'_j ، تحدید T' به W'_j باشد. اگر $p_j = x - c_j$ آنگاه $T_j = c_j I_j$ و $T'_j = c_j I'_j$ که در آن I'_j عملگر همانی روی W'_j است. در این حالت بدیهی است که T_j هم‌ارزیکانی با T'_j است. اگر مانند بالا $p_j = (x - a_j)^2 + b_j^2$ آنگاه با استفاده از لم قضیه ۲۰، دوباره می‌بینیم که T_j هم‌ارزیکانی با T'_j است. پس، به‌ازای هر j دو پایه متعامدیکه \mathcal{B}_j و \mathcal{B}'_j بترتیب برای W_j و W'_j وجود دارد و به‌طوری که

$$[T_j]_{\mathcal{B}_j} = [T'_j]_{\mathcal{B}'_j}.$$

حال گیریم U تبدیل خطی از V در V' باشد که هر \mathcal{B}_j را بروی \mathcal{B}'_j می‌نگارد. در این صورت U تبدیلی یکتایی از V بروی V' است و $UTU^{-1} = T'$. \square

فرمهای دوخطی

۱.۱۰. فرمهای دوخطی

در این فصل فرمهای دوخطی روی فضاهاى بردارى با بعد متناهی را مورد بحث قرار می‌دهیم. احتمالاً خواننده بین برخی از مطالب و مباحث دترمینانها از فصل ۵ و موضوعهای ضربهای داخلی و فرمها از فصل ۸ و فصل ۹ وجه تشابهی مشاهده خواهد کرد. رابطه بین فرمهای دوخطی و ضربهای داخلی به وجه خاصی محکم است؛ با این وجود، در این فصل هیچ يك از مطالب فصلهای ۸ یا ۹ دانسته فرض نمی‌شود. خواننده‌ای که با ضربهای داخلی آشنا نباشد، حین مطالعه مبحث فرمهای دوخطی، اگر اولین بخش فصل ۸ را مطالعه کند احتمالاً بهره‌ای خواهد برد.

اولین بخش، فضای فرمهای دوخطی روی يك فضای بردارى n بعدی را مورد بحث قرار می‌دهد. ماتریس يك فرم دوخطی در پایه مرتب مفروضی معرفی و یکریختی بین فضای فرمها و فضای ماتریسهای $n \times n$ بنیان گذاشته می‌شود. رتبه يك فرم دوخطی تعریف می‌شود و فرمهای دوخطی ناتبهگون معرفی می‌شوند. بخش دوم به بحث روی فرمهای دوخطی متقارن و قطری کردن آنها می‌پردازد. بخش سوم فرمهای دوخطی متقارن کج را مورد بحث قرار می‌دهد. چهارمین بخش گروه حافظ يك فرم دوخطی ناتبهگون را با توجه خاصی نسبت به گروههای متعامد، گروههای شبه‌متعامد، و يك گروه شبه‌متعامد خاص - گروه لورنتس - به بحث می‌گذارد.

تعریف. گیریم V فضای برداری بردی هیأت F باشد. يك فرم دوخطی روی V تابعی چون f است که به هر جفت مرتب از بردارهای α و β در V يك اسکالر $f(\alpha, \beta)$ در F را تخصیص دهد و در شرایط زیر صدق کند.

$$\begin{aligned} f(c\alpha_1 + \alpha_2, \beta) &= cf(\alpha_1, \beta) + f(\alpha_2, \beta) \\ f(\alpha, c\beta_1 + \beta_2) &= cf(\alpha, \beta_1) + f(\alpha, \beta_2). \end{aligned} \quad (1-10)$$

اگر فرض کنیم $V \times V$ مجموعه‌همة جفتهای مرتب از بردارهای واقع در V را نشان دهد، این تعریف می‌تواند به شرح زیر هم بیان شود: يك فرم دوخطی روی V تابعی چون f از $V \times V$ در F است که به عنوان تابعی از هر يك از شناسه‌هایش، با شرط ثابت بودن دیگری، خطی باشد. واضح است که تابع صفر از $V \times V$ در F فرمی دوخطی است. این نیز درست است که هر ترکیب خطی از فرمهای دوخطی روی V خود فرمی دوخطی است. برای اثبات این مطلب، کافی است ترکیبات خطی از نوع $cf + g$ را که در آن f و g فرمهایی دوخطی روی V هستند در نظر بگیریم. اثبات این مطلب که $cf + g$ در (1-10) صدق می‌کند، شبیه بسیاری از اثباتهای دیگری است که قبلاً دیده‌ایم و از این رو آن را حذف می‌کنیم. همه این مطالب می‌تواند با گفتن اینکه مجموعه همه فرمهای دوخطی روی V زیرفضایی است از فضای همه توابع از $V \times V$ در F (مثال ۳ در فصل ۲) خلاصه شود. فضای فرمهای دوخطی روی V را با $L(V, V, F)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱. گیریم V يك فضای برداری بردی هیأت F باشد، و L_1 و L_2 تابعهایی خطی روی V باشند. f را با ضابطه

$$f(\alpha, \beta) = L_1(\alpha)L_2(\beta)$$

تعریف می‌کنیم. اگر β را ثابت نگاه داریم و f را به عنوان تابعی از α محسوب کنیم، آنگاه چیزی جز ضربی اسکالری از تابع خطی L_1 نخواهیم داشت. با ثابت بودن α ، f ضربی اسکالری از L_2 است. پس، واضح است که f فرمی دوخطی روی V است.

مثال ۲. فرض کنیم m و n اعدادی صحیح مثبت باشند، و F يك هیأت باشد. V را فضای برداری همه ماتریسهای $m \times n$ بر روی F و A را ماتریس $m \times m$ ثابتی بر روی F می‌گیریم. تابع f_A را چنین تعریف می‌کنیم

$$f_A(X, Y) = \text{tr}(X^t AY).$$

در این صورت f_A فرمی دوخطی روی V است. زیرا، اگر X, Y ، و Z سه ماتریس $m \times n$ بر روی F باشند،

$$\begin{aligned} f_A(cX + Z, Y) &= \text{tr}[(cX + Z)^t AY] \\ &= \text{tr}(cX^t AY) + \text{tr}(Z^t AY) \\ &= cf_A(X, Y) + f_A(Z, Y). \end{aligned}$$

در اینجا از این مطلب که عمل تراننش و تابع ردخطی هستند استفاده شده است. نشان دادن اینکه f_A به عنوان تابعی از شناسهٔ دومش خطی است از این هم ساده تر است. در حالت خاص $n=1$ ، ماتریس $X^t AY$ يك دريك، یعنی يك اسكالر است و فرم دوخطی چیزی جز

$$f_A(X, Y) = X^t AY \\ = \sum_i \sum_j A_{ij} x_i y_j$$

نیست. بزودی نشان خواهیم داد که هر فرم دوخطی روی فضای ماتریسهای $1 \times m$ از این نوع است، یعنی به ازای ماتریسی $m \times m$ چون A برابر f_A است.

مثال ۳. گیریم F يك هیأت باشد. می خواهیم همهٔ فرمهای دوخطی روی فضای F^2 را بیابیم. فرض کنیم f يك چنین فرم دوخطی باشد. اگر $\alpha = (x_1, x_2)$ و $\beta = (y_1, y_2)$ بردارهایی از F^2 باشند، آنگاه

$$f(\alpha, \beta) = f(x_1 \epsilon_1 + x_2 \epsilon_2, \beta) \\ = x_1 f(\epsilon_1, \beta) + x_2 f(\epsilon_2, \beta) \\ = x_1 f(\epsilon_1, y_1 \epsilon_1 + y_2 \epsilon_2) + x_2 f(\epsilon_2, y_1 \epsilon_1 + y_2 \epsilon_2) \\ = x_1 y_1 f(\epsilon_1, \epsilon_1) + x_1 y_2 f(\epsilon_1, \epsilon_2) + x_2 y_1 f(\epsilon_2, \epsilon_1) \\ + x_2 y_2 f(\epsilon_2, \epsilon_2).$$

پس، f به طور کامل توسط چهار اسكالر $A_{ij} = f(\epsilon_i, \epsilon_j)$ ، بنا بر

$$f(\alpha, \beta) = A_{11} x_1 y_1 + A_{12} x_1 y_2 + A_{21} x_2 y_1 + A_{22} x_2 y_2 \\ = \sum_{i,j} A_{ij} x_i y_j$$

تعیین می شود.

اگر X و Y ماتریسهای مختصات α و β و A ماتریس 2×2 با درایه های $A(i, j) = A_{ij} = f(\epsilon_i, \epsilon_j)$ باشد، آنگاه

$$f(\alpha, \beta) = X^t AY. \quad (2-10)$$

در مثال ۲ مشاهده کردیم که اگر A ماتریسی 2×2 بر روی F باشد، آنگاه (۲-۱۰) فرمی دوخطی روی F^2 تعریف می کند. می بینیم که فرمهای دوخطی روی F^2 ، دقیقاً آنهایی هستند که از ماتریسی 2×2 طبق (۲-۱۰) به دست می آیند.

بحث مثال ۳ را می توان برای تشریح همهٔ فرمهای دوخطی روی يك فضای برداری با بعد متناهی تعمیم داد. گیریم V يك فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأت F و $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایهٔ مرتبی برای V باشد. فرض کنیم f فرمی دوخطی روی V باشد.

اگر

$$\beta = y_1 \alpha_1 + \dots + y_n \alpha_n \quad \text{و} \quad \alpha = x_1 \alpha_1 + \dots + x_n \alpha_n$$

بردارهایی از V باشند، آنگاه

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) &= f\left(\sum_i x_i \alpha_i, \beta\right) \\ &= \sum_i x_i f(\alpha_i, \beta) \\ &= \sum_i x_i f\left(\alpha_i, \sum_j y_j \alpha_j\right) \\ &= \sum_i \sum_j x_i y_j f(\alpha_i, \alpha_j). \end{aligned}$$

اگر فرض کنیم $A_{ij} = f(\alpha_i, \alpha_j)$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) &= \sum_i \sum_j A_{ij} x_i y_j \\ &= X^t A Y \end{aligned}$$

که در آن X و Y ماتریسهای مختصات α و β در پایه مرتب \mathcal{B} هستند، پس، هر فرم دوخطی روی V ، به ازای ماتریس $n \times n$ چون A بر روی F از نوع

$$f(\alpha, \beta) = [\alpha]_{\mathcal{B}}^t A [\beta]_{\mathcal{B}} \quad (3-10)$$

است. بعکس، اگر ماتریس $n \times n$ مانند A داده شده باشد، به سبب سهولت دیده می شود که (3-10) فرمی دوخطی چون f روی V تعریف می کند و $A_{ij} = f(\alpha_i, \alpha_j)$.

تعریف. گیریم V فضای برداری با بعد متناهی و $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه مرتبی برای V باشد. اگر f فرمی دوخطی روی V باشد، ماتریس f در پایه مرتب \mathcal{B} عبارت است از ماتریس A $n \times n$ با درایه های $A_{ij} = f(\alpha_i, \alpha_j)$. گاهی این ماتریس را با $[f]$ نشان خواهیم داد.

قضیه ۱. گیریم V فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأت F باشد. به ازای هر پایه مرتب \mathcal{B} از V تا بمی که به هر فرم دوخطی روی V ماتریسش در پایه مرتب \mathcal{B} را مربوط سازد، یک یکریختی از فضای $L(V, V, F)$ بر روی فضای ماتریسهای $n \times n$ بر روی هیأت F است.

اثبات. قبلاً دیدیم که $f \rightarrow [f]_{\mathcal{B}}$ تناظری یک به یک بین مجموعه فرمهای دوخطی روی V و مجموعه همه ماتریسهای $n \times n$ بر روی F است. اینکه این تناظر تبدیلی خطی است، مطلبی است که به آسانی دیده می شود، زیرا به ازای هر z و j

$$(cf + g)(\alpha_i, \alpha_j) = cf(\alpha_i, \alpha_j) + g(\alpha_i, \alpha_j).$$

و این چیزی نیست جز

$$[cf + g]_{\mathcal{B}} = c[f]_{\mathcal{B}} + [g]_{\mathcal{B}}. \square$$

نتیجه. اگر $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ پایه مرتبی برای V و $\mathcal{B}^* = \{L_1, \dots, L_n\}$ پایه دوگان برای V^* باشد، آنگاه n^2 فرم دوخطی

$$f_{ij}(\alpha, \beta) = L_i(\alpha)L_j(\beta), \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq n$$

پایه‌ای برای فضای $L(V, V, F)$ تشکیل می‌دهند. بویژه، بعد $L(V, V, F)$ برابر n^2 است.

اثبات. پایه دوگان $\{L_1, \dots, L_n\}$ اساساً بنا بر این واقعیت که $L_i(\alpha)$ (به‌ازای هر α در V) i مین مختص α در پایه مرتب \mathcal{B} است تعریف می‌شود. حال توابع f_{ij} تعریف شده توسط

$$f_{ij}(\alpha, \beta) = L_i(\alpha)L_j(\beta)$$

فرمهای دوخطی از نوع بررسی شده در مثال ۱ هستند. اگر

$$\beta = y_1\alpha_1 + \dots + y_n\alpha_n \quad \text{و} \quad \alpha = x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n$$

آنگاه

$$f_{ij}(\alpha, \beta) = x_i y_j.$$

گیریم f فرمی دوخطی روی V و A ماتریس f در پایه مرتب \mathcal{B} باشد. در این صورت

$$f(\alpha, \beta) = \sum_{i,j} A_{ij} x_i y_j$$

که چیزی جز

$$f = \sum_{i,j} A_{ij} f_{ij}$$

نیست. اکنون واضح است که n^2 فرم f_{ij} پایه‌ای برای $L(V, V, F)$ تشکیل می‌دهند. \square

اثبات این نتیجه را می‌توان به‌صورت ذیل هم بیان کرد. فرم دوخطی f_{ij} «یکه» ماتریسی E^{ij} را که تنها درایه غیر صفرش يك در سطر i و ستون j است، به‌عنوان ماتریس خود در پایه مرتب \mathcal{B} دارد. چون این یکه‌های ماتریسی پایه‌ای برای فضای ماتریسهای $n \times n$ بنا می‌کنند، فرمهای f_{ij} يك پایه برای فضای فرمهای دوخطی تشکیل می‌دهند.

مفهوم ماتریس يك فرم دوخطی در يك پایه مرتب، مشابه با مفهوم ماتریس يك عملگر خطی در يك پایه مرتب است. درست نظیر عملگرهای خطی، علاقه‌مندیم تغییرات حاصل در ماتریس نمایش يك فرم دوخطی را هنگامی که پایه مرتبی به پایه مرتب دیگری تغییر

می یابد بدانیم. لذا فرض می کنیم $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ و $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$ دو پایه مرتب برای V و f فرمی دوخطی روی V باشد. ماتریسهای $[f]_{\mathcal{B}}$ و $[f]_{\mathcal{B}'}$ چه رابطه ای با یکدیگر دارند؟ خوب، P را ماتریس $n \times n$ (معکوس پذیری) می گیریم که به ازای هر α در V

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'}$$

به بیان دیگر، P را به وسیله

$$\alpha'_j = \sum_{i=1}^n P_{ij} \alpha_i$$

تعریف می کنیم. به ازای هر دو بردار α و β در V

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) &= [\alpha]_{\mathcal{B}}' [f]_{\mathcal{B}} [\beta]_{\mathcal{B}} \\ &= (P[\alpha]_{\mathcal{B}'})' [f]_{\mathcal{B}} P[\beta]_{\mathcal{B}} \\ &= [\alpha]_{\mathcal{B}'}' (P' [f]_{\mathcal{B}} P) [\beta]_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

بنابر تعریف و یکنایی ماتریسی که f را در پایه مرتب \mathcal{B}' نمایش می دهد، باید داشته باشیم

$$[f]_{\mathcal{B}'} = P' [f]_{\mathcal{B}} P. \quad (۴-۱۰)$$

مثال ۴. گیریم V فضای برداری R^2 باشد. فرض می کنیم f فرمی دوخطی باشد

که روی $\alpha = (x_1, x_2)$ و $\beta = (y_1, y_2)$ بنا بر

$$f(\alpha, \beta) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2$$

تعریف شود. در این صورت

$$f(\alpha, \beta) = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

ولذا ماتریس f در پایه مرتب استاندارد $\mathcal{B} = \{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ عبارت است از

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

فرض می کنیم $\mathcal{B}' = \{\epsilon'_1, \epsilon'_2\}$ پایه مرتب تعریف شده توسط $(1, -1)$ و $(1, 1)$ $\epsilon'_1 = (1, 1)$ باشد. در این حالت ماتریس P که مختصات را از \mathcal{B}' به \mathcal{B} تغییر می دهد عبارت است از

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

پس

$$[f]_{\mathcal{B}'} = P' [f]_{\mathcal{B}} P$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

معنی این نمایش ماتریسی آن است که اگر بردارهای α و β را به وسیله مختصاتشان در پایه \mathcal{B}' همچون

$$\alpha = x'_1 \epsilon'_1 + x'_2 \epsilon'_2 \quad \text{و} \quad \beta = y'_1 \epsilon'_1 + y'_2 \epsilon'_2$$

بیان کنیم، آنگاه

$$f(\alpha, \beta) = 4x'_2 y'_2.$$

نتیجه‌ای از فرمول تغییر پایه (۴-۱۰) مطلب زیر است:

اگر A و B ماتریسهایی $n \times n$ باشند که فرم دوخطی مشخصی روی V را در (احتمالاً) پایه‌های مرتب مختلفی نمایش دهند، آنگاه A و B دارای یک رتبه هستند. زیرا، اگر P ماتریس $n \times n$ معکوس‌پذیری باشد و $B = P' A P$ ، بدیهی است که A و B دارای یک رتبه هستند. این مطلب به ما امکان می‌دهد که رتبه یک فرم دوخطی روی V را به عنوان رتبه هر ماتریسی که آن فرم را در پایه مرتبی برای V نمایش می‌دهد، تعریف کنیم.

بهبتر است تعریفی طبیعی‌تر برای رتبه یک فرم دوخطی ارائه کنیم. این کار را می‌توان به شرح زیر انجام داد: فرض کنیم f فرمی دوخطی روی فضای برداری V باشد. اگر برداری چون α را در V ثابت نگه داریم، آنگاه $f(\alpha, \beta)$ به عنوان تابعی از β خطی است. بدین طریق، هر α ثابت، تابعی خطی روی V تعیین می‌کند. این تابع خطی را با $L_f(\alpha)$ نشان می‌دهیم. خلاصه می‌کنیم: اگر α بردار دلخواهی از V باشد، آنگاه $L_f(\alpha)$ آن تابع خطی روی V است که مقدار آن روی هر بردار β برابر $f(\alpha, \beta)$ است. این مطلب تبدیلی چون $L_f(\alpha) \rightarrow \alpha$ از V در فضای دوگان V^* را به دست می‌دهد. چون

$$f(c\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = cf(\alpha_1, \beta) + f(\alpha_2, \beta)$$

می بینیم که

$$L_f(c\alpha_1 + \alpha_2) = cL_f(\alpha_1) + L_f(\alpha_2)$$

یعنی، L_f تبدیلی خطی از V در V^* است.

به طریقی مشابه، f تبدیلی خطی چون R_f از V در V^* را تعیین می کند. به ازای هر β ثابتی از V ، $f(\alpha, \beta)$ به عنوان تابعی از α خطی است. $R_f(\beta)$ را آن تابع خطی روی V تعریف می کنیم که مقدار آن روی بردار α برابر $f(\alpha, \beta)$ باشد.

قضیه ۲. گیریم f فرمی دوخطی روی فضای برداری بعد متناهی V باشد. فرض کنیم

$$L_f \circ R_f \text{ تبدیلهای خطی از } V \text{ در } V^* \text{ تعریف شده توسط } (R_f \beta)(\alpha) = f(\alpha, \beta) = L_f(\alpha)(\beta) \text{ باشند. در این صورت دتبه } (R_f) = \text{دتبه } (L_f).$$

اثبات. می توان اثباتی «مستقل از مختصات» برای این قضیه ارائه داد. چنین اثباتی شبیه به اثبات این مطلب (در بخش ۷.۳) است که رتبه سطری هر ماتریس برابر رتبه ستونی آن است. لذا، در اینجا اثباتی را عرضه می کنیم که با انتخاب يك دستگاه مختصات (پایه) به پیش می رود و سپس از قضیه «رتبه سطری برابر رتبه ستونی است» استفاده می شود.

برای اینکه، ثابت کنیم رتبه $(R_f) = \text{رتبه } (L_f)$ ، کافی است ثابت کنیم که L_f و R_f دارای بوجی مساوی هستند. گیریم B پایه مرتبی برای V باشد و $A = [f]_{\mathcal{B}}$. اگر α و β دو بردار در V با ماتریسهای مختصات X و Y در پایه مرتب B باشند، آنگاه $f(\alpha, \beta) = X^t A Y$ حال $R_f(\beta) = 0$ بدین معنی است که به ازای هر α در V ، $f(\alpha, \beta) = 0$ ؛ یعنی، به ازای هر ماتریسی $1 \times n$ چون X ، $X^t A Y = 0$. شرایط اخیر چیزی جز $A Y = 0$ نیست. بنابراین، بوجی R_f برابر است با بعد فضای جوابهای $A Y = 0$.

به طور مشابه، اگر $L_f(\alpha) = 0$ و تنها اگر به ازای هر ماتریسی $n \times 1$ چون Y ، $X^t A Y = 0$ ، پس α در فضای بوج L_f است اگر و تنها اگر $X^t A = 0$ ؛ یعنی، $A^t X = 0$. بنابراین، بوجی L_f برابر است با بعد فضای جوابهای $A^t X = 0$ چون ماتریسهای A و A^t دارای رتبه های ستونی مساوی هستند، می بینیم که

$$\square \text{ بوجی } (R_f) = \text{بوجی } (L_f)$$

تعریف. اگر f فرمی دوخطی روی فضای بعد متناهی V باشد، رتبه f عبارت است از عدد صحیح $r = \text{رتبه } (R_f) = \text{رتبه } (L_f)$.

نتیجه ۰۱. رتبه هر فرم دوخطی برابر است با رتبه ماتریس آن فرم در پایه مرتب.

نتیجه ۰۲. اگر f فرمی دوخطی روی فضای برداری n بعدی V باشد، احکام زیر

هم درز هستند:

(الف) $n = \text{رتبه}(f)$.(ب) به ازای هر بردار غیر صفر α در V ، β بی در V وجود دارد که $f(\alpha, \beta) \neq 0$.(پ) به ازای هر بردار غیر صفر β در V ، α بی در V وجود دارد که $f(\alpha, \beta) \neq 0$.اثبات. حکم (ب) چیزی جز این نیست که فضای پوچ L_f زیر فضای صفر است.حکم (پ) نیز حاکی است که فضای پوچ R_f زیر فضای صفر است. تبدیلهای خطی L_f و R_f دارای پوچی ۰ هستند اگر و تنها اگر دارای رتبه n باشند، یعنی اگر و تنها اگر $n = \text{رتبه}(f)$. \square تعریف. فرمی دوخطی چون f روی یک فضای برداری V ناتبهگون (یا نامنفرد) نامیده می‌شود، هرگاه در شرایط (ب) و (پ) نتیجه ۲ صدق کند.اگر V با بعد متناهی باشد، آنگاه f ناتبهگون است به شرط آنکه f در یکی از سه شرط نتیجه ۲ صدق کند. بخصوص f ناتبهگون (نامنفرد) است اگر و تنها اگر ماتریس آن در (هر) پایه مرتبی برای V یک ماتریس نامنفرد باشد.مثال ۵. گیریم $V = R^n$ و f فرمی دوخطی باشد که به ازای $\alpha = (x_1, \dots, x_n)$ و $\beta = (y_1, \dots, y_n)$ توسط

$$f(\alpha, \beta) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

تعریف می‌شود. در این صورت f یک فرم دوخطی ناتبهگون روی R^n است. ماتریس f در پایه مرتب استاندارد عبارت است از ماتریس همانی $n \times n$:

$$f(X, Y) = X^t Y.$$

این f ، معمولاً ضرب نقطه‌ای (یا اسکالری) نامیده می‌شود. خواننده احتمالاً با این فرم دوخطی، دست کم در حالت $n = 3$ آشنا باشد. از نظر هندسی، عدد $f(\alpha, \beta)$ عبارت است از حاصل ضرب طول α در طول β در کسینوس زاویه بین α و β . بخصوص، $f(\alpha, \beta) = 0$ اگر و تنها اگر بردارهای α و β متعامد (عمود بر هم) باشند.

تمرین

۱. کدامیک از توابع f در زیر تعریف شده روی بردارهای $\alpha = (x_1, x_2)$ و $\beta = (y_1, y_2)$ در R^2 فرمهایی دوخطی هستند؟

$$f(\alpha, \beta) = 1 \quad (\text{الف})$$

$$f(\alpha, \beta) = (x_1 - y_1)^2 + x_2 y_2 \quad (\text{ب})$$

$$f(\alpha, \beta) = (x_1 + y_1)^2 - (x_1 - y_1)^2 \quad (\text{پ})$$

$$f(\alpha, \beta) = x_1 y_2 - x_2 y_1 \quad (\text{ت})$$

۲. فرض کنید f فرمی دوخطی روی R^2 تعریف شده توسط

$$f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 x_2$$

باشد. ماتریس f را در هر يك از پایه‌های زیر بیابید:

$$\{(1, 0), (0, 1)\}, \{(1, -1), (1, 1)\}, \{(1, 2), (3, 4)\}.$$

۳. فرض کنید V فضای همهٔ ماتریسهای 2×3 بر روی R و f فرمی دوخطی روی V تعریف شده توسط $f(X, Y) = \text{tr}(X^t A Y)$ باشد و

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

مطلوب است ماتریس f در پایهٔ مرتب

$$\{E^{11}, E^{12}, E^{13}, E^{21}, E^{22}, E^{23}\}$$

که در آن E^{ij} ماتریسی است که تنها درایهٔ غیر صفرش يك 1 در سطر i و ستون j است.

۴. همهٔ فرمهای دوخطی f روی R^2 را با این خاصیت که به ازای هر α و β ، $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$ به طور صریح توصیف کنید.

۵. فرمهای دوخطی روی R^2 را که به ازای همهٔ α ها و β ها در $f(\alpha, \beta) = -f(\beta, \alpha)$ صدق می‌کنند توصیف کنید.

۶. فرض کنید n عددی صحیح مثبت و V فضای همهٔ ماتریسهای $n \times n$ بر روی هیأت اعداد مختلط باشد. نشان دهید معادلهٔ

$$f(A, B) = n \text{tr}(AB) - \text{tr}(A) \text{tr}(B)$$

فرمی دوخطی چون f روی V تعریف می‌کند. آیا این درست است که به ازای هر A و B ، $f(A, B) = f(B, A)$ ؟

۷. فرض کنید f فرم دوخطی تعریف شده در تمرین ۶ باشد. نشان دهید که f تبهگون (غیر ناتبهگون) است. فرض کنید V_1 زیرفضایی از V متشکل از ماتریسهای با رد 0 و f_1 تحدید f روی V_1 باشد. نشان دهید که f_1 ناتبهگون است.

۸. فرض کنید f فرم دوخطی تعریف شده در تمرین ۶ و V_1 زیرفضای V متشکل از همهٔ ماتریسهای A باشد که $\text{tr}(A) = 0$ و $A^* = -A$ (تسرا نهادة مزدوج A است). تحدید f روی V_1 را با f_1 نشان می‌دهیم. ثابت کنید که f_1 معین منفی است، یعنی به ازای هر A غیر صفر در V_1 ، $f_1(A, A) < 0$.

۹. فرض کنید f فرم دوخطی تعریف شده در تمرین ۶ باشد. فرض کنید W مجموعه همه ماتریسهای A در V باشد که به ازای هر B ، $f(A, B) = 0$ نشان دهد W زیرفضایی از V است. W را به طور صریح توصیف کنید و سپس آن را بیابید.

۱۰. فرض کنید f فرمی دوخطی روی یک فضای برداری بعد متناهی V و W زیرفضای متشکل از همه β هایی باشد که به ازای هر α ، $f(\alpha, \beta) = 0$ نشان دهد

$$\text{بعد}(W) - \text{بعد}(V) = \text{رتبه}(f).$$

این نتیجه و نتیجه تمرین ۹ را به کار گیرید تا رتبه فرم دوخطی تعریف شده در تمرین ۶ را محاسبه کنید.

۱۱. فرض کنید f فرمی دوخطی روی یک فضای برداری بعد متناهی V باشد. فرض کنید V_1 زیرفضایی از V باشد با این خاصیت که تحدید f روی V_1 ناتبهگون است. نشان دهید بعد $(V_1) \geq \text{رتبه}(f)$.

۱۲. فرض کنید f و g فرمهایی دوخطی روی یک فضای برداری بعد متناهی V باشند. فرض کنید g نامنفرد باشد. نشان دهید که عملگرهای خطی یکنایی چون T_1, T_2 روی V وجود دارند که به ازای هر α و β

$$f(\alpha, \beta) = g(T_1\alpha, \beta) = g(\alpha, T_2\beta).$$

۱۳. نشان دهید که اگر g منفرد باشد، لزوماً نتیجه به دست آمده در تمرین ۱۲ درست نیست.

۱۴. فرض کنید f فرمی دوخطی روی یک فضای برداری بعد متناهی V باشد. نشان دهید f می تواند به صورت حاصل ضربی از دو تابع خطی بیان شود (یعنی، به ازای L_1 و L_2 در V^* ، $f(\alpha, \beta) = L_1(\alpha)L_2(\beta)$) اگر و تنها اگر f دارای رتبه ۱ باشد.

۲.۱۰. فرمهای دوخطی متقارن

هدف اصلی این بخش، پاسخگویی به سؤال زیر است: اگر f فرمی دوخطی روی فضای برداری بعد متناهی V باشد، چه وقت پایه مرتبی چون \mathcal{B} برای V وجود دارد که در آن f توسط ماتریسی قطری نمایش داده می شود؟ ثابت می کنیم که این امر امکان پذیر است اگر و تنها اگر f فرم دوخطی مقارنی باشد، یعنی $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$. قضیه تنها وقتی ثابت می شود که هیأت اسکالری سرشت نمای صفر داشته باشد، بدین معنی که اگر n عدد صحیح مثبتی باشد، مجموع $1 + \dots + 1$ (ن بار) در F صفر نباشد.

تعریف. گیریم f فرمی دوخطی روی فضای برداری V باشد. گوئیم f متقارن است

هرگاه به ازای همه بردارهای α, β در V $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$.

اگر V با بعد متناهی باشد، فرم دوخطی f متقارن است اگر و تنها اگر ماتریس آن، A ، در یک (یا هر) پایه مرتب، متقارن باشد: $A' = A$. برای اثبات این مطلب، باید بررسی کنیم که چه وقت فرم دوخطی

$$f(X, Y) = X'AY$$

مقارن است. این فرم متقارن است اگر و تنها اگر به ازای همه ماتریسهای ستونی X و Y ، $X'AY = Y'AX$ چون ماتریسی یک در یک است، داریم $X'AY = Y'A'X$. پس، f متقارن است اگر و تنها اگر به ازای هر X و Y ، $Y'A'X = Y'AX$ واضح است که این دقیقاً بدین معنی است که $A = A'$. بخصوص، باید توجه کرد که اگر پایه مرتبی برای V وجود داشته باشد، که در آن f توسط ماتریسی قطری نمایش داده شود، آنگاه f متقارن است؛ زیرا هر ماتریس قطری یک ماتریس متقارن است.

اگر f فرم دوخطی متقارنی باشد، فرم درجه دوم وابسته به f ، عبارت است از تابع q از V در F تعریف شده توسط

$$q(\alpha) = f(\alpha, \alpha).$$

اگر F زیرحیاتی از اعداد مختلط باشد، فرم دوخطی متقارن f به طور کامل توسط فرم درجه دوم وابسته اش، طبق اتحاد قطبی

$$f(\alpha, \beta) = \frac{1}{4}q(\alpha + \beta) - \frac{1}{4}q(\alpha - \beta) \quad (5-10)$$

تعیین می شود. اثبات (5-10) محاسبه ای عادی است که آن را حذف می کنیم. اگر f فرم درجه دوم ضرب نقطه ای در مثال 5 باشد، فرم درجه دوم وابسته به آن عبارت است از

$$q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

به بیان دیگر، $q(\alpha)$ مجذور طول α است. برای فرم دوخطی $f_A(X, Y) = X'AY$ فرم درجه دوم وابسته عبارت است از

$$q_A(X) = X'AX = \sum_{i,j} A_{ij}x_i x_j.$$

یکی از رده های مهم فرمهای دوخطی متقارن، رده ضربهای داخلی روی فضاها برداری حقیقی هستند که در فصل 8 مورد بحث قرار گرفت. اگر V یک فضای برداری حقیقی باشد، یک ضرب داخلی روی V فرم دوخطی متقارنی چون f روی V است که در شرط

$$f(\alpha, \alpha) > 0, \alpha \neq 0 \quad (6-10)$$

صدق می کند. هر فرم دوخطی که در (6-10) صدق کند، معین مثبت نامیده می شود. پس، هر ضرب داخلی روی یک فضای برداری حقیقی، یک فرم دوخطی متقارن معین مثبت روی

آن فضا است. توجه کنید که هر ضرب داخلی ناتبهگون است. دو بردار α و β نسبت به ضرب داخلی f متعامد نامیده می‌شوند، هر گاه $f(\alpha, \beta) = 0$. فرم درجه دوم $q(\alpha) = f(\alpha, \alpha)$ تنها مقادیر نامنفی را می‌پذیرد و غالباً به عنوان مجذور طول α در نظر گرفته می‌شود. بدیهی است که مفاهیم طول و تعامد، از مهمترین مثال ضربهای داخلی - ضرب نقطه‌ای در مثال ۵- ریشه می‌گیرند.

اگر f فرم دوخطی متقارنی روی يك فضای برداری V باشد، مناسب است برخی از اصطلاحات ضربهای داخلی را برای f هم به کار ببریم. بویژه مناسب است بگوییم که α و β نسبت به f متعامدند، هر گاه $f(\alpha, \beta) = 0$. مصلحت نیست که $f(\alpha, \alpha)$ به عنوان مجذور طول α در نظر گرفته شود؛ برای مثال، اگر V يك فضای برداری مختلط باشد، ممکن است داشته باشیم $f(\alpha, \alpha) = \sqrt{-1}$ یا روی يك فضای برداری حقیقی داشته باشیم $f(\alpha, \alpha) = -2$.

اکنون به قضیه اساسی این بخش می‌پردازیم. در خواندن اثبات، تجسم حالت خاصی که در آن V يك فضای برداری حقیقی و f ضربی داخلی روی V باشد به خواننده کمک خواهد کرد.

قضیه ۳. فرض کنیم V يك فضای برداری با بعد متناهی بردوی هیأتی با سرشت - نمای صفر و f فرم دوخطی متقارنی روی V باشد. در این صورت پایه مرتبی برای V وجود دارد که در آن f توسط ماتریسی قطری نمایش داده می‌شود. اثبات. آنچه را که باید بیابیم پایه مرتبی چون

$$B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

است که به ازای $i \neq j$ ، $f(\alpha_i, \alpha_j) = 0$ ، اگر $f = 0$ یا $n = 1$ ، قضیه به‌طور بدیهی درست است. پس می‌توان فرض کرد که $f \neq 0$ و $n > 1$. اگر به ازای هر α در V ، $f(\alpha, \alpha) = 0$ ، فرم درجه دوم وابسته q متحداً 0 است و اتحاد قطبی (۱۰-۵) نشان می‌دهد که $f = 0$. پس در V برداری چون α وجود دارد که $f(\alpha, \alpha) = q(\alpha) \neq 0$. بگیریم W زیرفضایی يك بعدی از V باشد که توسط α پدید می‌آید و W^\perp مجموعه همه بردارهای β در V که $f(\alpha, \beta) = 0$ است. اکنون ادعا می‌کنیم که $V = W \oplus W^\perp$. به‌طور یقین زیرفضاهای W و W^\perp مستقل هستند. يك بردار نمونه در W ، $c\alpha$ است که در آن $f(c\alpha, c\alpha) = c^2 f(\alpha, \alpha) = 0$ نیز باشد، آنگاه $c\alpha$ در W^\perp نیز باشد. اگر $c\alpha$ در W و W^\perp همزمان باشد، پس $c = 0$. همچنین، هر بردار در V مجموع برداری در W و برداری در W^\perp است. زیرا، فرض کنیم γ برداری دلخواه در V باشد، قرار می‌دهیم

$$\beta = \gamma - \frac{f(\gamma, \alpha)}{f(\alpha, \alpha)} \alpha.$$

$$f(\alpha, \beta) = f(\alpha, \gamma) - \frac{f(\gamma, \alpha)}{f(\alpha, \alpha)} f(\alpha, \alpha)$$

و چون f متقارن است، $f(\alpha, \beta) = 0$ پس، β در زیر فضای W^\perp قرار دارد. عبارت

$$\gamma = \frac{f(\gamma, \alpha)}{f(\alpha, \alpha)} \alpha + \beta$$

نشان می‌دهد که $V = W + W^\perp$.

تحدید f روی W^\perp فرم دوخطی متقارن روی W^\perp است. چون W^\perp دارای بعد $(n-1)$ است می‌توانیم بنا به استقرا فرض کنیم که W^\perp دارای پایه‌ای چون $\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ است که

$$f(\alpha_i, \alpha_j) = 0, \quad i \neq j (i \geq 2, j \geq 2)$$

با قراردادن $\alpha_1 = \alpha$ ، پایه‌ای چون $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ برای V به دست می‌آید و به ازای $i \neq j$ داریم $f(\alpha_i, \alpha_j) = 0$. \square

نتیجه. گیریم F زیر هیأتی از اعداد مختلط و A ماتریس $n \times n$ متقارنی بر روی F باشد. در این صورت ماتریس $n \times n$ معکوس‌پذیری چون P بر روی F وجود دارد که $P^t A P$ قطری است.

در حالتی که F هیأت اعداد حقیقی باشد، ماتریس معکوس‌پذیر P در این نتیجه را می‌توان ماتریسی متعامد انتخاب کرد. بدین معنی که $P^t = P^{-1}$. به بیان دیگر، اگر A یک ماتریس $n \times n$ متقارن حقیقی باشد، یک ماتریس متعامد حقیقی چون P وجود دارد که $P^t A P$ قطری است؛ لکن، این مطلب به هیچ وجه از آنچه در بالا انجام شد آشکار نیست (فصل ۸ را ببینید).

قضیه ۴. گیریم V فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأت اعداد مختلط باشد. فرض کنیم f فرم دوخطی متقارنی روی V با رتبه r باشد. در این صورت برای V پایه مرتبی چون $\mathcal{B} = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ وجود دارد که (۱) ماتریس f در پایه مرتب \mathcal{B} قطری است

$$f(\beta_j, \beta_j) = \begin{cases} 1, & j = 1, \dots, r \\ 0, & j > r \end{cases} \quad (2)$$

اثبات. بنا بر قضیه ۳ پایه مرتبی چون $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ برای V وجود دارد که

$$f(\alpha_i, \alpha_j) = 0 \quad i \neq j$$

چون f دارای رتبه r است، رتبه ماتریس آن در پایه مرتب $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ نیز r است. پس، به ازای دقیقاً r مقدار j باید داشته باشیم $f(\alpha_j, \alpha_j) \neq 0$ با تغییر ترتیب بردارهای α_j ، می توان فرض کرد که

$$f(\alpha_j, \alpha_j) \neq 0, \quad j = 1, \dots, r$$

اکنون از این واقعیت استفاده می کنیم که هیأت اسکالرها همان هیأت اعداد مختلط است. اگر $\sqrt{f(\alpha_j, \alpha_j)}$ نشانگر یکی از ریشه های دوم (جذر) مختلط $f(\alpha_j, \alpha_j)$ باشد و اگر قرار دهیم

$$\beta_j = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{f(\alpha_j, \alpha_j)}} \alpha_j, & j = 1, \dots, r \\ \alpha_j, & j > r \end{cases}$$

آنگاه پایه $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ شرایط (۱) و (۲) را ارضا می کند. \square

بدیهی است، در صورتی که هیأت اسکالری زیر هیأتی از اعداد مختلط باشد که در آن هر عنصرش ریشه دومی داشته باشد، قضیه ۴ باز هم معتبر است. این قضیه مثلاً وقتی که هیأت اسکالری هیأت اعداد حقیقی باشد، معتبر نیست. روی هیأت اعداد حقیقی بجای قضیه ۴ قضیه زیر را داریم.

قضیه ۵. گیریم V یک فضای برداری n بعدی بر روی هیأت اعداد حقیقی و f فرم دوخطی متقارنی روی V با رتبه r باشد. در این صورت پایه مرتبی چون $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ برای V وجود دارد که در آن ماتریس f قطری است

$$f(\beta_j, \beta_j) = \pm 1, \quad j = 1, \dots, r.$$

بعلاوه تعداد بردارهای پایه ای β_j که به ازای آنها $f(\beta_j, \beta_j) = 1$ مستقل از انتخاب پایه است.

اثبات. پایه ای چون $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ برای V وجود دارد که

$$f(\alpha_i, \alpha_j) = 0, \quad i \neq j$$

$$f(\alpha_j, \alpha_j) \neq 0, \quad 1 \leq j \leq r$$

$$f(\alpha_j, \alpha_j) = 0, \quad j > r.$$

گیریم

$$\beta_j = |f(\alpha_j, \alpha_j)|^{-1/2} \alpha_j, \quad 1 \leq j \leq r$$

$$\beta_j = \alpha_j, \quad j > r.$$

آنگاه $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ پایه‌ای است با خواص مطلوب.

گیریم p تعداد بردارهای پایه‌ای β_j باشد که به ازای آنها $f(\beta_j, \beta_j) = 1$ ؛ نشان دهیم که عدد p مستقل از پایه‌ی خاصی است که ما آن را برگزیده‌ایم و در شرایط مذکور صدق می‌کند. گیریم V^+ زیرفضایی از V باشد که توسط بردارهای پایه‌ای β_j با شرط $f(\beta_j, \beta_j) = 1$ پدید می‌آید، و V^- زیرفضای پدید آمده توسط بردارهای پایه‌ای β_j باشد که به ازای آنها $f(\beta_j, \beta_j) = -1$ است. حال بعد $(V^+) = p$ ، پس باید یکتا بودن بعد V^+ را ثابت کنیم. سهولت دیده می‌شود که اگر α بردار غیرصفری از V^+ باشد، آنگاه $f(\alpha, \alpha) > 0$ ؛ به بیان دیگر، f روی زیرفضای V^+ معین مثبت است. به‌طور مشابه، اگر α برداری غیرصفر از V^- باشد، آنگاه $f(\alpha, \alpha) < 0$ ، یعنی f روی زیرفضای V^- معین منفی است. حال گیریم V^\perp زیرفضای پدید آمده توسط بردارهای پایه‌ای β_j باشد که به ازای آنها $f(\beta_j, \beta_j) = 0$ است. اگر α در V^\perp باشد، آنگاه به ازای هر β در V ، $f(\alpha, \beta) = 0$.

چون $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ پایه‌ای برای V است، داریم

$$V = V^+ \oplus V^- \oplus V^\perp.$$

علاوه بر این، ادعا می‌کنیم که اگر W زیرفضایی از V باشد که روی آن f معین مثبت است، آنگاه زیر فضاهای W^- ، V^- ، و V^\perp مستقل هستند. زیرا، فرض کنیم، α در W ، β در V^- ، و γ در V^\perp ، و $\alpha + \beta + \gamma = 0$ در این صورت

$$0 = f(\alpha, \alpha + \beta + \gamma) = f(\alpha, \alpha) + f(\alpha, \beta) + f(\alpha, \gamma)$$

$$0 = f(\beta, \alpha + \beta + \gamma) = f(\beta, \alpha) + f(\beta, \beta) + f(\beta, \gamma).$$

چون γ در V^\perp است $f(\alpha, \gamma) = f(\beta, \gamma) = 0$ ؛ و چون f متقارن است، داریم

$$0 = f(\alpha, \alpha) + f(\alpha, \beta)$$

$$0 = f(\beta, \beta) + f(\alpha, \beta)$$

پس، $f(\alpha, \alpha) = f(\beta, \beta)$ ، چون $f(\alpha, \alpha) \geq 0$ و $f(\beta, \beta) \leq 0$ نتیجه می‌گیریم که

$$f(\alpha, \alpha) = f(\beta, \beta) = 0.$$

ولی f روی W معین مثبت است و روی V^- معین منفی. نتیجه اینکه $\alpha = \beta = 0$ و از این رو γ نیز برابر صفر است.

چون

$$V = V^+ \oplus V^- \oplus V^\perp$$

و V^- ، V^\perp ، و V^+ مستقل هستند دیده می‌شود که بعد $(V^+) \leq$ بعد (W) ، یعنی اگر W زیرفضایی از V باشد که روی آن f معین مثبت است، بعد W نمی‌تواند از بعد V^+ تجاوز

کند. اگر \mathcal{B}_1 پایه مرتب دیگری برای V باشد و در شرایط قضیه صدق کند، زیرفضاهای متناظر V_1^+ ، V_1^- ، V_1^\perp را خواهیم داشت؛ و استدلال بالا نشان می‌دهد که بعد $(V^+) \leq (V_1^+)$ با وارونه کردن استدلال بعد $(V_1^+) \leq (V^+)$ را به دست می‌آوریم و نتیجتاً

$$(V^+) \text{ بعد} = (V_1^+) \text{ بعد}. \quad \square$$

باید نکات چندی را در رابطه با پایه $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ در قضیه ۵ و زیرفضاهای وابسته V^+ ، V^- ، V^\perp متذکر شویم. ابتدا، توجه کنید که V^\perp همان زیرفضای بردارهایی است که برهمه V «عمود» هستند. قریباً توضیح دادیم که V^\perp مشمول در این زیرفضاست؛ اما،

$$\text{رتبه}(f) - (V) \text{ بعد} = ((V^+) \text{ بعد} + (V^-) \text{ بعد}) - (V) \text{ بعد}$$

لذا هر بردار α که به ازای هر β داشته باشیم $f(\alpha, \beta) = 0$ باید در V^+ باشد. پس زیرفضای V^\perp یکتاست. زیرفضاهای V^+ و V^- یکتا نیستند؛ اما ابعاد آنها یکتا هستند. اثبات قضیه ۵ نشان می‌دهد که بعد (V^+) برابر است با بزرگترین بعد ممکن زیرفضاهایی که روی آنها f معین مثبت است. به طور مشابه بعد (V^-) برابر است با بزرگترین بعد زیرفضاهایی که روی آنها f معین منفی است. بدیهی است که

$$\text{رتبه}(f) = (V^+) \text{ بعد} + (V^-) \text{ بعد}$$

عدد

$$(V^+) \text{ بعد} - (V^-) \text{ بعد}$$

غالباً نشان f نامیده می‌شود. دلیل معرفی این اصطلاح این است که ابعاد V^+ و V^- از روی رتبه f و نشان f به سبب تعیین می‌شوند.

شاید بهتر باشد درباره رابطه بین فرمهای دوخطی متقارن روی فضاهای برداری حقیقی و ضربهای داخلی به نکته دیگری هم اشاره کنیم. فرض کنیم V فضای برداری حقیقی با بعد متناهی و V_1 ، V_2 ، V_3 زیرفضاهایی از V باشند که

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$$

فرض کنیم f_1 ضربی داخلی روی V_1 و f_2 ضربی داخلی روی V_2 باشد. در این صورت می‌توانیم فرم دوخطی متقارنی چون f روی V به شرح زیر تعریف کنیم: اگر α و β بردارهایی از V باشند، آنگاه به ازای α_j و β_j هایی از V می‌توان نوشت

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \quad \text{و} \quad \beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$$

گیریم

$$f(\alpha, \beta) = f_1(\alpha_1, \beta_1) - f_2(\alpha_2, \beta_2)$$

برای f زیر فضای V^\perp عبارت خواهد بود از V_3 ; برای f, V_1 يك V^+ مناسب است و V_2 يك V^- مناسب. يك قسمت از حکم قضیه ۵ این است که هر فرم دوخطی متقارن روی V ، به همین طریق پدید می آید. محتوای دیگر قضیه این است که هر ضرب داخلی را می توان در پایه مرتب معینی توسط ماتریس همانی نمایش داد.

تمرین

۰۱ عبارات زیر، فرمهای درجه دوم q روی R^2 را تعریف می کنند. فرم دوخطی متقارن f متناظر به هر q را بیابید.

$$ax_1^2 \quad (\text{الف}) \quad x_1^2 + 9x_2^2 \quad (\text{ث})$$

$$bx_1x_2 \quad (\text{ب}) \quad 3x_1x_2 - x_2^2 \quad (\text{ج})$$

$$cx_2^2 \quad (\text{پ}) \quad 4x_1^2 + 6x_1x_2 - 3x_2^2 \quad (\text{ح})$$

$$(ت) \quad 2x_1^2 - \frac{1}{3}x_1x_2$$

۰۲ ماتریس در پایه مرتب استاندارد و رتبه هر يك از فرمهای دوخطی تعیین شده در تمرین ۱ را بیابید. مشخص کنید که کداميك از این فرمها ناتبهگون هستند.

۰۳ فرض کنید $q(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$ فرم درجه دوم وابسته به فرم دوخطی متقارنی چون f روی R^2 باشد. نشان دهید f ناتبهگون است اگر و تنها اگر $b^2 - 4ac \neq 0$.

۰۴ فرض کنید V يك فضای برداری با بعد متناهی بر روی زیرهياتی چون F از اعداد مختلط و S مجموعه همه فرمهای دوخطی متقارن روی V باشد.
(الف) نشان دهید S زیرفضایی از $L(V, V, F)$ است.
(ب) بعد (S) را بیابید.

گیریم Q مجموعه همه فرمهای درجه دوم روی V باشد.

(پ) نشان دهید Q زیرفضایی از فضای همه توابع از V در F است.

(ت) بدون رجوع به هیچ پایه ای يك یکرختی چون T از Q بروی S را به طور

صریح توصیف کنید.

(ث) فرض کنید U عملگری خطی روی V و q عنصری از Q باشد. نشان دهید که

معادله $(U^+q)(\alpha) = q(U\alpha)$ فرم درجه دوم U^+q را روی V تعریف می کند.

(ج) اگر U عملگری خطی روی V باشد نشان دهید تابع U^+ که در بخش (ث)

تعریف شد عملگری خطی روی Q است. نشان دهید U^+ معکوس پذیر است اگر و تنها

اگر U معکوس پذیر باشد.

۵. فرض کنید q فرم درجه دوم روی R^2 تعریف شده توسط

$$q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2, \quad a \neq 0$$

باشد. عملگر خطی معکوس پذیری چون U روی R^2 بیابید که

$$(U^+q)(x_1, x_2) = ax_1^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)x_2^2.$$

(راهنمایی: برای یافتن U^{-1} (و در نتیجه U) مربع را کامل کنید. برای تعریف U^+ به قسمت (ث) تمرین ۴ رجوع کنید.)

۶. فرض کنید q فرم درجه دوم روی R^2 داده شده توسط

$$q(x_1, x_2) = 2bx_1x_2$$

باشد. عملگر خطی معکوس پذیری چون U روی R^2 بیابید که

$$(U^+q)(x_1, x_2) = 2bx_1^2 - 2bx_2^2$$

۷. فرض کنید q فرم درجه دوم روی R^3 داده شده توسط

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_3^2$$

باشد. عملگر خطی معکوس پذیری چون U روی R^3 بیابید که

$$(U^+q)(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2.$$

(راهنمایی: U را به صورت حاصل ضرب عملگرهایی شبیه به عملگرهای به کار گرفته شده در تمرینهای ۵ و ۶ بیان کنید.)

۸. فرض کنید A ماتریس $n \times n$ متقارنی بر روی R و q فرم درجه دوم روی R^n داده شده توسط

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} A_{ij}x_ix_j$$

باشد. روش به کار گرفته شده در تمرین ۷ را برای نشان دادن این مطلب که عملگر خطی معکوس پذیری چون U روی R^n وجود دارد که

$$(U^+q)(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n c_i x_i^2$$

تعمیم دهید. در اینجا c_i به ازای $i = 1, \dots, n$ برابر $1, -1, \dots$ یا 0 است.

۹. فرض کنید f فرم دوخطی مقارنی روی R^n باشد. نتیجه تمرین ۸ را برای اثبات وجود پایه مرتبی چون \mathcal{B} به نحوی که $[f]_{\mathcal{B}}$ قطری باشد به کار گیرید.

۱۰. فرض کنید V فضای برداری حقیقی همه ماتریسهای هرمیتی (مختلط) 2×2 باشد، یعنی ماتریسهای مختلط 2×2 بی چون A باشد که در $A_{ij} = \bar{A}_{ji}$ صدق می کنند. (الف) نشان دهید معادله $q(A) = \det A$ فرم درجه دوم q را روی V تعریف می کند.

(ب) فرض کنید W زیرفضایی از V متشکل از ماتریسهای با رد ۰ باشد. نشان دهید فرم دوخطی f تعیین شده توسط q روی W معین منفی است.

۱۱. فرض کنید V فضای برداری با بعد متناهی و f فرم دوخطی مقارن ناتبهگونی روی V باشد. نشان دهید که به ازای هر عملگر خطی T روی V عملگر خطی یکتایی چون T' روی V وجود دارد که به ازای هر α و β در V ، $f(T\alpha, \beta) = f(\alpha, T'\beta)$. همچنین نشان دهید که

$$(T_1 T_2)' = T_2' T_1'$$

$$(c_1 T_1 + c_2 T_2)' = c_1 T_1' + c_2 T_2'$$

$$(T')' = T.$$

بدون این فرض که T ناتبهگون است، چه مقدار از مطالب بالا معتبر است؟

۱۲. فرض کنید F یک هیأت و V فضای ماتریسهای $n \times 1$ بر روی F باشد. فرض کنید A ماتریس $n \times n$ ثابتی بر روی F و f فرم دوخطی تعریف شده توسط $f(X, Y) = X^t A Y$ روی V باشد. علاوه فرض کنید f مقارن و ناتبهگون باشد. فرض کنید B ماتریسی $n \times n$ بر روی F و T عملگری خطی روی V باشد که X را به BX می فرستد. عملگر T' در تمرین ۱۱ را بیابید.

۱۳. فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی و f فرم دوخطی مقارن ناتبهگونی روی V باشد. وابسته به f یک بکریختی «طبیعی» از V بروی فضای دوگان V^* وجود دارد که همان تبدیل L_f از بخش ۱۰.۱۰ است. L_f را به کار برید و نشان دهید که به ازای هر پایه $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ از V پایه یکتایی چون $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$ از V وجود دارد که $f(\alpha_i, \alpha'_j) = \delta_{ij}$. سپس نشان دهید به ازای هر بردار α در V داریم

$$\alpha = \sum_i f(\alpha, \alpha'_i) \alpha_i = \sum_i f(\alpha_i, \alpha) \alpha'_i.$$

۱۴. فرض کنید V ، f ، \mathcal{B} و \mathcal{B}' همچون در تمرین ۱۳ باشند. فرض کنید T عملگری خطی

روی V و T' عملگری خطی باشد که f آن را همچون در ترمین ۱۱ به T وابسته می‌سازد. نشان دهید

$$[T']_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}} \quad (\text{الف})$$

$$\text{tr}(T) = \text{tr}(T') = \sum_i f(T\alpha_i, \alpha_i) \quad (\text{ب})$$

۱۵. فرض کنید V, f, \mathcal{B} ، و \mathcal{B}' همچون در ترمین ۱۳ باشند. فرض کنید $A = [f]_{\mathcal{B}}$. نشان دهید نشان دهید

$$\alpha'_i = \sum_j (A^{-1})_{ij} \alpha_j = \sum_j (A^{-1})_{ji} \alpha_j.$$

۱۶. فرض کنید F يك هیأت و V فضای ماتریسهای $n \times 1$ بر روی F باشد. فرض کنید A ماتریس $n \times n$ متقارن معکوس پذیری بر روی F و نیز f فرم دوخطی روی V تعریف شده توسط $f(X, Y) = X^t A Y$ باشد. فرض کنید P ماتریس $n \times n$ معکوس پذیری بر روی F و \mathcal{B} پایهٔ متشکل از ستونهای P برای V باشد. نشان دهید که پایهٔ \mathcal{B}' در ترمین ۱۳ متشکل از ستونهای ماتریس $(P^t)^{-1} A^{-1}$ است.

۱۷. فرض کنید V يك فضای برداری با بعد متناهی بر روی هیأتی چون F و f فرم دوخطی متقارنی روی V باشد. به ازای هر زیر فضای W از V ، گیریم W^\perp مجموعهٔ همهٔ بردارهای α در V باشد که به ازای هر β در W ، $f(\alpha, \beta) = 0$. نشان دهید

(الف) W^\perp يك زیر فضا است.

$$V = \{0\}^\perp \quad (\text{ب})$$

(پ) $V^\perp = \{0\}$ اگر و تنها اگر f ناتبهگون باشد.

(ت) $\text{بعد}(V^\perp) = \text{بعد}(V) - \text{رتبه}(f)$

(ث) اگر $\text{بعد}(V) = n$ و $\text{بعد}(W) = m$ ، آنگاه $\text{بعد}(W^\perp) \geq n - m$.

(داهنمایی: $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ را پایه‌ای برای W بگیرید و نگاهت)

$$\alpha \rightarrow (f(\alpha, \beta_1), \dots, f(\alpha, \beta_m))$$

از F^m در V را مورد توجه قرار دهید.)

(ج) تحدید f روی W ناتبهگون است اگر و تنها اگر

$$W \cap W^\perp = \{0\}.$$

(چ) $V = W \oplus W^\perp$ اگر و تنها اگر تحدید f روی W ناتبهگون باشد.

۱۸. فرض کنید V يك فضای برداری با بعد متناهی بر روی C و f فرم دوخطی متقارن ناتبهگونی روی V باشد. ثابت کنید پایه‌ای چون \mathcal{B} از V وجود دارد که $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ (برای تعریف \mathcal{B}' ترمین ۱۳ را ببینید).

۳.۱۰. فرمهای دوخطی متقارن کج

در تمام این بخش، V یک فضای برداری بر روی یک زیرهیأت F از هیأت اعداد مختلط خواهد بود. فرمی دوخطی چون f روی V متقارن کج نامیده می‌شود، هرگاه به ازای همه بردارهای α و β در V ، $f(\alpha, \beta) = -f(\beta, \alpha)$ ، در رابطه با ساده کردن ماتریس فرم دوخطی متقارن کجی روی یک فضای بعد متناهی V قضیه‌ای را اثبات خواهیم کرد. ولی بیا بید ابتدا به چند مشاهده عمومی بپردازیم.

فرض کنید f فرم دو خطی دلخواهی روی V باشد، اگر فرض کنیم

$$g(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} [f(\alpha, \beta) + f(\beta, \alpha)]$$

$$h(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} [f(\alpha, \beta) - f(\beta, \alpha)]$$

آنگاه بسادگی می‌توان نشان داد که g فرم دوخطی متقارنی روی V و h فرم دوخطی متقارن کجی روی V است. از این گذشته، $f = g + h$ ، بعلاوه، این عبارت برای f ، به صورت مجموع فرمی متقارن و فرمی متقارن کج، یکناست. پس، فضای $L(V, V, F)$ مجموع مستقیم زیر فضای فرمهای متقارن و زیر فضای فرمهای متقارن کج است.

اگر بعد V متناهی باشد، فرم دوخطی f متقارن کج است اگر و تنها اگر ماتریس آن A ، در یک (یا هر) پایه مرتبی متقارن کج باشد: $A^t = -A$. این قضیه، عیناً مثل حکم تناظر درباره فرمهای دوخطی متقارن اثبات می‌شود. وقتی f متقارن کج باشد همه درایه‌های قطری ماتریس f ، در هر پایه مرتبی، ۰ خواهند بود. این درست تناظر این مشاهده است که به ازای هر α در V ، $f(\alpha, \alpha) = 0$ ، چرا که $f(\alpha, \alpha) = -f(\alpha, \alpha)$. چون حال فرض می‌کنیم f فرم دوخطی متقارن کج غیر صفری روی V باشد. چون $f \neq 0$ ، بردارهایی چون α و β در V وجود دارند که $f(\alpha, \beta) \neq 0$ با ضرب α در اسکالر مناسبی، می‌توان فرض کرد که $f(\alpha, \beta) = 1$. گیریم γ برداری دلخواه در زیر فضای پدید آمده توسط α و β ، مثلاً $\gamma = c\alpha + d\beta$ باشد. در این صورت

$$f(\gamma, \alpha) = f(c\alpha + d\beta, \alpha) = df(\beta, \alpha) = -d$$

$$f(\gamma, \beta) = f(c\alpha + d\beta, \beta) = cf(\alpha, \beta) = c$$

و لذا

$$\gamma = f(\gamma, \beta)\alpha - f(\gamma, \alpha)\beta. \quad (7-10)$$

بخصوص، توجه کنید که α و β لزوماً مستقل خطی هستند؛ زیرا، اگر $\gamma = 0$ ، آنگاه

۱. این حکم در صورتی امکان‌پذیر است که $2 \geq \dim(V)$. در طول بحث، این شرط باید در

نظر گرفته شود. ۴.

$$f(\gamma, \alpha) = f(\gamma, \beta) = 0$$

فرض کنید W زیرفضای دوبعدی پدیدآمده توسط α و β باشد. بعلاوه فرض کنید W^\perp مجموعه همه بردارهایی چون δ در V باشد که $f(\delta, \alpha) = f(\delta, \beta) = 0$ ؛ یعنی، مجموعه همه δ هایی باشد که به ازای هر γ در زیرفضای W ، $f(\delta, \gamma) = 0$ ادعای کنیم که $V = W \oplus W^\perp$. زیرا، گیریم ϵ بردار دلخواهی در V باشد و

$$\gamma = f(\epsilon, \beta)\alpha - f(\epsilon, \alpha)\beta$$

$$\delta = \epsilon - \gamma.$$

آنگاه γ در W و δ در W^\perp است، چرا که

$$\begin{aligned} f(\delta, \alpha) &= f(\epsilon - f(\epsilon, \beta)\alpha + f(\epsilon, \alpha)\beta, \alpha) \\ &= f(\epsilon, \alpha) + f(\epsilon, \alpha)f(\beta, \alpha) \\ &= 0 \end{aligned}$$

و به طور مشابه $f(\delta, \beta) = 0$. پس، هر ϵ در V به صورت $\epsilon = \gamma + \delta$ با فرض γ در W و δ در W^\perp است. از (۷-۱۰) واضح است که $W \cap W^\perp = \{0\}$ و لذا $V = W \oplus W^\perp$. حال تحدید f روی W^\perp فرم دوخطی متقارن کجی روی W^\perp است. این تحدید ممکن است فرم صفر باشد. اگر نباشد، بردارهایی چون α' و β' در W^\perp وجود دارند که $f(\alpha', \beta') = 1$. اگر فرض کنیم W' زیرفضای دوبعدی پدیدآمده توسط α' و β' باشد، آنگاه خواهیم داشت

$$V = W \oplus W' \oplus W_0.$$

که در آن W_0 عبارت است از مجموعه همه بردارهایی چون δ در W^\perp به طوری که $f(\alpha', \delta) = f(\beta', \delta) = 0$. اگر تحدید f روی W_0 فرم صفر نباشد، می توانیم بردارهایی چون α'' و β'' در W_0 را چنان انتخاب کنیم که $f(\alpha'', \beta'') = 1$ و بعد ادامه دهیم.

در حالت بعد متناهی باید واضح باشد که دنباله ای متناهی از جفت بردارهای

$$(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_k, \beta_k)$$

با خواص زیر به دست می آیند:

$$(الف) \quad j = 1, \dots, k, \quad f(\alpha_j, \beta_j) = 1$$

$$(ب) \quad i \neq j, \quad f(\alpha_i, \alpha_j) = f(\beta_i, \beta_j) = f(\alpha_i, \beta_j) = 0$$

(پ) اگر W_j زیرفضای دوبعدی پدیدآمده توسط α_j و β_j باشد، آنگاه

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k \oplus W_0.$$

که در آن هر بردار در W برهمه α_j ها و β_j ها «عمود» است و تحدید f روی W فرم صفر است.

قضیه ۶. گیریم V يك فضای برداری n بعدی بر روی زیرهیهائی از اعداد مختلف و f فرم فرم دوخطی مفروضی را حفظ می کنند، تحت تشکیل حاصل ضربها (ی عملگرها)، بسته است. مرتبی برای V وجود دارد که در آن ماتریس f عبارت است از مجموع مستقیم ماتریس صفر $(n-r) \times (n-r)$ و k نسخه از ماتریس 2×2

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

اثبات. فرض می کنیم $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_k, \beta_k, \gamma_1, \dots, \gamma_s$ بردارهایی باشند که در شرایط (الف)، (ب)، و (پ) بالا صدق می کنند. گیریم $\{\gamma_1, \dots, \gamma_s\}$ پایه مرتب دلخواهی برای زیرفضای W باشد. در این صورت

$$\mathcal{B}\{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_k, \beta_k, \gamma_1, \dots, \gamma_s\}$$

پایه مرتبی برای V است. از (الف)، (ب)، و (پ) واضح است که ماتریس f در پایه مرتب \mathcal{B} عبارت است از مجموع مستقیم ماتریس صفر $(n-2k) \times (n-2k)$ و k نسخه از ماتریس 2×2

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (۸-۱۰)$$

بعلاوه، واضح است که رتبه این ماتریس، و در نتیجه f ، برابر $2k$ است. \square

یکی از نتایج مطالب بالا این است که اگر f فرم دوخطی متقارن کج ناتبهگونی روی V باشد، آنگاه بعد V باید زوج باشد. اگر $2k = \dim(V)$ ، پایه مرتبی چون $\{\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_k, \beta_k\}$ برای V وجود خواهد داشت که

$$f(\alpha_i, \beta_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

$$f(\alpha_i, \alpha_j) = f(\beta_i, \beta_j) = 0.$$

ماتریس f در این پایه مرتب مجموع مستقیم k نسخه از ماتریس متقارن کج 2×2 (۸-۱۰) است. اگر به جای پایه مرتب بالا، پایه مرتب

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_k, \dots, \beta_1\}$$

را در نظر بگیریم، صورت استاندارد دیگری برای ماتریس f فرم متقارن کج ناتبهگون

به دست می آوریم. خواننده باید به آسانی بتواند نشان دهد که ماتریس f در پایه مرتب اخیر صورت بلوکی

$$\begin{bmatrix} & & & J \\ & & & \\ & & & \\ -J & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

را دارد که در آن J عبارت است از ماتریس $k \times k$

$$\begin{bmatrix} & & & & & 1 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ 1 & & & & & \end{bmatrix}$$

تمرین

۱. فرض کنید V فضای برداری بر روی هیاتی چون F باشد. نشان دهید که مجموعه همه فرمهای دوخطی متقارن کج روی V زیرفضایی از $L(V, V, F)$ است.

۲. همه فرمهای دوخطی متقارن کج روی R^3 را بیابید.

۳. پایه ای برای فضای همه فرمهای دوخطی متقارن کج روی R^n بیابید.

۴. فرض کنید f فرم دوخطی متقارنی روی C^n و g فرم دوخطی متقارن کجی روی C^n باشد. فرض کنید $f + g = 0$. نشان دهید که $f = g = 0$.

۵. فرض کنید V فضای برداری n بعدی بر روی زیرهیاتی چون F از C باشد. احکام زیر را ثابت کنید.

(الف) معادله $(Pf)(\alpha, \beta) = \frac{1}{4}f(\alpha, \beta) - \frac{1}{4}f(\beta, \alpha)$ یک عملگر خطی P روی $L(V, V, F)$ تعریف می کند.

(ب) $P^2 = P$ ، یعنی P یک تصویر است.

(پ) $\text{رتبه}(P) = \frac{n(n-1)}{4}$ ؛ $\text{پوچی}(P) = \frac{n(n+1)}{4}$.

(ت) اگر U عملگری خطی روی V باشد، معادله $(U^+f)(\alpha, \beta) = f(U\alpha, U\beta)$ یک عملگر خطی U^+ روی $L(V, V, F)$ تعریف می کند.

(ث) به ازای هر عملگر خطی U ، تصویر P با U^+ جابجا می شود.

۰۶. نظیر تمرین ۱۱ در بخش ۲۰۱۰، حکمی را برای فرمهای دوخطی متقارن کجج ناتبهگون ثابت کنید.

۰۷. فرض کنید f فرمی دوخطی روی یک فضای برداری V باشد. فرض کنید L_f و R_f نگاشتهای از V در V^* وابسته به f ، داده شده در بخش ۱۰۱۰ باشند. ثابت کنید f متقارن کجج است اگر و تنها اگر $L_f = -R_f$.

۰۸. نظیر تمرین ۱۷ در بخش ۲۰۱۰، حکمی را برای فرمهای متقارن کجج ثابت کنید.

۰۹. فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی باشد و L_1 و L_2 تابعهای خطی روی V باشند. نشان دهید که معادله

$$f(\alpha, \beta) = L_1(\alpha)L_2(\beta) - L_1(\beta)L_2(\alpha)$$

فرم دوخطی متقارن کججی روی V تعریف می کند. نشان دهید که $f = 0$ اگر و تنها اگر L_1 و L_2 وابسته خطی باشند.

۰۱۰. فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی بر روی زیرهائی از اعداد مختلط و f فرم دوخطی متقارن کججی روی V باشد. نشان دهید f دارای رتبه ۲ است اگر و تنها اگر تابعهای خطی مستقل خطی L_1 و L_2 روی V وجود داشته باشند که

$$f(\alpha, \beta) = L_1(\alpha)L_2(\beta) - L_1(\beta)L_2(\alpha).$$

۰۱۱. فرض کنید f فرم دوخطی متقارن کججی روی R^3 باشد. ثابت کنید تابعهای خطی چون L_1 و L_2 وجود دارند که

$$f(\alpha, \beta) = L_1(\alpha)L_2(\beta) - L_1(\beta)L_2(\alpha).$$

۰۱۲. فرض کنید V فضایی برداری با بعد متناهی بر روی زیرهائی از اعداد مختلط و f و g دو فرم دوخطی متقارن کججی روی V باشند. نشان دهید عملگر خطی معکوس پذیری چون T روی V وجود دارد که به ازای هر α و β $f(T\alpha, T\beta) = g(\alpha, \beta)$ ، اگر و تنها اگر f و g رتبه مساوی داشته باشند.

۰۱۳. نشان دهید که نتیجه تمرین ۱۲ برای فرمهای دوخطی متقارن روی فضاهای برداری مختلط معتبر است ولی برای فرمهای دوخطی متقارن روی فضاهای برداری حقیقی معتبر نیست.

۴.۱۰. گروههای حافظ فرمهای دوخطی

گیریم f فرمی دوخطی روی فضای برداری V و T عملگری خطی روی V باشد. گوئیم T فرم f را حفظ می‌کند، هرگاه به‌ازای هر α و β در V ، $f(T\alpha, T\beta) = f(\alpha, \beta)$. به‌ازای هر T و f بسادگی دیده می‌شود که تابع g تعریف شده توسط $g(\alpha, \beta) = f(T\alpha, T\beta)$ فرمی دوخطی روی V است. اینکه بگوئیم T ، f را حفظ می‌کند چیزی جز اینکه بگوئیم $g = f$ نیست. عملگر همانی، هر فرم دوخطی را حفظ می‌کند. اگر S و T عملگرهای خطی باشند که f را حفظ کنند حاصل ضرب ST نیز f را حفظ می‌کند؛ زیرا $f(ST\alpha, ST\beta) = f(T\alpha, T\beta) = f(\alpha, \beta)$. به بیان دیگر، دسته عملگرهای خطی که فرم دوخطی مفروضی را حفظ می‌کنند، تحت تشکیل حاصل ضربها (ی عملگرها)، بسته است. درحالت عمومی، درباره این دسته از عملگرها چیز بیشتری نمی‌توان گفت؛ اما، اگر f ناتبهگون باشد، قضیه زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۷. گیریم f فرم دوخطی ناتبهگونی روی یک فضای برداری بعد متناهی V باشد. مجموعه همه عملگرهای خطی روی V که f را حفظ می‌کنند، تحت عمل ترکیب، یک گروه است.

اثبات. گیریم G مجموعه عملگرهایی خطی باشد که f را حفظ می‌کنند. مشاهده کردیم که عملگر همانی در G قرار دارد، و در صورتی که S و T در G باشند، ترکیب ST نیز در G است. بنابراین فرض که f ناتبهگون است، ثابت خواهیم کرد که هر عملگر T در G معکوس پذیر است و T^{-1} نیز در G قرار دارد. فرض کنیم T فرم f را حفظ کند. گیریم α برداری در فضای بوج T باشد. در این صورت به‌ازای هر β در V داریم

$$f(\alpha, \beta) = f(T\alpha, T\beta) = f(0, T\beta) = 0.$$

چون f ناتبهگون است، پس $\alpha = 0$. در نتیجه T معکوس پذیر است. واضح است که T^{-1} نیز f را حفظ می‌کند؛ زیرا

$$f(T^{-1}\alpha, T^{-1}\beta) = f(TT^{-1}\alpha, TT^{-1}\beta) = f(\alpha, \beta). \quad \square$$

اگر f فرم دوخطی ناتبهگونی روی فضای بعد متناهی V باشد، آنگاه هر پایه مرتب \mathcal{B} برای V گروهی از ماتریسهای «حافظ» f را تعیین می‌کند. مجموعه همه ماتریسهای $[T]_{\mathcal{B}}$ که در آن T یک عملگر خطی حافظ f است، تحت ضرب ماتریسی یک گروه خواهد بود. برای این گروه از ماتریسها، توصیف دیگری به صورت زیر هم وجود دارد. گیریم $A = [f]_{\mathcal{B}}$ ، بنابراین اگر α و β بردارهایی از V بترتیب با ماتریسهای مختصات X و Y نسبت به \mathcal{B} باشند، خواهیم داشت

$$f(\alpha, \beta) = X'AY.$$

گیریم T عملگری خطی روی V باشد، و $M = [T]_{\mathcal{B}}$. در این صورت

$$f(T\alpha, T\beta) = (MX)'A(MY) \\ = X'(M'AM)Y$$

بنابراین، T فرم f را حفظ می‌کند اگر و تنها اگر $M'AM = A$. در این صورت، قضیهٔ ۷ به زبان ماتریسی مطلب زیر را بیان می‌کند: اگر A ماتریس $n \times n$ معکوس‌پذیری باشد، مجموعهٔ همه ماتریسهای $n \times n$ چون M ، با شرط $M'AM = A$ تحت ضرب ماتریسی يك گروه است. اگر $A = [f]_{\mathbb{R}}$ ، آنگاه M در این گروه از ماتریسها است اگر و تنها اگر $M = [T]_{\mathbb{R}}$ و T عملگری خطی باشد که f را حفظ می‌کند.

قبل از پرداختن به چند مثال، به ذکر نکته‌ای دیگر می‌پردازیم. فرض کنیم f فرم دوخطی مقارنی باشد. عملگر خطی T فرم f را حفظ می‌کند اگر و تنها اگر T فرم درجهٔ دوم

$$q(\alpha) = f(\alpha, \alpha)$$

وابسته به f را حفظ کند. اگر T فرم f را حفظ کند مطمئناً به‌ازای هر α در V داریم

$$q(T\alpha) = f(T\alpha, T\alpha) = f(\alpha, \alpha) = q(\alpha).$$

بعکس، چون f مقارن است، اتحاد قطبی

$$f(\alpha, \beta) = \frac{1}{4}q(\alpha + \beta) - \frac{1}{4}q(\alpha - \beta)$$

نشان می‌دهد T وقتی f را حفظ می‌کند که به‌ازای هر γ در V ، $q(T\gamma) = q(\gamma)$. (در اینجا فرض بر این است که هیأت اسکالری زیرهیأتی از اعداد مختلط است.)

مثال ۶. گیریم V فضای R^n یا فضای C^n باشد. فرض می‌کنیم f فرم دوخطی

$$f(\alpha, \beta) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$$

باشد که در آن $\alpha = (x_1, \dots, x_n)$ و $\beta = (y_1, \dots, y_n)$. گروه حافظ f گروه متعامد (حقیقی یا مختلط) n بعدی نامیده می‌شود. نام «گروه متعامد» بیشتر به گروه وابسته ماتریسهای در پایهٔ مرتب استاندارد اطلاق می‌شود. چون ماتریس f در پایهٔ استاندارد همان I است، این گروه متشکل از ماتریسهای M است که در $M'M = I$ صدق می‌کنند. چنین ماتریس M به يك ماتریس متعامد (حقیقی یا مختلط) $n \times n$ موسوم است. این دو گروه متعامد $n \times n$ ، غالباً به صورت $O(n, R)$ و $O(n, C)$ نمایش داده می‌شوند. بدیهی است گروه متعامد، همچنین گروهی است که فرم درجهٔ دوم

$$q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

را حفظ می‌کند.

مثال ۷. گیریم f فرم دوخطی مقارن روی R^n با فرم درجه دوم

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^p x_j^2 - \sum_{j=p+1}^n x_j^2$$

باشد. آنگاه f ناتبهگون و دارای نشان $n-p$ است. گروه ماتریسهای حافظ فرمی از این نوع يك گروه شبه متعامد نامیده می‌شود. وقتی که $p=n$ ، گروه متعامد $O(n, R)$ به عنوان نوع خاصی از گروههای شبه متعامد به دست می‌آید. به ازای هر يك از $n+1$ مقدار $p=0, 1, 2, \dots, n$ فرمهای دوخطی مختلفی چون f به دست می‌آوریم؛ اما، به ازای $p=n-k$ و $p=k$ ، فرمها قرینه یکدیگرند و از این رو دارای گروههای وابسته مساوی هستند. پس، وقتی که n فرد باشد، $(n+1)/2$ گروه شبه متعامد از ماتریسهای $n \times n$ و هنگامی که n زوج باشد، $(n+2)/2$ از چنین گروههایی حاصل می‌شوند.

قضیه ۸. گیریم V يك فضای برداری n بعدی بردی هیأت اعداد مختلط و f فرم دوخطی مقارن ناتبهگونی روی V باشد. در این صورت گروه حافظ f با گروه متعامد مختلط $O(n, C)$ یکریخت است.

اثبات. بدیهی است که منظورمان از يك یکریختی بین دو گروه، يك تناظر يك به يك بین اعضای آنهاست که عمل گروه را «حفظ می‌کند». گیریم G گروه عملگرهای خطی روی V باشد که فرم دوخطی f را حفظ می‌کنند. چون f هم مقارن و هم ناتبهگون است قضیه ۴ حاکی است که پایه مرتبی چون \mathcal{B} برای V وجود دارد که در آن f توسط ماتریس همانی $n \times n$ نمایش داده می‌شود. بنا بر این، عملگری خطی چون T فرم f را حفظ می‌کند اگر و تنها اگر ماتریس آن در پایه مرتب \mathcal{B} ماتریس متعامد مختلطی باشد. از این رو،

$$T \rightarrow [T]_{\mathcal{B}}$$

يك یکریختی از G بروی $O(n, C)$ است. \square

قضیه ۹. گیریم V يك فضای برداری n بعدی بردی هیأت اعداد حقیقی و f فرم دوخطی مقارن ناتبهگونی روی V باشد. در این صورت گروه حافظ f با گروه $n \times n$ شبه متعامدی یکریخت است.

اثبات. اثبات قضیه ۸ را با استفاده از قضیه ۵ به جای قضیه ۴ تکرار کنید. \square

مثال ۸. گیریم f فرم دوخطی مقارن روی R^4 با فرم درجه دوم

$$q(x, y, z, t) = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

باشد. عملگری خطی چون T روی R^4 که این فرم دوخطی (با درجه دوم) خاص را حفظ می‌کند، يك تبدیل لورنتس نامیده می‌شود و گروه حافظ f به گروه لورنتس موسوم است. می‌خواهیم یکی از روشهای تشریح چند تبدیل لورنتس را به دست می‌دهیم. گیریم H فضای برداری حقیقی همه ماتریسهای مختلط A 2×2 که هرمیتی هستند،

$A = A^*$ ، باشد. به آسانی می توان نشان داد که

$$\Phi(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} t+x & y+iz \\ y-iz & t-x \end{bmatrix}$$

یک یکرختی Φ از R^4 بروی فضای H تعریف می کند. تحت این یکرختی، فرم درجه دوم q بروی تابع دترمینان برده می شود؛ یعنی

$$q(x, y, z, t) = \det \begin{bmatrix} t+x & y+iz \\ y-iz & t-x \end{bmatrix}$$

یا

$$q(\alpha) = \det \Phi(\alpha).$$

این مطلب اشاره برای این دارد که با مطالعه عملگرهای خطی روی H که دترمینانها را حفظ می کنند می توان تبدیلهای لورنتس روی R^4 را بررسی کرد.

M را ماتریس 2×2 مختلط دلخواهی می گیریم و برای هر ماتریس هرمیتی A تعریف می کنیم:

$$U_M(A) = MAM^*.$$

حال MAM^* نیز هرمیتی است. از این مطلب با آسانی دیده می شود که U_M یک عملگر خطی (حقیقی) روی H است. می خواهیم بدانیم چه وقت این مطلب درست است که U_M دترمینانها را «حفظ می کند»؛ یعنی به ازای هر A در H ، $\det [U_M(A)] = \det A$ ، چون دترمینان M^* برابر مزدوج مختلط دترمینان M است، می بینیم که

$$\det [U_M(A)] = |\det M|^2 \det A.$$

پس U_M دترمینانها را درست وقتی حفظ می کند که $\det M$ دارای قدرمطلق ۱ باشد. لذا اکنون ماتریس مختلط 2×2 بی چون M را که $|\det M| = 1$ انتخاب می کنیم. در این صورت U_M یک عملگر خطی روی H است که دترمینانها را حفظ می کند. حال

$$T_M = \Phi^{-1} U_M \Phi$$

را تعریف می کنیم. چون Φ یک یکرختی است T_M هم عملگری خطی روی R^4 است. همچنین، T_M یک تبدیل لورنتس است؛ زیرا

$$\begin{aligned} q(T_M \alpha) &= q(\Phi^{-1} U_M \Phi \alpha) \\ &= \det (\Phi \Phi^{-1} U_M \Phi \alpha) \\ &= \det (U_M \Phi \alpha) \end{aligned}$$

$$= \det(\Phi\alpha)$$

$$= q(\alpha)$$

و از این رو، T_M فرم درجه دوم q را حفظ می کند.

با به کارگیری ماتریسهای 2×2 ویژه M می توان روش بالا را برای محاسبه تبدیلهای لورنتس ویژه مورد استفاده قرار داد. دو نکته هست که در اینجا می توان به ذکر آنها پرداخت؛ بررسی آنها هم مشکل نیست.

(۱) اگر M_1 و M_2 ماتریسهای 2×2 معکوس پذیری با درایه های مختلط باشند، آنگاه $U_{M_1} = U_{M_2}$ اگر و تنها اگر M_2 مضربی اسکالری از M_1 باشد. پس، همه تبدیلهای لورنتس نمایش داده شده در فوق از ماتریسهای تک مدولی M ، یعنی از ماتریسهای M با شرط $\det M = 1$ ، قابل حصول هستند. اگر M_1 و M_2 ماتریسهای تک مدولی باشند که $M_1 \neq M_2$ و $M_1 \neq -M_2$ ، آنگاه $T_{M_1} \neq T_{M_2}$.
(۲) همه تبدیلهای لورنتس با روش بالا قابل حصول نیستند.

تمرین

- فرض کنید M عنصری از گروه متعامد مختلط $O(n, C)$ باشد. نشان دهید که M^t ، \bar{M} و $M^* = \bar{M}^t$ نیز به $O(n, C)$ تعلق دارند.
- فرض کنید M متعلق به $O(n, C)$ و M' مشابه با M باشد. آیا M' نیز به $O(n, C)$ تعلق دارد؟
- فرض کنید

$$y_j = \sum_{k=1}^n M_{jk} x_k$$

که در آن M عنصری از $O(n, C)$ است. نشان دهید که

$$\sum_j y_j^2 = \sum_j x_j^2.$$

- فرض کنید M ماتریسی $n \times n$ بر روی C با ستونهای M_1, M_2, \dots, M_n باشد. نشان دهید که M متعلق به $O(n, C)$ است اگر و تنها اگر

$$M_j^t M_k = \delta_{jk}.$$

- فرض کنید X یک ماتریس $n \times 1$ بر روی C باشد. تحت چه شرایطی $O(n, C)$ شامل ماتریسی چون M است که ستون اولش X باشد؟

۶. ماتریسی در $O(3, C)$ بیابید که سطر اولش $(2i, 2i, 3)$ باشد.

۷. فرض کنید V فضای همه ماتریسهای $1 \times n$ بر روی C و f فرم دوخطی روی V داده شده توسط $f(X, Y) = X'Y$ باشد. فرض کنید M متعلق به $O(n, C)$ باشد. ماتریس f در پایه V متشکل از ستونهای M_1, M_2, \dots, M_n از M چیست؟

۸. گیریم X يك ماتریس $1 \times n$ بر روی C با شرط $X'X = 1$ ؛ و I_j برابر زمین ستون ماتریس همانی باشد. نشان دهید ماتریسی چون M در $O(n, C)$ وجود دارد که $MX = I_j$. اگر X دارای درایه‌های حقیقی باشد، نشان دهید که يك M در $O(n, C)$ وجود دارد با این خاصیت که $MX = I_j$.

۹. فرض کنید V فضای همه ماتریسهای $1 \times n$ بر روی C ، A يك ماتریس $n \times n$ بر روی C ، و f فرم دوخطی روی V داده شده توسط $f(X, Y) = X'AY$ باشد. نشان دهید که f تحت $O(n, C)$ پایاست، یعنی به ازای هر X و Y در V و هر M در $O(n, C)$ ، $f(MX, MY) = f(X, Y)$ اگر و تنها اگر A با هر عنصر $O(n, C)$ جابجا شود.

۱۰. فرض کنید S مجموعه‌ای دلخواه از ماتریسهای $n \times n$ بر روی C ، و S' مجموعه همه ماتریسهای $n \times n$ بر روی C باشد که با هر عنصر S جابجا می‌شود. نشان دهید که S' يك جبر بر روی C است.

۱۱. فرض کنید F زیرهياتی از C ، V فضایی برداری با بعد متناهی بر روی F ، و f فرم دوخطی نامنفردی روی V باشد. اگر T عملگری خطی روی V و حافظ f باشد، ثابت کنید $\det T = \pm 1$.

۱۲. فرض کنید F زیرهياتی از C ، V فضای ماتریسهای $1 \times n$ بر روی F ، A ماتریس $n \times n$ معکوس‌پذیری بر روی F ، و f فرم دوخطی روی V داده شده توسط $f(X, Y) = X'AY$ باشد. اگر M ماتریسی $n \times n$ بر روی F باشد، نشان دهید که M ، f را حفظ می‌کند اگر و تنها اگر $A^{-1}M'A = M^{-1}$.

۱۳. فرض کنید g فرم دوخطی نامنفردی روی يك فضای برداری بعد متناهی V باشد. فرض کنید T عملگر خطی معکوس‌پذیری روی V و f فرم دوخطی روی V تعیین شده توسط $f(\alpha, \beta) = g(\alpha, T\beta)$ باشد. اگر U عملگری خطی روی V باشد، شرایطی لازم و کافی برای U بیابید که f را حفظ کند.

۱۴. فرض کنید T عملگری خطی روی C^2 باشد که فرم درجه دوم $x_1^2 - x_2^2$ را حفظ می‌کند. نشان دهید

$$\det(T) = \pm 1 \quad (\text{الف})$$

(ب) اگر M ماتریس T در پایه استاندارد باشد، آنگاه

$$M_{22} = \pm M_{11}$$

$$M_{11}^2 - M_{22}^2 = 1, M_{21} = \pm M_{12}$$

(پ) اگر $\det M = 1$ ، آنگاه عدد مختلط غیر صفری چون c وجود دارد که

$$M = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} c + \frac{1}{c} & c - \frac{1}{c} \\ c - \frac{1}{c} & c + \frac{1}{c} \end{bmatrix}$$

(ت) اگر $\det M = -1$ ، آنگاه عدد مختلطی چون c وجود دارد که

$$M = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} c + \frac{1}{c} & c - \frac{1}{c} \\ -c + \frac{1}{c} & -c - \frac{1}{c} \end{bmatrix}$$

۱۵. فرض کنید f فرم دوخطی روی C^2 تعریف شده توسط

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

باشد. نشان دهید

(الف) اگر T عملگری خطی روی C^2 باشد، آنگاه به ازای هر α و β در C^2

$$f(T\alpha, T\beta) = (\det T) f(\alpha, \beta)$$

(ب) T ، f را حفظ می‌کند اگر و تنها اگر $\det T = +1$.

(پ) بند (ب) درباره گروه ماتریسهای 2×2 M با شرط $M^t A M = A$ که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

چه می‌گوید؟

۱۶. فرض کنید n عدد صحیحی مثبت، I ماتریس همانی $n \times n$ بر روی C ، و J ماتریس

$2n \times 2n$ داده شده توسط

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

باشد. فرض می‌کنیم M ماتریسی $2n \times 2n$ بر روی C به صورت

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

باشد که در آن A, B, C, D ماتریسهایی $n \times n$ بر روی C هستند. شرایطی لازم و کافی روی A, B, C, D و پیدا کنید که $M^t J M = J$.

۰۱۷. همه فرمهای دوخطی روی فضای ماتریسهای $n \times 1$ بر روی R را که تحت $O(n, R)$ پایا هستند، بیابید.

۰۱۸. همه فرمهای دوخطی روی فضای ماتریسهای $n \times 1$ بر روی C را که تحت $O(n, C)$ پایا هستند پیدا کنید.

پیوست

این پیوست از لحاظ منطقی به دو قسمت تقسیم می‌شود. قسمت اول که سه بخش اول را در بر می‌گیرد شامل مفاهیم بنیانی معینی است که در سرتاسر کتاب (درحقیقت، در تمام ریاضیات) ظاهر می‌شوند. این قسمت بیشتر به منزلهٔ مقدمه‌ای است برای کتاب تاپیک پیوست. اما قسمت دوم واقعاً پیوستی برای متن اصلی است.

بخش ۱ حاوی بحثی در مورد مجموعه‌ها، اجتماع، و اشتراك آنهاست. بخش ۲ مفهوم تابع و ایده‌های وابسته چون برد، دامنه، تابع معکوس، و تحدید تابعی به زیر-مجموعه‌ای از دامنه‌اش را مورد بحث قرار می‌دهد. بخش ۳ در بارهٔ رابطه‌های هم‌ارزی بحث می‌کند. مطالب این سه بخش، خصوصاً مطالب بخشهای ۱ و ۲، به اختصار ارائه می‌شوند. مطالب، بیشتر به جهت تثبیت اصطلاحات بیان می‌شوند تا برای تشریح جزئیات. به معنی منطقی دقیق، این مطالب قسمتی از پیش نیازهای لازم جهت مطالعه کتاب را تشکیل می‌دهند. اما، در صورتی که خواننده در مطالعهٔ اول نتواند مفاد این ایده‌ها را به طور کامل جذب کند نباید دلسرد شود. البته این ایده‌ها مهم هستند، ولی خواننده‌ای که با آنها خیلی آشنا نیست، هر گاه حین مطالعهٔ متن اصلی گه‌گاه این مبحث را هم دوره کند، آسانتر می‌تواند آنها را فرا بگیرد.

بخشهای ۴ و ۵ رابطه‌های هم‌ارزی را در رابطه با جبر خطی مورد بررسی قرار می‌دهند. بخش ۴ شامل بحث مختصری در بارهٔ فضاهای خارج قسمت است. این بخش را می‌توان در هر زمانی پس از مطالعهٔ دو یا سه فصل اول کتاب خواند. بخش ۵ به چند رابطهٔ هم‌ارزی که در کتاب پیش می‌آیند نظری می‌افکند، با این قصد که نشان دهد برخی از نتایج حاصل را چگونه می‌توان از دیدگاه رابطه‌های هم‌ارزی تفسیر کرد. بخش ۶، اصل انتخاب و نتایجش را در مورد جبر خطی تشریح می‌کند.

پ. ۱۰. مجموعه

هر چند ما واژه «مجموعه» را ترجیح می‌دهیم ولی «رده»، «دسته» و «خانواده» را هم با همان مفهوم به کار خواهیم برد. اگر S یک مجموعه، و x شیئی در مجموعه S باشد، خواهیم گفت که x یک عنصر S است، یا x متعلق به S است و یا به‌طور ساده اینکه x در S است. اگر S تنها دارای تعدادی متاهی عنصر چون x_1, \dots, x_n باشد، غالباً S را با نشان دادن عناصرش در بین دو ابرو توصیف می‌کنیم:

$$S = \{x_1, \dots, x_n\}.$$

پس، مجموعه S متشکل از اعداد صحیح مثبت از ۱ تا ۵ عبارت است از

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

اگر S و T دو مجموعه باشند، گوئیم S یک زیرمجموعه T است یا S مشمول در T است هر گاه هر عنصر S عنصری از T نیز باشد. هر مجموعه S زیر مجموعه‌ای از خودش است. اگر S زیرمجموعه‌ای از T باشد، اما S و T یکی نباشند، S را یک زیر-مجموعه سره T می‌نامیم. به بیان دیگر، S زیر مجموعه سره‌ای از T است به این شرط که S مشمول در T باشد ولی T مشمول در S نباشد.

اگر S و T دو مجموعه باشند. اجتماع S و T عبارت است از مجموعه $S \cup T$ متشکل از همهٔ اشیائی چون x که عنصر S یا عنصر T باشند. اشتراك S و T عبارت است از مجموعه $S \cap T$ متشکل از همهٔ x هایی که هم عنصر S و هم عنصر T باشند. به‌ازای هر دو مجموعه مفروض S و T ، اشتراك $S \cap T$ زیرمجموعه‌ای است از اجتماع $S \cup T$. این امر باید به‌روشن شدن مورد استفادهٔ واژه «یا» که در این کتاب رایج است کمک‌کنند. وقتی می‌گوئیم x یا در S است یا در T ، این امکان را که x هم در S و هم در T باشد رفع نمی‌کنیم.

برای اینکه اشتراك S و T همواره مجموعه باشد، لازم است مجموعه تهی، یعنی، مجموعه‌ای با هیچ عنصر هم معرفی شود. پس $S \cap T$ مجموعه تهی است اگر و تنها اگر S و T هیچ عنصری در اشتراك نداشته باشند.

غالباً نیازمندیم که اجتماع یا اشتراك مجموعه‌های متعددی را بررسی کنیم. اگر S_1, \dots, S_n مجموعه‌هایی باشند، اجتماع آنها عبارت است از مجموعه $\bigcup_{j=1}^n S_j$ متشکل از همهٔ x هایی که دست کم عنصر یکی از مجموعه‌های S_1, \dots, S_n باشند. اشتراك آنها عبارت است از مجموعه $\bigcap_{j=1}^n S_j$ متشکل از همهٔ x هایی که عنصر همهٔ مجموعه‌های S_1, \dots, S_n

باشند. در چند مورد، اجتماع یا اشتراك دسته‌ای نامتناهی از مجموعه‌ها را نیز مورد بحث قرار خواهیم داد. اینکه چنین اجتماع یا اشتراکی چگونه تعریف می‌شود باید واضح باشد. مثال زیر، این تعاریف را روشن می‌سازد و نمادهایی را برای آنها ارائه می‌نماید.

مثال ۱. گیریم R مجموعه همه اعداد حقیقی (خط حقیقی) را نشان دهد. اگر t در R باشد، به t زیر مجموعه‌ای چون S_t از R را که به صورت زیر تعریف می‌شود. وابسته می‌سازیم: S_t متشکل است از همه اعداد حقیقی چون x که از t کمتر نباشد.

(الف) $S_{t_1} \cup S_{t_2} = S_{t_1}$ که در آن t کوچکترین t_1 و t_2 است.

(ب) $S_{t_1} \cap S_{t_2} = S_{t_2}$ که در آن t بزرگترین t_1 و t_2 است.

(پ) گیریم I فاصله یکه، یعنی مجموعه همه t های در R با شرط $0 \leq t \leq 1$ باشد. آنگاه

$$\bigcup_{I \text{ در } t} S_t = S_0$$

$$\bigcap_{I \text{ در } t} S_t = S_1$$

پ. ۲. تابع

يك تابع متشکل است از:

(۱) مجموعه‌ای چون X که دامنه تابع نامیده می‌شود؛

(۲) مجموعه‌ای چون Y که همدامنه تابع نامیده می‌شود؛

(۳) قاعده‌ای (یا تناظری) چون f که به هر عنصر x از X يك عنصری از Y چون

$f(x)$ را وابسته می‌سازد.

اگر (X, Y, f) يك تابع باشد، f را تابعی از X در Y هم می‌گوییم. گفتن این مطلب حاکی از کمی عدم دقت است چرا که این f نیست که تابع است؛ f قاعده تابع است. با این وجود استفاده از نماد واحد برای تابع و قاعده‌اش محاوره در باره توابع را بسیار آسان می‌کند. پس، اگر بگوییم که f تابعی از X در Y است، یا X دامنه f است یا اینکه Y همدامنه f است - همه حاکی از این هستند که طبق تعریف فوق (X, Y, f) يك تابع است. واژه‌های متعدد دیگری هم وجود دارند که معمولاً به جای واژه «تابع» به کار می‌روند. برخی از اینها عبارتند از «تبدیل»، «عملگر»، و «نگاشت». این واژه‌ها در زمینه‌هایی به کار می‌روند که در رساندن نقش ایفا شده توسط تابعی خاص به نظر الهام‌بخش‌تر باشند.

اگر f تابعی از X در Y باشد، برد (یا نگاره) f عبارت است از مجموعه همه $f(x)$ های با شرط x در X . به بیان دیگر، برد f متشکل است از همه عناصر y در Y با این شرط که x ی در X باشد که $y = f(x)$. هر گاه برد f تمام Y باشد، می‌گوییم f تابعی از X بروی Y است یا به طور ساده f پوشاست. غالباً برد f با $f(X)$ نشان داده می‌شود.

مثال ۲. (الف) فرض کنیم X مجموعه اعداد حقیقی باشد و $Y = X$. گیریم f تابعی از X در Y تعریف شده با $f(x) = x^2$ باشد. برد f مجموعه همه اعداد حقیقی نامنفی است و بدین سان f پوشا نیست.

(ب) گیریم X صفحه اقلیدسی باشد و $Y = X$. فرض کنیم f به صورت زیر تعریف شود: اگر P نقطه‌ای از صفحه باشد، آنگاه $f(P)$ عبارت است از نقطه حاصل از دوران P به اندازه 90° (حول مبدأ در جهت عکس عقربه‌های ساعت). برد f همه Y یعنی تمام صفحه است و لذا f پوشاست.

(پ) دوباره X را صفحه اقلیدسی می‌گیریم. با روش معمول در هندسه تحلیلی، با استفاده از دو خط عمود برهم دستگاه مختصاتی در X می‌سازیم تا نقاط X را با جفت‌های مرتب (x_1, x_2) از اعداد حقیقی یکی بگیریم. فرض کنیم Y محور x_1 ‌ها یعنی همه نقاط (x_1, x_2) با $x_2 = 0$ باشد. اگر P نقطه‌ای از X باشد، $f(P)$ را نقطه حاصل از تصویر P بروی محور x_1 ‌ها به موازات محور x_2 ‌ها می‌گیریم. به بیان دیگر، $f((x_1, x_2)) = (x_1, 0)$. در این صورت برد f همه Y است و لذا f پوشاست.

(ت) گیریم X مجموعه اعداد حقیقی و Y مجموعه اعداد حقیقی مثبت باشد. تابع f از X در Y را با ضابطه $f(x) = e^x$ تعریف می‌کنیم. آنگاه f تابعی است از X بروی Y .

(ث) فرض کنیم X مجموعه اعداد حقیقی مثبت و Y مجموعه اعداد حقیقی باشد. گیریم f تابع لگاریتم طبیعی، یعنی تابع تعریف شده توسط $f(x) = \log x = \ln x$ باشد. مجدداً f پوشاست، یعنی هر عدد حقیقی لگاریتم طبیعی عددی مثبت است.

فرض کنیم X, Y ، و Z سه مجموعه، f تابعی از X در Y ، و g تابعی از Y در Z باشد. وابسته به f و g تابعی چون $g \circ f$ از X در Z هست که به ترکیب g و f معروف است. این تابع طبق

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

تعریف می‌شود. به عنوان مثالی ساده، گیریم $X = Y = Z$ مجموعه اعداد حقیقی باشند. فرض کنیم f, g ، سه تابع از X در X باشند که با ضابطه‌های

$$f(x) = x^2, g(x) = e^x, h(x) = e^{x^2}$$

تعریف می‌شوند. در این صورت $h = g \circ f$. ترکیب $g \circ f$ غالباً به طور ساده با $g \circ f$ نمایش داده می‌شود؛ اما، چنانکه مثال ساده بالا نشان می‌دهد، گاهی ممکن است این طرز نمایش گمراه کننده باشد.

یکی از سؤالی‌های جالب، سؤال زیر است: فرض کنیم f تابعی از X در Y باشد. چه وقت تابعی چون g از Y در X وجود دارد که به ازای هر x در X ، $g(f(x)) = x$ ؟ اگر I تابع همانی روی X ، یعنی تابع از X در X تعریف شده توسط $I(x) = x$ را نمایش

دهد، سؤال این است: چه وقت تابعی چون g از Y در X وجود دارد که $g \circ f = I$ ؟
 به اجمال، تابعی چون g را می‌خواهیم که «هر عنصر Y را به جای اولش پس بفرستد». برای
 اینکه این تابع g وجود داشته باشد، مسلماً f باید یک به یک باشد، یعنی f باید دارای
 این خاصیت باشد که اگر $x_1 \neq x_2$ آنگاه $f(x_1) \neq f(x_2)$. اگر f یک به یک باشد، این
 تابع g مسلماً وجود دارد و به صورت زیر تعریف می‌شود: گیریم y عنصری از Y باشد.
 اگر y در برد f باشد، آنگاه عنصری چون x در X وجود دارد که $y = f(x)$ ؛ و چون f
 یک به یک است چنین x یکتاست. تعریف می‌کنیم $g(y) = x$. اما، اگر y در برد f
 نباشد، $g(y)$ را عنصر دلخواهی از X تعریف می‌کنیم. واضح است که در این صورت
 $g \circ f = I$.

فرض کنیم f تابعی از X در Y باشد. گوییم f معکوس‌پذیر است هر گاه تابعی
 چون g از Y در X وجود داشته باشد که
 (۱) $g \circ f$ تابع همانی روی X باشد،
 (۲) $f \circ g$ تابع همانی روی Y باشد.

هم اکنون دیدیم که اگر g یی وجود داشته باشد که در (۱) صدق کند، آنگاه f یک به یک
 است. به طور مشابه، می‌توان دید که اگر g یی وجود داشته باشد که در (۲) صدق کند، برد
 f همه Y است. یعنی f پوشاست. پس، اگر f معکوس‌پذیر باشد، f یک به یک و پوشاست.
 بعکس، اگر f یک به یک و پوشا باشد، تابعی چون g از Y در X وجود دارد که در (۱)
 و (۲) صدق می‌کند. بعلاوه، این g یکتاست. این تابع، تابعی از Y در X است که با
 قاعده زیر تعریف می‌شود: اگر y در Y باشد، آنگاه $g(y)$ همان عنصر و تنها عنصر چون
 x در X است که به ازای آن $y = f(x)$.
 اگر f معکوس‌پذیر (یک به یک و پوشا) باشد، معکوس f یکتا تابع f^{-1} از Y در
 X است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$(۱') \quad f^{-1}(f(x)) = x, X \text{ در } x$$

$$(۲') \quad f(f^{-1}(y)) = y, Y \text{ در } y$$

مثال ۳. توابع در مثال ۲ را مجدداً بررسی می‌کنیم.

(الف) اگر $X = Y$ مجموعه اعداد حقیقی باشد و $f(x) = x$ ، آنگاه f معکوس-

پذیر نیست. زیرا f نه یک به یک است و نه پوشا.

(ب) اگر $X = Y$ صفحه اقلیدسی و f «دوران به اندازه 90° » باشد، آنگاه f هم

یک به یک و هم پوشاست. تابع معکوس f^{-1} «دوران به اندازه $90^\circ -$ » یا «دوران
 به اندازه 270° » است.

(پ) اگر X صفحه اقلیدسی، Y محور x_1 ، و $f((x_1, x_2)) = (x_1, 0)$ باشد،

آنگاه f معکوس‌پذیر نیست. زیرا، گرچه f پوشاست اما یک به یک نیست.

(ت) اگر X مجموعه اعداد حقیقی، Y مجموعه اعداد حقیقی مثبت، و $f(x) = e^x$

باشد، آنگاه f معکوس پذیر است. تابع f^{-1} همان تابع لگاریتم طبیعی است که در قسمت (ث) آمد: $e^{\log y} = y, \log e^x = x$.

(ث) معکوس تابع لگاریتم طبیعی همان تابع نمایی در قسمت (ت) است.

گیریم f تابعی از X در Y و f تابعی از X_0 در Y_0 باشد. f را يك تحديد (یا يك تحديد f به X_0) نامیم، هرگاه

(۱) X_0 زیر مجموعه‌ای از X باشد،

(۲) به ازای هر x در X_0 ، $f_0(x) = f(x)$.

بدیهی است وقتی که f يك تحديد f باشد، نتیجه می گیریم که Y_0 زیر مجموعه‌ای است از Y . نام «حدید» از این امر ناشی می شود که f و f دارای يك قاعده هستند و عمدتاً بدین لحاظ فرق دارند که دامنهٔ تعریف قاعده را به زیرمجموعهٔ X_0 از X محدود می کنیم. اگر تابع f و زیر مجموعهٔ دلخواهی چون X_0 از X به ما داده شود، برای ساختن يك تحديد f به X_0 روش ساده‌ای وجود دارد. تابعی چون f از X_0 در Y را بنا بر $f_0(x) = f(x)$ ، به ازای هر x در X_0 ، تعریف می کنیم. ممکن است تعجب آور باشد که چرا این تابع را تحديد f به X_0 ننمایدیم. دلیل این امر این است که در بحث مربوط به تحدیدهای f ، همانند تغییر دامنهٔ X خواهان آزادی تغییر هم دامنهٔ Y نیز هستیم.

مثال ۴. (الف) گیریم X مجموعهٔ اعداد حقیقی و f تابع از X در X تعریف شده توسط $f(x) = x^2$ باشد. در این صورت f تابعی معکوس پذیر نیست، اما اگر دامنهٔ آن را به اعداد حقیقی نامنفی محدود کنیم معکوس پذیر است. گیریم X_0 مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی و f_0 تابع از X_0 در X_0 تعریف شده توسط $f_0(x) = x^2$ باشد، در این صورت f_0 يك تحديد f به X_0 است. حال آنکه f نه يك به يك است و نه پوشا، درحالی که f هم يك به يك است و هم پوشا. بیان اخیر چیزی جز این نیست که هر عدد نامنفی، توان دوم دقیقاً يك عدد نامنفی است. تابع معکوس f_0^{-1} تابعی از X_0 در X_0 است که با $f_0^{-1}(x) = \sqrt{x}$ تعریف می شود.

(ب) گیریم X مجموعهٔ اعداد حقیقی و f تابع از X در X تعریف شده توسط $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ باشد. برد f همهٔ X و لذا f پوشاست. تابع f قطعاً يك به يك نیست، مثلاً $f(-1) = f(0)$. اما f روی X_0 ، مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی، يك به يك است چرا که مشتق f به ازای $x > 0$ مثبت است. وقتی که x بر روی همهٔ اعداد نامنفی تغییر کند، $f(x)$ بر روی همه اعداد حقیقی y ، با شرط $y \geq 1$ ، تغییر می کند. اگر Y_0 را مجموعهٔ همهٔ $y \geq 1$ و f_0 را تابع از X_0 در Y_0 تعریف شده توسط $f_0(x) = f(x)$ بگیریم، آنگاه f_0 تابعی يك به يك از X_0 بروی Y_0 است. از این قرار، f_0 تابع معکوسی

چون f^{-1} از Y_0 بروی X_0 دارد. هر فرمولی برای $f^{-1}(y)$ نسبتاً پیچیده است.

(ب) مجدداً X را مجموعه اعداد حقیقی و f را تابع سینوس، یعنی تابع از X در X تعریف شده توسط $f(x) = \sin x$ می‌گیریم. برد f مجموعه همه y هایی است که در $1 \leq y \leq -1$ صدق می‌کنند. از این رو، f پوشا نیست. چون $f(x + 2\pi) = f(x)$ می‌بینیم که f یک به یک هم نیست. اگر X_0 را فاصله $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ بگیریم، آنگاه f روی X_0 یک به یک است. گیریم Y_0 فاصله $1 \leq y \leq -1$ و f_0 تابع از X_0 در Y_0 تعریف شده توسط $f_0(x) = \sin x$ باشد. در این صورت f_0 یک به یک محدود f به فاصله X_0 است که هم یک به یک و هم پوشاست.

این درست طریق دیگری از بیان این واقعیت است که روی فاصله از $-\pi/2$ تا $\pi/2$ ، تابع سینوس هر مقدار بین -1 و 1 را تنها یک باز اختیار می‌کند. تابع f^{-1} تابع سینوس معکوس است:

$$f^{-1}(y) = \sin^{-1} y = \arcsin y.$$

(ت) مثالی عمومی از تحدیدی برای یک تابع، مثال زیر است. این مثال نمونه خیلی بهتری است از نوع تحدیدهایی که در این کتاب به کار خواهیم برد تا مثالهای بندهای (ب) و (پ). مثالی که در (الف) آمد حالت خاصی است از این مثال. گیریم X یک مجموعه f تابعی از X در خودش باشد. گیریم X_0 زیرمجموعه‌ای از X باشد. گوئیم X_0 تحت f پایاست، هرگاه به ازای هر x در X_0 ، عنصر $f(x)$ در X_0 باشد. اگر X_0 تحت f پایا باشد، آنگاه f با تحدید دامنه تعریفش به X_0 ، تابعی چون f از X_0 در خودش را القا می‌کند. اهمیت پایانی در این است که به وسیله تحدید f به X_0 می‌توان تابعی از X_0 در خودش به دست آورد و نه تابعی صرفاً از X_0 در X .

پ.۳. رابطه هم‌ارزی

رابطه هم‌ارزی نوع ویژه‌ای از روابط بین جفت عناصر یک مجموعه است. برای تعریف یک رابطه هم‌ارزی، ابتدا باید روشن کنیم که یک «رابطه» چیست.

به‌طور قطع هر تعریف رسمی از «رابطه» باید روابط آشنایی چون « $x = y$ »، « $x < y$ »، « x مادر y است»، و « x مسن‌تر از y است» را در برگیرد. اگر X یک مجموعه باشد، چه چیزی باعث تعیین رابطه‌ای بین جفتهای از عناصر X می‌شود؟ بدیهی است که پاسخ قاعده‌ای است برای تعیین اینکه آیا به‌ازای هر دو عنصر مفروض x و y از X ، x در رابطه داده شده با y قرار می‌گیرد یا نه. چنین قاعده R را، رابطه‌ای (دوتایی) روی X می‌نامیم. اگر بخواهیم اندکی دقیق‌تر باشیم، بهتر است به‌صورت زیر به پیش برویم. گیریم $X \times X$ مجموعه همه جفتهای مرتب (x, y) از عناصر X را نشان دهد. رابطه‌ای دوتایی روی X تابعی است چون R از $X \times X$ در مجموعه $\{0, 1\}$. به بیان دیگر، R به هر جفت مرتب (x, y) یا 0 یا 1 اختصاص می‌دهد. منظور اینست که اگر

$R(x, y) = 1$ ، آنگاه x در رابطه مفروض با y قرار می‌گیرد، و اگر $R(x, y) = 0$ ، در این رابطه قرار نمی‌گیرد.

اگر R رابطه‌ای دوتایی روی مجموعه X باشد، وقتی که $R(x, y) = 1$ ، نوشتن xRy به جای آن راحت‌تر است. رابطه‌ای دوتایی چون R

(۱) انعکاسی نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر x در X ، xRx ؛

(۲) متقارن است، هرگاه از xRy نتیجه بگیریم yRx ؛

(۳) متعدی نام دارد، هرگاه از xRy و yRz نتیجه شود xRz .

یک رابطه هم‌ارزی روی X عبارت است از یک رابطه دوتایی انعکاسی، متقارن، و متعدی روی X .

مثال ۵. (الف) روی هر مجموعه تساوی رابطه‌ای هم‌ارزی است. به بیان دیگر، اگر xRy به معنی $x = y$ باشد، آنگاه R رابطه‌ای هم‌ارزی است. زیرا $x = x$ ؛ اگر $x = y$ آنگاه $y = x$ ؛ و اگر $x = y$ و $y = z$ آنگاه $x = z$. رابطه « $x \neq y$ » متقارن است، اما نه انعکاسی است و نه متعدی.

(ب) X را مجموعه اعداد حقیقی می‌گیریم و فرض می‌کنیم xRy به معنی $x < y$ باشد. در این صورت R رابطه‌ای هم‌ارزی نیست. این رابطه متعدی است، اما نه انعکاسی است و نه متقارن، رابطه « $x \leq y$ » انعکاسی و متعدی است ولی متقارن نیست.

(پ) بگیریم E صفحه اقلیدسی و X مجموعه همه مثلثهای واقع در صفحه E باشد. در این صورت تشابه رابطه‌ای است هم‌ارزی روی X ، یعنی، « $T_1 \cong T_2$ » (T_1 متشابه T_2 است) رابطه‌ای هم‌ارزی روی مجموعه همه مثلثهای واقع در یک صفحه است.

(ت) بگیریم X مجموعه همه اعداد صحیح:

$$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

و فرض کنیم n عدد صحیح مثبت ثابتی باشد. رابطه R_n روی X را چنین تعریف می‌کنیم: $xR_n y$ اگر و تنها اگر $(x - y)$ بر n قابل قسمت باشد. رابطه R_n هم‌نهشتی به پیمانه n نامیده می‌شود. وقتی که $(x - y)$ بر n قابل قسمت باشد به جای $xR_n y$ معمولاً نوشته می‌شود

$$x \equiv y, \text{mod } n \quad (x \text{ هم‌نهشت } y \text{ به پیمانه } n \text{ است}).$$

به ازای هر عدد صحیح مثبت n ، هم‌نهشتی به پیمانه n رابطه‌ای هم‌ارزی روی مجموعه اعداد صحیح است.

(ث) بگیریم X و Y دو مجموعه و f تابعی از X در Y باشد. رابطه R روی X را چنین تعریف می‌کنیم: $x_1 R x_2$ اگر و تنها اگر $f(x_1) = f(x_2)$. بسادگی می‌توان نشان داد که R رابطه‌ای هم‌ارزی روی مجموعه X است، چنانکه خواهیم دید، این مثال عملاً همه روابط هم‌ارزی را در بر می‌گیرد.

فرض کنیم R رابطه‌ای هم‌ارزی روی مجموعه X باشد. اگر x عنصری از X باشد، فرض می‌کنیم $E(x;R)$ مجموعه همه عناصری مانند y از X را نشان دهد که xRy . مجموعه $E(x;R)$ رده هم‌ارزی x (به ازای رابطه هم‌ارزی R) نامیده می‌شود. چون R رابطه‌ای هم‌ارزی است، رده‌های هم‌ارزی خواص زیر را دارند:

(۱) همه $E(x;R)$ ها ناتهی هستند؛ زیرا، نظر به اینکه xRx ، عنصر x متعلق به $E(x;R)$ است.

(۲) گیریم x و y عناصر X باشند. چون R متقارن است، y به $E(x;R)$ تعلق دارد اگر و تنها اگر x متعلق به $E(y;R)$ باشد.

(۳) اگر x و y عناصر X باشند، رده‌های هم‌ارزی $E(x;R)$ و $E(y;R)$ یا مساوی‌اند و یا هیچ‌عنصر مشترکی ندارند. ابتدا، فرض کنیم xRy . گیریم z عنصری از $E(x;R)$ ، یعنی عنصری از X باشد که xRz . چون R متقارن است، همچنین داریم zRx . بنا به فرض xRy و چون R متعدی است داریم zRy ، پس yRz . این مطلب نشان می‌دهد که هر عنصر $E(x;R)$ عنصری از $E(y;R)$ نیز هست. بنا بر تقارن R ، همچنین می‌بینیم که هر عنصر $E(y;R)$ عنصری از $E(x;R)$ هم هست؛ پس $E(x;R) = E(y;R)$. حال استدلال می‌کنیم که اگر رابطه xRy برقرار نباشد، آنگاه $E(x;R) \cap E(y;R)$ تهی است. زیرا، اگر z در هر دو این رده‌های هم‌ارزی باشد، داریم xRz و yRz ؛ پس xRy و بدین سان xRy .

اگر \mathcal{P} را خانواده رده‌های هم‌ارزی برای رابطه هم‌ارزی R بگیریم، می‌بینیم که (۱) هر مجموعه‌ای از خانواده \mathcal{P} ناتهی است، (۲) هر عنصر x از X به یک و تنها یکی از مجموعه‌های خانواده \mathcal{P} تعلق دارد، (۳) xRy ، اگر و تنها اگر x و y هر دو متعلق به یک مجموعه از خانواده \mathcal{P} باشند. به طور خلاصه، رابطه هم‌ارزی R مجموعه X را به اجتماع خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های (ناتهی) نامتداخل تقسیم می‌کند. سوی دیگر قضیه نیز قابل استدلال است. فرض کنیم \mathcal{P} خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد که در شرایط (۱) و (۲) اخیر صدق می‌کنند. اگر بنا بر (۳) رابطه‌ای مانند R را تعریف کنیم، آنگاه R رابطه‌ای هم‌ارزی روی X است و \mathcal{P} خانواده رده‌های هم‌ارزی برای R است.

مثال ۶. ببینیم رده‌های هم‌ارزی برای رابطه‌های هم‌ارزی در مثال ۵ چه هستند. (الف) اگر R رابطه تساوی روی مجموعه X باشد، آنگاه رده هم‌ارزی عنصر x چیزی جز مجموعه $\{x\}$ ، که تنها عنصر آن x است، نیست.

(ب) اگر X مجموعه همه مثلثهای واقع در یک صفحه و R رابطه تشابه باشد، قریب تمامی آنچه که در وهله نخست می‌توان گفت این است که رده هم‌ارزی مثلث T متشکل است از همه مثلثهایی که با T متشابه هستند. یکی از وظایف هندسه مسطحه ارائه توصیفهای دیگری از این رده‌های هم‌ارزی است.

(پ) اگر X مجموعه اعداد صحیح و R_n رابطه «هم‌نهشتی به پیمانه n » باشد، آنگاه

دقیقاً n رده هم‌ارزی داریم. هر عدد صحیح x به‌طور یکتا به صورت $x = qn + r$ قابل بیان است که در آن q و r اعدادی صحیح‌اند و $0 \leq r \leq n-1$. این مطلب نشان می‌دهد که هر x دقیقاً با یکی از n عدد صحیح $0, 1, 2, \dots, n-1$ هم‌نهشت به پیمانه n است. رده‌های هم‌ارزی عبارتند از

$$E_0 = \{\dots, -2n, -n, 0, n, 2n, \dots\}$$

$$E_1 = \{\dots, 1-2n, 1-n, 1+n, 1+2n, \dots\}$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$E_{n-1} = \{\dots, n-1-2n, n-1-n, n-1, n-1+n, n-1+2n, \dots\}.$$

(ت) فرض کنیم X و Y دو مجموعه، f تابعی از X در Y ، و R رابطه‌ای هم‌ارزی باشد که چنین تعریف می‌شود: $x_1 R x_2$ اگر و تنها اگر $f(x_1) = f(x_2)$. رده‌های هم‌ارزی برای R درست بزرگترین زیرمجموعه‌های X هستند که روی آنها f «ثابت» است. توصیف دیگر این رده‌های هم‌ارزی بدین صورت است. این رده‌های هم‌ارزی در تناظر یک به یک با عناصر برد f قرار دارند. اگر y در برد f باشد، مجموعه همه x ‌های در X با شرط $f(x) = y$ رده‌ای هم‌ارزی برای R است؛ و این خود تناظری یک به یک بین عناصر برد f و رده‌های هم‌ارزی R تعریف می‌کند.

حال به توضیحی دیگر در باره روابط هم‌ارزی می‌پردازیم. با مفروض بودن رابطه‌ای هم‌ارزی چون R روی X ، گیریم \mathcal{F} خانواده رده‌های هم‌ارزی برای R باشد. وابستگی رده هم‌ارزی $E(x; R)$ به عنصر x ، تابعی چون f از X در \mathcal{F} (در حقیقت، بروی \mathcal{F}) تعریف می‌کند:

$$f(x) = E(x; R).$$

این نشان می‌دهد که R ، همچون در مثال ۵ (ت)، رابطه هم‌ارزی وابسته به تابعی است که دامنه آن X است. آنچه این مطلب می‌گوید این است که هر رابطه هم‌ارزی روی مجموعه X به صورت زیر تعیین می‌شود. قاعده‌ای (تابعی) چون f داریم که به هر عنصر x از X شیئی چون $f(x)$ را وابسته می‌سازد و $x R y$ اگر و تنها اگر $f(x) = f(y)$. اکنون باید $f(x)$ را به عنوان خاصیتی از x در نظر گرفت که آنچه رابطه هم‌ارزی انجام می‌دهد (اجمالاً) عبارت از گرد آوردن همه آن عناصری از X باشد که این خاصیت را مشترکاً دارا هستند. اگر شیء $f(x)$ رده هم‌ارزی x باشد، آنگاه آنچه گفته شد این است که خاصیت مشترک عناصر یک رده هم‌ارزی، تعلق داشتن آنها به یکی از رده‌های هم‌ارزی است. بدیهی است که این مطلب چیز زیادی نمی‌گوید. در حالت عمومی، تعداد بسیاری تابع متفاوت چون f وجود دارند که رابطه هم‌ارزی مفروضی را به صورت بالا تعیین می‌کنند و یکی از اهداف مورد نظر در مطالعه روابط هم‌ارزی یافتن یکی از این توابع f است که توصیفی ابتدایی و در عین حال با معنی از رابطه هم‌ارزی به دست دهد. در بخش

پ. ۵. خواهیم دید که در مورد چند رابطه هم‌ارزی خاصی که در جبر خطی پیش می‌آیند، این امر چگونه انجام می‌شود.

پ. ۴. فضاهای خارج قسمت

فرض کنیم V فضای برداری برداری هیأت F و W زیرفضایی از V باشد. در حالت عمومی، تعداد زیادی زیرفضا چون W' وجود دارند که مکمل W هستند؛ یعنی، زیرفضایی با این خاصیت هستند که $V = W \oplus W'$. اگر ضریبی داخلی روی V داشته باشیم و بعد W هم متناهی باشد، زیرفضای خاصی وجود دارد که احتمال نام زیرفضای مکمل «طبیعی» W برای آن مناسب است. این زیرفضا، مکمل متعامد W است. اما، اگر V بجز ساختار فضای برداری ساختار دیگری نداشته باشد، هیچ راهی برای گزینش زیرفضایی چون W' که بتوان آن را زیرفضای مکمل طبیعی W نامید وجود ندارد. با این وجود، از V و W می‌توان فضای برداری چون V/W را ساخت که به «خارج قسمت» V و W مشهور است و نقش مکمل طبیعی W را بازی کند. این فضای خارج قسمت زیرفضایی از V نیست، و لذا نمی‌تواند عملاً زیرفضایی مکمل برای W باشد، ولی فضای برداری است که تنها بر حسب V و W تعریف می‌شود و دارای این خاصیت است که با هر زیرفضای مکمل W ، مانند W' یکر یخت است.

گیریم W زیرفضایی از فضای برداری V باشد. اگر α و β بردارهایی از V باشند، گوئیم α هم‌نهشت β به پیمانه W است هر گاه بردار $(\alpha - \beta)$ در زیرفضای W باشد. اگر α هم‌نهشت β به پیمانه W باشد، می‌نویسیم

$$\alpha \equiv \beta, \quad \text{mod } W.$$

هم‌نهشتی به پیمانه W رابطه‌ای هم‌ارزی روی V است.

$$(۱) \quad \alpha \equiv \alpha, \quad \text{mod } W \quad \text{زیرا } \alpha - \alpha = 0 \text{ در } W \text{ است.}$$

(۲) اگر $\alpha \equiv \beta, \text{ mod } W$ ، آنگاه $\beta \equiv \alpha, \text{ mod } W$. زیرا، از آنجا که W زیر-فضایی از V است، بردار $(\alpha - \beta)$ در W است اگر و تنها اگر $(\beta - \alpha)$ در W باشد.

(۳) اگر $\alpha \equiv \beta, \text{ mod } W$ و $\beta \equiv \gamma, \text{ mod } W$ ، آنگاه $\alpha \equiv \gamma, \text{ mod } W$. زیرا اگر $(\alpha - \beta)$ و $(\beta - \gamma)$ در W باشند، آنگاه $(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) = \alpha - \gamma$ هم در W است.

رده‌های هم‌ارزی برای این رابطه هم‌ارزی به عنوان هم‌مجموعه‌های W شناخته می‌شوند. رده هم‌ارزی (هم‌مجموعه) برداری چون α چیست؟ این رده هم‌ارزی متشکل از همه بردارهای β در V است که $(\beta - \alpha)$ در W باشد، یعنی همه بردارهای β به صورت $\beta = \alpha + \gamma$ که γ در W باشد. بدین دلیل، هم‌مجموعه بردار α با

$$\alpha + W$$

نشان داده می‌شود. مناسب است که هم‌مجموعه α نسبت به W به عنوان مجموعه بردارهای حاصل از انتقال زیرفضای W توسط بردار α در نظر گرفته شود. برای تجسم

این هممجموعه‌ها، بهتر است خواننده حالت خاص زیر را در نظر بگیرد. گیریم V فضای R^2 و W زیرفضایی يك بعدی از V باشد. اگر V را به‌عنوان صفحهٔ اقلیدسی تصور کنیم، W خطی مستقیم ماربر مبدأ خواهد بود. اگر $\alpha = (x_1, x_2)$ برداری در V باشد، هممجموعهٔ $\alpha + W$ خط مستقیمی است که از نقطهٔ (x_1, x_2) می‌گذرد و موازی W است. دستهٔ همهٔ هممجموعه‌های W با V/W نشان داده خواهد شد. اکنون به صورت زیر، جمعی برداری و ضربی اسکالری روی V/W تعریف می‌کنیم:

$$(\alpha + W) + (\beta + W) = (\alpha + \beta) + W$$

$$c(\alpha + W) = (c\alpha) + W$$

به بیان دیگر، مجموع هممجموعهٔ α و هممجموعهٔ β عبارت است از هممجموعهٔ $(\alpha + \beta)$ و حاصل ضرب اسکالر c و هممجموعهٔ α عبارت است از هممجموعهٔ $c\alpha$. بردارهای متفاوت بسیاری از V نسبت به W هممجموعه‌های مساوی خواهند داشت و لذا باید نشان دهیم که جمع و ضرب فوق تنها به هممجموعه‌های مورد بحث وابسته‌اند. این بدین معنی است که باید احکام زیر را اثبات کنیم:

(الف) اگر $\alpha \equiv \alpha', \text{ mod } W$ و $\beta \equiv \beta', \text{ mod } W$ ، آنگاه

$$\alpha + \beta \equiv \alpha' + \beta', \text{ mod } W$$

(ب) اگر $\alpha \equiv \alpha', \text{ mod } W$ ، آنگاه $c\alpha \equiv c\alpha', \text{ mod } W$

نشان دادن این احکام ساده است. (۱) اگر $\alpha - \alpha'$ و $\beta - \beta'$ در W باشند، آنگاه چون $(\alpha + \beta) - (\alpha' + \beta') = (\alpha - \alpha') + (\beta - \beta')$ ، می‌بینیم که $\alpha + \beta$ همنهشت $\alpha' + \beta'$ به پیمانهٔ W است. (۲) اگر $\alpha - \alpha'$ در W و c اسکالری باشد، آنگاه $c\alpha - c\alpha' = c(\alpha - \alpha')$ در W است.

اکنون بسادگی می‌توان نشان داد که V/W همراه با جمع برداری و ضرب اسکالری تعریف شده در فوق فضایی برداری بر روی هیأت F تشکیل می‌دهد. البته هر يك از اصول يك فضای برداری را باید به‌طور مستقیم بررسی کرد. هر يك از خواص جمع برداری و ضرب اسکالری از خاصیت متناظر اعمال در V منتج می‌شوند. نکته‌ای را هم باید متذکر شد. بردار صفر در V/W هممجموعهٔ بردار صفر در V است. به بیان دیگر، W بردار صفر در V/W است.

فضای برداری V/W خارج قسمت (یا تفاضل) V و W نامیده می‌شود. يك تبدیل خطی طبیعی چون Q از V بر روی V/W وجود دارد. این تبدیل با $Q(\alpha) = \alpha + W$ تعریف می‌شود. باید در نظر داشت که عملهای در V/W را درست طوری تعریف کردیم که این تبدیل Q خطی باشد. توجه کنید که فضای پوچ Q دقیقاً زیر فضای W است. Q را تبدیل خارج قسمت (یا نگاشت خارج قسمت) از V بر روی W می‌نامیم. حال می‌توان رابطهٔ بین فضای خارج قسمت V/W و زیر فضاهایی از V را که مکمل W هستند به شرح زیر بیان کرد.

قضیه. گیریم W زیرفضایی از فضای برداری V و Q نگاشت خارج قسمت از V بروی V/W باشد. فرض کنیم W' زیرفضایی از V باشد. در این صورت $V = W \oplus W'$ اگر و تنها اگر تحدید Q به W' یک پیکریختی از W' بروی V/W باشد:

اثبات. فرض کنیم $V = W \oplus W'$. پس هر بردار α در V به طور یکتا به صورت $\alpha = \gamma + \gamma'$ که در آن γ در W و γ' در W' است، قابل بیان است. در این صورت $Q\alpha = Q\gamma + Q\gamma' = Q\gamma'$ یعنی $Q\alpha = Q\gamma' + W$ یا $\alpha + W = \gamma' + W$. این نشان می‌دهد که Q روی W' را بروی V/W می‌نگارد، یعنی $Q(W') = V/W$. علاوه بر Q روی W' یک به یک است؛ زیرا، فرض کنیم γ'_1 و γ'_2 دو بردار در W' باشند و $Q\gamma'_1 = Q\gamma'_2$. در این صورت $Q(\gamma'_1 - \gamma'_2) = 0$ ، پس $\gamma'_1 - \gamma'_2$ در W قرار دارد. این بردار همچنین در W' که مجزا از W است قرار دارد؛ پس $\gamma'_1 - \gamma'_2 = 0$. بنابراین تحدید Q به W' تبدیل خطی یک به یکی از W' بروی V/W است.

فرض کنیم W' چنان زیرفضایی از V باشد که Q روی W' یک به یک باشد و $Q(W') = V/W$. گیریم α برداری از V باشد. در این صورت برداری چون γ' در W' وجود دارد که $Q\gamma' = Q\alpha$ ؛ یعنی $Q\gamma' = \alpha + W$ یا $\gamma' + W = \alpha + W$. پس برداری چون γ در W هست که $\alpha = \gamma + \gamma'$. بنابراین $V = W + W'$. برای اینکه نشان دهیم W و W' مجزا هستند، فرض کنیم γ هم در W و هم در W' باشد. چون γ در W است، داریم $Q\gamma = 0$ ولی Q روی W' یک به یک است و لذا باید داشته باشیم $\gamma = 0$. بدین سان $V = W \oplus W'$. \square

آنچه که حقیقتاً این قضیه می‌گوید این است که W' مکمل W است اگر و تنها اگر W' زیرفضایی باشد که دقیقاً یک عضو از هر هممجموعه W را شامل باشد. این قضیه نشان می‌دهد که وقتی $V = W \oplus W'$ ، نگاشت خارج قسمت Q ، فضای W' را با V/W «یکی می‌کند». به طور خلاصه $(W \oplus W')/W$ به طریقی طبیعی با W' یکریخت است. نکته‌ای نسبتاً آشکار را هم باید متذکر شد. اگر W زیرفضایی از فضای برداری بعد متناهی V باشد، آنگاه

$$\text{بعد}(V) = \text{بعد}(V/W) + \text{بعد}(W).$$

این مطلب را می‌توان از قضیه بالا نتیجه گرفت. شاید آسانتر باشد مشاهده کنیم که آنچه این فرمول بعدی بیان می‌کند این است که

$$\text{بعد}(V) = \text{رتبه}(Q) + \text{پوچی}(Q)$$

هدف ما در اینجا بررسی دقیق فضاهای خارج قسمت نیست. لکن نتیجه‌ای بنیانی هست که لازم است اثبات آن ارائه شود.

قضیه. گیریم V و Z دو فضای برداری بردی هیأت F باشند. فرض کنیم T تبدیلی خطی از V بروی Z باشد. اگر W فضای پوچ T باشد، آنگاه Z با V/W یکریخت است.

اثبات. تبدیلی چون U از V/W در Z را به صورت $U(\alpha+W) = T\alpha$ تعریف می‌کنیم. باید نشان دهیم که U خوش تعریف است، یعنی اگر $\alpha+W = \beta+W$ ، آنگاه $T\alpha = T\beta$. این مطلب از این واقعیت ناشی می‌شود که W فضای پوچ T است؛ زیرا $\alpha+W = \beta+W$ بدین معنی است که $\alpha - \beta$ در W است و این امر صورت می‌پذیرد اگر و تنها اگر $T(\alpha - \beta) = 0$. این مطلب نه تنها نشان می‌دهد که U خوش تعریف است، بلکه نشان می‌دهد که U یک به یک نیز هست.

اکنون بررسی اینکه U خطی است و V/W را بروی Z می‌فرستد بسادگی میسر است، زیرا که T تبدیلی خطی از V بروی Z است. \square

پ. ۵. روابط هم ارزی در جبر خطی

حال برخی از روابط هم ارزی را که در متن این کتاب ظاهر می‌شوند، مورد توجه قرار می‌دهیم. مجموعه زیر درست نمونه‌ای از این روابط است.

(۱) گیریم m و n دو عدد صحیح مثبت و F یک هیأت باشد. X را مجموعه همه ماتریسهای $m \times n$ بر روی F می‌گیریم. در این صورت هم ارزی سطری، رابطه‌ای هم ارزی روی مجموعه X است. حکم « A هم ارز سطری B است» بدین معنی است که A می‌تواند از B توسط دنباله‌ای متناهی از عملهای سطری مقدماتی به دست آید. اگر به جای « A هم ارز سطری B است» بنویسیم $A \sim B$ ، آنگاه بررسی خواص زیر مشکل نیست: (۱) $A \sim A$ ؛ (۲) اگر $A \sim B$ ، آنگاه $B \sim A$ ؛ (۳) اگر $A \sim B$ و $B \sim C$ ، آنگاه $A \sim C$. درباره این رابطه هم ارزی چه می‌دانیم؟ در واقع، مطالب زیادی در این مورد می‌دانیم. مثلاً می‌دانیم که $A \sim B$ اگر و تنها اگر به ازای ماتریس $m \times m$ معکوس پذیری چون P ، $A = PB$ ؛ یا $A \sim B$ اگر و تنها اگر دستگاههای همگن معادلات خطی $AX = 0$ و $BX = 0$ دارای جوابهای مساوی باشند. همچنین اطلاعات بسیار واضحی درباره رده‌های هم ارزی این رابطه داریم. هر ماتریس $m \times n$ مانند A بایک و تنها یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی هم ارزی است. آنچه این مطلب می‌گوید این است که هر رده هم ارزی برای این رابطه دقیقاً شامل یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی R است؛ رده هم ارزی تعیین شده توسط R متشکل از همه ماتریسهای $A = PR$ است که در آن P ماتریس $m \times m$ معکوس پذیری است. این توصیف از رده‌های هم ارزی را می‌توان به طریق زیر هم تصور کرد. با مفروض بودن ماتریس $m \times n$ مانند A ، قاعده‌ای (تابعی) چون f داریم که به A ماتریس تحویل شده سطری پلکانی $f(A)$ را که هم ارز سطری A است وابسته می‌کند. رابطه هم ارزی سطری کاملاً توسط f تعیین می‌شود. زیرا، اگر $A \sim B$ اگر و تنها اگر $f(A) = f(B)$ ؛ یعنی، اگر و تنها اگر A و B دارای یک شکل تحویل شده سطری پلکانی باشند.

(۲) گیریم n عددی صحیح مثبت و F یک هیأت باشد. فرض می‌کنیم X مجموعه همه ماتریسهای $n \times n$ بر روی F باشد. آنگاه تشابه رابطه‌ای هم ارزی روی X است؛ هر ماتریس $n \times n$ مانند A متشابه خودش است؛ اگر A متشابه با B باشد، آنگاه B متشابه

با A است؛ اگر A متشابه با B و B متشابه با C باشد، آنگاه A متشابه با C است. درباره این رابطه هم‌ارزی نیز مطالب نسبتاً زیادی می‌دانیم. مثلاً، A متشابه با B است اگر و تنها اگر A و B روی F^n عملگرهای خطی مساوی را (احتمالاً) در پایه‌های مرتب‌متفاوتی نمایش دهند. اما، مطلبی عمیق‌تر از این می‌دانیم. هر ماتریس $n \times n$ مانند A ، بر روی F ، با یک و تنها یک ماتریس که در فرم گویاست (فصل ۷)، (بر روی F)، متشابه است. به بیان دیگر، هر رده هم‌ارزی برای رابطه تشابه دقیقاً شامل یک ماتریس است که در فرم گویاست. هر ماتریس در فرم گویا، توسط یک k تایی (p_1, \dots, p_k) از چند جمله‌ایهای تکین‌دارای این خاصیت که p_{j+1} چند جمله‌ای p_j را عادی می‌کند، $k-1, \dots, 1, j$ ، تعیین می‌شود. بدین‌سان، تابعی چون f داریم که به هر ماتریس $n \times n$ مانند A یک k تایی $f(A) = (p_1, \dots, p_k)$ را که در شرط تقسیم‌پذیری p_{j+1} بر p_j صدق می‌کند وابسته می‌سازد؛ و A و B متشابه‌اند اگر و تنها اگر $f(A) = f(B)$.

(۳) اینک حالت خاصی از همین مثال ۲. گیریم X مجموعه ماتریسهای 3×3 بر روی هیأتی چون F باشد. رابطه تشابه روی X را مورد بررسی قرار می‌دهیم. اگر A و B دو ماتریس 3×3 بر روی F باشند. آنگاه A و B متشابه‌اند اگر و تنها اگر دارای چند جمله‌ای سرشت‌نمای مساوی و چند جمله‌ای مینیمال مساوی باشند. به‌ازای هر ماتریس 3×3 چون A ، جفتی مانند (f, p) از دو چند جمله‌ای تکین داریم که

$$\text{deg } f = 3 \text{ (الف)}$$

(ب) p چند جمله‌ای f را عادی می‌کند،

f چند جمله‌ای سرشت‌نمای A است و p چند جمله‌ای مینیمال A . با مفروض بودن چند جمله‌ایهای تکین f و p بر روی F که در شرایط (الف) و (ب) صدق می‌کنند، به آسانی می‌توان ماتریسی 3×3 بر روی F به دست آورد که f و p را، بترتیب، به‌عنوان چند جمله‌ایهای سرشت‌نما و مینیمال خود داشته باشد. لب همه این مطالب چنین است. اگر رابطه تشابه روی مجموعه ماتریسهای 3×3 بر روی F را مورد بررسی قرار دهیم، رده‌های هم‌ارزی در تناظر یک به یک خواهند بود با جفت‌های مرتب (f, p) از چند جمله‌ایهای تکین بر روی F که در شرایط (الف) و (ب) صدق می‌کنند.

پ. ۶. اصل موضوع انتخاب

به‌بیانی مجمل، اصل انتخاب یک قاعده (یا اصل) فکر کردن است حاکی از اینکه با در دست داشتن خانواده‌ای از مجموعه‌های نا تهی، می‌توانیم از هر مجموعه یک عنصر را برگزینیم. برای بیان دقیق‌تر مطلب، فرض کنیم مجموعه نمایه‌ای چون A و به‌ازای هر α در A مجموعه‌ای وابسته و غیر تهی چون S_α در دست باشد. «انتخاب» یک عنصر از هر S_α به‌معنی ارائه قاعده‌ای است چون f که به هر α یک عنصر $f(\alpha)$ از مجموعه S_α را وابسته سازد. اصل انتخاب حاکی است که این امر امکان‌پذیر است، یعنی بادر دست داشتن

خانوادهٔ مجموعه‌های $\{S_\alpha\}$ تابعی چون f از A در

$$\bigcup_{\alpha} S_{\alpha}$$

یافت می‌شود که به ازای هر α ، $f(\alpha)$ در S_α باشد. این اصل هر چند مورد پذیرش اکثریت ریاضیدانان است در موارد بسیاری به هیچ وجه روشن نیست که تابع صریحی چون f را چگونه می‌توان به دست آورد.

اصل انتخاب پیامدهای تکان‌دهنده‌ای هم دارد. اکثر این نتایج، به مواد مورد بحث این کتاب یا ارتباط اندکی دارند یا هیچ ربطی پیدا نمی‌کنند. اما، یک پیامد شایسته ذکر است: هر فضای برداری پایه‌ای دارد. مثلاً هیأت اعداد حقیقی به عنوان یک فضای برداری بر روی هیأت اعداد گویا، دارای یک پایه است. به بیان دیگر، زیرمجموعه‌ای چون S از R وجود دارد که بر روی هیأت اعداد گویا مستقل خطی است و دارای این خاصیت است که هر عدد حقیقی ترکیب خطی گویایی از تعدادی متناهی از عناصر S است. ما در اینجا برای استنتاج این قضیهٔ مربوط به فضاهای برداری از اصل انتخاب خود را معطل نمی‌کنیم و برای دیدن اثباتی از آن، خواننده را به کتاب کلی^۱ که در فهرست مراجع آمده است، ارجاع می‌دهیم.

مراجع

- Halmos, P., *Finite-Dimensional Vector Spaces*, D. Van Nostrand Co., Princeton, 1958.
- Jacobson, N., *Lectures in Abstract Algebra*, II, D. Van Nostrand Co., Princeton, 1953.
- Kelley, John L., *General Topology*, D. Van Nostrand Co., Princeton, 1955.
- MacLane, S. and Birkhoff, G., *Algebra*, The Macmillan Co., New York, 1967.
- Schreier, O. and Sperner, E., *Introduction to Modern Algebra and Matrix Theory*, 2nd Ed., Chelsea Publishing Co., New York, 1955.
- van der Waerden, B. L., *Modern Algebra* (two volumes), Rev. Ed., Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1969.

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

action	عمل، کنش
add	اضافه کردن
adjacent	مجاور
adjoint	الحاقی
-operation	عمل الحاق
-operator	عملگر-
adjunction	الحاق
admissible	مجاز
algebra	جبر
algebraic	جبری
algebraically closed	بسته جبری
algorithm	الگوریتم
alternating	متناوب
analysis	آنالیز
angle	زاویه
annihilating polynomial	چند جمله‌ای پوچساز
annihilator	پوچساز
anti-isomorphism	پادیکریختی
application	کاربرد
approximation	تقریب- نزدیک سازی
arbitrary	دلخواه
argument	استدلال، آوند

array	آرایش
assertion	حکم
associativity law	قانون شرکت پذیری
augmented matrix	ماتریس افزوده
axial	محوری
axis	محور
axiom of choice	اصل موضوع انتخاب
base	پایه، مبنا [لگاریتم]
basis	پایه
bilinear	دوخطی
-form	فرم-
binary	دوتایی
binomial	دوجمله‌ای
calculation(→computation)	محاسبه
canonical	متعارف
character	سرشت
characterisation	سرشت‌نمایی
characteristic	سرشت‌نما
-polynomial	چندجمله‌ای-
-value	مقدار- [= مقدار ویژه]
-vector	بردار-
class	رده
classic	کلاسیک
classical adjoint	الحاقی کلاسیک
classification	رده‌بندی
codimension	همبعد
codomain	همدامنه
coefficient	ضریب
cofactor	همسازه
coincidence	انطباق
collection	گردآورده، دسته

column	ستون
-operation	عمل ستونی
-rank	رتبه ستونی
combination	ترکیب
linear-	- خطی
combinatorial analysis	آنالیز ترکیبی
commutative	جابجایی
commutator	جابجاگر
commute	جابجا شدن
companion	همدم
-matrix	ماتریس-
complement	مکمل
complex	مختلط
component	مؤلفه
composed function	تابع مرکب
composition	ترکیب [توابع]
computation(→calculation)	محاسبه
conductor	هادی
congruence	همنهشتی
-modulo n	- به پیمانه n
congruent	همنهشت
conjugate	مزدوج
-transpose	ترانهاد-
conjugation function	تابع تزویجی
consequence	پی‌آمد
consistant	سازگار
continuous	پیوسته
convergence	همگرایی
convergent	همگرا
converse	عکس
cóordinate	مختص
corollary	نتیجه
correspondence	تناظر
correspondent	متناظر

coset	هم مجموعه
countability	شمارش پذیری
countable	شمارش پذیر
criterion	معیار
cross product	ضرب خارجی
cyclic	دوری
-decomposition	تجزیه
-subspace	زیر فضای
-vector	بردار
decomposable	تجزیه پذیر
decompose	تجزیه کردن
decomposition	تجزیه
decrease	نزول کردن
decreasing	نزولی
deduction	قیاس، استنتاج
definite	معین
-integral	انتگرال
degenerate	تپهگون
degree	درجه
dependence	وابستگی
dependent	وابسته
derivative	مشتق
determinant	دترمینان
-rank	رتبه
diagonal	قطر، قطری
-matrix	ماتریس قطری
diagonalizable	قطری شدنی
-operator	عملگر
diagonalization	قطری کردن
differentiable	مشتق پذیر
differential	دیفرانسیل
differentiation	مشتق گیری، دیفرانسیل گیری
-transformation	تبدیل

dimension	بعد
direct	مستقیم
-sum	مجموع-
direction	سو
directional	سویی
disjoint	مجزا
distance	فاصله [دو نقطه]
distributive law	قانون بخش پذیری
divide	تقسیم کردن- بخش کردن، عاد کردن
divident	مقسوم
divisibility	بخش پذیری
division	تقسیم
divisor	مقسوم علیه
domain	دامنه
dot product	ضرب نقطه‌ای
double	مضاعف
-dual	دوگان-
dual	دوگان
-basis	پایه-
-space	فضای-
duality	دوگانی
echelon	پلکانی
eigenvalue	مقدار ویژه [= مقدار سرشت نما]
element	عنصر، عضو
elimination	حذف
-process	فرآیند-
empty	تهی
entire	تام
-space	فضای-
entry	درایه
equivalence	هم‌ارزی
-relation	رابطه-
equivalent	هم‌ارز

evaluation	محاسبه، تعیین مقدار
expand	بسط دادن
expansion	بسط
explicit	صریح
exponent	نما
exponential	نمایی
extension	گسترش
factor	سازه
factorization	تجزیه به سازه‌ها
field	هیأت
finite	متناهی
finitely generated	بطور متناهی تولید شده
form	فرم، صورت
formal	صوری
-power series	سری توانی-
formula	فرمول
free module	مدول آزاد
function	تابع
functional	تابع
generalization	تعمیم
generalize	تعمیم دادن، عمومیت دادن
generate	تولید کردن
generated	تولید شده
generator	مولد
graph	نمودار
greatest common divisor	بزرگترین مقسوم علیه مشترک
group	گروه
Hermitian [= self adjoint]	هرمیتی
-form	فرم-
homogeneous	همگن

homomorphic	همریخت
homomorphism	همریختی
hyperplane	ابرصفحه
hyperspace	ابرفضا
hypothesis	فرض
ideal	ایدآل
idempotence	خودتوانی
idempotent	خودتوان
-operator	عملگر-
identical	همانند، یکسان
identity	همانی [= عنصر همانی]، اتحاد
-function	تابع همانی
image	نگاره
imaginary	موهومی-انگاری
increasing	صعودی
inclusion	شمول
independence	استقلال
independent	مستقل
-variable	متغیر-
index	نمایه
indices	نمایه‌ها
induce	القا کردن
induced operator	عملگر القا شده
induction	استقرا
inductive	استقرایی
inequality	نامساوی
infinite	نامتناهی
inner product	ضرب داخلی
integration	انتگرال گیری
-by parts	- جزء به جزء
interpolation	درون یابی
intersection	اشترک
interval	فاصله

invariance	پایایی
invariant	پایا
-subspace	زیر فضای-
inverse	معکوس
inversion	انعکاس
invertible	معکوس پذیر
irreducible	تحویل ناپذیر
isomorphic	یکریخت
isomorphism	یکریختی
iterated	مکرر
iteration	تکرار
kernel	هسته
latent root	ریشهٔ راکد، [= مقدار سرشت نما]
leading	مقدم
-nonzero entry	درایهٔ غیر صفر-
least common divisor	کوچکترین مضرب مشترک
lemma	لم
length	طول
line	خط
linear	خطی
-combination	ترکیب-
-function	تابع-
-functional	تابعک-
-transformation	تبدیل-
linearly dependent	وابستهٔ خطی
linearly independent	مستقل خطی
lower triangular	پایین مثلثی
magnitude	بزرگی
main diagonal	قطر اصلی
map = mapping	نگاشت

matrix	ماتریس
maximal	ماکسیمال
-subspace	زیر فضای-
maximum	ماکسیمم
member	عضو
minimal	مینیمال
-polynomial	چند جمله‌ای-
minimum	مینیمم
minor	کهاد
module	مدول
monic polynomial	چند جمله‌ای تکین
motion	حرکت
multilinear function	تابع چند خطی
multiplicand	مضروب
multiplication	ضرب
multiplicity	چندگانگی
multiplier	ضریب، مضروب فیه
mutually perpendicular	دو به دو عمود بر هم
negative	منفی
nilpotent	پوچ توان
non-degenerate	ناتبتهگون
-bilinear form	فرم دو خطی-
non-overlapping	نامتداخل
non-singular	نامنفرد
norm	نرم
normal	نرمال
-operator	عملگر-
normalizer	نرمال کننده
normed	نرم دار
notation	نماد، نماد گذاری
n-tuple	n تایی
nullity	پوچی
null- space	فضای پوچ

odd	فرد
on	روی
one-one	يك به يك
onto	پوشا، بروی
operate	عمل کردن
operation	عمل
operator	عملگر
order	مرتبه
ordered basis	پایه مرتب
origin	مبدأ
orthogonal	متعامد
-basis	پایه-
-complement	مکمل-
-group	گروه-
-projection	تصویر-
-set	مجموعه-
-vector	بردار-
orthogonality	تعامد
orthogonalization	متعامدسازی
orthonormal	متعامد یکه
-basis	پایه-
-set	مجموعه-
over	بر روی
overlap	تداخل کردن
parallel	موازی
parallelogram law	قانون متوازی الاضلاع
period	دوره تناوب
periodic	دوره‌ای
permutation	جایگشت
-group	گروه جایگشتی
perpendicular	عمود
perpendicularity	عمود بودن، تعامد
polar	قطبی

polarization identity	اتحاد قطبی
pole	قطب
polynomial	چند جمله‌ای
positive	مثبت
-definite	معین-
--bilinear form	فرم دوخطی--
-form	فرم-
power series	رشته توانی
primary	اولیه
-decomposition	تجزیه-
prime	اول
principal ideal	ایده آل اصلی
process	فرآیند
product	حاصل ضرب، ضرب
project	طرح، تصویر کردن
projection	تصویر
-operator	عملگر-
proof	اثبات
proper	سره
-subset	زیر مجموعه-
-value	مقدار-
pseudo orthogonal group	گروه شبه متعامد
quadratic	درجه دوم
-form	فرم-
quotient	خارج قسمت
-space	فضای-
range	برد
rank	رتبه
rational	گویا
-form	فرم-
real	حقیقی
-line	خط-

-valued function	تابع حقیقی
reciproca	عکس [یک عدد]
rectangle	مستطیل
rectangular	مستطیلی
reduced	تحویل شده
reducibility	تحویل پذیری
reflection	انعکاس
reflective	انعکاسی
relation	رابطه
relatively prime	نسبت به هم اول
remainder	باقیمانده
representation	نمایش
representative	نمایشگر
resolution	تفکیک، حل
restrict	تحدید کردن
restricted	محدود شده
restriction	تحدید
-operator	عملگر-
reverse	وارونه، وارونه کردن
reversible	وارونه پذیر
rigid motion	حرکت صلب
ring	حلقه
root	ریشه
rotation	دوران
row	سطر
-equivalence	هم ارز سطری
-operation	عمل سطری
-rank	رتبه سطری
-reduced	تحویل شده سطری
-- echelon	-- پلکانی
-space	فضای سطری
-vector	بردار سطری
r-shuffle	

scalar	اسکالر
-polynomial	چند جمله‌ای-
-product	ضرب-
self adjoint [= Hermitian]	خود الحاق
semi-simple operator	عملگر نیم ساده
separating vector	بردار جدا کننده
separation	جدا سازی
sequence	دنباله
series	رشته، سری
sesqui-linear	یک و نیم خطی
-form	فرم-
set	مجموعه
shift	انتقال
shuffle	بر
sign	علامت
signature	نشان
signum	علامت
similarity	تشابه
simultaneous	همزمان
-diagonalization	قطری سازی-
-triangulation	مثلث بندی-
singular	منفرد
-matrix	ماتریس-
-transformation	تبدیل-
skew	کج
-symmetric	متقارن-
-bilinear form	فرم دو خطی --
solution	جواب
space	فضا
span	پدید آوردن
spanned by	پدید آمده توسط
spanning	پدید آورنده
spatial	فضایی
spectral	طیفی

-resolution	تفکیک-
-value	مقدار-
spectrum	طیف
square	مربع، مجذور
-matrix	ماتریس مربعی
-root	جذر، ریشهٔ دوم
standard	استانده
-basis	پایه-
strict	اکید
structure	ساختار-ساخت
stuffer	پرکننده [= T-هادی]
subdivision	زیربخش
subfield	زیرهیئات
submatrix	زیرماتریس
submodule	زیرمدول
subscript	شاخص زیر
subset	زیرمجموعه
subspace	زیرفضا
substitution	جایگزینی
subtraction	تفریق
succession	توالی
successive	متوالی
sum	مجموع
symbol	نماد
symmetric	مقارن
-bilinear form	فرم دوخطی-
-group	گروه مقارن-
symmetry	تقارن
T-conductor	T-هادی
tensor	تانسور
-product	ضرب تانسوری
term	جمله، اصطلاح
theorem	قضیه

theory	نظریه
trace	رد
-of linear transformation	- تبدیل خطی
-of matrix	- ماتریس
transformation	تبدیل
transitive	متعدی
transitivity	تعدی
translation	انتقال
transpose	ترانهاده
transposition	ترانپس
triangulable	مثلثی شونده
triangular	مثلثی
triangulation	مثلث بندی
trivial	بدیهی
unimodular	تک مدولی
union	اجتماع
unique	یکتا
unit	یکه
unitary	یکانی
-diagonalization	قطری کردن-
unity	یکگانی
upper triangular	بالا مثلثی
validity	اعتبار
value	مقدار
vanish	صفر شدن
variable	متغیر
variation	تغییر
vector	بردار
-space	فضای برداری

wedge product
well-defined

ضرب گره‌ای
خوش تعریف

zero

صفر

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

array	آرایش
r-shuffle	آر-بر [r-بر]
free	آزاد
analysis	آنالیز
combinatorial-	- ترکیبی
argument	آوند
hyperplane	ابر صفحه
hyperspace	ابر فضا
identity	اتحاد
polarization-	- قطبی
proof	اثبات
union	اجتماع
standard	استانده
argument	استدلال
induction	استقرا
inductive	استقرایی
independence	استقلال
deduction	استنتاج
scalar	اسکالر
intersection	اشتراک
term	اصطلاح

axiom	اصل موضوع
principal	اصلی
add	اضافه کردن
validity	اعتبار
augmented	افزوده
strict	اکید
adjunction	الحاق
adjoint	الحاقی
classical-	- کلاسیک
induce	الفا کردن
algorithm	الگوریتم
shift	انتقال
translation	انتقال
integral	انتگرال
definite-	- معین
integration	انتگرال گیری
-by parts	- جزء به جزء
coincidence	انطباق
reflection	انعکاس
inversion	انعکاس
imaginary	انگاری [= موهومی]
prime	اول
primary	اولیه
ideal	ایدال
principal-	- اصلی
remainder	باقیمانده
upper triangular	بالامثلثی
divisibility	بخش پذیری
trivial	بدیهی
shuffle	بر
range	برد
vector	بردار

separating-	جداکننده -
cyclic-	دوری -
row-	سطری -
orthogonal-	متعامد -
over	بر روی
greatest common divisor	بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک
magnitude	بزرگی
algebraically closed	بسته جبری
expansion	بسط
expand	بسط دادن
dimension	بعد
anti-isomorphism	پاد یکریمختی
invariant	پایا
invariance	پایایی
base	پایه
basis	پایه
dual-	دوگان -
orthogonal-	متعامد -
orthonormal-	متعامد یکه -
ordered-	مرتب -
lower triangular	پایین مثلثی
distributive	پخش پذیری
spanned by	پدید آمده توسط
span	پدید آوردن
spanning	پدید آورنده
stuffer	پرکننده
echelon	پلکانی
nilpotent	پوچ توان
annihilator	پوچساز
nullity	پوچی
onto	پوشا
continuous	پیوسته

function	تابع
conjugation-	- ترویجی
multilinear-	- چندخطی
linear-	- خطی
composed-	- مرکب
functional	تابعك
linear-	- خطی
entire	تام
tensor	تانسور
transformation	تبدیل
linear-	- خطی
differentiation-	- مشتق گیری [= دیفرانسیل گیری]
singular-	- منفرد
degenerate	تبهگون
decomposition	تجزیه
primary-	- اولیه
factorization	تجزیه به سازه ها
decomposable	تجزیه پذیر
decompose	تجزیه کردن
restriction	تحدید
reduced	تحویل شده
row-	- سطری
-- echelon	-- پلکانی
irreducible	تحویل ناپذیر
overlap	تداخل کردن
transpose	ترانهاد
conjugate-	- مزدوج
transposition	ترانهمش
combination	ترکیب
linear-	- خطی
composition	ترکیب [توابع]
conjugation	ترویجی
similarity	تشابه
projection	تصویر

orthogonal-	- متعامد
project	تصویر کردن
orthogonality[= perpendicularity]	تعامد
transitivity	تعدی
generalization	تعمیم
generalize	تعمیم دادن
evaluation	تعیین مقدار [= محاسبه]
variation	تغییر
subtraction	تفریق
resolution	تفکیک
spectral-	- طیفی
symmetry	تقارن
approximation	تقریب
division	تقسیم
divide	تقسیم کردن، بخش کردن، عاد کردن
iteration	تکرار
unimodular	تک مدولی
correspondence	تناظر
succession	توالی
generate	تولید کردن
empty	تهی
T-conductor	T- هادی [T- هادی]
commute	ابجا شدن
commutator	جا بجا گر
commutative	جا بجایی
substitution	جا یگزینی
permutation	جا یگشت
algebra	جبر
algebraic	جبری
separation	جداسازی
term	جمله
solution	جواب

polynomial	چند جمله‌ای
annihilating-	- پوچساز
monic-	- تکین
characteristic-	- سرشت نما
multiplicity	چندگانگی
product	حاصل ضرب ، ضرب
elimination	حذف
motion	حرکت
rigid-	- صلب
real	حقیقی
assertion	حکم
resolution	حل
ring	حلقه
quotient	خارج قسمت
line	خط
real-	- حقیقی
linear	خطی
self adjoint	خودالحاق
idempotent	خودتوان
idempotence	خودتوانی
well defined	خوش تعریف
domain	دامنه
determinant	دترمینان
entry	درایه
nonzero-	- غیر صفر
leading-	- - مقدم
degree	درجه
quadratic	درجه دوم
interpolation	درون یابی
arbitrary	دلخواه

sequence	دنباله
binary	دوتایی
binomial	دوجمله‌ای
rotation	دوران
periodic	دوره‌ای
period	دوره تناوب
cyclic	دوری
dual	دوگان
double-	- مضاعف
duality	دوگانی
differential	دیفرانسیل
differentiation	- گیری [= مشتق گیری]
relation	رابطه
equivalence-	- هم‌ارزی
rank	رتبه
determinant-	- دترمینان
column-	- ستونی
row-	- سطری
trace	رد
of linear transformation	- تبدیل خطی
of Matrix-	- ماتریس
class	رده
classification	رده‌بندی
series	رشته
power-	- توانی
Formal power-	- توانی صوری
root	ریشه
latent-	- راکده، [= مقدار سرشت‌نما]
angle	زاویه
subdivision	زیربخش
subspace	زیرفضا

cyclic-	- ی دوری
maximal-	- ی ماکسیمال
submatrix	زیر ماتریس
subset	زیر مجموعه
proper-	- سره
submodule	زیر مدول
structure	ساختار
consistant	سازگار
factor	سازه
column	ستون
character	سرشت
characteristic	سرشت نما
characterization	سرشت نمایی
proper	سره
row	سطر
direction	سو
directional	سویی
subscript	شاخص زیر
associativity	شرکت پذیری
countable	شمارش پذیر
countability	شمارش پذیری
inclusion	شمول
explicit	صریح
increasing	صعودی
zero	صفر
vanish	صفر شدن
multiplication	ضرب
product	ضرب، حاصل ضرب
tensor-	- تانسوری

cross-	- خارجی
inner-	- داخلی
wedge-	- گوه ای
dot-	- نقطه ای
coefficient	ضریب
multiplier	ضریب [= مضروب فيه]
project	طرح
length	طول
spectrum	طیف
member	عضو [= عنصر]
converse	عکس
sign[= signum]	علامت
action	عمل
operation	عمل
adjoint-	- الحاق
column-	- ستونی
row	- سطری
operator	عملگر
adjoint-	- الحاقی
induced-	- القاء شده
projection-	- تصویر
idempotent-	- خود توان
diagonalizable-	- قطری شدنی
normal-	- نرمال
semi-simple-	- نیم ساده
sesqui-linear-	- یک و نیم خطی
perpendicular	عمود
perpendicularity	عمود بودن
element	عنصر [= عضو]
identity-	- همانی

interval	فاصله [اعداد حقیقی]
distance	فاصله [دو نقطه]
process	فرآیند
elimination-	- حذف
odd	فرد
hypothesis	فرض
form	فرم
multilinear-	- چندخطی
quadratic-	- درجه دوم
bilinear-	- دوخطی
symmetric-	- متقارن
skew-symmetric-	- متقارن کج
positive definite-	- معین مثبت
non-degenerate-	- ناتبهگون
Hermitian-	- هرمیتی
formula	فرمول
space	فضا
vector-	- برداری
null-	- ی پوچ
entire-	- ی تام
quotient-	- ی خارج قسمت
dual-	- ی دوگان
row-	- ی-طری
spatial	فضایی
theorem	قضیه
pole	قطب
polar	قطبی
diagonal	قطر
main-	- اصلی
diagonalizable	قطری شدنی
diagonalization	قطری کردن
unitary-	- یکانی

application	کاربرد
skew	کج
classical	کلاسیک
action	کنش
least common divisor	کوچکترین مضرب مشترک
minor	کهاد
collection	گرد آورده
group	گروه
permutation-	- جایگشتی
pseudo-orthogonal-	- شبه متعامد
orthogonal-	- متعامد
symmetric-	- متقارن
extension	گسترش
rational	گویا
lemma	لم
matrix	ماتریس
diagonal-	- قطری
square-	- مربعی
singular-	- منفرد
companion-	- همدم
maximal	ماکسیمال
maximum	ماکسیمم
origion	مبدأ
base	مبنا [لگاریتم]
canonical	متعارف
orthogonal	متعامد
orthogonalization	متعامدسازی
orthonormal	متعامدیکه
transitive	متعدی
variable	متغیر

independent-	مستقل -
symmetric	مقارن
skew-	کج -
correspondent	متناظر
alternating	متناوب
finite	متناهی
parallelogram	متوازی الاضلاع
successive	متوالی
positive	مثبت
triangulation	مثلث بندی
triangular	مثلثی
triangulable	مثلثی شونده
admissible	مجاز
adjacent	مجاور
disjoint	مجزا
sum	مجموع
direct-	مستقیم -
set	مجموعه
orthogonal-	متعامد -
orthonormal-	یکه - -
calculation	محاسبه
computation	محاسبه
evaluation	محاسبه [= تعیین مقدار]
axis	محور
axial	محوری
coordinate	مختص
complex	مختلط
module	مدول
free-	آزاد -
square	مربع
order	مرتبه
composed	مرکب
conjugate	مزدوج
linear-	خطی -

rectangle	مستطیل
rectangular	مستطیلی
independent	مستقل
linearly-	- خطی
direct	مستقیم
derivative	مشتق
differentiable	مشتق پذیر
differentiation	مشتق گیری، دینفرانسیل گیری
double	مضاعف
multiplicand	مضروب
multiplier	مضروب فيه [= ضرب]
inverse	معکوس
invertible	معکوس پذیر
criterion	معیار
definite	معین
positive-	- مثبت
characteristic value	مقدار سرشت نما [= مقدار ویژه]
proper value	مقدار سره
spectral value	مقدار طیفی
eigen value	مقدار ویژه
leading	مقدم
divident	مقسوم
divisor	مقسوم علیه
iterated	مکرر
complement	مکمل
orthogonal-	- متعامد
singular	منفرد
negative	منفی
parallel	موازی
generator	مولد
component	مؤلفه
imaginary	موهومی [= انگاری]
minimal	مینیمال
minimum	مینیمم

non-degenerate	ناتبتهگون
non-empty	ناتهی
non-overlapping	نامتداخل
infinite	نامتناهی
inequality	نامساوی
non-singular	نامنفرد
corollary	نتیجه
norm	نرم
normal	نرمال
normalizer	نرمال‌کننده
normed	نرم‌دار
decrease	نزول کردن
decreasing	نزولی
relatively prime	نسبت به هم اول
signature	نشان
theory	نظریه
image	نگاره
map[= mapping]	نگاشت
exponent	نما
symbol	نماد
notation	نماد
notation-	- گذاری
representation	نمایش
representative	نمایشگر
index	نمایه
indices	نمایه‌ها
exponential	نمایی
graph	نمودار
dependence	وابستگی
linearly-	- خطی
dependent	وابسته
reverse	وارونه
reversible	وارونه‌پذیر

reverse	وارونه کردن
conductor	هادی
Hermitian	هرمیتی
kernel	هسته
equivalent	هم‌ارز
equivalence	هم‌ارزی
row-	- سطری
identity	همانی [= عنصر همانی]، اتحاد
codimension	همبعد
codomain	همدامنه
companion	همدم
homomorphic	همریخت
homomorphism	همریختی
simultaneous	همزمان
cofactor	همسازه
convergent	همگرا
convergence	همگرایی
homogeneous	همگن
coset	هم مجموعه
congruent	همنهشت
congruence	همنهشتی
-modulo n	- به پیمانه n
field	هیأت
unitary	یکانی
one-one	یک به یک
unique	یکتا
isomorphic	یکریخت
isomorphism	یکریختی
unit	یکه
unity	یگانی

فهرست راهنما

- ۳- بر ۲۲۳
آزاد، مدول- ←
- ايرضا ۱۳۴، ۱۱۴
اتحاد قطبی ۳۵۵، ۴۷۲
اجتماع ۴۹۶
استانده
- پایه- ←
ضرب داخلی- ←
استقلال خطی ۵۶، ۶۴
اسکالر ۶
چندجمله‌ای- ←
اشتراک ۴۹۶
پوچساز- ←
زیرفضاها ۵۱
اصل (موضوع) انتخاب ۵۰۹
اعداد
- حقیقی ۶
صحیح ۷
مثبت ۷
گویا ۷
مختلط ۶
- اعمال ستونی مقدماتی ۳۸، ۳۳۴
- اعمال سطری مقدماتی ۱۱، ۳۲۹
افزوده، ماتریس- ←
اقلیدس، فضای-ی- ←
الحاقی
- تبدیل خطی ۳۸۲
- کلاسیک ۱۹۴ (تمرین ۳)، ۲۰۸
ایدآل ۱۷۱
- اصلی ۱۷۱
- پرکننده ۲۶۳
- بالامثلثی، ماتریس- ←
بخش پذیری چندجمله‌ایها ← تقسیم پذیری
چندجمله‌ایها
- بر ۲۲۳
برد ۹۵
- تابع ۴۹۷
- تبدیل خطی ۹۶
بردار
- جداکننده ۳۱۷ (تمرین ۱۴)
- دوری ۲۹۷
- سرشت نما ۲۳۹
- سطری ۵۴
- های متعامد ۳۶۱، ۴۷۳

- زیر مجموعه ۱۳۴
 - مجموع ۱۴۰ (تمرین ۱۱)
 - بوچی تبدیل خطی ۹۶
 - پوشا ۴۹۷
 تابع ۴۹۷
 برد -
 - خطی ۱۸۵
 - خطی متناوب ۱۸۸، ۲۲۵
 - تحدید ۵۰۰
 - چند جمله ایها ۴۴
 - چند خطی ۲۱۶
 - خطی ۹۱، ۱۲۹، ۳۷۶
 - دترمینان ۱۸۸
 - معکوس پذیر ۴۹۹
 - همانی ۴۹۸
 - معکوس -
 تابع خطی ۱۲۹
 تانسور ۲۱۶
 ضرب -
 تبدیل
 - خارج قسمت ۵۰۶
 - لورنتز ۴۰۲ (تمرین ۱۵)، ۴۸۹
 - مشتق گیری ۹۲
 - صفر ۹۱
 - یکانی ۴۵۷
 تبدیلهای خطی ۹۱، ۱۰۳
 الحاقی -
 برد -
 بوچی -
 - بوچ توان ۲۸۹
 - خارج قسمت ۵۰۶
 - خودالحاق ۳۸۶، ۴۰۶
 - قطری شدنی ۲۴۱
- ترکیب خطی -ها -
 T- بوچساز -
 مختص -
 بزرگترین مقسوم علیه مشترك ۱۷۳
 بسته جبری، هیأت -
 بسطهای لاپلاس ۲۳۳
 بعد ۶۱
 - فضای برداری ۶۱
 - متناهی ۵۷
 فرمول - ۶۱
 پایا
 زیر فضای -
 زیر مجموعه -
 سازه های -
 مجموع مستقیم -
 پایه ۵۷
 - استانده ۵۸
 - برای مدول ۲۱۴
 دوگان ۱۳۱، ۲۱۶
 - فضای برداری ۵۷
 - متعامد ۳۶۴
 - یکه ۳۶۴
 - مرتب ۶۸
 تغییر -
 پرکننده - ایدآل پرکننده
 بوچ توان
 تبدیل خطی -
 عملگر -
 ماتریس -
 بوچساز
 - اشتراك ۱۴۰ (تمرین ۱۱)
 - بردارها - T- بوچساز
 - زیرفضاها ۱۳۵

- کیلی ۴۰۱ (تمرین ۷)
 - متعامد ۳۹۳
 - مثبت ۴۲۵
 - مثلثی شونده ۴۶۴، ۴۰۸
 - معکوس پذیر ۱۰۶
 - نامنفرد ۱۰۷
 - نامنفی ← عملگر نامنفی
 - نرمال ۴۰۳
 - نیم ساده ← عملگر نیم ساده
 - یکانی ۳۹۱
 - تجزیه دوری ←
 - تجزیه قطبی ←
 - ترانهادی ←
 - جزء قطری شدن ←
 - چند جمله ایهای مینیمال ←
 - دترمینان ←
 - رتبه ←
 - رد ←
 - ضرب ←
 - ماتریس ←
 - در پایه متعامد بکه ←
 - تجزیه اولیه
 - اولیه چند جمله ایها ۱۷۸
 - چند جمله ایها به سازه های اول ۱۷۷
 - دوری تبدیلیهای خطی ۳۰۴
 - قطبی تبدیل خطی ۴۴۱
 - قضیه اولیه ←
 - تحدید
 - تابع ۵۰۰
 - عماگری ←
 - تحویل شده
 - سطری ۱۵
 - پلکانی ۱۸، ۷۶
 - تحویل ناپذیر، چند جمله ای ←
 - ترانهادی
 - تبدیل خطی ۱۴۷
 - ماتریس ۱۴۹
 - مزدوج ماتریس ۳۵۳
 - ترکیب
 - توابع ۴۹۸
 - خطی بردارها ۴۵
 - خطی معادلات ۹
 - تزویجی ۳۵۹ (تمرین ۱۳)
 - تشابه ماتریسها ۱۲۵
 - تصویر
 - فضای برداری ۲۷۵
 - متعامد ۳۷۰
 - تغییر پایه ۱۲۱
 - تفکیک
 - طیفی ۴۳۳، ۴۴۴
 - همانی ۴۳۴، ۴۴۴
 - تقریب ۳۶۸
 - تقسیم پذیری چند جمله ایها ۱۶۸
 - T -پوچساز ۲۶۳، ۲۶۴، ۲۸۹
 - T -مجاز ۳۰۳
 - T -هادی ۲۶۳، ۲۶۴، ۳۰۴
 - جابجایی
 - جبر ←
 - حلقه ←
 - گروه ←
 - جایگشتها ۱۹۷
 - ی زوج ۱۹۸
 - ی فرد ۱۹۸
 - ضرب ←
 - علامت ←
 - جبر ۱۵۳
 - جابجایی ۱۵۴

- خارج قسمت
تبدیلهای خطی -- ←
فضاهای برداری ۵۰۶
عملگر -- ←
خارجی، ضرب -- ←
خطی، تابع -- ←
خودالحاق
تبدیلهای خطی -- ←
جبر -- ←
عملگر -- ←
فرم -- ←
ماتریس -- ←
خودتوان، عملگر -- ←
دترمینان ۱۸۳-۲۳۵
تابع -- ←
تبدیل خطی ۲۲۴
رتبه -- ←
درایه ماتریس ۱۱
درجه
چندجمله‌ایها ۱۵۶
فرم چندخطی ۲۱۶
فرم-دوم -- ←
درون‌یابی، ۱۶۱
دستگاه معادلات
خطی، ۷
هم‌ارز ۹
همگن ۸
دلتهای کرونگر ۱۵
دنباله بردارها ۶۴
دوخطی، فرم -- ←
دوران ۷۲، ۴۰۰ (تمرین ۴)
دوری
بردار -- ←
- خطی ۱۵۳
خودالحاق ۴۴۴
رشته‌های توانی صوری ۱۵۵
جزء قطری‌شدنی تبدیل خطی ۲۸۹
چندجمله‌ایها
تابع -- ←
تجزیه اولیه -- ←
تجزیه به‌سازهای اول -- ←
تقسیم پذیری -- ←
ی اسکارلر ۱۵۶
ی اول ۱۷۶
ی تحویل پذیر ۱۷۶
ی تحویل ناپذیر ۱۷۶
ی تکین ۱۵۶
ی سرشت‌نما ۲۴۰
ی مینیمال تبدیلهای خطی ۲۵۰
ماتریسها ۲۵۰
درجه -- ←
ریشه‌های -- ←
صفرهای -- ←
ضرایب -- ←
مشتق -- ←
چندخطی
تابع -- ←
فرم -- ←
حاصلضرب -- ضرب
حرکت صلب ۴۰۲ (تمرین ۱۴)
حقیقی، اعداد -- ←
حلقه ۱۸۳
جا‌بجایی ۱۸۳، ۱۸۴
گراسمان ۲۳۵

- زیر فضای —
 قضیه تجزیه —
 دوگان
 پایه —
 فضای —
 مدول —
 مجموعه —
 زیر ماتریس ۲۱۳ (تمرین ۹)
 زیر مجموعه
 پوچساز —
 پایا ۵۰۱ —
 سره ۴۹۶ —
 زیر هیأت ۶
 ژوردان، فرم — ماتریس —
 سازه‌های پایای ماتریس ۳۱۲، ۳۴۰
 ستونی
 اعمال —
 رتبه —
 هم‌ارزی —
 سرشت‌نما
 بردار —
 چند جمله‌ای —
 فضای —
 مقدار —
 سرشت‌نمایی هیأت ۷
 سطری
 اعمال —
 بردار —
 رتبه —
 فضای —
 هم‌ارزی —
 زیر فضای ۴۸
 پوچساز —
 ی پایا ۲۶۰، ۲۷۰، ۴۰۶
 ی پدید آمده ۵۱
 ی T-مجاز ۳۰۳
- رابطه ۵۰۱
 هم‌ارزی ۵۰۲
 رتبه
 تبدیل خطی ۹۶
 دترمینان ۲۱۳ (تمرین ۹)
 ستونی ماتریس ۹۷، ۱۵۰
 سطری ماتریس ۷۵، ۹۷، ۱۵۰
 فرم دوخطی ۴۶۸
 ماتریس ۱۵۰
 مدول ۲۱۵
 رد
 تبدیل خطی ۱۴۱ (تمرین ۱۵)
 ماتریس ۱۳۰
 رشته
 توانی ۱۵۵
 توانی صوری ۱۵۵
 ریشه
 چند جمله‌ایها، ۱۶۸
 خانواده‌ای از عملگرها، ۴۴۲
 دوم — جذر
 راکد — مقدار سرشت‌نما
 زیر فضایها، ۴۸
 پوچساز —
 ی پایا ۲۶۰، ۲۷۰، ۴۰۶
 ی پدید آمده ۵۱
 ی T-مجاز ۳۰۳

- شبه متعامد، گروه —
 شرکت پذیری ۵
 — جمع برداری ۴۲
 — ضرب ماتریسها ۲۸، ۱۲۰
- صفر
 تبدیل —
 زیرفضاهای —
 — های چندجمله‌ایها ۱۶۸
 ماتریس —
- ضرایب چندجمله‌ایها، ۱۵۶
 ضرب، حاصل ضرب
 — تانسوری ۲۱۹
 — تبدیلهای خطی ۱۰۳
 — جایگشتها ۲۰۰
 — خارجی ۲۲۸، ۲۳۰
 — داخلی ۳۵۱
 — استانده ۳۵۲، ۳۵۳
 — ضرب گوه‌ای — ضرب داخلی
 — ماتریسها ۲۵، ۱۱۹
 شرکت پذیری —
 — نقطه‌ای — ضرب داخلی
 — فرم درجه دوم — داخلی —
 فضای داخلی —
 ماتریس — داخلی —
- طیف، ۴۳۳
 طیفی، ۴۳۳
 — تمکیک —
 قضیه —
 نظریه —
- عضو — عنصر
 علامت جایگشتها ۱۹۸
 عمل — اعمال
 عملگر ۱۰۳
- پوچ توان ۲۸۹
 — تحدیدی ۲۶۱
 — تصویر ۲۷۵
 — خارج قسمت ۵۰۶
 — خودالحاق ۳۸۶، ۴۰۶
 — خودتوان — تصویر فضاهای برداری
 — قطری شدنی ۲۴۱
 — مثبت ۴۲۵
 — نامنفی ۴۲۵، ۴۳۹
 — نرال ۲۰۳
 — نیم ساده ۳۴۳
 — یکانی ۳۹۱
 مجموع مستقیم — ها
 عنصر مجموعه ۲۹۶
 عنصرهمانی ۱۵۴، ۱۸۴
- فاصله ۳۷۴ (تمرین ۴)
 فرآیند متعامدسازی گرام — اشمیت ۳۶۳، ۳۷۲
 فرد، جایگشتها —
 فرم
 — خطی ۲۱۶
 — چندخطی ۲۱۶
 — خودالحاق ۴۱۷
 — درجه دوم ۳۵۵، ۴۷۲
 — دوخطی ۲۱۷، ۴۱۴، ۴۶۰
 — ناتبهگون ۴۶۹
 — ژردان ماتریس، ۳۲۲
 — گویای ماتریسها ۳۱۱
 — متناوب ۲۲۰
 — مثبت ۴۲۰، ۴۲۳
- عاد کردن ۱۶۸

- ناتبهگون ۴۱۹ (تمرین ۶)
 نامنفرد ← فرم ناتبهگون
 - نامنفی ۴۲۵
 - نرمال ۳۳۶، ۳۴۰
 - هرمیتی ← فرم خودالحاق
 - یکنونیم خطی ۴۱۴
 ماتریس ←
 فرم دوخطی ۲۱۷، ۴۱۴، ۴۶۰
 رتبه ←
 - متقارن ۴۷۱
 - متقارن کج ۴۸۲
 - معین مثبت ۴۷۹
 - ناتبهگون ۴۶۹
 - نامنفرد ← فرم دوخطی ناتبهگون
 قطری سازی ←
 گروه حافظ ←
 ماتریس ←
 نشان ←
 فرمول
 - بعد، ۶۳
 - تیلور ۱۶۹، ۳۴۶
 - درون یابی لاگرانژ ۱۶۲
 فضاها
 - سی F^n ۴۲
 - سی $F^m \times F^n$ ۴۳
 - سی اقلیدسی ۳۶۰
 - سی برداری ۴۱
 - سی پوچ ۹۶
 - سی جواب ۵۰
 - سی خارج قسمت ۵۰۵
 - سی دوگان ۱۳۱
 - سی سرشت نما ۲۳۹
 - سی سطری ۵۴
 - سی ضرب داخلی ۳۵۹
 - سی یکانی ۳۶۰
 فضاهای برداری
 بعد ←
 پایه ←
 تصویر ←
 خارج قسمت ←
 زیرفضاهای ←
 - تا بیها ۴۱
 - با بعد متناهی ۴۲
 - توابع چند جمله ای ۴۴
 - جواب دستگاه معادلات خطی ۵۰
 بکریختی ←
 قاعده کرامر ۲۱۰
 قانون متوازی الاضلاع ۳۵۸ (تمرین ۹)
 قضیه
 - اساسی جبر ۱۸۰
 - تجزیه اولیه ۲۸۶
 - تجزیه دوری ۳۰۴
 - طیفی ۴۳۳
 - کیلی-همیلتون ۲۵۴، ۳۰۹
 - محور اصلی ۴۱۸
 قطبی
 تجزیه - تبدیل خطی ←
 قطری شدنی
 جزء - تبدیل خطی ←
 عملگر ←
 قطری کردن ۲۶۶، ۲۶۹، ۲۸۱
 - فرم دوخطی ۴۷۳
 - فرم دوخطی متقارن ۴۷۴
 - فرم هرمیتی ۴۱۸
 - ماتریس (عملگر) خودالحاقی ۴۰۹
 - ماتریس (عملگر) نرمال ۴۰۹
 همزمان ۲۶۹

- فرم گویای- ←
 کهدادهای اصلی- ←
 -افزوده ۲۱
 -الحاقی کلاسیک ۱۹۴ (تمرین ۳)، ۲۰۸
 -بالامثلثی ۳۹ (تمرین ۹)
 -پوچ توان ۳۱۹
 -تبدیل‌های خطی ۱۱۶، ۱۱۷
 -در پایهٔ متعامد یکه ۳۸۰
 تحویل شدهٔ سطری ۱۵
 - ۱۸، ۷۶
 -خودالحاقی ← ماتریس هرمیتی
 - صفر ۱۹
 - ضرایب ۱۱
 - ضرب داخلی ۳۵۶
 - فرم یک‌ونیم خطی ۴۱۶
 - فرم دوخطی ۴۶۴
 - متعامد ۲۱۲ (تمرین ۴)، ۴۸۸
 - مقارن ۲۷۵، ۴۹
 - مقارن کج ۲۱۲ (تمرین ۳)، ۲۷۵
 - مثبت ۴۲۵
 - مثلثی ۲۰۲ (تمرین ۷)
 - شونده ۲۶۴، ۴۰۸
 - مختصات ۶۹
 - معکوس‌پذیر ۳۲، ۲۰۹
 - مقدماتی ۲۹، ۳۳۰
 - ژوردان ۳۲۰
 - نرمال ۴۰۸
 - وندرموند ۱۶۳
 - هرمیتی ۵۰، ۴۰۶
 - همانی ۱۵
 - همدم ۳۰۰
 - همسازهای- ←
 - یکانی ۲۱۲ (تمرین ۵)، ۳۹۲
 - مجموع مستقیم-ها ←
- یکانی ۲۰۹
 کرونگر، دلنای- ←
 کلاسیک، الحاقی- ←
 کهدادهای اصلی ماتریس ۴۲۲
 گروه ۱۱۰
 -جابجایی ۱۱۰
 -حافظ فرم ۴۸۷
 -خطی عمومی ۳۹۷
 -شبه متعامد ۴۸۹
 -لورنتز ۴۸۹
 -متعامد ۴۸۸
 -مقارن ۲۰۰
 گویا
 اعداد- ←
 فرم-ی ماتریسها- ←
 لورنتز
 گروه- ←
 تبدیل- ←
 ماتریس ۱۰
 ترانهادف- ←
 ترانهادف مزدوج- ←
 تشابه-ها ←
 چندجمله‌ایهای مینیمال-ها ←
 رتبه- ←
 رتبه ستونی- ←
 رتبهٔ سطری- ←
 رد- ←
 سازهای پایای- ←
 ضرب-ها ←
 فرم ژوردان- ←

- معکوس ← ۲۷۸ پایا
 - عمگرها ۲۷۹
 - ماتریسها ۲۷۹
 - مجموعه
 - عنصر ←
 - تهی ۴۹۶
 - متعامد ۳۶۱
 - یکه ۳۶۱
 - مختصات
 - بردار ۶۷
 - ماتریس ←
 - مختلط، اعداد ←
 - مدول ۲۱۴
 - پایه برای ←
 - رتبه ←
 - آزاد ۲۱۵
 - به طور متناهی تولید شده ۲۱۵
 - دوگان ۲۱۶
 - مزدوج
 - ترانهادف - ماتریس ←
 - مستقل
 - زیر فضاهای ←
 - خطی ۵۶، ۶۴
 - مشتق چند جمله ایها ۱۶۸، ۱۶۹، ۳۴۶
 - مضرب بودن ۱۶۸
 - معادلات خطی ۷
 - معادلات ديفرانسیل ۲۲۴ (مثال ۸)، ۲۹۱
 - (مثال ۱۴)
 - معکوس
 - تابع ۴۹۹
 - چپ ۳۲
 - دو طرفه ۳۲
 - راست ۳۲
 - ماتریس ۳۲، ۲۰۹
- متعامد
 بردارهای ←
 تبدیل خطی ←
 تصویر ←
 گروه ←
 ماتریس ←
 مجموعه ←
 مکمل ←
 هم ارزی - ماتریسها ←
 متعامد سازی ۳۶۳
 متعامد یکه
 پایه ←
 مجموعه ←
 متقارن
 فرم دوخطی ←
 گروه ←
 ماتریس ←
 متقارن کج
 فرم دوخطی ←
 ماتریس ←
 متناوب، فرم ←
 مثبت
 اعداد صحیح ←
 عملگر ←
 فرم ←
 ماتریس ←
 مثلث بندی ۲۶۵، ۲۶۶، ۲۶۹، ۳۳۱
 - همزمان ۲۶۹
 - مثلثی، ماتریس ←
 - مثلثی شونده، ماتریس ←
 - مجاز، زیر فضاهای ←
 - مجموع زیر فضاهای ۵۲
 - مجموع مستقیم ۲۷۴

- معکوس پذیر
تابع ←
تبدیل خطی ←
ماتریس ←
معین مثبت ۴۷۲
مقدار سرشت نما ۲۳۸، ۲۳۹
مقدار طیفی ← مقدار سرشت نما
مقدار ویژه ← مقدار سرشت نما
مقدار ماتری
اعمال ستونی ←
اعمال سطری ←
ماتریس ←
— ژوردان ←
مکمل ۳۰۳
— متعامد ۳۶۹
مینیمال، چند جمله‌ایهای ←
- ناتبیهگون
فرم دوخطی ←
فرم ←
نامساوی
— بسل ۳۷۲
— کوشی — شوارتز ۳۶۱
نامنفرد
تبدیل خطی ←
فرم ← فرم ناتبیهگون
نامنفی
عملگر ←
فرم ←
فرم ۳۵۵
نرمال
عملگر ←
فرم ←
ماتریس ←
- نشان فرم دوخطی متقارن ۴۷۷
نظریه طیفی ۴۳۳
نیم‌ساده، عملگر ←
وابستگی خطی ۵۶، ۶۴
وجود تابع در مینان ۱۹۱
هادی ۲۶۳، ۲۶۴، ۳۰۴
هرمیتی ← خودالحاق
هم‌ارزی
رابطه ←
— ستونی ۳۳۴
— سطری ۱۲، ۷۸، ۳۳۰
— متعامد ماتریسها ۳۹۸
— یکانی تبدیلهای خطی ۴۵۷
— یکانی ماتریسها ۳۹۸
همانی
تابع ←
تفکیک ←
عناصر ←
ماتریس ←
همدم، ماتریس ←
همسازهای ماتریس ۲۰۷
هم‌مجموعه ۲۳۰، ۵۰۵
همنهشتی ۱۸۱، ۵۰۲، ۵۰۵
— به پیمانۀ n ۵۰۵
هیأت ۶
زیر ←
سرشت نمایی ←
— بسته جبری ۱۸۰
یکتایی تابع در مینان ۱۹۹
یکریختی
— فضا‌های برداری ۱۱۲
— فضا‌های ضرب داخلی ۳۸۸

یکانی

تبدیل ←

تبدیل‌های خطی ←

عملگر ←

فضای ←

قطری کردن ←

ماتریس ←

هم‌ارزی - تبدیل‌های خطی ←

هم‌ارزی - ماتریسها ←