

# جبر خطی

گروه مؤلفان:

دکتر محمد حسن بیژن زاده، دکتر شهریار  
فرهمندراد، دکتر چاپچی، دکتر احمد خاکساری،  
دکتر مهدی صحت خواه، خانم دکتر خدیجه  
احمدی آملی، فلکی، دکتر خسرو پور

ویراستاران علمی

دکتر محمد حسن بیژن زاده و دکتر شهریار  
فرهمندراد

۱۳۸۹

# فهرست مطالب

فصل اول	دستگاه‌های معادلات خطی	۱
۱-۱	ماتریس‌ها و دستگاه‌های معادلات خطی	۱
۲-۱	تمرین	۱۳
۳-۱	روش حذفی گاوس - جردن	۱۸
۴-۱	روش حذفی گاوس - جردن	۱۹
۵-۱	دستگاه‌های همگن معادلات خطی	۲۶
۶-۱	مجموعه‌ی تمرین‌ها	۲۷
۷-۱	Curve Fitting، شبکه‌های الکتریکی، و جریان ترافیک	۳۶
۸-۱	تحلیل شبکه الکتریکی	۳۹
۹-۱	جریان ترافیک	۴۲
۱۰-۱	مجموعه تمرینات	۴۶
۱۱-۱	تمرین‌های دوره‌ای فصل اول	۵۰

فصل دوم	ماتریس‌ها	۵۶
۱-۲	جمع، ضرب عددی، و ضرب ماتریس‌ها	۵۶
۲-۲	جمع ماتریس‌ها	۵۸
۳-۲	ضرب اسکالر (عددی) ماتریس‌ها	۵۸
۴-۲	قرینه‌سازی و تفریق	۵۹
۵-۲	ضرب ماتریس‌ها	۵۹
۶-۲	اندازه ماتریس حاصل ضرب	۶۲
۷-۲	علامت‌گذاری ماتریس و دستگاه معادلات	۶۴
۸-۲	ضرب سریع ماتریس	۶۵
۹-۲	تمرین‌ها	۶۷
۱۰-۲	ویژگی‌های اعمال ماتریس‌ها	۷۱
۱۱-۲	توان ماتریس‌ها	۷۷
۱۲-۲	تمرینات	۷۸
۱۳-۲	ماتریس‌های متقارن و مجموعه‌ای در باستان شناسی	۸۴
۱۴-۲	ماتریس‌ها با درایه‌های اعداد مختلط	۸۹
	سری‌ها و مجموعه‌ها در باستان شناسی	۹۱
۱۶-۲	تمرینات	۹۴
۱۷-۲	ماتریس معکوس و رمز نویسی	۹۹
۱۸-۲	تمرینات	۱۰۹
۱۹-۲	مدل ورودی - خروجی لیتنیف در اقتصاد	۱۱۵
۲۰-۲	نکته محاسباتی	۱۱۹
۲۱-۲	تمرینات	۱۲۰
۲۲-۲	جنبش‌های آماری و ژنتیکی - زنجیره مارکوف	۱۲۲
۲۳-۲	تمرینات	۱۳۱
۲۴-۲	یک مدل ارتباطی و ارتباطات گروهی در جامعه	۱۳۵
۲۵-۲	تمرین‌های دوره‌ای فصل دوم	۱۵۱

۱۵۶	دترمینان‌ها	فصل سوم
۱۵۶ . . . . .	مقدمه‌ای بر دترمینان‌ها	۱-۳
۱۶۷ . . . . .	خواص دترمینان‌ها	۲-۳
۱۷۶ . . . . .	ارزیابی عددی یک دترمینان	۳-۳
۱۸۱ . . . . .	دترمینان‌ها، معکوس ماتریس و دستگاه معادلات خطی	۴-۳
۱۹۴	فضای برداری $\mathbb{R}^n$	فصل چهارم
۱۹۴ . . . . .	مقدمه بر بردارها	۱-۴
۲۰۵ . . . . .	حاصل ضرب نقطه‌ای، نرم، زاویه و فاصله	۲-۴
۲۱۶ . . . . .	تمرین	۳-۴
۲۱۸ . . . . .	مقدمه‌ای بر نگاشت‌های خطی	۴-۴
۲۲۷ . . . . .	نگاشت‌های ماتریسی، گرافیک‌های کامپیوتری و فراکتال‌ها	۵-۴
۲۴۳ . . . . .	تمرینات	۶-۴
۲۵۱	فضاهای برداری عمومی	فصل پنجم
۲۵۱ . . . . .	فضاهای برداری	۱-۵
۲۵۳ . . . . .	فضاهای برداری ماتریس‌ها	۲-۵
۲۵۴ . . . . .	فضاهای برداری تابع‌ها	۳-۵
۲۵۶ . . . . .	فضای برداری مختلط $\mathbb{C}^n$	۴-۵
۲۵۸ . . . . .	زیرفضاها	۵-۵
۲۶۷ . . . . .	ترکیبات خطی بردارها	۶-۵
۲۸۰ . . . . .	استقلال و وابستگی خطی	۷-۵
۲۸۹ . . . . .	پایه و بعد	۸-۵
۲۹۷ . . . . .	بعد برخی فضاها	۹-۵
۲۹۹ . . . . .	رتبه ماتریس‌ها	۱۰-۵
۳۰۶ . . . . .	بردارهای متعامد و تصاویر	۱۱-۵
۳۱۰ . . . . .	تصویر یک بردار روی بردار دیگر	۱۲-۵
۳۱۲ . . . . .	قضیه فرآیند گرام-اشمیت یکه متعامدسازی	۱۳-۵

۳۱۴ . . . . .	تصویر یک بردار روی یک زیرفضا	۱۴-۵
۳۱۸ . . . . .	فاصله یک نقطه از یک زیرفضا	۱۵-۵
۳۲۰ . . . . .	ماتریس‌های متعامد	۱۶-۵
۳۲۹ . . . . .	مسأله‌های مختلفه فصل پنج	۱۷-۵

۳۳۴ فصل ششم مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

۳۳۸ . . . . .	بررسی مقادیر ویژه حقیقی و بردارهای ویژه ماتریس‌های $2 \times 2$	۱-۶
۳۴۰ . . . . .	بررسی مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس‌های $3 \times 3$	۲-۶
۳۴۹ . . . . .	مقادیر ویژه مختلط	۳-۶
۳۵۱ . . . . .	قسمت‌های حقیقی و موهومی بردارها	۴-۶
۳۵۲ . . . . .	مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریسی حقیقی که روی $\mathbb{C}^n$ عمل می‌کند	۵-۶
۳۵۵ . . . . .	قضیه‌گرشگورین	۶-۶
۳۵۸ . . . . .	نکاتی در مورد مقادیر ویژه و بردارهای ویژه	۷-۶
۳۶۹ . . . . .	قضیه کیلی-هامیلتون	۸-۶
۳۷۱ . . . . .	محاسبه $A^k X$	۹-۶
۳۷۲ . . . . .	جمعیت‌شناسی	۱۰-۶
۳۷۵ . . . . .	معادلات تفاضلی	۱۱-۶
۳۸۲ . . . . .	قطری کردن ماتریس‌ها	۱۲-۶
۳۸۴ . . . . .	کاربرد قطری کردن ماتریس‌ها	۱۳-۶
۳۸۵ . . . . .	قطری‌سازی متعامد	۱۴-۶
۳۸۶ . . . . .	فرم‌های درجه دوم	۱۵-۶
۳۸۶ . . . . .	دوران محورهای مختصات	۱۶-۶
۳۸۷ . . . . .	تعریف فرم‌های درجه دوم	۱۷-۶
۳۸۷ . . . . .	شناخت مقاطع مخروطی	۱۸-۶

۳۹۴ فصل هفتم نگاشت‌های خطی

۳۹۴ . . . . .	نگاشت‌های خطی، هسته و برد	۱-۷
۴۱۱ . . . . .	نگاشت‌ها و دستگاه معادلات خطی	۲-۷

۴۱۲ . . . . .	معادلات همگن . . . . .	۳-۷
۴۱۳ . . . . .	معادلات ناهمگن . . . . .	۴-۷
۴۱۶ . . . . .	چند دستگاه . . . . .	۵-۷
۴۲۲ . . . . .	بردار مختصات . . . . .	۶-۷
۴۲۵ . . . . .	تغییر پایه . . . . .	۷-۷
۴۲۸ . . . . .	یک ریختی ها . . . . .	۸-۷
۴۳۲ . . . . .	نمایش ماتریسی نگاشت های خطی . . . . .	۹-۷
۴۳۷ . . . . .	اهمیت نمایش ماتریسی . . . . .	۱۰-۷
۴۴۰ . . . . .	ارتباط بین نمایش های ماتریسی . . . . .	۱۱-۷

۴۵۲	فضاهای ضرب داخلی	فصل هشتم
۴۵۲ . . . . .	فضاهای ضرب داخلی . . . . .	۱-۸
۴۵۶ . . . . .	نرم یک بردار . . . . .	۲-۸
۴۵۷ . . . . .	زویه . . . . .	۳-۸
۴۵۸ . . . . .	بردارهای متعامد . . . . .	۴-۸
۴۵۸ . . . . .	فاصله . . . . .	۵-۸
۴۶۵ . . . . .	اتحاد قطبی $B$ . . . . .	۶-۸
۴۶۵ . . . . .	هندسه ناقلیدسی و نسبیت خاص . . . . .	۷-۸
۴۶۸ . . . . .	نسبیت خاص . . . . .	۸-۸
۴۷۵ . . . . .	تقریب توابع و تئوری کدنگاری . . . . .	۹-۸
۴۷۸ . . . . .	تقریب های فوریه . . . . .	۱۰-۸
۴۸۰ . . . . .	نظریه کدنگاری . . . . .	۱۱-۸
۴۸۴ . . . . .	منحنی کمترین مربعات . . . . .	۱۲-۸
۴۸۸ . . . . .	منحنی های کمترین مربعات . . . . .	۱۳-۸
۵۰۱ . . . . .	تمرین های دوره ای فصل ۸ . . . . .	۱۴-۸
۵۰۳ . . . . .	مرجع ها . . . . .	

به نام خدا

## پیشگفتار

ویژگی‌های کتاب. در این کتاب ریاضیات، محاسبات و کاربردها به طریقی انعطاف‌پذیر با هم درآمیخته است. هم چنان که قبلاً گفته شد، در عین حال که جبرخطی درسی مجرد بوده و مفاهیم آن در نهایت به گونه‌ای محض ارائه می‌گردد، هیچ مبحثی بدون کاربرد رها نشده است. اصولاً، هیچ بخشی از ریاضیات امروزه به لحاظ فلسفه آموزشی نباید بدون کاربرد در دانشگاه‌ها، و مدارس ارائه گردد. دانشجویان این درس کاربردهای آن را در محیطی طبیعی ملاحظه خواهند کرد. راهبرد کار از این قرار است که ابتدا ریاضیات مربوطه را توسعه داده و سپس کاربردهای آن ارائه می‌گردد. با این حال مدرسین این درس می‌توانند به منظور انگیزه بخشی به دانشجویان ابتدا اشاره‌ای به کاربردهای هر مبحث کرده و سپس شروع به مفهوم‌سازی و توسعه درس نمایند. از نظر آموزشی و تاریخی، ریاضیات از طریق تعامل و کار روی کاربردها توسعه یافته است.

موضوعات کتاب شامل مباحث کلاسیک و رسمی جبرخطی است که در دانشگاه‌های ایران و دانشگاه‌های معتبر جهان تدریس می‌گردد. از دستگاه‌های معادلات خطی گرفته، حساب ماتریس‌ها و دترمینان‌ها تا فضاهاى برداری ملموس ( $\mathbb{R}^n$ ) و مجرد و نگاشت‌های خطی و بالاخره بردارها و مقادیر ویژه را شامل می‌شود. بدین ترتیب این کتاب، که براساس کتاب مشهور گارث ویلیام [1] تألیف گردیده است، در هشتم فصل به رشته تحریر درآمده است.

گروه مؤلفین پیشاپیش از هر نظر و نقدی که همکاران گرامی و دانشجویان عزیز در خصوص این درس مباحث آن و نحوه ارائه مطالب داشته باشند استقبال می‌نمایند.

گروه مؤلفان جبرخطی  
اعضای هیأت علمی دانشگاه پیام نور



## هدف‌های رفتاری فصل یک

دانشجو پس از پایان این فصل باید بتواند

- روش حذفی گاوس - جردن را در حل دستگاه معادلات خطی بکار گیرد.
- عملیات سطری مقدماتی را درک کرده و تطابق مفهومی آن را با تبدیلات مقدماتی روی یک دستگاه معادلات بشناسد.
- مفهوم دستگاه معادلات خطی همگن را درک کرده و تعداد جواب‌های چنین دستگاهی را وقتی که تعداد متغیرها بیش از تعداد معادلات است بداند.
- کاربرد حل دستگاه معادلات خطی را در رسم نمودارها، شبکه‌های الکتریکی و جریان‌های ترافیکی بداند. در مواردی این چنین بتواند به مدل‌سازی دستگاه معادلات خطی براساس داده‌های مساله بپردازد.
- مساله‌های پایان هر بخش و پایان فصل را به راحتی حل کند.



## فصل اول

# دستگاه‌های معادلات خطی

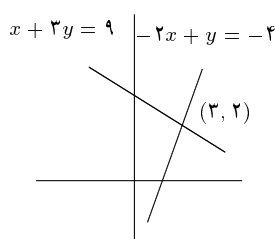
### ۱-۱ ماتریس‌ها و دستگاه‌های معادلات خطی

معادله‌ای به صورت  $x + 3y = 9$  یک معادله خطی نامیده می‌شود. نمودار این معادله یک خط مستقیم در صفحه  $x - y$  است. دستگاه دو معادله خطی زیر را در نظر می‌گیریم:

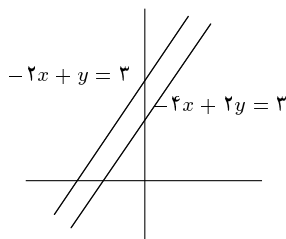
$$x + 3y = 9$$

$$-2x + y = -4$$

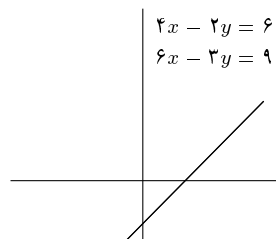
به هر دو زوج  $x$  و  $y$  که در هر دو معادله صدق کنند یک جواب می‌گوئیم. با جایگزینی می‌توان دید که  $x = 3$ ،  $y = 2$  یک جواب این دستگاه می‌باشد. یک جواب برای یک چنین دستگاهی نقطه‌ای در صفحه است که از محل تلاقی دو نمودار معادله به وجود می‌آید. مثال‌های زیر سه حالتی را که ممکن است برای چنین دستگاه‌هایی از معادلات رخ دهد، نمایش می‌دهد. این حالات عبارتند از: زمانی که یک جواب منحصر به فرد، هیچ جواب، و یا تعداد زیادی جواب وجود دارند.



شکل ۱-۱



شکل ۲-۱



شکل ۳-۱

جواب منحصر بفرد  
 $x + 3y = 9$   
 $-2x + y = -4$   
 خطوط در  $(3, 2)$  یکدیگر را قطع می‌کنند.  
 جواب منحصر به فرد،  $x = 3$  و  $y = 2$  است.

هیچ جواب  
 $-2x + y = 3$   
 $-4x + 2y = 2$   
 هر دو معادله دارای یک نمودارند. خطوط موازی‌اند.  
 هر نقطه روی نمودار یک جواب نقطه اشتراک ندارند.  
 تعداد جواب‌ها زیاد است.  
 هیچ جواب وجود ندارد.

هدف اصلی‌مان در این فصل بررسی دستگاه‌های بزرگتری از معادلات خطی است.

یک معادله‌ی خطی از  $n$  متغیر  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  به فرم

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$$

می‌باشد که در آن ضرایب  $a_1, a_2, \dots, a_n$  و  $b$  اعداد حقیقی‌اند. مثال زیر نمونه‌ای از یک دستگاه از ۳ معادله‌ی خطی است.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

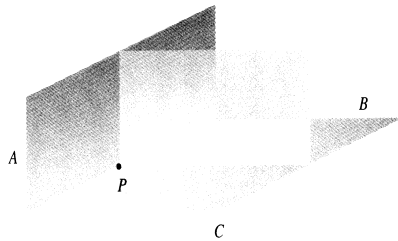
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 = -6$$

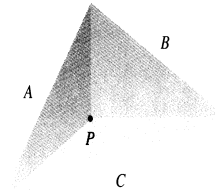
هر معادله‌ی خطی برحسب سه متغیر متناظر با صفحه‌ای در فضای سه بعدی است. جواب‌ها نیز نقاطی هستند که روی هر سه صفحه قرار دارند.

در مورد وجود جواب نیز همانند دستگاه دو معادله، سه حالت وجود دارد: یک جواب منحصر بفرد، تعداد زیادی جواب و یا هیچ جواب. در شکل ۴-۱ چند نوع از این حالات نمایش داده شده است.

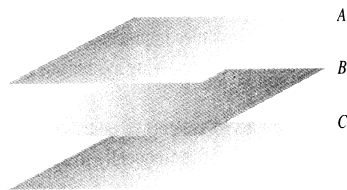
**Unique solution**



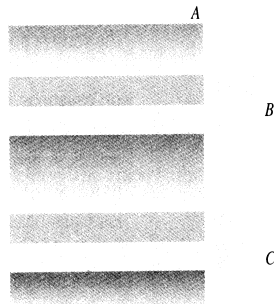
Three planes  $A$ ,  $B$ , and  $C$  intersect at a single point  $P$ .  $P$  corresponds to a unique solution.



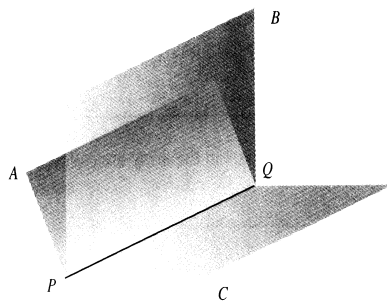
**No solutions**



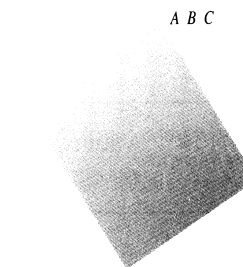
Planes  $A$ ,  $B$ , and  $C$  have no points in common. There are no solutions.



**Many solutions**



Three planes  $A$ ,  $B$ , and  $C$  intersect in a line  $PQ$ . Any point on a line is a solution.



Three equations represent the same plane. Any point on the plane is a solution.

شکل ۴-۱

هرچه تعداد متغیرها افزوده شود، تعبیر هندسی چنین دستگاهی از معادلات پیچیده‌تر خواهد شد. هر معادله نمایانگر یک فضا است که در فضای بزرگتری قرار دارد. جواب‌ها نیز نقاطی هستند که بر تمامی فضاهای نشانده شده قرار دارند. تعبیر هندسی‌ای برای تصور جواب‌ها عملاً وجود ندارد. برای همین به روش‌های

جبری متوسل می‌شویم. در بخش ۱-۳ روشی را برای حل دستگاه‌های معادلات خطی تحت عنوان روش حذفی گاوس - جردن معرفی خواهیم کرد.

در این بخش چگونگی کاربرد این روش را برای دستگاه‌های معادلاتی که تنها یک جواب دارند، خواهیم دید. دستگاه‌هایی که تنها یک جواب منحصر بفرد دارند به کرار به کار می‌روند. بنابراین چنین دستگاه‌هایی توجه خاصی را می‌طلبند. اغلب به خاطر موقعیتی که یک دستگاه معادلات توصیف می‌کند، از پیش فرض می‌شود که یک دستگاه معادلات دارای یک جواب منحصر بفرد است؛ برای مثال، خواهیم دید که در یک شبکه الکتریکی شدت جریان‌ها از طریق حل یک چنین دستگاه معادلات خطی پیدا می‌شوند. روش حذفی گاوس - جردن مرتباً با حذف متغیرها از معادلات درگیر می‌باشد. در بخش بعدی این روش را به دستگاه‌های معادلات خطی کلی‌تری توسعه خواهیم داد.

برای توصیف کردن دستگاه‌های معادلات خطی از آرایه‌های مستطیلی از اعداد به نام ماتریس استفاده خواهیم کرد.

**۱-۱-۱ تعریف.** یک ماتریس عبارت است از آرایه‌ای مستطیلی از اعداد. اعداد واقع در آرایه‌ها درایه ماتریس نامیده می‌شوند.

معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ نمایش می‌دهند. برای مثال به ماتریس‌های زیر توجه کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 7 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 5 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 7 \\ 6 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

**سطرها و ستون‌ها.** ماتریس‌ها از سطرها و ستون‌هایی تشکیل شده‌اند. سطرها از بالای ماتریس و ستون‌ها از سمت چپ شماره‌گذاری می‌شوند. ماتریس زیر دارای دو سطر و سه ستون می‌باشد.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 7 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

سطرها عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 7 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

سطر ۱                      سطر ۲

ستون‌ها عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ستون ۱              ستون ۲              ستون ۳

زیرماتریس‌ها. یک زیرماتریس از یک ماتریس مفروض، یک آرایه به دست آمده از حذف سطرها و ستون‌های مشخصی از آن ماتریس می‌باشد. برای نمونه، ماتریس  $A$  در زیر را در نظر بگیرید. ماتریس‌های  $P$ ،  $Q$ ، و  $R$  زیرماتریس‌های  $A$  هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس  $A$                       زیرماتریس‌های  $A$

اندازه و نوع. اندازه‌ی یک ماتریس با مشخص کردن تعداد سطرها و ستون‌های ماتریس تعیین می‌شود. برای مثال، ماتریسی با دو سطر و سه ستون را یک ماتریس  $2 \times 3$  می‌نامند؛ عدد اول تعداد سطرها و عدد دوم تعداد ستون‌ها را بیان می‌کند. زمانی که تعداد سطرها و تعداد ستون‌ها با هم برابر باشند، ماتریس را یک ماتریس مربعی می‌نامند. ماتریسی که تنها یک سطر دارد، ماتریس سطری نامیده می‌شود. ماتریسی که تنها یک ستون داشته باشد یک ماتریس ستونی نام دارد.

مثال. به ماتریس‌های زیر با اندازه‌ها و نوع‌های داده شده توجه کنید.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 0 & 5 & -4 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ماتریس  $2 \times 3$                       ماتریس مربعی  $3 \times 3$                       ماتریس سطری  $1 \times 4$                       ماتریس ستونی  $3 \times 1$

مکان. مکان یک درایه در یک ماتریس با داشتن سطر و ستونی که آن عنصر در آن قرار گرفته مشخص می‌شود. برای مثال ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 9 \\ 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

درایه  $2-2$  در سطر ۱، ستون ۲ قرار گرفته است. می‌گوئیم این درایه در مکان  $(1, 2)$  قرار دارد. درایه‌ای که در مکان  $(2, 3)$  قرار دارد، ۵ است. توجه کنید که بنابه قرارداد ابتدا سطری که عنصر در آن قرار دارد را می‌آوریم و سپس ستون را.

ماتریس‌های همانی. یک ماتریس همانی، ماتریسی مربعی با قطر ۱ در مکان‌های  $(1, 1)$ ،  $(2, 2)$  و  $(3, 3)$  و غیره و صفر در بقیه جاها می‌باشد. ماتریس همانی  $n \times n$  را با نماد  $I_n$  نشان می‌دهیم.

مثال. ماتریس‌های زیر همانی هستند.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اینک بحث روی دستگاه‌های معادلات خطی را ادامه می‌دهیم. از ماتریس‌ها برای توصیف دستگاه‌های معادلات خطی استفاده می‌کنیم. در رابطه با هر دستگاه معادلات خطی دو ماتریس مهم وجود دارند: ضرایب متغیرها تشکیل ماتریسی می‌دهد که آن را ماتریس ضرایب دستگاه می‌نامند. ضرایب، به همراه جملات ثابت، تشکیل ماتریسی به نام ماتریس افزوده دستگاه می‌دهد.

مثال. ماتریس ضرایب و ماتریس افزوده‌ی دستگاه معادلات خطی زیر را به دست آورید.

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -6 \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \\ \text{ماتریس ضرایب} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & -6 \end{bmatrix} \\ \text{ماتریس افزوده} \end{array}$$

توجه کنید که ماتریس ضرایب یک زیرماتریس از ماتریس افزوده است. ماتریس افزوده کاملاً دستگاه را توصیف می‌کند.

تبدیلاتی که تبدیلات مقدماتی نامیده می‌شوند می‌توانند یک دستگاه معادلات خطی را به دستگاه معادلات خطی دیگری با جواب یکسان تبدیل کنند. این تبدیلات برای حل دستگاه‌های معادلات خطی با حذف متغیرها به کار برده می‌شوند. در عمل کار کردن برحسب ماتریس‌هایی ساده‌تر است که با تبدیلات خطی معادل به نام اعمال سطری مقدماتی به دست می‌آیند. در هر مرحله نیازی به نوشتن متغیرهای  $x_1, x_2, x_3$  نمی‌باشد. دستگاه‌های معادلات خطی اغلب با رایانه‌ها برحسب چنین ماتریس‌هایی توصیف و انجام می‌پذیرند. این تبدیلات به شرح زیر می‌باشند.

تبدیلات مقدماتی	اعمال سطری مقدماتی
۱. تعویض دو معادله	۱. تعویض دو سطر یک ماتریس
۲. ضرب دو طرف یک معادله در یک عدد	۲. ضرب درایه‌های یک سطر در یک عدد ثابت
ثابت ناصفر	ناصر
۳. افزودن مضربی از یک معادله به معادله دیگر	۳. افزودن مضربی از درایه‌های یک سطر به درایه‌های متناظر سطر دیگر



تبدیلات مقدماتی جواب‌ها را حفظ می‌کنند زیرا ترتیب معادلات روی جواب اثر نمی‌گذارد، ضرب یک معادله در یک عدد ثابت ناصفر، تغییری در یک تساوی ایجاد نمی‌کند، و جمع یک مقدار مساوی به طرفین یک تساوی نیز یک تساوی به دست می‌دهد.

دستگاه‌های معادلاتی که مربوط به تبدیلات مقدماتی می‌شوند، و لذا دارای جواب‌های یکسان هستند، **دستگاه‌های هم‌ارز** نامیده می‌شوند. نماد  $\approx$  را برای نشان دادن دستگاه‌های معادلات هم‌ارز به کار می‌بریم. در روش حذفی گاوس-جردن از تبدیلات مقدماتی برای حذف متغیرها استفاده می‌شود. از آنجا که هر دستگاه معادلات جدید دارای جواب یکسان با دستگاه اولیه می‌باشد، می‌توانیم این روش را به کار گیریم. روش حذفی گاوس-جردن را با به کار بردن معادلات و ماتریس متشابه در مثال زیر ملاحظه خواهیم کرد. خواننده می‌بایست به روش اصولی که در آن متغیرها در معادلات ستون چپ حذف می‌گردند، دقت کند. هم‌زمان ملاحظه شود که چگونه برحسب ماتریس‌های ستون راست با ایجاد کردن صفر در مکان‌های معین انجام می‌گیرد و از آن به بعد از ماتریس به دست آمده استفاده می‌کنیم.

مثال. دستگاه معادلات خطی زیر را حل کنید.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 = -6$$

حل.

روش ماتریس متشابه	روش معادله‌ای
ماتریس متشابه: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & -6 \end{bmatrix}$	دستگاه ابتدایی: $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= -6 \end{aligned}$
صفر در ستون ۱ ایجاد کنید: $\approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \end{bmatrix}$ $R_2 + (-2)R_1$ $R_3 + (-1)R_1$	از معادلات دوم و سوم را حذف کنید: $\approx \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ Eq_2 + (-2)Eq_1 & \quad x_2 - x_3 = -1 \\ Eq_3 + (-1)Eq_1 & \quad -2x_2 - 3x_3 = -8 \end{aligned}$
صفرهای مناسب دو ستون ۲ ایجاد کنید: $\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{bmatrix}$ $R_1 + (-1)R_2$ $R_3 + (2)R_2$	از معادلات اول و سوم را حذف کنید: $\approx \begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 3 \\ Eq_1 + (-1)Eq_2 & \quad x_2 - x_3 = -1 \\ Eq_3 + (2)Eq_2 & \quad -5x_3 = -10 \end{aligned}$
عنصر (۳, ۳) را ۱ کنید: $\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $(-\frac{1}{5})R_3$	ضریب $x_3$ در معادله‌ی سوم را ۱ کنید: $\approx \begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 3 \\ x_2 - x_3 &= -1 \\ (-\frac{1}{5})Eq_3 & \quad x_3 = 2 \end{aligned}$
در ستون ۳ صفر ایجاد کنید: $\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $R_1 + (-2)R_3$ $R_2 + R_3$	از معادلات اول و دوم حذف کنید: $\approx \begin{aligned} x_1 &= -1 \\ Eq_1 + (-2)Eq_3 & \quad x_2 = 1 \\ Eq_2 + Eq_3 & \quad x_2 = 2 \end{aligned}$
این ماتریس متناظر با دستگاه زیر است: $\begin{aligned} x_1 &= -1 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$ جواب عبارت است از: $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2$	جواب عبارت است از: $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2$

از نظر هندسی، هر یک از معادلات ابتدایی در این مثال نمایانگر یک صفحه در فضای سه-بعدی است. این که یک جواب منحصر بفرد وجود دارد به این معناست که این سه صفحه در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند. جواب  $(-1, 1, 2)$  مؤلفه‌های این نقطه‌ی مشترک را نشان می‌دهد. مثال دیگری از این روش می‌آوریم تا این روش را به خوبی یاد بگیرید.

مثال. دستگاه معادلات خطی زیر را حل کنید:

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 5x_3 &= 18 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= -8 \end{aligned}$$

حل. با ماتریس افزوده شروع کنید و از اولین سطر برای ایجاد صفر در اولین ستون استفاده نمایید. (این کار متناظر با استفاده‌ی اولین معادله برای حذف  $x_1$  از دومین و سومین معادلات می‌باشد.)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 12 \\ 2 & -1 & 5 & 18 \\ -1 & 3 & -3 & -8 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 12 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ R_2 + (-2)R_1 \\ R_3 + R_1 \end{array}$$

سپس، سطر ۲ را در  $\frac{1}{3}$  ضرب کنید تا عنصر  $(3, 3)$  را ۱ نمائید. (این عمل متناظر با تبدیل ضریب  $x_2$  در معادله‌ی دوم به ۱ است.)

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ (\frac{1}{3})R_2 \\ \end{array}$$

در ستون دوم به صورت زیر صفر ایجاد کنید. (این عمل متناظر با به کارگیری معادله‌ی دوم برای حذف  $x_2$  از معادلات اول و سوم است.)

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ R_1 + (-2)R_2 \\ R_3 + (-1)R_2 \end{array}$$

سطر ۳ را در  $\frac{1}{2}$  ضرب کنید. (این عمل متناظر با تبدیل ضریب  $x_3$  در معادله‌ی سوم به ۱ است.)

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ (\frac{1}{2})R_3 \\ \end{array}$$

در آخر، در ستون سوم صفر ایجاد کنید. (این عمل متناظر با به کارگیری معادله‌ی سوم برای حذف  $x_3$  از معادلات اول و دوم است.)

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ R_1 + (-2)R_3 \\ R_2 + R_3 \end{array}$$

این ماتریس متناظر با دستگاه زیر است:

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 3$$

جواب عبارت است از  $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 3$ .

روش گاوس - جردن برای حل دستگاه معادلات خطی به کمک ماتریس‌ها با ایجاد کردن اعداد ۱ و ۰ در مکان‌های معینی از ماتریس‌ها درگیر است. این اعداد به یک روش اصولی ستون به ستون ایجاد می‌شوند. مثال زیر نشان می‌دهد که گاهی لازم است دو سطر را در مرحله‌ای، به منظور پیشروی در روش فوق، با هم عوض کرد.

مثال. دستگاه زیر را حل کنید:

$$4x_1 + 8x_2 - 12x_3 = 44$$

$$3x_1 + 6x_2 - 8x_3 = 32$$

$$-2x_1 - x_2 = -7$$

حل. با ماتریس افزوده شروع کرده و به صورت زیر پیش می‌رویم. (توجه شود که در ماتریس افزوده از صفر به عنوان ضریب متغیر  $x_3$  در معادله سوم که وجود ندارد، استفاده می‌کنیم).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & 8 & -12 & 44 \\ 3 & 6 & -8 & 32 \\ -2 & -1 & 0 & -7 \end{bmatrix} &\approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 3 & 6 & -8 & 32 \\ -2 & -1 & 0 & -7 \end{bmatrix} \\ &\stackrel{(\frac{1}{4})R_1}{\approx} \\ &\approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 15 \end{bmatrix} \\ &\stackrel{R_2 + (-3)R_1}{\approx} \\ &\stackrel{R_3 + 2R_1}{\approx} \end{aligned}$$

در این مرحله به عنصری ناصفر در مکان  $(2, 2)$  نیاز داریم تا بتوانیم ادامه دهیم. برای به دست آوردن چنین عنصری، سطر دوم را با سطر سوم (یک سطر عقب‌تر) عوض کرده و سپس پیش می‌رویم.

$$\begin{aligned} &\approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 3 & -6 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ R_2 \longleftrightarrow R_3 &\approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &\stackrel{(\frac{1}{3})R_2}{\approx} \end{aligned}$$

$$R_1 + (-2)R_2 \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \approx \begin{array}{l} R_1 + (-1)R_3 \\ R_2 + 2R_3 \end{array} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

جواب عبارت است از:  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 3$ ,  $x_3 = -1$ .

اکنون روش گاوس - جردن را برای حل یک دستگاه  $n$  معادله  $n$  مجهول که دارای یک جواب منحصر بفرد است، به طور خلاصه بیان می‌کنیم. ماتریس افزوده از یک ماتریس ضرایب  $A$  و یک ماتریس ستونی از جملات ثابت  $B$  بوجود می‌آید. از نماد  $[A : B]$  برای نمایش این ماتریس استفاده می‌کنیم. از عملیات سطری استفاده کنید تا به تدریج این ماتریس را ستون به ستون، به یک ماتریس به فرم  $[I_n : X]$  تبدیل کنید، که در آن  $I_n$  ماتریس  $n \times n$  همانی است.

$$[A : B] \approx \dots \approx [I_n : X]$$

این ماتریس آخری  $[I_n : X]$  را فرم پلکانی تحویل یافته‌ی ماتریس افزوده ابتدایی می‌نامند. ماتریس ضرایب دستگاه معادلات آخری  $I_n$  و  $X$  ماتریس ستونی جملات ثابت است. در نتیجه عناصر  $X$  جواب منحصر بفرد دستگاه هستند. ملاحظه کنید که در حین تبدیل  $[A : B]$  به  $[I_n : X]$ ، ماتریس  $A$  به  $I_n$  تغییر می‌کند. بنابراین

«اگر  $A$  ماتریس ضرایب یک دستگاه  $n$  معادله  $n$  مجهول باشد که دارای جواب منحصر بفرد است، آنگاه  $A$  با  $I_n$  هم‌ارز سطری است.»

اگر به این روش  $[A : B]$  به ماتریسی به شکل  $[I_n : X]$  قابل تبدیل نباشد، آنگاه دستگاه معادلات یک جواب منحصر بفرد نخواهد داشت. در بخش بعدی درباره‌ی این چنین دستگاه‌هایی بیشتر صحبت خواهیم کرد.

## دستگاه‌های بیشتر

کاربردهای مشخصی در رابطه با حل تعدادی از دستگاه معادلات خطی، که همگی دارای ماتریس مربع ضرایب یکسان  $A$  هستند وجود دارد. فرض کنید دستگاه‌ها عبارتند از:

$$[A : B_1], [A : B_2], \dots, [A : B_k].$$

جملات ثابت  $B_1, B_2, \dots, B_k$  ممکن است، برای مثال، داده‌های آزمایشی باشند، که می‌خواهیم بدانیم جواب‌هایی که ممکن است منجر به چنین نتایجی شده باشند، چیست؟ غالباً وضعیت ایجاب می‌کند که جواب‌ها منحصر بفرد باشند. اگر برای هر دستگاه روش گاوس - جردن انجام شود و هر دستگاه به طور مستقل حل گردد، روند کار منجر به فرم‌های پلکانی تحویل یافته‌ای به صورت زیر خواهد شد:

$$[I_n : X_1], [I_n : X_2], \dots, [I_n : X_k]$$

و جواب‌ها  $X_1, X_2, \dots, X_k$  خواهند بود. به هر حال، مشابه تبدیل  $A$  به  $I_n$  برای هر دستگاه تکرار می‌گردد، این کار منجر به انجام تعداد زیادی کار تکراری غیرلزوم می‌شود. دستگاه‌ها می‌توانند با یک ماتریس افزوده‌ی بزرگ به صورت  $[A : B_1, B_2, \dots, B_k]$  نمایش داده شوند، و روش گاوس - جردن می‌تواند برای این یک ماتریس به کار گرفته شود. در این صورت خواهیم داشت:

$$[A : B_1, B_2, \dots, B_k] \approx \dots \approx [I_n : X_1, X_2, \dots, X_k]$$

که از آنجا جواب‌ها عبارت خواهند بود از:  $X_1, X_2, \dots, X_k$ .

مثال: سه دستگاه معادلات خطی زیر را، که تمامی آنها دارای یک ماتریس ضرایب هستند، حل کنید.

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = b_1$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 = b_2$$

$$-x_1 + 2x_2 - 4x_3 = b_2$$

$$\text{به‌ازای } \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \text{ به ترتیب برابر با } \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ -11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

حل. ابتدا ماتریس افزوده بزرگی که هر سه دستگاه را مشخص می‌کند، بسازید و فرم پلکانی تحویل یافته را به صورت زیر به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 8 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 11 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -4 & -11 & 2 & -4 \end{bmatrix} \approx \begin{array}{l} R_2 + (-2)R_1 \\ R_3 + R_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 8 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{array}{l} R_1 + R_2 \\ R_3 + (-1)R_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{matrix} R1 + (-1)R3 \\ R2 + 2R3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

جواب‌های سه دستگاه معادلات، در سه ستون فرم پلکانی تجویل یافته داده شده است. آنها عبارتند از:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 2$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 1$$

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2$$

در این بخش بحث خود را به دستگاه‌های  $n$  معادله‌ی خطی  $n$  مجهول، که یک جواب منحصر بفرد دارند محدود می‌کنیم. در بخش بعدی روش حذفی گاوس - جردن را به منظور راه دادن به دیگر دستگاه‌هایی که دارای یک جواب منحصر بفردند توسعه خواهیم داد. همچنین با این کار دستگاه‌هایی که دارای جواب‌های بسیار یا بدون جواب هستند نیز مشمول این روش خواهند شد.

## تمرین

۱) اندازه ماتریس‌های زیر را به دست آورید:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \text{ (ب)} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ (الف)}$$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} \text{ (د)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ (ج)}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \text{ (و)} \quad \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ (ه)}$$

۲) درایه‌هایی که در مکان  $(1, 2)$ ،  $(2, 2)$ ،  $(3, 3)$ ،  $(1, 5)$ ،  $(2, 4)$  و  $(3, 2)$  در ماتریس زیر قرار دارند را به دست آورید:

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 & 0 & 3 \\ 1 & 9 & -1 & 0 & -5 \\ 4 & -7 & 0 & -4 & 9 \end{bmatrix}$$

۳) عناصر  $(۲, ۳)$ ،  $(۳, ۲)$ ،  $(۴, ۱)$ ،  $(۱, ۳)$ ،  $(۴, ۴)$  و  $(۳, ۱)$  از ماتریس زیر را به دست آورید:

$$\begin{bmatrix} ۳ & -۵ & ۰ & ۶ \\ -۱ & ۴ & ۱ & -۷ \\ ۰ & ۳ & ۲ & ۸ \\ ۹ & ۰ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

۴) ماتریس همبانی  $I_4$  را بنویسید.

۵) ماتریس ضرایب و ماتریس افزوده‌ی هر یک از دستگاه‌های معادلات زیر را مشخص کنید.

(الف)

$$-۳x_۱ + ۴x_۲ = ۷$$

$$-۲x_۱ - ۵x_۲ = -۲$$

(ب)

$$۶x_۱ + ۲x_۲ - ۳x_۳ = ۲$$

$$-x_۱ + ۲x_۲ - ۴x_۳ = ۵$$

$$۳x_۱ - x_۲ + ۶x_۳ = ۴$$

(ج)

$$۲x_۱ - ۴x_۲ + ۳x_۳ = -۱$$

$$۵x_۱ + ۴x_۲ - ۳x_۳ = ۵$$

$$۶x_۱ + x_۲ = -۷$$

(د)

$$-x_۱ + x_۲ = ۳$$

$$۳x_۱ + ۸x_۲ = ۵$$

$$۲x_۱ - ۳x_۲ = -۱$$



(۵)

$$2x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 4$$

$$3x_2 + 2x_3 = 0$$

$$-x_1 - 2x_3 = -7$$

(۶)

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -1$$

$$x_3 = 5$$

(۶) ماتریس‌های زیر را به عنوان ماتریس‌های افزوده‌ی دستگاه‌های معادلاتی در نظر بگیرید. هر یک از

دستگاه‌های معادلات متناظر را بنویسید:

$$\begin{array}{ll} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \text{ (ب)} & \begin{bmatrix} 5 & 6 & -8 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \text{ (الف)} \\ \begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 & -1 \\ -1 & 9 & 5 & 4 \\ 9 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \text{ (د)} & \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ (ج)} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ (و)} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ (ه)} \end{array}$$

(۷) در تمرین‌های زیر یک ماتریس به همراه یک عمل سطری مقدماتی داده شده است. ماتریس حاصل

را به دست آورید.

$$\begin{array}{ll} \begin{bmatrix} 3 & 9 & 3 & -6 \\ 1 & -1 & 4 & -3 \\ 8 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} \text{ (الف)} & \\ & \xrightarrow{\left(\frac{1}{3}\right)R_1} \\ \begin{bmatrix} 0 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 9 \\ 5 & -9 & 6 & 1 \end{bmatrix} \text{ (ب)} & \\ & \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & -4 & 5 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{(ج)}$$

$$\xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_2+R_1 \\ R_3+(-2)R_1 \end{smallmatrix}]{R_2 \approx R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(د)}$$

$$\xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_1+(-4)R_2 \\ R_1+3R_3 \end{smallmatrix}]{R_1 \approx R_2}$$

۸) هر یک از اعمال سطری زیر را به عنوان مرحله‌ای برای رسیدن به فرم پلکانی تحویل یافته در نظر بگیرید. به چه دلیل اعمالی که به آن اشاره شده، انتخاب شده است؟ چه اهداف خاصی برحسب

دستگاه‌های معادلات خطی که توسط این ماتریس‌ها توصیف می‌شود، انجام گرفته است؟

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 7 & 5 \\ 4 & 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{(الف)}$$

$$\xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_2+2R_1 \\ R_3+(-4)R_1 \end{smallmatrix}]{R_2 \approx R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 9 & -6 \\ 0 & 4 & 7 & -8 \end{bmatrix} \quad \text{(ب)}$$

$$\xrightarrow{(\frac{1}{3})R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -8 \end{bmatrix} \quad \text{(ج)}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{(ج)}$$

$$\xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_1+(-2)R_2 \\ R_3+3R_2 \end{smallmatrix}]{R_1 \approx R_2}$$

۹) هر یک از اعمال سطری زیر را به عنوان مرحله‌ای برای رسیدن به فرم پلکانی تحویل یافته‌ی یک

ماتریس در نظر بگیرید. چرا این اعمال انتخاب شده‌اند؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(الف)}$$

$$\xrightarrow[\begin{smallmatrix} R_1+(-2)R_3 \\ R_2+R_3 \end{smallmatrix}]{R_1 \approx R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & -8 \\ 5 & -7 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(ب)}$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2}$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\left(\frac{1}{2}\right)R_3]{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad (\text{ج}) \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\left(\frac{1}{2}\right)R_2]{R_1+2R_3, R_2+(-3)R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad (\text{د}) \end{aligned}$$

(۱۰) دستگاه‌های معادلات زیر همگی دارای جواب‌های منحصری‌فرد هستند. این دستگاه‌ها را با به کار بردن روش حذفی گاوس - جردن با ماتریس‌ها حل کنید.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 4 & (\text{ب}) & \quad x_1 - 2x_2 &= -8 & (\text{الف}) \end{aligned}$$

$$2x_1 + 2x_2 = 3 \quad 2x_1 - 3x_2 = -11$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \quad x_1 + x_2 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9 \quad (\text{د}) \quad 2x_2 - 2x_3 = -4 \quad (\text{ج})$$

$$2x_1 + x_2 + 6x_3 = 11 \quad x_2 - 2x_3 = 5$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 11$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14$$

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 14 \quad (\text{و})$$

$$2x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 36 \quad (\text{ه})$$

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 19$$

$$x_1 - x_2 = -4$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 11$$

$$-3x_1 - 6x_2 - 15x_3 = -3$$

$$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 19x_4 = 36$$

$$x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3 = \frac{1}{3} \quad (\text{ح})$$

$$3x_2 + 4x_3 + 15x_4 = 28$$

$$-2x_1 - \frac{5}{3}x_2 - \frac{14}{3}x_3 = -2$$

$$x_1 - x_2 - x_3 - 6x_4 = -12 \quad (\text{ز})$$

(۱۱) در تمرین‌های زیر هر یک از دستگاه‌های معادلات خطی با جواب‌های منحصری‌فرد، دارای ماتریس‌های

ضرایب یکسان می‌باشند. دستگاه‌ها را روش حذفی گاوس - جردن بر یک ماتریس افزوده بزرگ که هر یک از دستگاه‌ها را توصیف می‌کند، حل کنید.

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ برای } \begin{cases} x_1 + 2x_2 = b_1 \\ 3x_1 + 5x_2 = b_2 \end{cases} \text{ (الف)}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 13 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ برای } \begin{cases} x_1 + x_2 = b_1 \\ 4x_1 + 3x_2 = b_2 \end{cases} \text{ (ب)}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 14 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} \text{ برای } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = b_1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = b_2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = b_3 \end{cases} \text{ (ج)}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 18 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ برای } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = b_1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = b_2 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 = b_3 \end{cases} \text{ (د)}$$

## ۲-۱ روش حذفی گاوس - جردن

در بخش قبل روش حذفی گاوس - جردن را برای حل دستگاه‌های  $n$  معادله در  $n$  مجهول که دارای یک جواب منحصر بفرد بودند، به کار بردیم. اکنون این روش را در حالت کلی‌تری به کار می‌گیریم. در این حالت تعداد معادلات می‌توانند متفاوت با تعداد متغیرها باشند و تعداد جواب‌ها نیز می‌توانند منحصر بفرد، زیاد، یا هیچ باشند. دوباره روشی را که در پیش می‌گیریم چنین خواهد بود که از ماتریس افزوده‌ی دستگاه داده شده شروع می‌کنیم و با انجام یک سری اعمال سطری مقدماتی که تبدیل به ماتریس ساده‌تر (فرم پلکانی تحویل یافته) خواهد شد، مستقیماً به جواب خواهیم رسید.

اکنون تعریف کلی فرم پلکانی تحویل یافته را می‌آوریم. خواننده ملاحظه خواهد کرد که فرم‌های پلکانی تحویل یافته که در بخش قبل مورد بحث قرار گرفت همگی با این تعریف مطابقت دارند.

### ۱-۲-۱ تعریف. یک ماتریس به فرم پلکانی تحویل یافته است هرگاه:

- (۱) هر سطری که کاملاً شامل صفر است در پایین ماتریس قرار گیرد.
- (۲) اولین عنصر ناصفر هر سطر دیگر برابر ۱ باشد. (این عنصر یک پیشرو ۱ نامیده می‌شود).
- (۳) پیشرو ۱ هر سطر، در سمت راست پیشرو ۱ سطر قبلی قرار گیرد.
- (۴) تمام درایه‌های دیگر در ستونی که شامل پیشرو ۱ است، صفرند.

مثال. ماتریس‌های زیر به فرم پلکانی تحویل یافته هستند.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال. ماتریس‌های زیر به فرم پلکانی تحویل یافته نیستند:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

اولین عنصر ناصفر در سطر ۲ برابر نیست. سطری که مشکل از صفر است در پایین ماتریس نیست.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پیشرو ۱ در سطر ۳ سمت راست پیشرو ۱ در سطر ۲ نیست. عنصر ناصفر بالای پیشرو ۱ در سطر ۲

معمولاً بسیاری از سری عملیات سطری که می‌توانند برای تبدیل یک ماتریس داده شده به فرم پلکانی تحویل یافته به کار گرفته شوند، همگی به یک فرم پلکانی تحویل یافته یکسان منتج می‌گردند. به همین دلیل، می‌گوئیم که فرم پلکانی تحویل یافته یک ماتریس منحصر بفرد است. روش حذفی گاوس - جردن یک راه اصولی مهم (که یک الگوریتم نامیده می‌شود) برای رسیدن به فرم پلکانی تحویل یافته است. این کار قابل برنامه‌ریزی روی یک رایانه است. اکنون این روش را خلاصه کرده، سپس مثال‌هایی از اجرای آن می‌آوریم.

### ۳-۱ روش حذفی گاوس - جردن

(۱) ماتریس افزوده‌ی دستگاه معادلات خطی را بنویسید.

(۲) با به کار بردن عملیات سطری مقدماتی فرم پلکانی تحویل یافته‌ی ماتریس افزوده را به دست آورید.

این کار با ایجاد کردن پیشروهای ۱ و سپس صفر در بالا و پایین هر پیشرو ۱، ستون به ستون با شروع از اولین ستون قابل انجام است.

۳) دستگاه معادلات متناظر با فرم پلکانی تحویل یافته را بنویسید. این دستگاه جواب را می‌دهد. بر اهمیت ماهر شدن بر این الگوریتم تاکید می‌کنیم، نه تنها به دست آوردن جواب صحیح مهم است بلکه روش بدست آوردن جواب نیز مهم است. برای مثال، بر کارایی این الگوریتم (تعداد جمع‌ها و ضرب‌های به کار رفته) و مقایسه‌ی آن با دیگر الگوریتم‌ها که می‌توانند برای حل دستگاه‌های معادلات خطی به کار گرفته شوند، علاقه‌مند خواهیم بود.

مثال. روش حذفی گاوس - جردن را برای یافتن فرم پلکانی تحویل یافته ماتریس زیر به کار ببرید.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 & 9 & 12 \\ 4 & 4 & -2 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

حل. مرحله ۱. اگر لازم است، سطرها را عوض کنید تا یک درایه‌ی ناصفر در بالای اولین ستون ناصفر به دست آید. این عنصر ناصفر پاشنه نامیده می‌شود.

$$R_1 \longrightarrow R_2 \approx \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

مرحله ۲. یک ۱ در مکان پاشنه با ضرب سطر پاشنه در  $\frac{1}{3}$  ایجاد کنید.

$$\left(\frac{1}{3}\right)R_1 \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

مرحله ۳. در جاهای دیگر ستون پاشنه با جمع مضرب مناسبی از سطر پاشنه به سطرهای دیگر ماتریس صفر ایجاد کنید.

$$R_3 + (-4)R_1 \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

مرحله ۴. سطر پاشنه و تمام سطرهای بالای آن را ببوشانید. مراحل ۱ و ۲ را برای زیرماتریس‌های باقیمانده تکرار کنید. مرحله‌ی ۳ را برای کل ماتریس تکرار کنید. تا جایی که به فرم پلکانی تحویل یافته برسید کار را

تکرار کنید.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} \\
 &\approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \end{bmatrix} \\
 &\quad (\frac{1}{2})R_2 \\
 &\approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -6 \end{bmatrix} \\
 &\quad R_1 + R_2 \\
 &\quad R_3 + (-2)R_2 \\
 &\approx \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \\
 &\quad R_1 + (-2)R_3 \\
 &\quad R_2 + R_3
 \end{aligned}$$

اولین ستون ناصفر زیرماتریس

این ماتریس فرم پلکانی تحویل یافته ماتریس داده شده است.

اکنون چگونگی به کارگیری این روش را برای حل دستگاه‌های معادلات متنوع شرح می‌دهیم. مثال زیر چگونگی حل یک دستگاه معادلات خطی که دارای تعداد زیادی جواب است را نشان می‌دهد. ابتدا فرم پلکانی تحویل یافته به دست می‌آید. سپس لازم است که فرم پلکانی تحویل یافته را برای بیان روشنی از تعداد زیاد جواب تفسیر کنیم.

مثال. دستگاه معادلات زیر را، در صورت امکان، حل کنید.

$$3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 9$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 = 7$$

$$3x_1 - 5x_2 - x_3 = 7$$

حل. با ماتریس افزوده شروع کرده و الگوریتم گاوس - جردن را پی می‌گیریم. دور پاشنه‌ها و پیشروهای ۱ دایره کشیده شده‌اند.

$$\begin{bmatrix} \boxed{3} & -3 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 4 & 7 \\ 3 & -5 & -1 & 7 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 7 \\ 3 & -5 & -1 & 7 \end{bmatrix} \quad (\frac{1}{3})R_1$$

$$\begin{array}{l} \approx \\ R2 + (-2)R1 \\ R3 + (-3)R1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \approx \begin{array}{l} \\ R1 + R2 \\ R3 + 2R2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

به ماتریس پلکانی تحویل یافته رسیدیم. دستگاه معادلات متناظر عبارت است از:

$$x_1 + 3x_2 = 4$$

$$x_2 + 2x_3 = 1$$

مقادیر بسیاری برای  $x_1$ ،  $x_2$  و  $x_3$  وجود دارند که در این معادلات صدق کنند. این دستگاهی از معادلات است که جواب‌های بسیاری دارد.  $x_1$  را متغیر پیشرو معادله‌ای اول می‌نامیم و  $x_2$  متغیر پیشرو معادله دوم می‌باشد. برای بیان این جواب‌های بسیار، متغیرهای پیشرو در هر معادله را برحسب متغیرهای باقیمانده می‌نویسیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$x_1 = -3x_2 + 4$$

$$x_2 = -2x_3 + 1$$

فرض می‌کنیم  $x_3$  مقدار دلخواه  $r$  باشد. جواب عمومی دستگاه عبارت است از:

$$x_1 = -3r + 4, \quad x_2 = -2r + 1, \quad x_3 = r$$

با تغییر  $r$  در مجموعه‌ی اعداد حقیقی جواب‌های بسیاری به دست می‌آید.  $r$  را یک پارامتر می‌نامیم. با دادن مقادیر مختلف به  $r$  جواب‌های مشخصی به دست می‌آید. برای مثال:

$$\text{به‌ازای } r = 1 \text{ داریم } x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1$$

$$\text{به‌ازای } r = 2 \text{ داریم } x_1 = 1^0, x_2 = 5, x_3 = -2$$

مثال ۳. دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$2x_1 - 4x_2 + 12x_3 - 1^0x_4 = 58$$

$$-x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -14$$

$$2x_1 - 4x_2 + 9x_3 - 6x_4 = 44$$



حل. با ماتریس افزوده شروع می‌کنیم. داریم:

$$\begin{array}{l}
 \approx \\
 R_2 + R_1 \\
 R_3 + (-2)R_1 \\
 \approx \\
 R_1 + (-6)R_2 \\
 R_3 + (3)R_2
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{ccccc}
 \boxed{2} & -4 & 12 & -10 & 58 \\
 -1 & 2 & -3 & 2 & -14 \\
 2 & -4 & 9 & -6 & 44
 \end{array} \right] \\
 \\
 \left[ \begin{array}{ccccc}
 1 & -2 & 6 & -5 & 29 \\
 0 & 0 & \boxed{3} & -3 & 15 \\
 0 & 0 & -3 & 4 & -14
 \end{array} \right] \\
 \\
 \left[ \begin{array}{ccccc}
 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\
 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \approx
 \begin{array}{c}
 \left( \frac{1}{3} \right) R_1 \\
 \\
 \left( \frac{1}{3} \right) R_2 \\
 \\
 R_1 + (-1)R_3 \\
 R_2 + R_3
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{ccccc}
 \boxed{1} & -2 & 6 & -5 & 29 \\
 -1 & 2 & -3 & 2 & -14 \\
 2 & -4 & 9 & -6 & 44
 \end{array} \right] \\
 \\
 \left[ \begin{array}{ccccc}
 1 & -2 & 6 & -5 & 29 \\
 0 & 0 & 1 & -1 & 5 \\
 0 & 0 & -3 & 4 & -14
 \end{array} \right] \\
 \\
 \left[ \begin{array}{ccccc}
 1 & -2 & 0 & 0 & -2 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

به ماتریس پلکانی تحویل یافته رسیدیم. دستگاه معادلات متناظر عبارت است از:

$$x_1 - 2x_2 = -2$$

$$x_2 = 6$$

$$x_4 = 1$$

تعداد جواب‌ها بسیار زیاد است. بار دیگر، متغیرهای پیشرو را برحسب متغیرهای باقیمانده می‌نویسیم. داریم

$$x_1 = 2x_2 - 2, \quad x_3 = 6, \quad x_4 = 1$$

$x_2$  را مقدار دلخواه  $r$  می‌گیریم. جواب عمومی عبارت است از:

$$x_1 = 2r - 2, \quad x_2 = r, \quad x_3 = 6, \quad x_4 = 1$$

جواب‌ها را می‌توانید با دادن مقادیر مختلف به  $r$  به دست آورید.

مثال ۴. مثال زیر لزوم تعویض سطرها را در مرحله‌ای، نشان می‌دهد. دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 2$$

$$2x_1 + 4x_2x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 6$$

$$-x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 4$$

با به کار بردن الگوریتم گاوس - جردن خواهیم داشت:

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c} \mathbb{R} \\ R_2 \leftrightarrow R_3 \end{array} \\
 \begin{array}{c} \mathbb{R} \\ R_1 + (-3)R_2 \end{array}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 \boxed{1} & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\
 2 & 4 & -2 & 6 & 3 & 6 \\
 -1 & -2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\
 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 4 & 6 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
 1 & 2 & -1 & 0 & -5 & -7 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2
 \end{bmatrix}
 \cong
 \begin{bmatrix}
 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 4 & 6 \\
 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 3 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 3 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2
 \end{bmatrix}$$

به ماتریس پلکانی تحویل یافته رسیدیم. دستگاه معادلات متناظر عبارت است از:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$$

$$x_4 = -1$$

$$x_5 = 2$$

متغیرهای پیشرو را برحسب متغیرهای باقیمانده به دست می‌آوریم:

$$x_1 = -2x_2 + x_3 + 3, \quad x_4 = -1, \quad x_5 = 2$$

مقادیر دلخواه  $r$  و  $s$  را به ترتیب برای  $x_2$  و  $x_3$  در نظر می‌گیریم. جواب کلی عبارت است از

$$x_1 = -2r + s + 3, \quad x_2 = r, \quad x_3 = r, \quad x_4 = -1, \quad x_5 = 2$$

مثال ۵. در این مثال دستگاهی را ملاحظه خواهید کرد که هیچ جوابی ندارد. دستگاه زیر را حل کنید.

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 3$$

$$2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = -3$$

$$2x_2 + 2x_3 = 1$$

حل. با ماتریس افزوده شروع می‌کنیم. داریم:

$$\begin{bmatrix}
 \boxed{1} & -1 & 2 & 3 \\
 2 & -2 & 5 & 4 \\
 1 & 2 & -1 & -3 \\
 0 & 2 & 2 & 1
 \end{bmatrix}
 \cong
 \begin{bmatrix}
 1 & -1 & 2 & 3 \\
 0 & 0 & 1 & -2 \\
 0 & \boxed{3} & -3 & -6 \\
 0 & 2 & 2 & 1
 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3 \cong \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{3} & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cong \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)R_2$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{13} \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_1 + (-1)R_3 \\ R_2 + R_3 \\ R_4 + (-4)R_3 \end{matrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{13}\right)R_4$$

این ماتریس هنوز به شکل پلکانی تحویل یافته در نیامده است؛ هنوز می‌بایست صفرهایی را در بالای ۱ در سطر آخر ایجاد نمائیم. به هر حال، در چنین وضعیتی، زمانی که آخرین سطر ناصفر یک ماتریس به فرم  $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1)$  می‌باشد، دیگر نیازی به ادامه‌ی روند نیست. دستگاه جواب ندارد. زیرا اگر معادله متناظر با سطر آخر ماتریس را بنویسیم خواهیم داشت:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

این معادله به ازای هیچ یک از مقادیر  $x_1, x_2$  و  $x_3$  برقرار نمی‌باشد. بنابراین دستگاه معادلات جواب ندارد.

### ۴-۱ دستگاه‌های همگن معادلات خطی

یک دستگاه معادلات خطی را همگن نامیم هرگاه تمامی جملات ثابت صفر باشند. دستگاه زیر یک دستگاه معادلات خطی همگن است.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + 6x_3 &= 0\end{aligned}$$

ملاحظه نمائید که  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  و  $x_3 = 0$  یک جواب از این دستگاه است. واضح است که چنین نتیجه‌ای را می‌توان به صورت زیر به هر دستگاه معادلات همگن تعمیم داد.

**۱-۴-۱ قضیه.** یک دستگاه معادلات خطی همگن  $n$  متغیره همواره دارای جواب  $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$  می‌باشد. این جواب را جواب بدیهی می‌نامند. حال فرض کنیم دستگاه بالا دارای جواب‌های دیگری باشد. دستگاه بالا را به روش حذفی گاوس - جردان حل می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ -2 & -3 & 6 & 0 \end{bmatrix} &\approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \\ &\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \\ &R_1 + (-2)R_2\end{aligned}$$

از این ماتریس پلکانی تحویل یافته، دستگاه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 &= 0 \\ x_2 - 4x_3 &= 0\end{aligned}$$

متغیرهای پیشرو را برحسب متغیرهای باقیمانده بیان می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned}x_1 &= -3x_2 \\ x_2 &= 4x_3\end{aligned}$$

فرض کنیم  $x_3 = r$ ، در این صورت ملاحظه می‌شود که دستگاه دارای جواب‌های بسیار است،

$$x_1 = -3r, \quad x_2 = 4r, \quad x_3 = r$$

ملاحظه می‌کنیم که جواب  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$  با قرار دادن  $r = 0$  به دست می‌آید. ماتریس افزوده‌ی هر دستگاه همگن از معادلات خطی که تعداد متغیرهای آن از تعداد معادلات بیشتر است، دارای فرم پلکانی تحویل یافته‌ای خواهد شد که در آن تعداد ستون‌ها از سطرهایش و ستون آخر صفر است. دستگاه معادلات متناظر، و در نتیجه دستگاه اول موردنظر، دارای جواب‌های بسیاری خواهد بود، که یکی از آنها جواب بدیهی می‌باشد. این مطالب را در قضیه‌ی زیر بیان می‌نمائیم.

**۱-۴-۲ قضیه.** یک دستگاه همگن از معادلات خطی که تعداد متغیرهایش بیشتر از معادلات است، دارای تعداد بسیاری جواب است.

در این بخش، بحث‌مان را راجع به حل دستگاه‌های معادلات خطی به روش حذفی گاوس - جردن کامل کرده‌ایم. روش حذفی معروف دیگری برای حل دستگاه‌های معادلات خطی وجود دارد که به آن روش گاوسی می‌گویند. این روش را در بخش ۹-۱ معرفی می‌کنیم و این دو روش را در آنجا مقایسه خواهیم کرد.

## ۵-۱ مجموعه‌ی تمرین‌ها

(۱) مشخص کنید که کدامیک از ماتریس‌های زیر به فرم پلکانی تحویل یافته است. اگر ماتریسی به این فرم نیست، دلیل آن را بیاورید.

$$\begin{array}{ll} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \text{ (ب)} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ (الف)} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \end{bmatrix} \text{ (د)} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \end{bmatrix} \text{ (ج)} \\ \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (و)} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (ه)} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ (ح)} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix} \text{ (ز)} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (ط)} \end{array}$$

(۲) مشخص کنید که کدامیک از ماتریس‌های زیر به فرم پلکانی تحویل یافته است. اگر ماتریسی به این

فرم نیست، دلیل آن را بیاورید.

$$\begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (ب)} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (د)} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (و)} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ (ح)} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \text{ (الف)} \\ \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (ج)} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ (ه)} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 7 \end{bmatrix} \text{ (ز)} \\ \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (ط)} \end{array}$$

(۳) هر یک از ماتریس‌های زیر فرم پلکانی تحویل یافته از ماتریس افزوده‌ی یک دستگاه معادلات خطی

است. جواب را (در صورت وجود) برای هر یک از دستگاه معادلات به دست آورید.

$$\begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (ب)} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (د)} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ (و)} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \text{ (الف)} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (ج)} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \text{ (ه)} \end{array}$$

(۴) هر یک از ماتریس‌های زیر فرم پلکانی تحویل یافته از ماتریس افزوده‌ی یک دستگاه معادلات خطی

است. جواب را (در صورت وجود) برای هر یک از دستگاه معادلات به دست آورید:

$$\begin{array}{l} \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & -3 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{ (ب)} & \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{ (الف)} \\ \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & -3 \end{array} \right] \text{ (د)} & \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array} \right] \text{ (ج)} \end{array}$$

۵) هریک از دستگاه‌های سه معادله سه مجهولی زیر را (در صورت امکان) با به کار بردن روش حذفی گاوس - جردن حل کنید.

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \quad \text{(الف)}$$

$$2x_1 + 8x_2 + 11x_3 = 7$$

$$x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 15 \quad \text{(ب)}$$

$$2x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 33$$

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 20$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7 \quad \text{(ج)}$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 18$$

$$-x_1 + x_2 - 3x_3 = 1$$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \quad \text{(د)}$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

$$2x_1 + 6x_2 = 3$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 3 \quad \text{(ه)}$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 = 7$$

$$3x_1 - 5x_2 - x_3 = 7$$

$$3x_1 - 3x_2 + 9x_3 = 24 \quad (\text{و})$$

$$2x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 17$$

$$-x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -11$$

۶) هر یک از دستگاه‌های سه معادله سه مجهولی زیر را (در صورت امکان) با به کار بردن روش حذفی گاوس - جردن حل کنید.

$$3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 6 \quad (\text{الف})$$

$$-2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1$$

$$3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 10$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \quad (\text{ب})$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 11$$

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 18$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \quad (\text{ج})$$

$$2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6$$

$$3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = -1$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \quad (\text{د})$$

$$3x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 26$$

$$2x_1 + 6x_2 = 11$$



$$x_2 + 2x_3 = 5 \quad (\text{ه})$$

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 13$$

$$x_1 + 2x_3 = 4$$

$$x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 7 \quad (\text{و})$$

$$2x_1 + 4x_2 + 16x_3 = 14$$

$$x_2 + 3x_3 = 4$$

۷) هر یک از دستگاه‌های معادلات زیر را با به کار بردن روش حذفی گاوس- جردن (در صورت امکان) حل نمایید.

$$x_1 + x_2 - 3x_3 = 10 \quad (\text{الف})$$

$$-3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -24$$

$$2x_1 - 6x_2 - 14x_3 = 38 \quad (\text{ب})$$

$$-3x_1 + 7x_2 + 15x_3 = -37$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \quad (\text{ج})$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 4$$

$$-x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 5$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_4 = 0 \quad (\text{د})$$

$$-2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0$$

(یک دستگاه همگن)

$$x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \quad (\text{و})$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0$$

$$-2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 0$$

(یک دستگاه همگن)

۸) هر یک از دستگاه‌های معادلات زیر را با به کار بردن روش حذفی گاوس - جردن (در صورت امکان) حل نمایید.

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -3 \quad (\text{الف})$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = -9$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 = -7$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 7 \quad (\text{ب})$$

$$x_1 - 2x_2 - 6x_3 = -18$$

$$-x_1 - x_2 - 2x_3 = -5$$

$$2x_1 - 5x_2 - 15x_3 = -46$$

$$2x_1 - 4x_2 + 16x_3 - 14x_4 = 10 \quad (\text{ج})$$

$$-x_1 + 5x_2 - 17x_3 + 19x_4 = -2$$

$$x_1 - 3x_2 + 11x_3 - 11x_4 = 4$$

$$3x_1 - 4x_2 + 18x_3 - 14x_4 = 17$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \quad (د)$$

$$2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 12$$

$$-x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -4$$

$$-3x_1 + x_2 - 8x_3 - 10x_4 = -29$$

$$x_1 + 6x_2 - x_3 - 4x_4 = 0 \quad (ه)$$

$$-2x_1 - 12x_2 + 5x_3 + 17x_4 = 0$$

$$3x_1 + 18x_2 - x_3 - 6x_4 = 0$$

(یک دستگاه همگن)

$$4x_1 + 8x_2 - 12x_3 = 28 \quad (و)$$

$$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -7$$

$$-3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = -21$$

$$x_1 + 2x_2 = 1$$

$$x_1 + x_2 = 2 \quad (ز)$$

$$2x_1 + 3x_2 = 3$$

$$x_1 + 3x_2 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 = 1$$

۹) در هر یک از موارد زیر مثال‌هایی بسازید.

الف) یک دستگاه معادلات خطی با تعداد متغیرهای بیشتر از تعداد معادلات که دارای هیچ جوابی نباشد.

ب) یک دستگاه معادلات خطی با تعداد معادلات بیشتر از تعداد متغیرها که دارای جواب منحصر بفرد باشد.

۱۰) فرم‌های پلکانی تحویل یافته‌ی ماتریس‌های دستگاه‌های دو معادله دو مجهولی و انواع جواب‌هایی که وجود دارد را می‌توان به صورت زیر دسته‌بندی کرد. (● نمایانگر عناصری است که ممکن است ناصفر باشند).

$$\begin{bmatrix} \bullet & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}$$

جواب‌های بسیار بدون جواب جواب منحصر بفرد

به طور مشابه، فرم‌های پلکانی تحویل یافته‌ی ماتریس‌ها و انواع جواب‌هایی که وجود دارد را برای موارد زیر دسته‌بندی کنید.

الف) دستگاه‌های سه معادله دو مجهولی

ب) دستگاه‌های سه معادله سه مجهولی

۱۱) شرایطی را روی  $a, b, c, d$  برای ماتریس  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  مشخص نمایید به طوری که این ماتریس دارای فرم پلکانی تحویل یافته به صورت زیر باشد:

$$\begin{bmatrix} \bullet & \circ \\ \circ & \bullet \end{bmatrix} \text{ (الف)} \quad \begin{bmatrix} \bullet & \circ \\ \circ & \bullet \end{bmatrix} \text{ (ب)}$$

۱۲) دستگاه معادلات خطی همگن زیر را در نظر بگیرید:

$$ax + by = 0$$

$$cx + dy = 0$$

الف) اگر  $x = x_0, y = y_0$  یک جواب باشد، نشان دهید  $x = kx_0, y = ky_0$  برای هر مقدار ثابت  $k$  نیز یک جواب است.

ب) اگر  $x = x_0, y = y_0$  و  $x = x_1, y = y_1$  دو جواب باشند، نشان دهید  $x = x_0 + x_1, y = y_0 + y_1$  نیز یک جواب می‌باشد.

۱۳) نشان دهید  $x = 0$ ،  $y = 0$  یک جواب برای دستگاه همگن از معادلات خطی

$$ax + by = 0$$

$$cx + dy = 0$$

است. ثابت کنید این جواب تنها جواب است اگر و تنها اگر  $ad - bc \neq 0$ .

۱۴) دو دستگاه معادلات خطی با ماتریس‌های افزوده‌ی  $[A : B_1]$  و  $[A : B_2]$  را در نظر بگیرید که در

آن ماتریس ضرایب هر دو دستگاه، ماتریس یکسان  $3 \times 3$ ،  $A$  می‌باشد.

الف) آیا امکان دارد که  $[A : B_1]$  یک جواب منحصر بفرد داشته باشد و  $[A : B_2]$  دارای جواب‌های بسیار باشد؟

ب) آیا امکان دارد که  $[A : B_1]$  یک جواب منحصر بفرد داشته باشد و  $[A : B_2]$  دارای هیچ جوابی نباشد؟

ج) آیا امکان دارد که  $[A : B_1]$  دارای جواب‌های بسیاری باشد و  $[A : B_2]$  هیچ جوابی نداشته باشد؟

۱۵) دستگاه‌های زیر از معادلات خطی را با به کار بردن روش حذفی گاوس - جردن روی یک ماتریس افزوده‌ی بزرگ که نمایانگر دو دستگاه با یک ماتریس ضرایب یکسان‌اند، حل کنید.

الف)

$$x_1 + x_2 + 5x_3 = b_1$$

$$x_1 + 2x_2 + 8x_3 = b_2$$

$$2x_1 + 4x_2 + 16x_3 = b_3$$

برای  $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$  به‌ازای  $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ، به ترتیب.

ب)

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = b_1$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = b_2$$

$$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = b_2$$

$$\text{برای } \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \text{ به ازای } \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 13 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix}, \text{ به ترتیب.}$$

۱۶) یک ماتریس  $3 \times 3$  به طور تصادفی بنویسید. فرم پلکانی تحویل‌یافته‌ی آن را پیدا کنید. فرم پلکانی تحویل‌یافته احتمالاً ماتریس همانی  $I_3$  است! این را توضیح دهید. [راهنمایی: به هندسه فکر کنید].

۱۷) اگر یک ماتریس  $3 \times 4$  را به طور تصادفی بنویسید، چه نوع فرم پلکانی تحویل‌یافته‌ای را احتمال می‌دهید که به دست آید و چرا؟

۱۸) رایانه‌ها تنها تعداد متناهی از ارقام را می‌توانند حمل کنند. این محدودیت، زمانی که انتهای اعداد کوتاه می‌شود، موجب خطایی به نام خطاهای گرد کردن<sup>۱</sup> می‌شود. به خاطر این اتفاق، رایانه‌ها می‌توانند نتایج نادرستی را بدهند. بسیاری از تحقیقات برای توسعه‌ی الگوریتم‌هایی است که چنین خطاهای گرد کردن را به حداقل خود برسانند. (خوانندگانی که علاقه‌مند به چنین الگوریتم‌هایی هستند، می‌بایست بخش ۹-۲ را مطالعه نمایند). یک رایانه برای مشخص کردن فرم پلکانی تحویل‌یافته‌ی یک ماتریس افزوده از یک دستگاه معادلات خطی به کار گرفته شده است. کدام یک از موارد زیر احتمال دارد رخ دهد؟

الف) رایانه یک جواب برای دستگاه ارائه می‌دهد در حالی که جوابی موجود نیست.

ب) رایانه می‌گوید جوابی وجود ندارد در حالی که یک جواب وجود دارد.

## ۶-۱ Curve Fitting، شبکه‌های الکتریکی، و جریان ترافیک

دستگاه‌های معادلات خطی در چنین زمینه‌های متنوعی از قبیل مهندسی الکترونیک، علم اقتصاد، و تحلیل ترافیک استفاده می‌شوند. اکنون کاربردهایی از آن را در چند زمینه مورد بحث قرار خواهیم داد.

### Curve Fitting مسأله‌ی زیر در شاخه‌های مختلفی از علوم رخ می‌دهد. مجموعه‌ای از نقاط به

صورت داده‌ها به صورت زیر مفروض است.

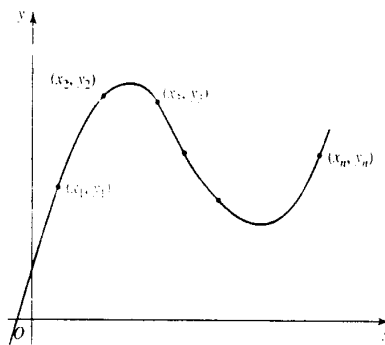
$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

1) round-off

می‌بایست چندجمله‌ای بیابیم که نمودارش از این نقاط عبور کند. مؤلفه‌های  $x$ ، نقاط پایه نامیده می‌شوند. می‌توان نشان داد که اگر نقاط پایه همه دویه‌دو مجزا باشند، آنگاه یک چندجمله‌ای منحصر بفرد از درجه‌ی  $n - 1$  (یا کمتر)

$$y = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1}$$

به این نقاط قابل تطبیق است. شکل ۵-۱ را ببینید.



شکل ۵-۱

ضرایب  $a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}$  که در چندجمله‌ای ظاهر شده‌اند با جایگذاری نقاط در معادله‌ی چندجمله‌ای و سپس حل یک دستگاه معادلات خطی به دست می‌آیند. (غالباً چندجمله‌ای را برحسب توانهای صعودی  $x$  می‌نویسیم تا این ضرایب به دست آیند. ستون‌های ماتریس ضرایب دستگاه معادلات یک الگوریتم خاص را تبعیت می‌کنند که در این باره بعداً بحث خواهیم کرد). اکنون روند کار را با یافتن یک چندجمله‌ای از درجه‌ی ۲، یک سهمی، برای مجموعه‌ای از سه نقطه داده شده نشان خواهیم داد.

مثال ۱. معادله چندجمله‌ای از درجه‌ی ۲ را چنان تعیین کنید که نمودارش از نقاط  $(۱, ۶)$ ،  $(۲, ۳)$  و  $(۳, ۲)$  بگذرد.

حل. ملاحظه می‌کنیم که در این مثال سه نقطه داده شده و می‌خواهیم یک چندجمله‌ای از درجه‌ی ۲ (یکی کمتر از تعداد نقاط داده شده) بیابیم. فرض کنیم چندجمله‌ای

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

باشد. به ما سه نقطه داده شده و از این سه نقطه برای تعیین مجهولات  $a_0$ ،  $a_1$  و  $a_2$  استفاده خواهیم کرد. با جایگذاری

$$x_1 = 1, y = 6; \quad x = 2, y = 3; \quad x = 3, y = 2$$

به ترتیب در چندجمله‌ای، دستگاه سه معادله با سه مجهول  $a_0$ ،  $a_1$  و  $a_2$  زیر به دست می‌آید.

$$a_0 + a_1 + a_2 = 6$$

$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 3$$

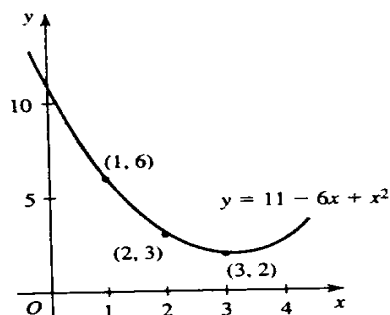
$$a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 2$$

این دستگاه را به روش حذفی گاوس - جردن برحسب  $a_0$ ،  $a_1$  و  $a_2$  حل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 9 & 2 \end{array} \right] & \approx \begin{array}{l} R_2 + (-1)R_1 \\ R_3 + (-1)R_1 \end{array} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 8 & -4 \end{array} \right] \\ & \approx \begin{array}{l} R_1 + (-1)R_2 \\ R_3 + (-1)R_2 \end{array} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \\ & \approx \begin{array}{l} (\frac{1}{2})R_3 \end{array} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ & \approx \begin{array}{l} R_1 + 2R_3 \\ R_2 + (-3)R_3 \end{array} \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

از آنجا  $a_0 = 11$ ،  $a_1 = -6$ ،  $a_2 = 1$  به دست می‌آید. سهمی که از این نقاط می‌گذرد عبارت است از  $y = 11 - 6x + x^2$  (شکل ۱-۶) را ببینید.





شکل ۶-۱

## ۷-۱ تحلیل شبکه الکتریکی

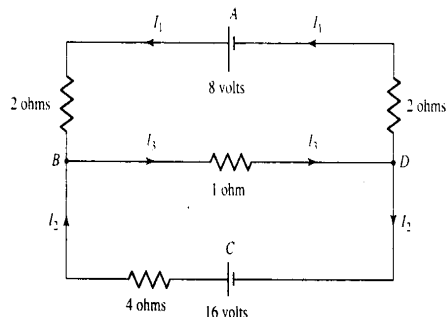
دستگاه‌های معادلات خطی برای مشخص کردن شدت جریان‌هایی که از انشعابات شبکه‌های الکتریکی می‌گذرد استفاده می‌شود. دو قانون زیر، که براساس تحقیقات به عمل آمده در آزمایشگاه حاصل شده، ما را به معادلات رهنمود می‌کنند.

### قوانین کیرشهف

(۱) اتصالات. تمام جریانات که به یک اتصال وارد می‌شوند می‌بایست از آن بگذرند.

(۲) مسیرها. مجموع عبارات IR ( $I$  نمایانگر جریان،  $R$  نمایانگر مقاومت) در هر جهت در اطراف یک مسیر بسته مساوی با ولتاژکل در مسیر در آن جهت است.

مثال ۲. شبکه الکتریکی شکل ۷-۱ را در نظر بگیرید. شدت جریاناتی را که از هر شاخه از این شبکه می‌گذرد را تعیین می‌کنیم.



شکل ۷-۱

حل. باتری‌ها (که با  $||$  نشان داده شده‌اند) ۸ ولت و ۱۶ ولت می‌باشند. قرارداد زیر در مهندسی برق به کار می‌رود.

$||$  مقدار مقاومت‌ها (که با  $\sim$  نشان داده می‌شود) که یکی ۱- اهم، یکی ۴- اهم و دو تا ۲- اهم هستند. جریان ورودی به هر باتری برابر خروجی آن است.

فرض کنیم جریان‌ها در انشعابات مختلف در مدار بالا  $I_1$ ،  $I_2$  و  $I_3$  باشند. قوانین کیرشهف به اتصالات و مسیرهای بسته اشاره می‌کنند. در این مدار دو اتصال به نام‌های نقاط  $B$  و  $D$  وجود دارند. سه مسیر بسته به نام‌های  $ABDA$ ،  $CBDA$  و  $ABDA$  وجود دارند. قوانین را برای اتصالات و مسیرها به کار می‌گیریم.

اتصالات

$$I_1 + I_2 = I_3 \quad \text{اتصال } B$$

$$I_2 = I_1 + I_3 \quad \text{اتصال } D$$

این دو معادله در یک معادله خطی منفرد صدق می‌کنند.

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

مسیرها

$$2I_1 + 1I_2 + 2I_3 = 8 \quad \text{مسیر } ABDA$$

$$4I_2 + 1I_3 = 16 \quad \text{مسیر } CBDC$$

نیازی به مسیر  $ABCD$  نمی‌باشد. یک دستگاه از سه معادله خطی و سه مجهول  $I_1$ ،  $I_2$  و  $I_3$  خواهیم داشت. در واقع مسیر  $ABCD$  به یک معادله که ترکیبی از دو معادله‌ی آخر است می‌انجامد. مساله به حل دستگاه زیر از سه معادله و سه مجهول تحویل می‌یابد:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

$$4I_1 + I_3 = 8$$

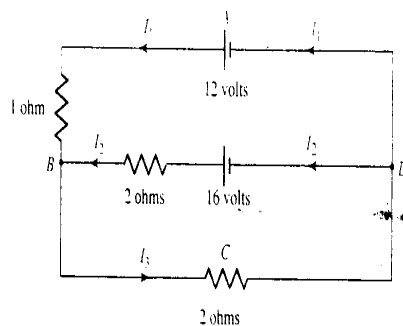
$$4I_2 + I_3 = 16$$

این روش را با به کار بردن حذفی روش گاوس - جردن، به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 4 & 1 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + (-4)R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & 1 & 16 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{(-\frac{1}{4})R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_1 + (-1)R_2 \\ R_3 + (-4)R_2 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 24 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{(\frac{1}{6})R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_1 - \frac{1}{4}R_3 \\ R_2 + \frac{5}{4}R_3 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

شدت جریان‌ها عبارت‌اند از  $I_1 = 1$ ،  $I_2 = 3$  و  $I_3 = 4$ ، که واحد آن آمپر است. جواب‌ها همان‌طور که از قبل انتظار داشتیم، منحصر بفرزند.

مثال ۳. شدت جریان‌هایی که از انشعابات مختلف شبکه‌ی الکتریکی در شکل ۸-۱ می‌گذرد را تعیین کنید.



## شکل ۸-۱

حل.

اتصالات

$$I_1 + I_2 = I_3 : \text{ اتصال } B$$

$$I_3 = I_1 + I_2 : \text{ اتصال } D$$

$$\text{از آنجا داریم: } I_1 + I_2 - I_3 = 0.$$

مسیرها

$$\text{مسیر } ABCDA : I_1 + 2I_2 = 12$$

$$\text{مسیر } ABDA : I_1 + 2(-I_2) = 12 + (-16)$$

ملاحظه می‌کنیم که جهت  $ABDA$  به دور مسیر آخر را انتخاب کرده‌ایم. شدت جریان در طول انشعاب  $BD$  در این جهت برابر  $-I_2$  و با ولتاژ  $-16$  می‌باشد. اکنون سه معادله با سه مجهول  $I_1$ ،  $I_2$  و  $I_3$  داریم:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

$$I_1 + 2I_2 = 0$$

$$I_1 - 2I_2 = -4$$

با حل این معادلات، به دست می‌آوریم  $I_1 = 2$ ،  $I_2 = 3$  و  $I_3 = 5$  اهم.

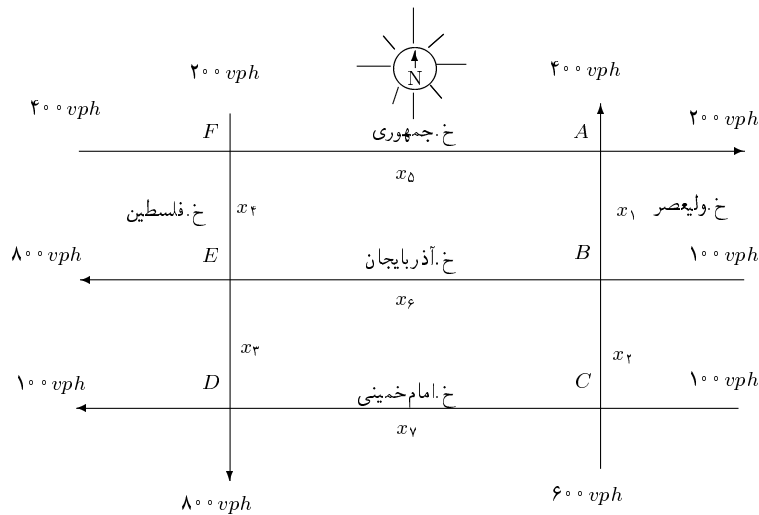
در عمل، شبکه‌های الکتریکی با مقاومت‌ها و مدارهای جریان زیادی سروکار دارند؛ تعیین شدت جریان گذرا از انشعابات به حل دستگاه‌های معادلات بزرگی بتوسط رایانه برمی‌گردد.

## ۸-۱ جریان ترافیک

همان‌طور که در مباحث گذشته اشاره شد، تحلیل شبکه نقش مهمی در مهندسی برق ایفا می‌کند. در سال‌های اخیر، مفاهیم و ابزارهای تحلیل شبکه در زمینه‌های زیاد دیگری مفید واقع شده است، از قبیل نظریه اطلاعات و مطالعه‌ی دستگاه‌های حمل و نقل. تحلیل زیر از جریان ترافیک از یک شبکه جاده‌ای

در زمان نقطه اوج خود، چگونگی کارایی دستگاه‌های معادلات خطی با جواب‌های بسیار زیاد را در عمل نشان می‌دهد.

در شکل ۹-۱ یک شبکه جاده‌ای نمونه‌ای نشان داده شده است. این ناحیه‌ای در مرکز شهر تهران، می‌باشد. خیابانها همه یک طرفه و با پیکان‌هایی که جهت حرکت ترافیک را نشان می‌دهند، می‌باشند. جریان ترافیک در داخل و خارج شبکه برحسب وسایل نقلیه در هر ساعت (vph) اندازه‌گیری می‌شوند. اشکالی که در زیر نشان داده شده است، براساس اوج نقطه ترافیک در وسط هفته، ۷ صبح تا ۹ صبح و ۴ بعدازظهر تا ۶ بعدازظهر داده شده است. یک افزایش ۲ درصدی در جریان کل برای جریان ترافیک بعدازظهر جمعه را می‌بایست پذیرفت. یک مدل ریاضی که بتوان برای تحلیل این شبکه به کار برد را می‌سازیم.



شکل ۹-۱: مرکز شهر تهران

فرض می‌کنیم جریانات ترافیکی در طول شاخه‌های مختلف  $x_1, \dots, x_7$  مطابق با شکل ۹-۱ باشد. فرض کنیم قانون ترافیکی زیر اعمال گردد.

تمامی ورودی ترافیکی به یک اتصال می‌بایست از آن اتصال خارج شوند. دستگاه معادلات خطی زیر را خواهیم داشت:

$$\text{اتصال } A: \text{ ورود ترافیک} = 400 + 200 = \text{خروج ترافیک} = x_1 + x_5$$

$$\text{بنابراین } x_1 + x_5 = 600$$

$$\text{اتصال } B: \text{ ورود ترافیک} = x_1 + x_6 = \text{خروج ترافیک} = x_2 + 100$$

$$\text{بنابراین } x_1 + x_6 = x_2 + 100$$

با ادامه، برای هر اتصال و نوشتن معادلات منتج به فرم مناسب به صورت متغیرها در سمت چپ و ثابت‌ها در سمت راست، دستگاه معادلات خطی زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \text{اتصال } A &= 600 & x_1 &+ x_5 \\ \text{اتصال } B &= 100 & x_1 - x_2 &+ x_6 \\ \text{اتصال } C &= 500 & x_2 &- x_7 \\ \text{اتصال } D &= 200 & -x_3 &+ x_7 \\ \text{اتصال } E &= 800 & -x_3 + x_4 &+ x_6 \\ \text{اتصال } F &= 600 & x_4 + x_5 & \end{aligned}$$

روش حذفی گاوس - جردن برای حل این دستگاه معادلات به کار گرفته می‌شود. ملاحظه می‌کنیم که ماتریس افزوده حاوی تعداد زیادی صفر است. این صفرها در حد زیادی مقدار محاسبات را تقلیل می‌دهند. فرم پلکانی تحویل یافته را ارائه می‌دهیم و نحوه‌ی محاسبه‌ی آن را به صورت تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. در عمل، شبکه‌ها بسیار بزرگتر از آن چیزی است که در اینجا نمایش داده‌ایم، و دستگاه‌های معادلات خطی نیز خیلی بزرگتر از آن است که آن‌ها را توصیف کرده‌ایم. چنین دستگاه‌هایی توسط رایانه‌ها حل می‌شوند. به هر حال ماتریس‌های افزوده کلیه‌ی چنین دستگاه‌هایی شامل تعداد زیادی صفر می‌باشند. بسیاری از تحقیقات به سمت پیشرفته‌تر کردن الگوریتم‌های کارآمد برای حل چنین دستگاه‌های معادلات پراکنده به طور اثربخشی پیش می‌رود. ماتریس افزوده و فرم پلکانی تحویل یافته دستگاه فوق به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 600 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 500 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 800 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 600 \end{bmatrix} \approx \dots \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 600 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 500 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -200 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 600 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات متناظر با این فرم پلکانی تحویل یافته عبارت است از:

$$\begin{aligned}x_1 + x_6 - x_7 &= 600 \\x_2 - x_7 &= 500 \\x_3 - x_7 &= -200 \\x_4 + x_6 - x_7 &= 600 \\x_5 - x_6 + x_7 &= 0\end{aligned}$$

با بیان هر متغیر پیشرو برحسب متغیرهای باقی مانده، به دست می‌آوریم،

$$\begin{aligned}x_1 &= -x_6 + x_7 + 600 \\x_2 &= x_7 + 500 \\x_3 &= x_7 - 200 \\x_4 &= -x_6 + x_7 + 600 \\x_5 &= x_6 - x_7\end{aligned}$$

همان طور که انتظار می‌رفت، دستگاه معادلات دارای تعداد زیادی جواب است. تعداد زیادی جریان ترافیکی ممکن، وجود دارد.

اکنون این مدل ریاضی را برای رسیدن به اطلاعات به کار می‌بریم. فرض کنید که می‌خواهیم در طول خیابان امام خمینی بین ولیعصر و خیابان فلسطین اجرا نمائیم. حالت مطلوب، حالتی است که تا حد امکان جریان ترافیکی کمی در طول این خیابان داشته باشیم. جریان‌ها در طول انشعابات مختلف به وسیله‌ی چراغ‌های راهنمایی در اتصالات قابل کنترل می‌باشند. می‌نیم جریان ممکن در طول خیابان امام خمینی که موجب ازدحام ترافیکی نمی‌شود، چیست؟ جریان‌ها در طول دیگر انشعابات وقتی که به انتها می‌رسند، چیست؟ این مدل ما را قادر به پاسخ به این سؤالات می‌کند.

می‌نیم کردن جریان در طول خیابان امام خمینی متناظر با می‌نیم کردن  $x_7$  می‌باشد. از آنجا که تمام جریان‌های ترافیکی می‌بایست بزرگتر یا مساوی صفر باشند، معادله‌ی سوم ایجاب می‌کند که می‌نیم مقدار  $x_7$  برابر  $200$  باشد، زیرا در غیر این صورت  $x_3$  منفی می‌شود. (یک جریان منفی به عنوان حرکت ترافیکی در جهت خلاف جهتی که روی خیابان یک طرفه مشخص شده، توجیه می‌شود). بنابراین در دوره‌ی زمانی اوج ترافیک، در انشعاب CD، می‌بایست حداقل به  $200$  ماشین در هر ساعت اجازه‌ی حرکت داده شود. اکنون اجازه دهید جریان‌های دیگر انشعابات را در حالتی که در طول خیابان امام خمینی می‌نیم جریان را داریم، آزمایش کنیم. از  $x_7 = 200$  خواهیم داشت:

$$x_1 = -x_6 + 800$$

$$x_2 = 70^\circ$$

$$x_3 = 0$$

$$x_4 = -x_6 + 80^\circ$$

$$x_5 = x_6 - 20^\circ$$

چون  $x_7 = 20^\circ$  داریم  $x_3 = 0$  و برعکس، می‌بینیم که می‌نیم جریان در انشعاب  $x_7$  را می‌توان با قرار دادن  $x_3 = 0$ ، یعنی با بستن DE به روی ترافیک، به دست آورد.

### مجموعه تمرینات

در تمرینات ۱ الی ۵، معادلات چندجمله‌ای درجه‌ی دو را به گونه‌ای تعیین کنید که نمودارشان از نقاط داده شده عبور کنند.

۱)  $(1, 2), (2, 2), (3, 4)$  .

۲)  $(1, 14), (2, 22), (3, 32)$  .

۳)  $(1, 5), (2, 7), (3, 9)$  .

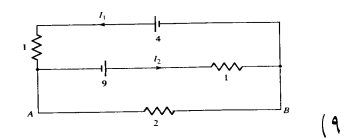
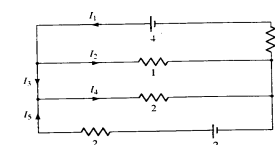
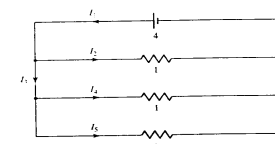
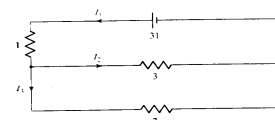
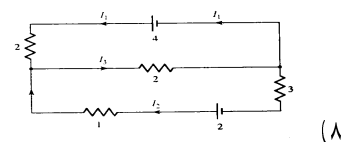
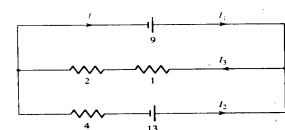
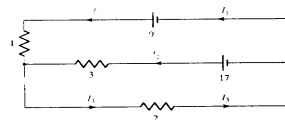
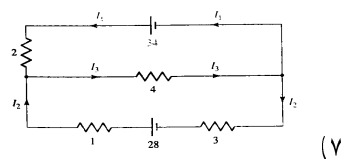
۴)  $(1, 8), (3, 26), (5, 60)$  . مقدار  $y$  به ازای  $x = 2$  چیست؟

۵)  $(-1, 1), (0, 1), (1, -3)$  . مقدار  $y$  به ازای  $x = 3$  چیست؟

۶) معادله چندجمله‌ای درجه‌ی سه را چنان بیابید که نمودارش از نقاط  $(-3, 1), (-1, 2), (3, 9), (4, 33)$  بگذرد.

در تمرینات ۷ الی ۱۴ شدت جریان‌ها در انشعابات مختلف شبکه‌های الکتریکی را تعیین کنید. واحد شدت جریان، آمپر و واحد مقاومت‌ها اهم می‌باشد. (راهنمایی: در تمرین ۱۴ یافتن جهت شدت جریان در طول AB مشکل است. یک حدس بزنید. نتیجه‌ی منفی برای شدت جریان به مفهوم این است که حدستان غلط بوده است و جهت عکس جهت‌ی است که گرفته بوده‌اید. به هر حال مقدار به دست آمده صحیح است و نیازی به حل دوباره مسئله نمی‌باشد).





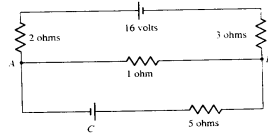
۱۰) شدت جریاناتی را که از شاخه‌های مختلف شبکه الکتریکی شکل ۱-۱۰ می‌گذرد را تعیین کنید.

الف) زمانی که باتری  $C$ ، ۹۰ ولت است.

ب) زمانی که باتری  $C$ ، ۲۳ ولت است.

توجه کنید که چگونه شدت جریانی که از انشعاب  $AB$  می‌گذرد در الف) عکس می‌شود. ولتاژ  $C$

برای زمانی که هیچ جریانی از  $AB$  نمی‌گذرد، چه خواهد بود؟



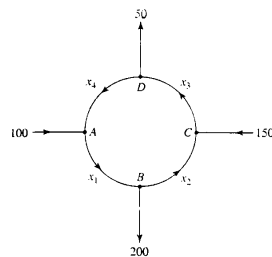
شکل ۱-۱۰

۱۱) مدل ریاضی بسازید که جریان ترافیک در شبکه جاده‌ای شکل ۱۱-۱ را توصیف کند. تمام خیابان‌ها در جهتی که نشان داده شده است یک طرفه می‌باشند. واحدها برحسب وسائط نقلیه در هر ساعت می‌باشند. دو جریان ترافیکی ممکن مجزا را بدهید. کمترین جریان ممکن که در طول شاخه  $AB$  انتظار می‌رود چیست؟



شکل ۱۱-۱

۱۲) شکل ۱۲-۱ نمایانگر یک ترافیک وارده و خارج شده از یک چهار راه میدانی می‌باشد. چنین اتصالاتی در ایران زیاد است. یک مدل ریاضی بسازید که جریان ترافیکی در طول اتصالات مختلف را توصیف کند. می‌توانم جریان ممکن در طول انشعاب  $BC$ ، به طور نظری، چیست؟ آیا این جریان در عمل قابل درک است؟



## شکل ۱-۱۲

۱۳) چندجمله‌ای‌های درجه دو بسیاری وجود دارند که از نقاط  $(۱, ۲)$  و  $(۳, ۴)$  می‌گذرند. این وضعیت را می‌توان به وسیله‌ی یک دستگاه دو معادله خطی برحسب سه متغیر که جواب‌های بسیاری دارد، توصیف کرد. معادله‌ای (پارامتری) پیدا کنید که این خانواده از چندجمله‌ای‌ها را نمایش دهد.

۱۴) چندجمله‌ای‌های درجه‌ی سه بسیاری وجود دارند که از نقاط  $(۱, ۲)$ ،  $(۳, ۴)$  و  $(۴, ۸)$  می‌گذرند. این وضعیت را می‌توان به وسیله‌ی یک دستگاه سه معادله خطی برحسب چهار متغیر که جواب‌های بسیار دارد، توصیف کرد. معادله‌ای (پارامتری) پیدا کنید که این خانواده از چندجمله‌ای‌ها را نمایش دهد. چندجمله‌ای منحصر بفرده از درجه ۳ که ضریب  $x^3$  در آن برابر ۱ و از این نقاط می‌گذرد را تعیین کنید.

## تمرین‌های دوره‌ای فصل اول

۱) اندازه‌ی ماتریس‌های زیر را به دست آورید:

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix} \text{ (ب)} \quad \begin{bmatrix} ۴ & ۳ & -۲ \\ ۱ & ۵ & ۷ \end{bmatrix} \text{ (الف)}$$

$$\begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \\ ۶ \end{bmatrix} \text{ (د)} \quad \begin{bmatrix} ۴ & ۳ & ۲ & ۷ \end{bmatrix} \text{ (ج)}$$

$$\begin{bmatrix} ۸ & ۵ & ۳ & -۷ & ۵ & ۹ \\ -۲ & ۳ & ۵ & ۷ & ۰ & ۲ \\ ۴ & -۳ & ۵ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & -۸ & -۱ & ۵ & ۳ & ۸ \end{bmatrix} \text{ (ه)}$$

۲) درایه‌هایی که در مکان  $(۱, ۳)$ ،  $(۲, ۱)$ ،  $(۳, ۳)$ ،  $(۲, ۵)$  و  $(۳, ۶)$  در ماتریس زیر قرار دارد را به دست آورید:

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۰ & ۷ & ۸ & ۴ \\ ۶ & ۷ & ۴ & ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۵ & ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix}$$

۳) ماتریس همانی  $I_5$  را بنویسید.

۴) ماتریس ضرایب و ماتریس افزوده هر یک از دستگاه‌های معادلات زیر را مشخص کنید.

(الف)

$$x_1 + 2x_2 = 6$$

$$4x_1 - 3x_2 = -1$$

(ب)

$$2x_1 + x_2 - 4x_3 = 1$$

$$x_1 - 2x_2 + 8x_3 = 0$$

$$3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = -3$$

(ج)

$$-x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -2$$

$$3x_1 - x_2 + 5x_3 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 = 5$$

(د)

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 5$$

$$x_3 = -3$$

(ه)

$$-2x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 5x_4 = -2$$

$$x_1 + 5x_2 - 6x_4 = 0$$

$$-x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5$$

(۵) ماتریس‌های زیر را به صورت ماتریس‌های افزوده‌ی دستگاه‌های معادلات تفسیر کنید. هر یک از دستگاه معادلات را بنویسید:

$$\begin{bmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ (ب)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ (د)}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -3 & 7 & 8 \end{bmatrix} \text{ (الف)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} \text{ (ج)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \text{ (ه)}$$

۶) مشخص کنید که آیا ماتریس‌های زیر به فرم پلکانی تحویل یافته هستند یا خیر؟ اگر ماتریسی به فرم پلکانی تحویل یافته نیست، دلیل آورید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (ب)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \text{ (د)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \text{ (الف)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix} \text{ (ج)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ (د)}$$

۷) دستگاه‌های معادلات زیر دارای جواب منحصر بفردند. این دستگاه‌ها را به کمک روش حذفی گاوس-جردن حل کنید.

(الف)

$$2x_1 + 4x_2 = 2$$

$$3x_1 + 7x_2 = 2$$

(ب)

$$x_1 - 2x_2 - 6x_3 = -17$$

$$2x_1 - 6x_2 - 16x_3 = -46$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = -5$$

(ج)

$$\begin{aligned}x_2 + 2x_3 + 6x_4 &= 21 \\x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 &= 12 \\x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 &= -9 \\3x_1 - 2x_2 - 6x_4 &= -4\end{aligned}$$

۸) دستگاه‌های معادلات زیر را (در صورت امکان) با کمک روش حذفی گاوس - جردن حل کنید.

(الف)

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\-2x_1 + 3x_2 + x_3 &= -8 \\4x_1 - 2x_2 + 10x_3 &= 10\end{aligned}$$

(ب)

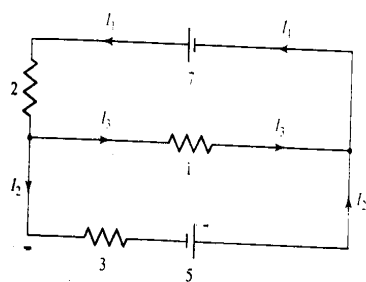
$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 &= -7 \\-2x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 3x_4 &= 10 \\x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= -10\end{aligned}$$

۹) فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $n \times n$  به فرم پلکانی تحویل یافته باشد. نشان دهید اگر  $A \neq I_n$  باشد، آنگاه  $A$  دارای یک سطر متشکل از صفر است.

۱۰) فرض کنید  $A$  و  $B$  ماتریس‌های هم‌ارز سطری باشند. نشان دهید  $A$  و  $B$  دارای فرم پلکانی تحویل یافته‌ی یکسان هستند.

۱۱) معادله‌ی چندجمله‌ای از درجه‌ی ۲ را که از نقاط  $(1, 3)$ ،  $(2, 6)$  و  $(3, 13)$  بگذرد مشخص نمایید.

۱۲) جریاناتی که از انشعابات شبکه‌ی زیر می‌گذرد را تعیین کنید.



شکل ۱-۱۳

## هدف‌های رفتاری فصل دو

دانشجو پس از پایان این فصل باید بتواند:

- اعمال بر ماتریس‌ها را مرور کرده و ویژگی‌های آن را تشریح کند.
- در محاسبات با ضرب ماتریس‌ها، با استفاده از ویژگی شرکت‌پذیری تشخیص دهد که در محاسبه حاصلضرب‌های

$$((AB)C)D$$

$$A(BC)D$$

$$(AB)(CD)$$

$$A(B(CD))$$

کدامیک به تعداد عملیات کمتری نیاز دارد.

- مفهوم و تعریف ماتریس متقارن را توضیح دهد.
- ویژگی‌های ترانهاده را توضیح دهد.
- مفهوم ماتریس و ویژگی‌های آن را توضیح داده و از عهده استدلال و برهان آن برآید.
- مفهوم مزدوج و مزدوج ترانهاده را درک کرده و ویژگی‌های آن را بیان کند.
- طریقه پیدا کردن وارون یک ماتریس را توضیح داده و این طریقه را در محاسبات عملی پیاده کند. همچنین وارون را در رمزنگاری به کار گیرد.
- با استفاده از روش حذف گاوس - جردن وارون یک ماتریس را محاسبه کند.
- ماتریس متشکل از داده‌های ورودی و خروجی را شناخته و در مدل‌های اقتصادی از آن استفاده کند.
- ماتریس‌های استوفاستیک<sup>۱</sup> را شناخته و نقش آن‌ها در پدیده‌ها و فرآیندهای تصادفی را دریابد.
- مفهوم دیگراف را توضیح داده و ماتریس وابسته آن را تعریف کند.
- ماتریس فاصله را تعریف کند و مدل ارتباطی را در ارتباط با روابط گروهی در جامعه شناسی توضیح دهد.
- از عهده حل تمرین‌ها و مسائل پایان فصل به راحتی برآید.

1) Stochastic



## فصل دوم

# ماتریس‌ها

در این فصل نظریه‌ی مربوط به ماتریس‌ها را توسعه می‌دهیم و چگونگی دید این مفاهیم را که در توسعه کاربردهایی از باستان‌شناسی تا اقتصاد استفاده می‌شوند، می‌بینیم. برای مثال ما قوانینی را ارائه می‌دهیم که در رابطه با جمع و ضرب ماتریس‌ها می‌باشند و خواهیم فهمید که چگونه این عملیات برای مشخص نمودن ترتیب رویدادهای مصنوعی در علم باستان‌شناسی و وابستگی در صنایع مورد استفاده قرار می‌گیرد.

### ۱-۲ جمع، ضرب عددی، و ضرب ماتریس‌ها

برای کار کردن با ماتریس‌ها یک نمادگذاری مناسب توسعه یافته است. محل یک درایه در ماتریس با ارائه سطر و ستونی که در آن ماتریس قرار دارد مشخص می‌شود. درایه موجود در سطر  $i$ ، ستون  $j$ ام در ماتریس  $A$  با  $a_{ij}$  نمایش داده می‌شود.

$$\begin{array}{c} a_{ij} \\ \text{1st subscript} \text{---} | \text{---} \text{2nd subscript} \\ \text{indicates row} \qquad \qquad \qquad \text{indicates column} \end{array}$$

دومین زیرنوشت شماره ستون را نشان می‌دهد اولین زیرنوشت شماره سطر را نشان می‌دهد. ما به  $a_{ij}$  به عنوان  $(i, j)$  امین درایه ماتریس  $A$  اشاره می‌کنیم. می‌توانیم ماتریس دلخواه  $m \times n$ ،  $A$  را مانند شکل ۱-۲ نشان دهیم. اگر تعداد سطرها و ستون‌های ماتریس  $A$  برابر باشند آن را ماتریس مربعی می‌نامیم.

درایه‌های ماتریس مربعی  $A$  که در آن زیرنوشت‌ها مساوی می‌باشند، یعنی درایه‌های  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  قطر اصلی ماتریس می‌باشد. (شکل ۲-۲ را ببینید).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ماتریس  $A$  مربعی  $m \times n$

شکل ۱-۲

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ماتریس  $A$  مربعی  $n \times n$

شکل ۲-۲

مثال ۱) درایه‌های  $a_{12}, a_{23}, a_{31}$  را برای ماتریس زیر تعیین کنید. قطر اصلی ماتریس  $A$  را مشخص کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

حل: چون درایه‌ای از سطر ۱ و ستون ۲ است  $a_{12} = -2$  می‌بینیم که  $a_{23} = 4$  و  $a_{31} = 2$ . قطر اصلی  $A$  شامل درایه‌های  $a_{11} = 1$  و  $a_{22} = -3$ ،  $a_{33} = 5$  می‌باشد.

برای توسعه نظریه جبری ماتریس‌ها، با تعاریفی مفهومی از تساوی ماتریس‌ها شروع می‌کنیم.

**۲-۱-۱ تعریف:** دو ماتریس را برابر گویند در صورتی که درایه‌های نظیر به نظیر با هم برابر و دارای سطر و ستون مساوی باشند. بنابراین  $A = B$  در صورتی که  $a_{ij} = b_{ij}$  باشد.

این تعریف ما را قادر می‌سازد تا معادلاتی را که شامل ماتریس‌ها می‌شوند معرفی کنیم و هم‌چنین به ما این اجازه را می‌دهد که عمل جمع ماتریس‌ها را تعریف کنیم.

## جمع ماتریس‌ها

**۲-۱-۲ تعریف:** فرض کنیم  $A$  و  $B$  ماتریس‌هایی با اندازه مساوی باشند. جمع این دو ماتریس یعنی  $(A + B)$  از طریق جمع درایه‌های نظیر به نظیر آنها به دست می‌آید. ماتریس  $A + B$  نیز هم‌اندازه ماتریس‌های  $A$  و  $B$  می‌باشد. اگر  $A$  و  $B$  از اندازه‌ای مساوی برخوردار نباشند، نمی‌توانند با یکدیگر جمع شوند و می‌گوئیم عمل جمع امکان‌پذیر نمی‌باشد. بنابراین اگر  $C = A + B$ ، آنگاه  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .

(مثال ۲) فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۷ \\ ۰ & -۲ & ۳ \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ & -۶ \\ -۳ & ۱ & ۸ \end{bmatrix}$  و  $C = \begin{bmatrix} -۵ & ۴ \\ ۲ & ۷ \end{bmatrix}$  حاصل  $A + B$  و  $A + C$  را در صورت وجود بیابید.

حل: ماتریس‌های  $A$  و  $B$  هر دو  $۲ \times ۳$  می‌باشند. لذا از اندازه‌های مساوی برخوردار هستند. پس جمع آنها موجود و یک ماتریس  $۲ \times ۳$  می‌باشد. با جمع نظیر به نظیر درایه‌ها به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۷ \\ ۰ & -۲ & ۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ & ۵ & -۶ \\ -۳ & ۱ & ۸ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ۱+۲ & ۴+۵ & ۷-۶ \\ ۰-۳ & -۲+۱ & ۳+۸ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۹ & ۱ \\ -۳ & -۱ & ۱۱ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ماتریس  $A$  ماتریسی است  $۲ \times ۳$  در حالی که ماتریس  $C$ ،  $۲ \times ۲$  می‌باشد. لذا  $A$  و  $C$  از اندازه‌های مساوی برخوردار نمی‌باشند. بنابراین  $A + C$  امکان‌پذیر نمی‌باشد.

## ضرب اسکالر (عددی) ماتریس‌ها

هنگام کار با ماتریس‌ها، به طور معمول به جای اعداد از اسکالرها نام برده می‌شود. از حروف بزرگ برای نمایش دادن ماتریس‌ها و از حروف کوچک برای نشان دادن اسکالرها استفاده می‌کنیم. قدم بعدی در توسعه نظریه ماتریس‌ها معرفی کردن قانونی برای اسکالرها در ماتریس‌ها می‌باشد.

**۳-۱-۲ تعریف:** فرض کنید  $A$  یک ماتریس و  $c$  یک اسکالر باشد. ضرب اسکالر  $c$  در  $A$  به صورت  $cA$  نمایش داده می‌شود. که ماتریسی است از ضرب هر مؤلفه  $A$  در اسکالر  $c$  به دست می‌آید، ماتریس  $cA$  هم‌اندازه ماتریس  $A$  می‌باشد. بنابراین اگر  $B = cA$ ، آنگاه  $b_{ij} = ca_{ij}$ .

(مثال ۳) فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۴ \\ ۷ & -۳ & ۰ \end{bmatrix}$ ،  $۳A$  را تعیین کنید؟

حل: هر مؤلفه  $A$  را در ۳ ضرب می‌کنیم:

$$3A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 12 \\ 21 & -9 & 0 \end{bmatrix}$$

مشاهده می‌کنید که  $A$  و  $3A$  هر دو ماتریس‌هایی  $2 \times 3$  هستند.

## ۲-۲ قرینه‌سازی و تفریق

ماتریس  $-C$  را به صورت  $(-1)C$  تعریف می‌کنیم. قرینه‌سازی ماتریس، یعنی این که هر مؤلفه از ماتریس

$$-C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \text{ را در } -1 \text{ ضرب کنیم. بنابراین اگر } C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 3 & -6 & -2 \end{bmatrix} \text{ آنگاه}$$

**۱-۲-۲ تعریف:** اکنون تفریق ماتریس‌ها را با روشی که آن را سازگار با جمع، ضرب اسکالر و

قرینه‌سازی می‌نماید، بیان می‌کنیم:

$$A - B = A + (-1)B$$

این تعریف بر این نکته دلالت دارد که عمل تفریق بین ماتریس‌هایی با اندازه برابر توسط تفریق مؤلفه‌های

نظیر به نظیر انجام می‌پذیرد. بنابراین اگر  $C = A - B$ ، آنگاه  $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ .

فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -1 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ . می‌خواهیم  $A - B$  را معین کنیم.

داریم:

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{bmatrix} 3 - 2 & 0 - 8 & -2 - (-1) \\ 3 - 0 & 6 - 4 & -5 - 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & -11 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## ضرب ماتریس‌ها

قوانین جمع ماتریس‌ها و ضرب ماتریس‌ها با اسکالر‌ها را معرفی کردیم. اکنون یک نگاه اجمالی به متداولترین

ضرب ماتریس‌ها خواهیم انداخت. ضرب دو ماتریس  $A$  و  $B$  مانند ضرب مؤلفه‌های نظیر به نظیر  $A$  و  $B$

به نظر می‌رسد. اما این راه مفیدترین راه برای ضرب ماتریس‌ها نمی‌باشد.

ریاضی‌دانان قانون دیگری را معرفی می‌کنند که شامل ضرب سطرهای اولین ماتریس  $A$  در ستون‌های دومین ماتریس  $B$  در یک سیستم می‌باشد. ما این قانون را با وارد کردن یک عضو دلخواه از ماتریس به عنوان ماتریس حاصلضرب  $AB$  بیان می‌کنیم.

**۲-۲-۲ تعریف:** فرض کنیم تعداد ستون‌ها در ماتریس  $A$  مساوی با تعداد سطرها در ماتریس  $B$  باشد در این صورت حاصلضرب  $AB$  موجود می‌باشد. و مؤلفه موجود در سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام  $AB$  با ضرب مؤلفه‌های نظیر به نظیر سطر  $i$ ام از  $A$  و ستون  $j$ ام از  $B$  و جمع حاصل به دست می‌آید.

اگر تعداد ستون‌ها در  $A$  با تعداد سطرها در  $B$  برابر نباشد. می‌گوئیم عمل ضرب وجود ندارد. فرض

کنیم  $A$ ،  $n$  ستون و  $B$ ،  $n$  سطر دارد. سطر  $i$ ام از  $A$   $[a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}]$  است و ستون  $j$ ام از  $B$   $\begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$

است. بنابراین اگر  $C = AB$  آنگاه  $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$ .

مثال ۴) فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$  و  $C = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ ،  $BA$ ،  $AB$  و  $AC$  را تعیین کنید اگر ضرب‌ها موجود باشند؟

حل:  $A$  دارای ۲ ستون و  $B$  دارای ۲ سطر است. بنابراین  $AB$  وجود دارد.  $A$  را برحسب سطرهای آن و  $B$  را برحسب ستون‌ها آن تعبیر می‌کنیم و سطرها را در ستون‌ها مطابق سیستم زیر ضرب می‌کنیم.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

اولین سطر  $A$  در هر ستون از  $B$  ضرب می‌شود.

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 0 \\ -2 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \end{array} \right]$$

سطر دوم از  $A$  در هر ستون از  $B$  ضرب می‌شود.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 0 \\ -2 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \end{array} \right] \\ AB &= \begin{bmatrix} (1 \times 5) + (3 \times 3) & (1 \times 0) + (3 \times (-2)) & (1 \times 1) + (3 \times 6) \\ (2 \times 5) + (0 \times 3) & (2 \times 0) + (0 \times (-2)) & (2 \times 1) + (0 \times 6) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 14 & -6 & 19 \\ 10 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

اکنون می‌خواهیم تا به حاصلضرب‌های باقیمانده یعنی  $BA$  و  $AC$  نگاهی بیندازیم. ماتریس  $B$  دارای ۳ ستون می‌باشد در حالی که  $A$  دارای ۲ سطر است بنابراین  $BA$  وجود ندارد. ماتریس  $A$  دارای ۲ ستون می‌باشد در حالی که ماتریس  $C$  یک سطر دارد. لذا  $AC$  نیز وجود ندارد.

مشاهده می‌شود که در مثال قبل  $AB$  وجود دارد اما  $BA$  وجود ندارد. ترتیب ضرب در ۲ ماتریس اهمیت به‌سزایی دارد. برخلاف ضرب اعداد حقیقی، ضرب در ماتریس‌ها خاصیت جابجایی ندارد. در حالت کلی برای ۲ ماتریس  $AB$  داریم  $AB \neq BA$ . بعضی اوقات  $AB$  و  $BA$  هر دو موجود هستند. اما در حالت کلی برابر نیستند.

مثال ۵) اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 0 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ ،  $AB$  را تعیین کنید.

حل: چون  $A$  دارای ۲ ستون و  $B$  دارای ۲ سطر است  $AB$  وجود دارد. ضرب سطرهای  $A$  در ستون‌ها  $B$  در یک حالت مناسب به شرح زیر است:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 0 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

اولین سطر از  $A$  در هر ستون از  $B$  ضرب می‌شود:

$$\left[ \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right]$$

دومین سطر از  $A$  در هر ستون از  $B$  ضرب می‌شود:

$$\left[ \begin{bmatrix} 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right]$$

سومین سطر از  $A$  در هر ستون از  $B$  ضرب می‌شود:

$$\left[ \begin{bmatrix} -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right]$$

$$AB = \begin{bmatrix} -2 + 3 & 0 + 5 \\ -7 + 0 & 0 + 0 \\ 3 - 6 & 0 - 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -7 & 0 \\ -3 & -10 \end{bmatrix}$$

مثال زیر نشان می‌دهد که ما می‌توانیم هر مؤلفه دلخواه در ضرب دو ماتریس را بدون محاسبه کردن کل ضرب تخمین بزنیم.

مثال ۱۶)  $C = AB$  را برای ماتریس‌های  $A$  و  $B$  که در زیر آمده‌اند در نظر بگیرید. مؤلفه  $c_{۲۳}$  از  $C$  را تعیین کنید:

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۳ & ۴ \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -۷ & ۳ & ۲ \\ ۵ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

حل: مؤلفه موجود در سطر ۲ و ستون ۳ از ماتریس  $C$  می‌باشد. این ضرب، ضرب سطر ۲ از  $A$  و ستون ۳ از  $B$  می‌باشد. خواهیم داشت:

$$c_{۲۳} = [-۳ \ ۴] \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} = (-۳ \times ۲) + (۴ \times ۱) = -۲$$

### ۳-۲ اندازه ماتریس حاصل ضرب

اکنون در مورد اندازه ماتریس حاصل ضرب بحث می‌کنیم. فرض کنیم  $A$  یک ماتریس  $m \times r$  و  $B$  یک ماتریس  $r \times n$  باشد.  $A$  دارای  $r$  ستون و  $B$  دارای  $r$  سطر است. بنابراین  $AB$  وجود دارد. اولین سطر از  $AB$  با ضرب سطر اول از  $A$  با هر یک از ستون  $B$  به دست می‌آید. بنابراین تعداد ستون‌ها در  $AB$  با تعداد ستون‌ها در  $B$  برابر می‌باشد. همچنین تعداد سطرها در  $AB$  با تعداد سطرها در  $A$  برابر می‌باشد. بنابراین ماتریس  $AB$  یک ماتریس  $m \times n$  است.

اگر  $A$  یک ماتریس  $m \times r$  و  $B$  یک ماتریس  $r \times n$  باشد آنگاه  $AB$  یک ماتریس  $m \times n$  می‌باشد. می‌توانیم نتیجه فوق را مانند زیر به تصویر بکشانیم:

$$A \quad B = AB$$

$$\begin{array}{ccc} A & B & = AB \\ m \times r & r \times n & m \times n \end{array}$$

مثال ۷: اگر  $A$  یک ماتریس  $۵ \times ۶$  و  $B$  یک ماتریس  $۶ \times ۷$  باشد، اندازه ماتریس حاصل ضرب  $AB$  چقدر است؟

$$A_{۵ \times ۶} \cdot B_{۶ \times ۷} = AB_{۵ \times ۷}$$

$$\begin{array}{ccc}
 A & B & = AB \\
 5 \times 6 & 6 \times 7 & 5 \times 7 \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{match}} & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \\
 \underbrace{\hspace{3.5cm}}_{5 \times 7} & & 
 \end{array}$$

**۱-۳-۲ تعریف:** ماتریس صفر ماتریسی است که تمام مؤلفه‌های آن صفر می‌باشند. ماتریس قطری ماتریسی است که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی همگی صفر هستند. یک ماتریس همانی، ماتریسی است قطری و اعضای قطر اصلی آن عدد یک است. (شکل ۳-۲ را ببینید).

$$O_{mn} = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \circ & \dots & \circ \\ \dots & & & \\ \circ & \circ & \dots & \circ \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \circ & \dots & \circ \\ \circ & a_{22} & \dots & \circ \\ \dots & & & \\ \circ & \circ & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad I_n = \begin{bmatrix} 1 & \circ & \dots & \circ \\ \circ & 1 & \dots & \circ \\ \dots & & & \\ \circ & \circ & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس صفر
ماتریس قطری A
ماتریس همانی

شکل ۳-۲

ماتریس‌های صفر در نظریه‌ی ماتریس‌ها نقش عدد صفر در اعداد حقیقی را ایفا می‌کنند و ماتریس‌های همانی مانند عدد ۱ عمل می‌کنند. این نقشها در قضیه‌ی زیر توصیف می‌شوند که به وسیله‌ی یک مثال آن را نشان می‌دهیم.

**۲-۳-۲ قضیه:** فرض کنیم  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  و  $O_{mn}$  یک ماتریس صفر  $m \times n$  باشد. فرض کنیم  $B$  یک ماتریس مربعی  $n \times n$ ،  $O_n$  و  $I_n$  به ترتیب ماتریس‌های صفر و همانی  $n \times n$  باشند. آنگاه

$$A + O_{mn} = O_{mn} + A = A$$

$$BO_n = O_n B = O_n$$

$$BI_n = I_n B = B$$



مثال ۸) فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$  ملاحظه می‌کنیم که:

$$A + O_{23} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix} = A$$

$$BO_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O_2$$

$$BI_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = B$$

و به طور مشابه:

$$O_{23} + A = A \quad \text{و} \quad O_2 B = O_2 \quad \text{و} \quad I_2 B = B$$

## ۴-۲ علامت‌گذاری ماتریس و دستگاه معادلات

علامت‌گذاری در ماتریس‌ها برای سهولت در بیان و توصیف دستگاه معادلات خطی دلخواه استفاده می‌شود.

ما می‌توانیم دستگاه  $m$  معادله خطی  $n$  مجهولی را به صورت زیر بنویسیم:

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

در این صورت طبق ضرب ماتریس‌ها دستگاه معادلات خطی بالا را به صورت ماتریس زیر می‌توانیم

بنویسیم:

$$AX = B$$

بنابراین، برای مثال از

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & -8 & 4 \\ 2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix}$$

می‌توان نوشت:

$$3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 7, \quad x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 9, \quad 2x_1 + 6x_2 - 7x_3 = -2$$

این مدل از نمایش ماتریس برای دستگاه معادلات خطی می‌تواند در قسمت‌های بعدی بسیار مورد استفاده قرار گیرد.

## ۵-۲ ضرب سریع ماتریس

محاسبات ضربه ماتریس‌های بزرگ در کامپیوترها انجام می‌شود. تحقیقات و مطالعات زیادی روی پیدا کردن و انجام دادن محاسبات ماتریسی به طور سریع در کامپیوتر انجام شده است. در سال ۱۹۶۹ شخصی به نام استراسن یک الگوریتم و روشی برای ضرب سریع دو ماتریس مربعی با اندازه‌های یکسان به دست آورده است. این الگوریتم و روش امروزه در کامپیوترها برای ضرب ماتریس‌های بزرگ استفاده می‌شود. ما ایده‌های استراسن را برای نشان دادن این موضوع مهم از جنبه جبر خطی عددی ارایه می‌دهیم.

تعداد اعمال ریاضی (اعمال ضرب و جمع) را که برای ضرب دو ماتریس  $2 \times 2$ ،  $A$  و  $B$  مورد نیاز است، در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

محاسبه هر دایره از  $AB$  شامل دو ضرب عددی (اسکالر) یک عمل جمع است. چون در ماتریس  $AB$  چهار دایره وجود دارد لذا تعداد کل اعمال ریاضی که لازم است برای ضرب دو ماتریس  $2 \times 2$  انجام پذیرد، هشت عمل ضرب و چهار عمل جمع است.

استراسن روشی را به دست آورد که در آن تعداد کمتری عمل ضرب اما تعداد بیشتری عمل جمع لازم

است. تساویهای زیر را در نظر بگیرید:

$$m_1 = (a_{12} - a_{22})(b_{21} - b_{22})$$

$$m_2 = (a_{11} - a_{22})(b_{11} + b_{22})$$

$$m_3 = (a_{11} - a_{21})(b_{11} + b_{12})$$

$$m_4 = (a_{11} + a_{12})b_{22}$$

$$m_5 = (b_{12} - b_{22})a_{11}$$

$$m_6 = (b_{21} - b_{11})a_{22}$$

$$m_7 = (a_{21} + a_{22})b_{11}$$

خواننده می‌تواند مشاهده کند که:

$$AB = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 - m_4 + m_6 & m_2 + m_5 \\ m_6 + m_7 & m_2 - m_3 + m_5 - m_7 \end{bmatrix}$$

می‌توان مشاهده کرد که برای محاسبه  $AB$  هفت عمل ضرب عددی و هجده عمل جمع نیاز است. تعداد ضرب‌ها به یک عمل کاهش یافته اما تعداد جمع‌ها به چهارده تا افزایش یافته است. این یک عمل ضرب ذخیره شده در نتیجه فوق‌العاده مهم است. ما اکنون می‌توانیم به خواننده این آموزش را دهیم که این الگوریتم و روش برای ضرب ماتریس‌ها به خصوص ماتریس‌های بزرگ از روش استاندارد بهتر و سریعتر است. فرض کنید  $A$  و  $B$  ماتریس‌های  $n \times n$  باشند که در آن  $n$  توانی از ۲ است،  $A$  و  $B$  را بر حسب زیرماتریس‌هایی که در زیر می‌آیند بنویسید.

$$A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, \quad B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}$$

ضرب  $AB$  با روش استاندارد معادل ضرب کردن این ماتریس‌ها می‌باشند، اگر آنها ماتریس‌های  $2 \times 2$  باشند که درآیه‌هایشان زیرماتریس‌ها باشند.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

در اینجا ۸ ضرب ماتریس از زیرماتریس‌های شامل شده وجود دارد. به هر حال می‌توانیم این تعداد ضرب را کاهش دهیم، اگر از الگوریتم استراسن به شرح زیر استفاده کنیم.

در الگوریتم استراسن اعداد اسکالر  $a_{11} \dots b_{22}$  با ماتریس‌های  $A_{11} \dots B_{22}$  جایگزین می‌شوند. در این الگوریتم اینک می‌توان برای محاسبه  $AB$  از انجام هفت ضرب ماتریس‌های  $\frac{n}{4} \times \frac{n}{4}$  استفاده کرد. هر

ماتریس  $\frac{n}{4} \times \frac{n}{4}$  به جای زیرماتریس‌های  $\frac{n}{4} \times \frac{n}{4}$  می‌نشینند و الگوریتم ادامه می‌یابد تا زمانی که جواب به دست آید.

در هر مرحله یک ضرب ماتریس کم می‌شود. که این کم‌تر شدن تعداد ضرب‌ها با افزایش یافتن تعداد جمع‌ها جبران می‌شود و  $n$  را به اندازه کافی بزرگ و مناسب می‌نماید. این روش به طور مکرر و متناوب برای عمل ضرب ماتریس‌های کوچکتر و کوچکتر در صنعت و تکنیک برنامه‌ریزی کامپیوتر ارایه می‌شود که برنامه تکرار نامیده می‌شود (الگوریتم بازگشتی نامیده می‌شود). این روش هنوز هم مورد استفاده قرار می‌گیرد. اگر ماتریس اصلی مربع نباشد با گذاشتن صفر به جای درایه‌ها و توسعه ماتریس به طوری که سطر و ستون آن مربع باشد. در این مرحله ما روشهای استاندارد را گسترش می‌دهیم و از روش استاندارد ضرب ماتریسی استفاده خواهیم کرد. مرجع کار اصلی و کلی استراسن روش حذفی گاوس است.

## تمرین‌ها

(۱) فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 7 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 2 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

و  $D = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$  مطلوب است محاسبه عبارتهای زیر در صورت وجود.

الف)  $A + B$  (ب)  $2B$  (ج)  $-D$  (د)  $C + D$

ه)  $A + D$  (و)  $2A + B$  (ز)  $a - B$ .

(۲) فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 & 5 & 9 \\ 6 & -8 & 2 & -4 & 5 & 9 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -7 & 9 & 3 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

و  $D = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$  مطلوب است محاسبه عبارتهای زیر در صورت وجود.

الف)  $A + B$  (ب)  $4B$  (ج)  $-3D$  (د)  $B - 3C$

ه)  $-A$  (و)  $3A + 2D$  (ز)  $A + D$ .

(۳) فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

و  $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}$  . مطلوب است محاسبه عبارتهای زیر در صورت وجود.

الف)  $AB$  (ب)  $BA$  (ج)  $AC$  (د)  $CA$

ه)  $AD$  (و)  $DC$  (ز)  $BD$  (ح)  $A^2$  . (تذکره:  $A^2 = AA$ ).

(۴) فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -7 & 8 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

و  $D = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ 3 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$  . مطلوب است محاسبه عبارتهای زیر در صورت وجود.

الف)  $BA$  (ب)  $AB$  (ج)  $CB$  (د)  $CA$

ه)  $DA$  (و)  $DB$  (ز)  $AC$  (ح)  $B^2$  .

(۵) فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

و  $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$  . عبارات زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف)  $2A - 3(BC)$  (ب)  $AB$  (ج)  $AC - BD$  (د)  $CD - 2D$

ه)  $BA$  (و)  $AD + 2(DC)$  (ز)  $AD + 2(D^2)$  (ح)  $C^2 - 2(D^2)$  . (نکته:  $C^2 = CCC$ ).

(۶) فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $3 \times 5$  و  $B$  یک ماتریس  $5 \times 2$  و  $C$  یک ماتریس  $3 \times 4$  و  $D$  یک

ماتریس  $4 \times 2$  و  $E$  یک ماتریس  $4 \times 5$  باشند. مشخص کنید کدامیک از عبارتهای ماتریسی

زیر وجود دارند و در صورت وجود اندازه آنها را به دست آورید.

الف)  $AB$  (ب)  $EB$  (ج)  $AC$  (د)  $AB + CD$

ج)  $3(EB) + 4D$  (د)  $CD - 2(CE)B$  (ه)  $2(EB) + DA$  .

(۷) فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $۲ \times ۲$  و  $B$  یک ماتریس  $۲ \times ۲$  و  $C$  یک ماتریس  $۳ \times ۲$  و  $E$  یک ماتریس  $۳ \times ۱$  باشند. تعیین کنید کدامیک از عبارتهای ماتریسی زیر وجود دارند و در صورت وجود اندازه هر یک از ماتریس‌های نتیجه شده را مشخص کنید.

$$\begin{aligned} & \text{الف) } AB \quad \text{ب) } (A^T)C \quad \text{ج) } B^T + 3(CD) \quad \text{د) } DC + BA \\ & \text{ه) } DA - 2(DB) \quad \text{و) } C = 3D \quad \text{ز) } 3(BA)(CD) + (4A)(BC)D \end{aligned}$$

(۸) فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 1 & -8 & 4 \\ 5 & -6 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & 6 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ . فرض کنید  $O_3$  و  $I_3$  به ترتیب ماتریس‌های صفر و همانی باشند نشان دهید:

$$A + O_3 = O_3 + A = A, \quad BI_3 = I_3B = B, \quad BO_3 = O_3B = O_3$$

(۹) فرض کنید  $C = AB$  و  $D = BA$  و ماتریس‌های  $A$  و  $B$  به صورت زیر می‌باشند:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 5 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

درایه‌های خواسته شده ماتریس‌های  $C$  و  $D$  را بدون محاسبه کل ماتریس به دست آورید.

$$\text{الف) } c_{21} \quad \text{ب) } c_{22} \quad \text{ج) } d_{12} \quad \text{د) } d_{22}$$

(۱۰) فرض کنید  $R = PQ$  و  $S = QR$  که در آنها  $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$  و  $Q = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}$  درایه‌های زیر را در صورت وجود  $R$  و  $S$  بدون محاسبه کل ماتریس‌ها، تعیین کنید.

$$\text{الف) } r_{21} \quad \text{ب) } r_{22} \quad \text{ج) } s_{11} \quad \text{د) } s_{22}$$

(۱۱) اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$  و  $C = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  درایه‌هایی که در زیر داده شده‌اند را برای  $D = AB + 2C$  بدون محاسبه کامل ماتریس به دست آورید.

$$\text{الف) } d_{12} \quad \text{ب) } d_{22}$$

(۱۲) اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 7 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$  و  $C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 0 \end{bmatrix}$  درایه‌هایی که در زیر داده شده‌اند را برای  $D = C^T(AB)$  بدون محاسبه کامل ماتریس به دست آورید.

$$\text{الف) } d_{11} \quad \text{ب) } d_{21} \quad \text{ج) } d_{22}$$

۱۳) هر کدام از دستگاه معادلات خطی زیر را به صورت یک معادله ماتریسی منفرد  $AX = B$  بنویسید.

$$\text{الف) } 2x_1 - 3x_2 = 4 \text{ و } 3x_1 - 8x_2 = -1$$

$$\text{ب) } 4x_1 + 7x_2 = -2 \text{ و } -2x_1 + 3x_2 = -4$$

$$\text{ج) } 6x_1 - 2x_2 = 7 \text{ و } -9x_1 - 3x_2 = 4$$

۱۴) هر کدام از دستگاه معادلات خطی زیر را به صورت یک معادله ماتریسی منفرد  $AX = B$  بنویسید:

$$\text{الف) } x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 3 \text{ و } 4x_1 - 7x_2 + x_3 = -3 \text{ و } -x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 1$$

$$\text{ب) } 5x_2 + 2x_3 = 6 \text{ و } 4x_1 - 3x_2 = -2 \text{ و } 3x_1 + x_2 = 9$$

$$\text{ج) } x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 2 \text{ و } 7x_1 + 5x_2 + x_3 = -9$$

$$\text{د) } 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4 \text{ و } x_1 + 9x_2 + 5x_3 = 12$$

۱۵) ماتریس  $A$  را به گونه‌ای در نظر بگیرید که سطر سوم آن همگی صفر هستند و  $B$  را ماتریسی در نظر بگیرید که حاصل ضرب  $AB$  وجود داشته باشد سپس ثابت کنید که سطر سوم  $AB$  همگی صفر می‌باشد.

۱۶)  $D$  را ماتریسی در نظر بگیرید که ستون دوم آن همگی صفر باشد،  $C$  را ماتریسی فرض کرده که حاصل ضرب  $CD$  وجود داشته باشد. ثابت کنید که ستون دوم  $CD$  همگی صفر هستند.

۱۷)  $A$  را یک ماتریس  $m \times r$ ،  $B$  را یک ماتریس  $r \times n$  و  $C = AB$  در نظر بگیرید. زیرماتریس‌های ستونی ماتریس  $B$  را  $B_1, B_2, \dots, B_n$  و زیرماتریس‌های ستونی ماتریس  $C$  را  $C_1, C_2, \dots, C_n$  فرض نمایید. می‌توانیم  $B$  را به شکل  $[B_1, B_2, \dots, B_n]$  و  $C$  را به شکل  $[C_1, C_2, \dots, C_n]$  بنویسیم. ثابت کنید که  $C_j = AB_j$ .

۱۸)  $A$  و  $B$  را به صورت ماتریس‌های زیر در نظر بگیرید. از نتیجه تمرین ۱۷ برای محاسبه ستون سوم ماتریس  $AB$ ، بدون محاسبه کل حاصل ضرب استفاده نمایید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

۱۹) ماتریس‌های  $A$  و  $B$  را به صورت زیر در نظر بگیرید. سطر ۲ ماتریس  $AB$  را بدون محاسبه کل

حاصل ضرب ماتریس محاسبه نمائید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

(۲۰) با لیست کردن کلیه ضرب‌ها و جمع‌ها نشان دهید که الگوریتم استراسن برای محاسبه حاصل ضرب دو ماتریس  $2 \times 2$  به ۷ ضرب و ۱۸ جمع نیاز دارد.

(۲۱) با استفاده از الگوریتم استراسن حاصل ضرب  $AB$ ، ماتریس‌های  $2 \times 2$  زیر را تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (\text{د})$$

(۲۲) با استفاده از الگوریتم استراسن حاصل ضرب  $AB$ ، ماتریس‌های  $3 \times 3$  زیر را تعیین کنید.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

## ۶-۲ ویژگی‌های اعمال ماتریس‌ها

ما اعمال جمع، ضرب اسکالر (عددی یا نرده‌ای) و ضرب ماتریس‌ها را تعریف کرده‌ایم. در این قسمت در مورد ویژگی‌های جبری این عملیات بحث می‌کنیم. تاکنون دیده‌ایم که ماتریس‌ها دارای بعضی خصوصیات جبری اعداد حقیقی می‌باشند («اما همگی این خصوصیات را ندارند»). برای مثال دیده‌ایم که ماتریس‌های همانی نقش مشابه به ۱ را در عبارت  $AI_n = I_n A = A$  به عهده دارند. (بازی می‌کند). همچنین دیدیم که ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابجایی ندارند در حالی که ضرب اعداد حقیقی دارای خاصیت جابجایی است.



۱-۶-۲ قضیه: فرض کنیم  $A, B$  و  $C$  سه ماتریس و  $a, b, c$  اسکالرهای دلخواه باشند. همچنین فرض کنیم اندازه ماتریس‌ها به گونه‌ای باشند که عملیات زیر قابل اجرا باشند:

## ویژگی‌های جمع ماتریس‌ها و ضرب اسکالر

(۱) خاصیت جابجایی عمل جمع

$$A + B = B + A$$

(۲) خاصیت شرکت پذیری

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

(۳) در اینجا  $\circ$  ماتریس صفر می‌باشند.

$$A + \circ = \circ + A = A$$

(۴) خاصیت توزیع پذیری جمع

$$c(A + B) = cA + cB$$

(۵) خاصیت توزیع پذیری جمع

$$(a + b)C = aC + bC$$

(۶)

$$(ab)C = a(bC)$$

## ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها

(۱) خاصیت شرکت پذیری

$$A(BC) = (AB)C$$

(۲) خاصیت توزیع‌پذیری ضرب

$$A(B + C) = AB + AC$$

(۳) خاصیت توزیع‌پذیری ضرب

$$(A + B)C = AC + BC$$

(۴) در اینجا  $I_n$  ماتریس واحد مناسب می‌باشد.

$$I_n = I_n A = A$$

نکته: به طور کلی  $AB \neq BA$  (ضرب ماتریس‌ها تعویض‌پذیر نمی‌باشد).

هرکدام از این نتایج یک تساوی بین ماتریس‌ها را بیان می‌کند. می‌دانیم که دو ماتریس زمانی با یکدیگر برابر هستند که دارای اندازه مساوی باشند و درایه‌های نظیر به نظیر آنها با هم یکی باشند. این روش را برای خاصیت شرکت‌پذیر عمل جمع توضیف می‌کنیم.

از خواننده خواسته می‌شود تا از یک روش یکسان برای اثبات بعضی از نتایج دیگر در تمرین‌هایی که در ادامه می‌یابد استفاده نماید. با توجه به قانون جمع ماتریس  $A + B = B + A$  می‌دانیم که  $A + B$  و  $B + A$  دو ماتریس هم‌اندازه می‌باشند. لذا کافی است نشان دهیم که درایه‌های نظیر به نظیر (متناظر) آنها با هم برابرند. درایه  $(i, j)$  ام هر ماتریس را در نظر بگیرید:

$$A + B \text{ از } (i, j) \text{ ام } = a_{ij} + b_{ij}$$

$$B + A \text{ از } (i, j) \text{ ام } = b_{ij} + a_{ij}$$

$$\text{جمع اعداد حقیقی تعویض‌پذیر هستند. } (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}).$$

درایه‌های نظیر به نظیر  $A + B$  و  $B + A$  مساوی هستند. بنابراین  $A + B = B + A$ . خاصیت‌های شرکت‌پذیری جمع و ضرب ماتریس‌ها به ما این فرصت را می‌دهد که ضرب و جمع را به بیش از ۲ ماتریس گسترش دهیم. می‌توانیم حاصل جمع‌ها و حاصل ضرب‌هایی نظیر  $A + B + C$ ،  $ABC$  بدون پراتز بنویسیم، زیرا نتایج یکسانی به دست می‌آید و این که چگونه این ماتریس‌ها دسته‌بندی می‌شوند مهم نیست. مثال‌های زیر نشان دهنده این مفهوم‌هاست.

مثال ۱:  $A + B + C$  را برای سه ماتریس زیر تعیین نمایید. فرض کنید که

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ -۴ & ۵ \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} ۳ & -۷ \\ ۸ & ۱ \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} ۰ & -۲ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix}$$

حل:  $A$ ,  $B$  و  $C$  را با اضافه کردن درایه‌های متناظر اضافه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A + B + C &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+3+0 & 3-7-2 \\ -4+8+5 & 5+1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 9 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

مطمئنماً حاصل ضرب‌های ماتریس‌های نظیر  $ABCD$  در حالی بوجود می‌آیند که حاصل ضرب‌های دیگر ایجاد نخواهد شد. می‌توانیم با استفاده از مقایسه تعداد سطرها و ستون‌ها در ماتریس‌های کنار هم قرار گرفته در حاصل ضرب تعیین کنیم که آیا یک حاصل ضرب وجود دارد یا نه؟  
مثال ۲:  $ABC$  را برای سه ماتریس داده شده زیر را محاسبه نمایید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حل: قبل از شروع به ضرب ماتریس‌ها باید بررسی کنیم که آیا حاصل ضرب  $ABC$  موجود می‌باشد. به دست می‌آوریم:

$$ABC = ABC$$

$$\begin{array}{ccc} A & B & C = ABC \\ 2 \times 2 & 2 \times 3 & 3 \times 1 \quad 2 \times 1 \\ \underbrace{\hspace{15em}}_{\text{size of product is } 2 \times 1} \end{array}$$

$\begin{array}{cc} \downarrow \text{match} \downarrow & \downarrow \text{match} \downarrow \\ \end{array}$

حاصل ضرب موجود می‌باشد و یک ماتریس  $2 \times 1$  خواهد بود. از آنجا که ضرب ماتریس‌ها شرکت‌پذیر خواهد بود، ماتریس‌ها در حاصل ضرب  $ABC$  را می‌توان در هر حالتی برای حاصل ضرب طبقه‌بندی کرد. البته مادامی که ترتیب حفظ گردد. به ما اجازه دهید که از دسته‌بندی یا گروه‌بندی  $(AB)C$  استفاده نماییم. احتمالاً این روش طبیعی‌ترین روش خواهد بود. اکنون داریم:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 11 \end{bmatrix} \\ (AB)C &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

از آنجا که ضرب ماتریسی شرکت‌پذیر می‌باشد، ما در تقسیم‌بندی ماتریس‌ها با یکدیگر یک انتخاب داریم که آن حاصل ضرب زنجیری از ماتریس‌هاست. زمانی که ماتریس‌های زیادی در یک عمل ضرب وجود داشته باشند (چند ماتریس در یکدیگر ضرب شوند) توالی انتخاب شده برای ضرب می‌تواند تا حد زیادی بر میزان (ضرب زنجیری ماتریس‌ها) اثر بگذارد. مثال زیر مفاهیم فوق را توضیح می‌دهد.

مثال ۳: ماتریس‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  مثال قبل را در یکدیگر ضرب نمایید. از توالی (ترتیب)  $A(BC)$  حاصل‌ضرب‌ها استفاده نمایید. تعداد حاصل‌ضرب‌هایی که شامل دو روش  $(AB)C$  و  $A(BC)$  که از محاسبه  $ABC$  به دست می‌آیند را با یکدیگر مقایسه نمایید.

حل: داریم:

$$BC = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

و

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

با توجه به خاصیت شرکت‌پذیری ضرب ماتریس‌ها، به جوابی مشابه با جواب قبلی رسیدیم. هر چند اگر خواننده از هر دو روش برای مقایسه استفاده نماید، احساس خواهد کرد که روش دوم از روش اول بهتر و سریعتر است. محاسبه این روشها در کامپیوترها انجام می‌پذیرد. زیرا ضرب نسبت به جمع توسط کامپیوتر زمان بیشتری را مصرف می‌کند. تحلیل، آنالیز و کارایی و بازده معمولاً برحسب ضرب‌ها صورت می‌گیرد. اجازه دهید که تعداد ضرب‌هایی که شامل هر دو روش است را بشماریم. با چشم‌پوشی کردن از جمعها، تعداد عمل ضرب به اندازه ماتریس‌ها بستگی دارد نه به درایه‌های آنها. می‌توان نتیجه‌گیری زیر را نشان داد (تمرین ۸ ملاحظه شود).

اگر  $A$  یک ماتریس  $m \times r$  و  $B$  یک ماتریس  $r \times n$  باشد، تعداد ضرب‌های اسکالر موجود در محاسبه حاصل‌ضرب  $AB$  برابر با  $mrn$  می‌باشد. اندازه ماتریس‌های ما عبارتند از:

$$A_{2 \times 2} \cdot B_{2 \times 2} \cdot C_{2 \times 1} = D_{2 \times 1}$$

اکنون به دو روش جدا از هم به  $(AB)C$  و  $A(BC)$  نگاهی می‌اندازیم:

$AB(C)$ : محاسبه  $(AB)C$  در دو مرحله انجام می‌پذیرد با استفاده از ماتریس میانی  $F$

• فرض کنیم  $AB = F$ ،  $FC = D$ ،  $F$  ماتریس  $2 \times 3$  است.

- تعداد عمل ضرب برای محاسبه  $F$ ،  $12 = 2 \times 2 \times 3$  است.
- تعداد عمل ضرب برای محاسبه  $D$ ،  $6 = 2 \times 3 \times 1$  است.
- بنابراین تعداد کل ضرب‌ها برای محاسبه  $(AB)C$ ، ۱۸ است.

$A(BC)$ : محاسبه  $A(BC)$  در دو مرحله انجام می‌پذیرد.  $BC = G$  و  $AG = D$ . یک ماتریس  $G$   $2 \times 1$  است.

- تعداد ضرب‌ها برای محاسبه  $G$ ،  $6 = 2 \times 3 \times 1$  است.
- تعداد ضرب‌ها برای محاسبه  $D$ ،  $4 = 2 \times 2 \times 1$  است.
- بنابراین تعداد کل ضرب‌ها برای محاسبه  $A(BC)$ ، مقدار ۱۰ است.

مشاهده می‌کنیم که حتی برای این مسئله کوچک، تعداد ضرب‌های موجود در محاسبه  $ABC$  از ۱۸ تا برای استفاده از ترتیب  $(AB)C$  تا ۱۰ تا برای استفاده از ترتیب  $A(BC)$  تغییر می‌یابد. روش دوم برای ضرب ماتریس‌ها نیز تقریباً دو برابر سریعتر از روش اول می‌باشد. اکنون این ضرب را در ماتریس‌های بزرگتر مشاهده می‌کنیم. فرض کنیم که می‌خواهیم حاصل ضرب  $ABCD$  را برای ماتریس‌هایی با سایزهای زیر محاسبه کنیم:

$$A_{5 \times 14} \cdot B_{14 \times 17} \cdot C_{17 \times 20} \cdot D_{20 \times 12} = E_{5 \times 42}$$

۵ روش متفاوت برای محاسبه این حاصل ضرب وجود دارد. تعداد ضرب‌های مورد نیاز برای هر روش از قرار زیر می‌باشد:

روش	تعداد ضرب‌ها
$((AB)C)D$	۸, ۰۲۵
$(A(BC))D$	۴, ۴۹۴
$(AB)(CD)$	۳۵, ۳۲۲
$A((BC)D)$	۸, ۳۵۸
$A(B(CD))$	۶۵, ۰۵۸

مؤثرترین روش ۱۴ بار سریعتر از کندترین روش می‌باشد. (برای استخراج این اعداد، تمرین‌های زیر را ببینید). برای ضرب زنجیره‌ای از ماتریس‌ها به مؤثرترین روش، یک الگوریتم به کار رفته است، این الگوریتم از تکنیکی به نام برنامه‌نویسی پویا استفاده می‌نماید. می‌دانیم که در جبر از قوانین حذف استفاده می‌شود:

• اگر  $ab = ac$  و  $a \neq 0$  آنگاه  $b = c$

• اگر  $pq = 0$  آنگاه  $p = 0$  یا  $q = 0$ .

هرچند نتایج متناظر بالا برای ماتریس‌ها صادق نمی‌باشند، به عبارتی در حالت کلی:

•  $AB = AC$  نتیجه نمی‌دهد که  $B = C$

•  $PQ = 0$  نتیجه نمی‌دهد که  $P = 0$  یا  $Q = 0$ .

این عبارتها را با استفاده از چندین مثال روشن می‌سازیم:

ماتریس‌های  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ، ماتریس‌های  $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  و ماتریس‌های  $C = \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 3 & -24 \end{bmatrix}$

را در نظر بگیرید. مشاهده می‌کنید که  $AB = AC = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$  اما  $B \neq C$ . ماتریس‌های

$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$  و  $Q = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$  را در نظر بگیرید. مشاهده می‌کنید که  $PQ = 0$  اما  $P \neq 0$  و  $Q \neq 0$ .

## ۷-۲ توان ماتریس‌ها

علامت به کار رفته برای توان ماتریس‌ها مشابه علاماتی هستند که برای توان اعداد حقیقی به کار گرفته می‌شوند. اگر  $A$  یک ماتریس مربعی باشد آنگاه  $A$ ، که  $k$  بار (مرتبه) در خودش ضرب می‌شود به صورت  $A^k$  نوشته می‌شود:

$$A^k = AA \dots A \quad (k \text{ مرتبه (برابر)})$$

قوانین آشنای توانهای اعداد حقیقی برای ماتریس‌ها نیز کاربرد دارد.

**۱-۷-۲ قضیه:** اگر  $A$  یک ماتریس مربعی  $n \times n$  و  $r$  و  $s$  اعداد صحیح غیرمنفی باشند آنگاه (بنابه تعریف):

$$۱) A^r A^s = A^{r+s} \quad ۲) (A^r)^s = A^{rs} \quad ۳) A^0 = I_n$$

قانون اول را بررسی و اثبات می‌کنیم، اثبات قانون دوم و سوم نیز مشابه قانون اول است.

$$A^r A^s = \underbrace{A \dots A}_{\text{بار } r} \cdot \underbrace{A \dots A}_{\text{بار } s} = \underbrace{A \dots A}_{\text{بار } r+s} = A^{r+s}$$

مثال ۴: اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ،  $A^4$  را محاسبه کنید.

حل: این مثال نشان می‌دهد که چطور از قوانین بالا برای کاهش دادن میزان ضرب ماتریس‌ها می‌توان استفاده کرد. می‌دانیم که  $A^4 = AAAA$ . ما می‌توانستیم ۳ نوع حاصل ضرب برای ماتریس انجام دهیم که به  $A^4$  برسیم. اما ما می‌توانیم از قانون ۲ در بالا برای محاسبه  $A^4 = (A^2)^2$  استفاده نمائیم و سپس به این نتیجه می‌رسیم که از دو حاصل ضرب می‌توان استفاده کرد. پس داریم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -19 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$$

مثال زیر این مطلب را توصیف می‌کند که ویژگی‌های اعمال ماتریسی می‌تواند برای ساده کردن عبارت‌های ماتریسی و به طریق مشابه برای ساده کردن عبارت‌های جبری معمولی مورد استفاده قرار بگیرند.

مثال ۵: عبارت ماتریسی زیر را ساده کنید:

$$A(A + 2B) + 3B(2A - B) - A^2 + 7B^2 - 5AB$$

حل: با استفاده از ویژگی‌های اعمال ماتریس داریم:

$$\begin{aligned} A(A + 2B) + 3B(2A - B) - A^2 + 7B^2 - 5AB &= A^2 + 2AB - 6BA - 3B^2 - A^2 \\ &\quad + 7B^2 - 5AB \\ &= -3AB + 6BA + 4B^2 \end{aligned}$$

دو ساده‌سازی  $-3AB + 6BA$ ، ضرب ماتریسی تعویض‌پذیر نمی‌باشد.

## تمرینات

(۱) فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ،  $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  و  $D = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

حال در صورت امکان حساب کنید:

الف)  $AB$  و  $BA$  (ب)  $CA$  و  $AC$  (ج)  $DA$  و  $AD$   
 مشاهده می‌کنیم که  $AB \neq BA$  زیرا  $BA$  وجود ندارد.  $AC \neq CA$  و  $AD \neq DA$ ، تمامی حالت‌های ممکن را هنگامی که مرتبه در ضرب ماتریسی وارونه می‌گردد در حال نمایش است.

(۲)  $A(BC)$  و  $(AB)C$  را برای ماتریس‌های زیر حساب کنید:

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},$$

مشاهده می‌کنیم که این حاصل ضرب‌ها مساوی می‌باشند، خاصیت شرکت‌پذیری ضرب ماتریسی در حال نمایش است.

(۳) به دو روش مختلف حاصل ضرب  $ABC$  را برای سه ماتریس زیر محاسبه کنید.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

(۴) اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  و  $C = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  هر کدام از عبارتهای زیر را محاسبه کنید.

الف)  $AC^2$

ب)  $A^2 - 3B$

ج)  $BC^2 + B^2$

د)  $3A^2 + 2A - I_2$

(۵) اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  و  $C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  هر کدام از عبارتهای زیر را محاسبه کنید.

الف)  $(AB)^2$

ب)  $A - 3B^2$

ج)  $A^2B = 2C^2$

د)  $2A^2 - 2A + 3I_2$



۶) اگر اندازه ماتریس‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  و  $D$  به ترتیب  $۲ \times ۴$ ،  $۴ \times ۲$ ،  $۲ \times ۴$  و  $۳ \times ۳$  باشند در این صورت اندازه ماتریس‌های زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

الف)  $ABC$

ب)  $ABD$

ج)  $CAB$

د)  $DCAB$

ه)  $A^2 BDC$

۷) اگر اندازه ماتریس‌های  $P$ ،  $Q$ ،  $R$ ،  $S$  و  $T$  به ترتیب  $۲ \times ۳$ ،  $۱ \times ۳$ ،  $۲ \times ۱$ ،  $۳ \times ۱$  و  $۳ \times ۳$  باشد در این صورت اندازه ماتریس‌های زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

الف)  $PQR$

ب)  $PQ + TPQ$

ج)  $5QP - 2TPR$

د)  $4SPQ + 3PQ$

ه)  $QRSR + QR$

۸) اگر  $A$  یک ماتریس  $m \times r$  و  $B$  یک ماتریس  $r \times n$  باشد، آنگاه تعداد ضرب‌های عددی موجود در محاسبه ضرب  $AB$  برابر است با  $mrn$ . فرض کنید  $C$  یک ماتریس  $m \times s$  باشد. فرمولی را برای تعداد ضرب‌های ماتریسی موجود در محاسبه  $(AB)C$  و  $A(BC)$  به دست آورید.

۹) اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس هم‌اندازه باشند، تعداد ضرب‌های اسکالر موردنیاز برای محاسبه  $AB$  را محاسبه کنید.

الف)  $A_{۲ \times ۳}$  و  $B_{۳ \times ۷}$

ب)  $A_{۵ \times ۲}$  و  $B_{۲ \times ۸}$

ج)  $A_{۱ \times ۹}$  و  $B_{۹ \times ۲۷}$

د)  $A_{۸ \times ۵}$  و  $B_{۵ \times ۱۲}$

۱۰) فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $n \times n$  باشد. تعداد ضرب‌های اسکالر موردنیاز برای محاسبه  $A^3$ ،  $A^2$  و  $A^m$  را محاسبه کنید.

۱۱) تعداد ضرب‌های موردنیاز برای محاسبه ضرب‌های  $(AB)C$  و  $A(BC)$  زمانی که  $A$ ،  $B$  و  $C$  دارای اندازه‌های زیر باشند را به دست آورید.

الف)  $A_{2 \times 4}$  و  $B_{4 \times 3}$  و  $C_{3 \times 1}$

ب)  $A_{3 \times 7}$  و  $B_{7 \times 5}$  و  $C_{5 \times 2}$

ج)  $A_{6 \times 2}$  و  $B_{2 \times 5}$  و  $C_{5 \times 3 \times 5}$

د)  $A_{3 \times 5}$  و  $B_{5 \times 47}$  و  $C_{47}$

ه)  $A_{7 \times 97}$  و  $B_{97 \times 2}$  و  $C_{2 \times 3}$

۱۲) تعداد ضرب‌های موردنیاز برای محاسبه ضرب‌های  $(AB)(CD)$  و  $(A(BC))D$  و  $((AB)C)D$  و  $A((BC)D)$  و  $(AB(CD))$  زمانی که  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  دارای اندازه‌های زیر می‌باشند را به دست آورید.

$$A_{5 \times 14}, B_{14 \times 87}, C_{87 \times 3}, D_{3 \times 42}$$

(مثالی در این بخش داده شده بود).

۱۳) فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $m \times r$  و  $B$  یک ماتریس  $r \times n$  باشند. فرمولی برای تعداد جمع‌های اسکالر که شامل محاسبه ضرب  $AB$  می‌باشد را استخراج کنید. فرض کنید  $C$  یک ماتریس  $n \times s$  باشد. فرمولی برای تعداد جمع‌های اسکالر که شامل محاسبه  $(AB)C$  و  $A(BC)$  است را به دست آورید. فرمول‌های خود را برای ماتریس‌های  $A_{2 \times 2}$  و  $B_{2 \times 3}$  و  $C_{3 \times 1}$  امتحان کنید.

جمع، ضرب اسکالر و ضرب ماتریس‌ها

۱۴) فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  باشد. ثابت کنید  $AB$  و  $BA$  هر دو وجود دارند به شرطی که اگر  $B$  یک ماتریس  $n \times m$  باشد.

۱۵) ویژگی‌های ماتریسی زیر که در این بخش آمده است بررسی کنید.

الف) خاصیت شرکت‌پذیر جمع ماتریس‌ها  $A + (B + C) = (A + B) + C$

ب) خاصیت توزیع‌پذیری  $C(A + B) = CA + CB$

ج) اگر  $A$  یک ماتریس  $n \times n$  باشد  $AI_n = I_n A = A$

۱۶) فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  باشد. نشان دهید که  $AI_n = A$ .

(۱۷) فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  و  $O_{mn}$  یک ماتریس  $m \times n$  صفر باشند. فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  و  $c$  یک اسکالر باشد. نشان دهید اگر  $cA = O_{mn}$  آنگاه،  $c = 0$  یا  $A = O_{mn}$ .

(۱۸) عبارت‌های ماتریسی زیر را ساده کنید.

$$\text{الف) } A(A - 4B) - 2B(A + B) - A^2 + 7B^2 + 3AB$$

$$\text{ب) } B(2I_n - BA) + B(4I_n + 5A)B - 3BAB + 7B^2A$$

$$\text{ج) } (A - B)(A + B) - (A + B)^2$$

(۱۹) عبارت‌های ماتریسی زیر را ساده کنید.

$$\text{الف) } A - (A + B) - B(A + B)$$

$$\text{ب) } A(A - B)B + B^2AB - 3A^2$$

$$\text{ج) } (A + B)^3 - 2A^3 - 3ABA - A^3B^2 - B^3$$

(۲۰) تمام ماتریس‌هایی که با ماتریس‌های زیر جابجا می‌شوند را پیدا کنید.

$$\text{الف) } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ب) } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{ج) } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(۲۱) نادرستی اثبات زیر در چیست؟

فرض کنید  $AX = B$  یک دستگاه معادلات خطی با ریشه‌های  $X_1$  و  $X_2$  باشد. بنابراین:

$$AX_1 = B, AX_2 = B \quad AX_1 = AX_2 \quad X_1 = X_2$$

توان ماتریس‌ها

(۲۲) الف) فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $n \times n$  باشد. ثابت کنید  $A^2$  نیز یک ماتریس  $n \times n$  است.

ب) فرض کنید  $A$  ماتریس  $m \times n$  باشد  $m \neq n$ ، ثابت کنید  $A^2$  وجود ندارد. بنابراین ما فقط در مورد توان ماتریس‌های مربعی صحبت می‌کنیم.

(۲۳) اگر  $A$  و  $B$  ماتریس‌های مربعی با اندازه‌های مساوی باشند، ثابت کنید:

$$(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

تحت چه شرایطی این تساوی برقرار است؟

(۲۴) اگر  $A$  و  $B$  ماتریس‌های مربعی با اندازه‌های مساوی باشند به طوری که  $AB = BA$  آنگاه ثابت کنید  $(AB)^2 = A^2B^2$ . مثالی بیاورید که نشان دهد این نتیجه برای همه ماتریس‌های مربعی با اندازه‌های یکسان درست نمی‌باشد.

(۲۵) اگر  $n$  عدد صحیح غیرمنفی باشد و  $A$  و  $B$  ماتریس‌های مربعی با اندازه یکسان باشد به طوری که  $AB = BA$  آنگاه ثابت کنید که  $(AB)^n = A^nB^n$ . با یک مثال نشان دهید که این ویژگی برای همه ماتریس‌های مربعی با اندازه مساوی در حالت کلی صادق نمی‌باشد.

(۲۶) فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $n \times n$  مربعی باشد. در این صورت نشان دهید که برای هر دو عدد صحیح مثبت  $r, s$  داریم  $(A^r)^s = (A^s)^r$ .

#### ماتریس‌های قطری

(۲۷) فرض کنید  $A$  و  $B$  ماتریس‌های قطری با اندازه‌های مساوی و  $c$  یک اسکالر باشد.

(الف) ثابت کنید  $A + B$  قطری است.

(ب)  $cA$  قطری است.

(ج)  $AB$  قطری است.

(۲۸) اگر  $A$  و  $B$  ماتریس‌های قطری با اندازه‌های برابر باشند ثابت کنید  $AB = BA$ .

(۲۹) فرض کنید که ماتریس  $A$  با ماتریس قطری که دارای دو درایه غیریکسان باشند جابجا شود. در این صورت نشان دهید که ماتریس  $A$  یک ماتریس قطری است.

#### ماتریس‌های خودتوان و پوچ توان

ماتریس مربعی  $A$  را خودتوان گوئیم هرگاه  $A^2 = A.A$  باشد. ماتریس مربعی  $A$  را پوچ توان گوئیم هرگاه عدد صحیح مثبت  $p$  وجود داشته باشد به طوری که  $A^p = 0$ ، کوچکترین عدد صحیح در  $A^p = 0$  درجه پوچ توان ماتریس نامیده می‌شود.

(۳۰) تعیین کنید که آیا ماتریس‌های زیر خودتوان هستند؟

$$\begin{array}{l} \text{الف)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ب)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{ج)} \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{د)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{ه)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

۳۱)  $b, c$  و  $d$  را چنان بیابید که  $\begin{bmatrix} 1 & b \\ c & d \end{bmatrix}$  خودتوان باشد.

۳۲)  $a, c, d$  را چنان بیابید که  $\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$  خودتوان باشد.

۳۳) ثابت کنید اگر  $A$  و  $B$  خودتوان باشند و  $AB = BA$  آنگاه  $AB$  نیز خودتوان می‌باشد.

۳۴) نشان دهید که اگر  $A$  خودتوان باشد و  $n$  عدد صحیح مثبت باشد آنگاه  $A^n = A$ .

۳۵) نشان دهید که ماتریس‌های زیر پوچ‌توان، با درجه پوچ‌توانی ۲ می‌باشند.

$$\begin{array}{l} \text{الف)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ب)} \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ج)} \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \end{array}$$

۳۶) نشان دهید که ماتریس زیر پوچ‌توان، با درجه پوچ‌توانی ۳ می‌باشد.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## ۸-۲ ماتریس‌های متقارن و مجموعه‌ای در باستان شناسی

در این بخش اعمال جبری روی ماتریس‌ها را توسعه داده و ملاحظه می‌کنیم که چطور باستان‌شناسان ماتریس‌ها را برای تعیین نظم و ترتیب زمانی مصنوعات دست‌ساز استفاده می‌کنند.

**۱-۸-۲ تعریف:** ترانهاده ماتریس  $A$  که با  $A^t$  نشان داده می‌شود ماتریسی است که از جابجا

کردن سطر و ستون  $A$  به صورت زیر دست می‌آید.

سطر اول  $A$ ، اولین ستون  $A^t$  می‌شود. سطر دوم، دومین ستون و همین‌طور ادامه می‌یابد. درایه  $(i, j)$  ام

از  $A$  می‌شود درایه  $(j, i)$  ام از  $A^t$ ، اگر  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  باشد پس  $A^t$  یک ماتریس  $n \times m$  است.

مثال ۱: ترانواده هر یک از ماتریس‌های زیر را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad C = [-1 \ 3 \ 4]$$

حل: سطرها را به عنوان ستون می‌نویسیم. داریم:

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \quad B^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} \quad C^t = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

مشاهده می‌کنیم که  $(3, 1)$  امین درایه که  $-7$  است می‌شود  $(1, 3)$  امین درایه از  $B^t$ . هم‌چنین توجه کنید که ماتریس  $3 \times 2$ ،  $B$  به ماتریس  $2 \times 3$ ،  $B^t$  تبدیل می‌گردد و ماتریس  $1 \times 3$ ،  $C$  به ماتریس  $3 \times 1$  تبدیل می‌گردد.

ما سه عمل برای ماتریس‌ها بیان کردیم که جمع، ضرب اسکالر و ضرب نامیده می‌شد. قضیه زیر معرف این مطلب است که چطور ماتریس ترانواده با این عملیات در ارتباط می‌باشد.

### ۲-۸-۲ قضیه (خواص ترانواده) فرض کنیم $A$ و $B$ دو ماتریس و $c$ یک اسکالر باشد.

هم‌چنین فرض کنیم که اندازه ماتریس‌ها طوری هستند که عملیات را می‌توان اجرا نمود در این صورت داریم

$$(1) \text{ ترانواده جمع } (A + B)^t = A^t + B^t$$

$$(2) \text{ ترانواده ضرب اسکالر } (cA)^t = cA^t$$

$$(3) \text{ ترانواده ضرب } (AB)^t = B^t A^t$$

$$(4) (A^t)^r = (A^r)^t$$

$$(5) (A^t)^t = A$$

ما تکنیک‌هایی را ارائه می‌دهیم که در اثبات نتایج شامل ترانواده‌ها از بازبینی خاصیت سوم استفاده

می‌شوند. از خواننده تقاضا می‌شود که نتایج دیگری را که در تمرین‌های زیر می‌آید، استخراج نماید.

برای اثبات  $(AB)^t = B^t A^t$  کافی است نشان دهیم که درایه‌های متناظر با هم، برابرند. داریم:

$(i, j)$  امین درایه از ماتریس  $(AB)^t$  برابر است با  $(j, i)$  امین درایه از  $AB$  که برابر است با:

$$a_{j1}b_{1i} + \dots + a_{jn}b_{ni}$$

هم‌چنین،  $(i, j)$  امین درایه از  $B^t A^t$  برابر است با:

$$(\text{ستون } j \text{ از } A^t) \times (\text{سطر } i \text{ از } B^t)$$

که مساوی است با

$$(B \text{ سطر } j \text{ ام از } A) \times (\text{ستون } i \text{ ام از } B)$$

و در نتیجه برابر است با

$$b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \dots + b_{ni}a_{jn} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \dots + a_{jn}b_{ni}$$

و این نشان می‌دهد که  $(AB)^t = B^t A^t$ .

**۳-۸-۲ تعریف:** ماتریس  $A$  را متقارن گوئیم هرگاه  $A^t = A$ . به عنوان مثال ماتریس‌های زیر متقارن می‌باشند:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 7 & 8 \\ -4 & 8 & -3 \end{bmatrix}$$

(مثال ۲) ماتریس زیر که نشان دهنده فاصله به مایل بین شهرهای مختلف آمریکا می‌باشد در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{l} \text{Chicago} \begin{bmatrix} \text{Chicago} & LA & \text{Miami} & NY \\ 0 & 2092 & 1374 & 841 \end{bmatrix} \\ \text{Los-Angeles} \begin{bmatrix} \text{Chicago} & LA & \text{Miami} & NY \\ 2092 & 0 & 2733 & 2797 \end{bmatrix} \\ \text{Miami} \begin{bmatrix} \text{Chicago} & LA & \text{Miami} & NY \\ 1374 & 2733 & 0 & 1336 \end{bmatrix} \\ \text{New York} \begin{bmatrix} \text{Chicago} & LA & \text{Miami} & NY \\ 841 & 2797 & 1339 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

مشاهده خواهیم کرد که این ماتریس متقارن می‌باشد. تمام عضوهای آن به صورت زوج ظاهر و به صورت متقارن در کنار قطر اصلی قرار گرفته‌اند. دلیلی برای این مطلب وجود دارد که مسافت از شهر  $x$  تا شهر  $y$  مانند مسافت از شهر  $y$  تا شهر  $x$  می‌باشد. برای مثال فاصله از شیکاگو تا میامی، حدود ۱۳۷۴ است (سطر اول - ستون سوم) که مانند فاصله و مسافت از میامی تا شیکاگو خواهد بود (سطر سوم - ستون اول). تمام این ماتریس‌ها متقارن خواهند بود.

اصطلاح و گزاره اگروتنهاگر و شرط لازم و کافی به طور متداول در ریاضیات به کار می‌روند و ما به طور متداول و مکرر در این قسمت از آنها استفاده خواهیم کرد. این اصطلاحات معنی یکسانی می‌دهند. فرض

کنید  $p$  و  $q$  عبارت هستند. می‌نویسیم  $q \rightarrow p$  و همچنین  $p \rightarrow q$  گزاره دومی، گزاره عکس نامیده می‌شود. ما می‌گوئیم  $p$  اگر و تنها اگر  $q$  یا  $p$  لازم و کافی است برای  $q$ ، مثال زیر بیانگر این مطلب است. مثال ۳) اگر  $A$  و  $B$  ماتریس‌های متقارن و هم‌اندازه باشند آنگاه ضرب  $AB$  متقارن است اگر و تنها اگر  $AB = BA$ .

هر مسئله «اگر و تنها اگر» شامل دو بخش است که ما آن را نشان می‌دهیم.

الف) اگر  $AB$  متقارن باشد آنگاه  $AB = BA$ .

ب) اگر  $AB = BA$  آنگاه  $AB$  متقارن است.

اثبات الف) فرض کنیم  $AB$  متقارن باشد آنگاه:

$$\begin{aligned} AB &= (AB)^t && \text{با استفاده از تعریف ماتریس متقارن} \\ &= B^t A^t && \text{با استفاده از ترانهاده ضرب} \\ &= BA && \text{چون } A \text{ و } B \text{ ماتریس‌های متقارن می‌باشند.} \end{aligned}$$

اثبات ب) فرض کنیم  $AB = BA$  آنگاه:

$$\begin{aligned} (AB)^t &= (BA)^t && \text{با استفاده از ترانهاده ضرب} \\ &= A^t B^t && \text{با استفاده از ترانهاده ضرب} \\ &= AB && \text{چون } A \text{ و } B \text{ ماتریس‌های متقارن هستند.} \end{aligned}$$

بنابراین  $AB$  متقارن می‌باشد. بنابراین برای دو ماتریس متقارن هم‌اندازه  $A$  و  $B$ ، ضرب  $AB$  متقارن است اگر و تنها اگر  $AB = BA$ . یا این که برای دو ماتریس متقارن و هم‌اندازه  $A$  و  $B$ ، شرط لازم و کافی برای این که ضرب  $AB$  متقارن باشد این است که  $AB = BA$ .

ما در اینجا عددی را معرفی می‌کنیم که مربوط به ماتریس‌های مربعی می‌باشد که اثر (رد) ماتریس نام دارد.

**۴-۸-۲ تعریف:** فرض کنید  $A$  یک ماتریس مربعی است اثر (رد) ماتریس  $A$  با  $\text{tr}(A)$  نشان داده می‌شود و برابر مجموع درایه‌های روی قطر اصلی  $A$  می‌باشد. بنابراین اگر  $A$  یک ماتریس  $n \times n$  باشد.

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$



مثال ۴) اثر (trace) ماتریس  $A = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ & -۲ \\ ۲ & -۵ & ۶ \\ ۷ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$  را تعیین کنید.

حل: داریم:

$$\text{tr}(A) = ۴ + (-۵) + ۰ = -۱$$

اثر ماتریس نقش مهمی در نظریهٔ ماتریس و کاربرد آن دارد. به دلیل این که این عدد دارای خواص قابل توجهی است قابل ارزیابی است. این عدد در رشته‌هایی مانند مکانیک آماری، نسبت عام و مکانیک کوانتومی استفاده می‌شود.

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که اثر (trace) چه رابطه‌ای با اعمال جمع ماتریس، ضرب اسکالر ماتریس، ضرب ماتریس و ترانزپوز دارد.

**۵-۸-۲ قضیه (خواص اثر).** فرض کنیم  $A$  و  $B$  دو ماتریس و  $c$  یک عدد اسکالر باشد.

فرض کنیم اندازه‌های ماتریس‌ها طوری باشد که اعمال زیر قابل اجرا باشد:

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B) \quad (۱)$$

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \quad (۲)$$

$$\text{tr}(cA) = c \text{tr}(A) \quad (۳)$$

$$\text{tr}(A^t) = \text{tr}(A) \quad (۴)$$

نشان می‌دهیم که اثر  $(A + B)$  برابر است با اثر  $A$  به اضافهٔ اثر  $B$ . فرض کنیم درایه‌های قطر اصلی  $A + B$  به صورت زیر باشد:

$$(a_{۱۱} + b_{۱۱}), (a_{۲۲} + b_{۲۲}), \dots, (a_{nn} + b_{nn})$$

آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} \text{tr}(A + B) &= (a_{۱۱} + b_{۱۱}) + (a_{۲۲} + b_{۲۲}) + \dots + (a_{nn} + b_{nn}) \\ &= (a_{۱۱} + a_{۲۲} + \dots + a_{nn}) + (b_{۱۱} + b_{۲۲} + \dots + b_{nn}) \\ &= \text{tr}(A) + \text{tr}(B) \end{aligned}$$

## ۹-۲ ماتریس‌ها با درایه‌های اعداد مختلط

درایه‌های یک ماتریس ممکن است اعداد مختلط باشد. یک عدد مختلط به فرم زیر می‌باشد.

$$z = a + bi$$

که در آن  $a$  و  $b$  اعداد حقیقی هستند و  $i = \sqrt{-1}$ .  $a$  را قسمت حقیقی و  $b$  را قسمت موهومی  $z$  گویند.

فرض کنید  $z_1 = a + bi$  و  $z_2 = c + di$  اعداد مختلط باشند. قوانین زیر برای آنها صادق است:

تساوی:  $a = c$  و  $b = d$  اگر و فقط اگر  $z_1 = z_2$

$$\text{جمع: } z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

$$\text{تفریق: } z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$$

ضرب:

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = a(c + di) + bi(c + di)$$

$$= ac + adi + bci + bdi^2$$

$$= ac + bdi^2 + (ad + cb)i$$

$$= (ac - bd) + (ad + cd)i$$

مزدوج عدد مختلط  $z = a + bi$  به صورت  $\bar{z} = a - bi$  تعریف می‌شود.

مثال ۵) دو عدد مختلط زیر را در نظر بگیرید.  $z_1 = 2 + 3i$  و  $z_2 = 1 - 2i$  و  $z_1 + z_2$ ،  $z_1 z_2$  و  $\bar{z}_1$  را محاسبه کنید.

$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (1 - 2i)$$

$$= (2 + 1) + (3 - 2)i = 3 + i$$

$$z_1 z_2 = (2 + 3i)(1 - 2i) = 2(1 - 2i) + 3i(1 - 2i)$$

$$= 2 - 4i + 3i - 6i^2$$

$$= 8 - i$$

$$\bar{z}_1 = 2 - 3i$$

ماتریس‌هایی که دارای اعداد مختلط هستند شبیه قوانین ماتریس‌ها با درایه‌های اعداد حقیقی با یکدیگر جمع ضرب و تفریق می‌گردند.

مثال ۱۶ فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 2+i & 3-2i \\ 4 & 5i \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 3 & 2i \\ 1-i & 2+3i \end{bmatrix}$  و  $2A$  و  $2B$  را محاسبه کنید.

حل: داریم:

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{bmatrix} 2+i & 3-2i \\ 4 & 5i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2i \\ 1+i & 2+3i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+i+3 & 3+2i+2i \\ 4+1+i & 5i+2+3i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5+i & 3 \\ 5+i & 2+8i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$2A = 2 \begin{bmatrix} 2+i & 3-2i \\ 4 & 5i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+2i & 6-4i \\ 8 & 10i \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 2+i & 3-2i \\ 4 & 5i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2i \\ 1+i & 2+3i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (2+i)3 + (3-2i)(1+i) & (2+i)(2i) + (3-2i)(2+3i) \\ (4)(3) + (5i)(1+i) & 4(2i) + (5i)(2+3i) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 11+4i & 10+9i \\ 7+5i & -15+18i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

مزدوج ماتریس  $A$  با  $\bar{A}^t$  نشان داده می‌شود که با مزدوج کردن هر یک از درایه‌های ماتریس  $A$  حاصل می‌شود. همچنین ترانژاده مزدوج ماتریس  $A$  به صورت زیر تعریف و نوشته می‌شود:

$$A^* = \bar{A}^t$$

برای مثال اگر  $A = \begin{bmatrix} 2+3i & 1-4i \\ 6 & 7i \end{bmatrix}$  باشد بنابراین:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2-3i & 1+4i \\ 6 & -7i \end{bmatrix}, \quad A^* = \bar{A}^t = \begin{bmatrix} 2-3i & 6 \\ 1+4i & -7i \end{bmatrix}$$

ماتریس مربعی  $C$  را هرمیتی گویند هرگاه  $C = C^*$ . به عنوان مثال ماتریس زیر هرمیتی است.

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3-4i \\ 3+4i & 6 \end{bmatrix}$$

زیرا:

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 + 4i \\ 3 + 4i & 6 \end{bmatrix} \quad C^* = \bar{C}^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 + 4i \\ 3 + 4i & 6 \end{bmatrix} = C$$

برای ماتریس‌هایی که دارای درایه‌های اعداد مختلط هستند ماتریس‌های هرمیتی مهمتر از ماتریس‌های متقارن است. ویژگی‌های ترانواده مزدوج شبیه ویژگی‌های قبلی ترانواده است. این ویژگی‌ها را در قضیه زیر لیست می‌کنیم. اثبات تمرین‌ها به عهده خواننده می‌باشد.

### ۲-۹-۱ قضیه (خواص ترانواده مزدوج) اگر $A$ و $B$ ماتریس‌هایی با درایه‌هایی از اعداد

مختلط و  $z$  یک عدد مختلط باشد آنگاه داریم

$$(1) \text{ ترانواده مزدوج از جمع } (A + B)^* = A^* + B^*$$

$$(2) \text{ ترانواده مزدوج از ضرب اسکالر } (zA)^* = \bar{z}A^*$$

$$(3) \text{ ترانواده مزدوج از حاصل ضرب } (AB)^* = B^*A^*$$

$$(4) (A^*)^* = A$$

اکنون وقت آن است که کاربرد خوبی از ماتریس جبری اریه دهیم.

### \*۲-۱۵ سری‌ها و مجموعه‌ها در باستان‌شناسی

مسئله‌ای که باستان‌شناسان با آن روبرو هستند مکانها و آثار هنری در جایگاه ترتیب تاریخ و زمان آنها است. این شاخه از باستان‌شناسی در قرن ۱۹ توسط آقای فلیندر پیتر به نام ترتیب و نظم و تقویم اطلاعات آغاز شد. پیتری در مورد آرامگاه‌های ناگادا، بالاس و هوال که در مصر باستان بود مطالعاتی را به عمل آورد. (اطلاعات کربنی اخیر نشان می‌دهد که تمام قبرها از سال ۶۰۰۹ قبل از میلاد تا ۲۵۰۰ سال قبل از میلاد قرار گرفته است) پیتری از اطلاعات ۹۰۰ قبر برای نظم بخشیدن به آنها استفاده کرد و برای هر کدام از آنها دوره زمانی مشخصی را با استفاده از سفال پیدا کرد.

نگاهی اجمالی به مسئله اساسی مجموعه قبرها و تغییرات انجام شده خاکها و سفال به دست آمده خواهیم انداخت. یک فرض در باستان‌شناسی وجود دارد که دو قبر محتویات یکسان در یک زمان مشخص وجود دارد که از حد عادی کوچکتر می‌باشد. مدل ریاضی ساخته شده باعث می‌شود که اطلاعات مربوط به محتویات قبرها را در اختیار ما قرار دهد و بنابراین نظم قبرهای باستان را پیدا می‌کنیم. ماتریس  $A$  را به

گونه زیر می‌سازیم که تمام مؤلفه‌های آن ۱ یا ۰ می‌باشد که محتوی سفال قبرها را توصیف می‌کند. قبرها را ۱، ۲ و ۳ و ... نوع سفالها را ۱، ۲ و ۳ و ... ماتریس  $A$  را این گونه تعریف می‌کنیم:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر قبر } A \text{ شامل نوع سفال } j \text{ باشد} \\ 0 & \text{اگر قبر } A \text{ شامل نوع سفال } j \text{ نباشد} \end{cases}$$

ماتریس  $A$  شامل تمام اطلاعات درباره سفال و خاک قبرهای مختلف و متفاوت می‌باشد. حال مثال زیر این اطلاعات را در مورد ماتریس  $A$  به ما می‌دهد. مؤلفه  $g_{ij}$  از ماتریس  $G = AA^t$  مساوی تعدادی انواع سفالی رایج برای هر دو قبر  $i$  و  $j$  می‌باشد. بنابراین بزرگترین  $g_{ij}$  نزدیکترین قبر  $i$  و قبر  $j$  در یک زمان معین می‌باشد. با امتحان درایه‌های  $G$ ، باستان‌شناس می‌تواند به ترتیب قبرها برسد. این نتیجه را بررسی می‌کنیم:

درایه موجود در سطر  $i$  و ستون  $j$  از  $G$

$$= (\text{ستون } j \text{ از } A^t) \times (\text{سطر } i \text{ از } A)$$

$$= [a_{i1} a_{i2} \dots a_{in}] \begin{bmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{jn} \end{bmatrix}$$

$$= a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \dots + a_{in}a_{jn}$$

هر جمله از این جمع ۱ یا ۰ خواهد بود. برای مثال جمله  $a_{iz}a_{jz}$  یک خواهد بود. اگر  $a_{iz}$  و  $a_{jz}$  هر دو یک باشند. اگر سفال نوع ۲ رایج باشد  $i$  و  $j$  قبرهای موردنظر هستند و صفر خواهند بود اگر سفال نوع ۲ از قبرهای  $i$  و  $j$  رایج نباشد. بنابراین تعداد یکها در عبارت  $(g_{ij})$  تعداد نمونه‌های سفال رایج برای قبرها  $i$  و  $j$  می‌باشد. ماتریس  $P = A^t A$  به دو روش آنالوگ اطلاعاتی درباره اطلاعات ترتیبی و تقدیمی ظروف سفالی منتهی می‌شود.

فرض بر این است که بزرگترین عدد قبرها در ۲ نمونه سفالهای پدید آمده می‌باشد. نزدیکترین آنها تاریخی است. مؤلفه  $p_{ij}$  از ماتریس  $P = A^t A$  که تعداد قبرهای آن نمونه‌هایی از سفال به دست آمده از مؤلفه‌های  $i$ ام و  $j$ ام می‌باشد. نزدیکترین نمونه‌های سفالی،  $i$  و  $j$  در زمان هستند با امتحان مؤلفه‌های  $P$  می‌توانیم به یک ترتیب سفالی تاریخی برسیم. به طور ریاضی می‌توان نشان داد که ماتریس‌های  $P = A^t A$  و  $G = AA^t$  ماتریس‌های متقارن هستند. علاوه بر آن می‌توان از نظر فیزیکی هنگامی که  $P$  و  $G$  ماتریس‌های متقارن هستند بحث و گفتگو شود (تمرین زیر را ببینید) که این موضوع نشان دهنده تطابق

و هماهنگی ریاضی با این بحث می‌باشد. این هماهنگی و تقارن نشان می‌دهد که تمامی این اطلاعات شامل درایه‌های بالایی قطر اصلی این ماتریس‌ها هستند. اطلاعات در زیر قطر اصلی کاملاً وارون درایه‌های دیگر است.

اکنون این روش را با یک مثال توضیح می‌دهیم. فرض کنید ماتریس  $A$  نشان دهندهٔ ۳ سفال که شامل ۴ قبر می‌باشد، است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین برای مثال  $a_{۱۲} = ۱$  بر قبر ۱ که شامل ۳ نوع سفال است دلالت دارد. (درایه‌های سازنده سطر اول و ستون سوم دلالت می‌کند)  $a_{۲۳} = ۰$  بر این نکته دلالت می‌کند که سطر دوم معادل ستون سوم نیست.

$$G = AA^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ضروری است که  $G$  کاملاً متقارن باشد، اطلاعات درایه‌های بالایی قطر اصلی معادل درایه‌های زیر آن است. درایه‌های بالای قطر اصلی را به صورت سیستماتیک بررسی می‌کنیم.

رقم مشترک سطر اول و ستون دوم یک است.  $g_{۱۲} = ۱$

رقم مشترک سطر اول و ستون سوم یک است.  $g_{۱۳} = ۱$

رقم مشترک سطر اول و ستون چهارم صفر است.  $g_{۱۴} = ۰$

رقم مشترک سطر دوم و ستون سوم صفر است.  $g_{۲۳} = ۰$

رقم مشترک سطر دوم و ستون چهارم صفر است.  $g_{۲۴} = ۰$

رقم مشترک سطر سوم و ستون چهارم یک است.  $g_{۳۴} = ۱$

رقم مشترک سطر اول و ستون دوم اکثر اوقات به هم پیوسته‌اند. فرض می‌کنیم نمودار با ترکیب سطر اول و دوم شروع شود. ۲ - ۱.

سپس سطر سوم به این نمودار اضافه می‌کنیم  $g_{۱۳} = ۱$  زمانی که  $g_{۲۳} = ۰$  بنابراین سطر سوم با سطر اول ترکیب می‌شود اما با سطر دوم ترکیب نمی‌شود. ۳ - ۱ - ۲.

سرانجام سطر چهارم را به نمودار اضافه می‌کنیم.  $g_{۳۴} = ۱$  که  $g_{۱۴} = ۰$  و  $g_{۲۴} = ۰$ . سطر چهارم با

سطر سوم ترکیب می‌شود با سطر ۱ و ۲ ترکیب نمی‌شود. (به یکدیگر نزدیک نیستند) داریم:

$$۲ - ۱ - ۳ - ۴$$

ریاضیات روش رسم این نمودار را به ما نمی‌گوید. دو امکان وجود دارد:

$$۲ \leftarrow ۱ \leftarrow ۳ \leftarrow ۴ \quad \text{و} \quad ۲ \rightarrow ۱ \rightarrow ۳ \rightarrow ۴$$

باستان شناسان معمولاً از منابع دیگر که در دو طرف سطر آمده آگاهند. بنابراین قدمت تاریخی سطرها را می‌دانستند ماتریس‌های  $G$  و  $P$  شامل اطلاعاتی دربارهٔ قدمت تاریخی سطرها و ستون‌ها و اهمیت نسبی اعضای آنها با هم می‌باشند.

این ماتریس‌ها متداولاً بزرگ می‌باشند و اطلاعات نمی‌توانند به آسانی ذخیره شوند یا اطلاعات را به صورت مبهم در قسمت بالای نمودار می‌دهند. ماتریس  $G$ ،  $۹۰۰ \times ۹۰۰$  می‌باشد. تکنیک‌های ریاضی خاص برای استخراج اطلاعات از این ماتریس‌ها توسعه یافته است، اکنون این روشها در کامپیوترها اجرا می‌شوند. خواننده‌هایی که به این موضوع علاقه بیشتری دارند می‌توانند با موضوع «بعضی مشکلات و روشها در باستان‌شناسی آماری» که اثر دیوید ج. کنرال، دنیای باستان‌شناسی در سال ۱۹۶۹ میلادی است مراجعه کنند. در این بخش نظریهٔ جبری ماتریس‌ها را توسعه خواهیم داد. این نظریه به صورت گسترده در فعالیت ریاضی است. ما باید از ماتریس‌ها در ارتباط با مدل‌های ریاضی و بخش جمعیت‌های آماری استفاده نماییم. آلبرت انشتین از معادله ماتریس برای توصیف ارتباط میان هندسه و ماده در نظریه نسبیت عامش استفاده کرد:

$$T = R - \frac{1}{2}rG$$

که در آن  $T$  یک ماتریس که نشان دهندهٔ هندسه است،  $R$  یک ماتریس،  $r$  یک اسکالر است. و  $G$  یک ماتریس است که گرانش‌ها را توصیف می‌کند. تمام ماتریس‌های  $۴ \times ۴$  متقارن هستند. نظریهٔ عمومی نسبیت شامل حل معادلات ماتریس برای تعیین میدان گرانشی است. فیزیکدان آلمانی به نام ورنر هسن برگ از ماتریس‌ها برای توسعه مکانیک کوانتومی استفاده کرد که جایزهٔ نوبل را دریافت کرد. نظریهٔ ماتریس‌ها اساس دو نظریهٔ مهم فیزیکی در قرن بیستم است که همان نظریهٔ عمومی نسبیت و نظریهٔ کوانتومی است.

## تمرینات

محاسبه

(۱) ترانهاده هر کدام از ماتریس‌های زیر را بیابید. نشان دهید که آیا ماتریس داده شده متقارن است یا

خیر؟

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{الف) } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{ب)$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ج) } C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{د)$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{و) } E = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ه)$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & 6 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{ز) } G = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & -7 \end{bmatrix} \quad \text{ح)$$

$$K = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{ط)$$

(۲) در ماتریس‌های زیر، به جای \* اعداد مناسب انتخاب نمایید تا هر یک از ماتریس‌ها، متقارن گردند.

$$\begin{bmatrix} -3 & * & 8 & 9 \\ -4 & 7 & * & 7 \\ * & 2 & 6 & 4 \\ * & 7 & * & 9 \end{bmatrix} \quad \text{ج) } \begin{bmatrix} 3 & 5 & * \\ * & 8 & 4 \\ -3 & * & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ب) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ * & 6 & * \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{الف)$$

(۳) اگر  $A$  یک ماتریس  $4 \times 1$  و  $B$  یک ماتریس  $2 \times 3$  و  $C$  یک ماتریس  $2 \times 4$  و  $D$  یک ماتریس

$1 \times 3$  باشد اندازه ماتریس‌های زیر را در صورت وجود مشخص کنید.

الف)  $ADB^t$

ب)  $CB - 5AD$

ج)  $4CA - (CA)^2$

د)  $(ADB^tC)^2 + I_4$

ه)  $(B^tC)^t - AB$

(۴) با استفاده از قضیه ۲-۴ هر کدام از خاصیت‌های ترانهاده زیر را ثابت کنید.

الف)  $(A + B)^t = A^t + B^t$



$$(CA)^t = CA^t \text{ (ب)}$$

$$(A^t)^t = A \text{ (ج)}$$

(۵) با استفاده از قضیه ۲-۴ خاصیت‌های ترانزاده زیر را ثابت کنید.

$$(A + B + C)^r = A^t + B^t + C^t \text{ (الف)}$$

$$(ABC)^r = C^t B^t A^t \text{ (ب)}$$

(۶) اگر  $A$  یک ماتریس قطری باشد ثابت کنید  $A = A^t$ .

(۷) اگر  $A$  یک ماتریس مربعی باشد ثابت کنید  $(A^n)^t = (A^t)^n$ .

(۸) ثابت کنید یک ماتریس متقارن لزوماً مربعی است.

(۹) اگر  $A$  یک ماتریس متقارن باشد ثابت کنید  $A^t$  نیز متقارن می‌باشد.

(۱۰) فرض کنید  $A$  و  $B$  ماتریس‌های متقارن با اندازه‌های مساوی و  $C$  یک اسکالر می‌باشد. ثابت کنید:

(الف)  $A + B$  متقارن است.

(ب)  $cA$  متقارن است.

(۱۱) ماتریس  $A$  را پادمتقارن گویند هرگاه  $A = -A^t$ .

(الف) مثالی برای ماتریس پادمتقارن ارائه دهید.

(ب) ثابت کنید یک ماتریس پادمتقارن مربعی است و درایه‌های قطر اصلی آن صفر است.

(ج) ثابت کنید مجموع دو ماتریس پادمتقارن با اندازه‌های مساوی یک ماتریس پادمتقارن است.

(د) ثابت کنید که ضرب اسکالر یک ماتریس پادمتقارن، پادمتقارن است.

(۱۲) اگر  $A$  ماتریس مربعی باشد ثابت کنید

(الف)  $A + A^t$  متقارن است.

(ب)  $A - A^t$  پادمتقارن است.

(۱۳) ثابت کنید هر ماتریس مربعی  $A$  می‌تواند به مجموع ماتریس متقارن  $B$  و ماتریس پادمتقارن  $C$

تجزیه شود به طوری که  $A = B + C$ .

(۱۴) (الف) ثابت کنید اگر  $A$  یک ماتریس خودتوان باشد آنگاه  $A^t$  نیز خودتوان است.

(ب) ثابت کنید اگر  $A^t$  یک ماتریس خودتوان باشد آنگاه  $A$  نیز خودتوان است.

(۱۵) اثر (trace) هر کدام از ماتریس‌های زیر را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 6-7 & 2 & \\ 3 & 9 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ (ج)} \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & 8 \end{bmatrix} \text{ (ب)} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \text{ (الف)}$$

ثابت کنید خواص زیر در مورد اثر با استفاده از ویژگی‌های زیر از قضیه ۵-۲ مشخص می‌شود.

$$\text{tr}(cA) = c \text{tr}(A) \text{ (الف)}$$

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \text{ (ب)}$$

$$\text{tr}(A^t) = \text{tr}(A) \text{ (ج)}$$

(۱۶) با استفاده از نتایج قضیه ۵-۲ ویژگی اثر زیر را ثابت کنید.

$$\text{tr}(A + B + C) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B) + \text{tr}(C)$$

(۱۷) فرض کنید دو ماتریس  $A$  و  $B$  با اندازه‌های یکسان داده شده باشد. ثابت کنید  $A = B$  اگر و تنها اگر

$$A^t = B^t$$

(۱۸) ثابت کنید ماتریس حاصلضرب  $AB$  وجود دارد اگر و تنها اگر تعداد ستون‌ها در  $A$  با تعداد سطرها در

$B$  برابر باشد.

(۱۹) ثابت کنید  $AB = O_n$  برای تمام ماتریس‌های  $n \times n$ ،  $B$  اگر و تنها اگر  $A = O_n$ .

(۲۰)  $AB$ ،  $A + B$  و  $BA$  را برای ماتریس‌های زیر محاسبه کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3-i \\ 2+3i & -5i \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2+i & 5+2i \\ 3-i & 4+3i \end{bmatrix}$$

(۲۱)  $AB$ ،  $A + B$  و  $BA$  را برای ماتریس‌های زیر محاسبه کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 4+i & 2+3i \\ 6+2i & 1+i \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2+i & -3 \\ 2 & 4-5i \end{bmatrix}$$

(۲۲) مزدوج و ترانزاده مزدوج هر یک از ماتریس‌های زیر را پیدا کنید، تعیین کنید کدام ماتریس هرمیتی

است.

$$A = \begin{bmatrix} 2-3i & 5i \\ 2 & 5-4i \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 5-i \\ 5+i & 6 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 7i & 4 - 3i \\ 6 + 8i & 1 - i \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 3 - 5i \\ 3 + 5i & 9 \end{bmatrix}$$

(۲۳) مزدوج و ترانزاده مزدوج هر یک از ماتریس‌های زیر را پیدا کنید. تعیین کنید کدام ماتریس هرمیتی است.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 + 2i \\ 7 - 2i & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 + 5i & 1 - 2i \\ 1 + 2i & 5 + 6i \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 9 & -3i \\ 3i & 8 \end{bmatrix}$$

(۲۴) چهار خاصیت ترانزاده مزدوج زیر را ثابت کنید:

$$(A + B)^* = A^* + B^* \quad (\text{الف})$$

$$(zA)^* = \bar{z}A^* \quad (\text{ب})$$

$$(AB)^* = B^*A^* \quad (\text{ج})$$

$$(A^*)^* = A \quad (\text{د})$$

(۲۵) نشان دهید ماتریس هرمیتی لزوماً مربعی است. ثابت کنید که درایه‌های روی قطر اصلی، بایستی اعداد حقیقی باشند.

(۲۶) فرض کنید  $G = AA^t$  و  $P = A^tA$  برای هر ماتریس دلخواه  $A$ .

الف) ثابت کنید  $G$  و  $P$  هر دو ماتریس‌های متقارن هستند.

ب)  $G$  و  $P$  هر دو دارای یک تعبیر در مدل تاریخی هستند. از این تعبیر برای متقارن بودن  $G$  و  $P$  استفاده کنید. نتیجه‌ی ریاضی و تعبیر فیزیکی هر دو با یکدیگر سازگارند.

(۲۷) این ماتریس‌ها محتویات سفالگری و حفاری گوناگون را شرح می‌دهند برای هر مورد امکان و ترتیب

سفارش گودال و سپس مدل سفالگری را تعیین کنید.

$$\begin{array}{lll}
 ۱) \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} & ۲) \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} & ۳) \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \\
 ۴) \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} & ۵) \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} & ۶) \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}
 \end{array}$$

۲۸) نتیجه تحلیل سفالگری در حفاری را نتیجه بگیرید. فرض کنید  $A$  محتویات سفالگری، حفاری‌های گوناگون را توصیف کند و  $P = A^t A$ . ثابت کنید: درایه  $P_{ij}$  از ماتریس  $P = A^t A$  تعداد حفاری در هر  $i$  و  $j$  در یک زمان هستند. باستان‌شناس می‌تواند به این ترتیب به سفالگری برسد.

۲۹) مدلی که از باستان‌شناسی در اینجا معرفی شد مدلی است که برای تجزیه و تحلیل کردن روابط گروه انسانها استفاده می‌شود برای مثال رابطه دوستی در یک گروه را در نظر بگیرید. فرض کنید همه‌ی دوستی‌ها دوطرفه باشد. طبقه‌بندی مردم از  $1, \dots, n$  و تعریف ماتریس مربعی  $A$  در زیر آمده است.

(درایه‌های قطر اصلی  $A$  صفر هستند) برای همه  $i$  ها  $a_{ii} = ۰$

$$a_{ij} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } i \text{ و } j \text{ دوست باشند} \\ ۰ & \text{اگر } i \text{ و } j \text{ دوست نباشند} \end{cases}$$

الف) ثابت کنید اگر  $F = AA^t$  آنگاه  $f_{ij}$  تعداد دوستی‌هایی که به طور معمول شامل  $i$  و  $j$  هستند می‌باشد.

ب) فرض کنید روابط دوستی متقابل نباشد تأثیر این مدل چگونه است؟

## ۱۱-۲ ماتریس معکوس و رمز نویسی

در این بخش مفهوم ماتریس معکوس را معرفی می‌کنیم. خواهیم دید که چگونه ماتریس معکوس می‌تواند در حل برخی دستگاه‌های معادلات خطی استفاده شود و کاربرد ماتریس معکوس در رمز نویسی و مطالعه

کدها را خواهیم دید. ما نظریهٔ ماتریس معکوس همراه با نگاهی به ضرب معکوس اعداد حقیقی را بررسی می‌کنیم. اگر عدد  $b$  معکوس  $a$  باشد آنگاه:

$$ab = ۱, \quad ba = ۱$$

برای مثال  $\frac{۱}{۴}$  معکوس ۴ است و داریم:

$$۴\left(\frac{۱}{۴}\right) = \left(\frac{۱}{۴}\right)۴ = ۱$$

این یک نظریه است که به ماتریس‌ها تعمیم می‌دهیم.

**۱-۱۱-۲ تعریف:** فرض کنیم  $A$  یک ماتریس  $n \times n$  باشد. اگر ماتریس  $n \times n$   $B$  وجود داشته باشد که  $AB = BA = I_n$  آنگاه می‌گوئیم  $A$  معکوس‌پذیر است و  $B$  معکوس ماتریس  $A$  می‌نامیم. اگر ماتریس  $B$  وجود نداشته باشد آنگاه ماتریس  $A$  معکوس ندارد.

(مثال ۱) ثابت کنید ماتریس  $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$  دارای معکوس  $B = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ \frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$  می‌باشد.

حل: داریم

$$AB = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ \frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I_2,$$

$$BA = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ \frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I_2$$

بنابراین  $AB = BA = I_2$  و این نشان می‌دهد که ماتریس  $A$  دارای معکوس  $B$  می‌باشد. می‌دانیم که اعداد حقیقی نمی‌توانند بیشتر از یک معکوس داشته باشند این قضیه برای یک ماتریس نیز صادق است.

**۲-۱۱-۲ قضیه:** معکوس یک ماتریس در صورت وجود، منحصر به فرد است (یکتاست).

اثبات: فرض کنید  $B$  و  $C$  معکوسهای  $A$  هستند بنابراین  $AB = BA = I_n$  و  $AC = CA = I_n$  دو طرف تساوی  $AB = I_n$  را در  $C$  ضرب کرده و از خواص جبری ماتریس‌ها استفاده کنید.

$$C(AB) = CI_n$$

$$(CA)B = C$$

$$I_n B = C$$

$$B = C$$

بنابراین یک ماتریس معکوس‌پذیر تنها یک معکوس دارد.

توجه: فرض کنید  $A$  یک ماتریس معکوس‌پذیر باشد. معکوس  $A$  را با  $A^{-1}$  نشان می‌دهیم و داریم:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}$$

اکنون با روش الگوریتم گوس جردن روشی برای پیدا کردن معکوس ماتریس ارائه می‌دهیم. فرض کنید  $A$  معکوس‌پذیر باشد. حال فرض کنید ستون‌های ماتریس  $A^{-1}$ ،  $X_1, X_2, \dots, X_n$  باشد و ستون‌های ماتریس  $I_n$ ،  $C_1, C_2, \dots, C_n$  باشد. حال ماتریس‌های  $A^{-1}$  و  $I_n$  را براساس ستون‌هایشان به صورت زیر می‌نویسیم:

$$A^{-1} = [X_1 X_2 \dots X_n], \quad I_n = [C_1 C_2 \dots C_n]$$

باید  $A^{-1}$  را با پیدا کردن  $X_1 \dots X_n$  بیابیم. چون  $AA^{-1} = I_n$  آنگاه:

$$A[X_1, \dots, X_n] = [C_1 C_2 \dots C_n]$$

از انجام دادن ضرب ماتریس‌ها برحسب ستون‌هایش نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$[AX_1 AX_2 \dots AX_n] = [C_1 C_2 \dots C_n]$$

بنابراین:

$$AX_1 = C_1, \quad AX_2 = C_2, \dots, \quad AX_n = C_n$$

بنابراین  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ریشه‌هایی برای تساویهای  $AX = C_1, AX = C_2, \dots, AX = C_n$  می‌باشند که در آن  $A$  ضرایب حد معادلات می‌باشد. حل این دستگاه‌ها با استفاده از روش حذفی گوس - جردن در ماتریس افزوده‌ای به صورت زیر است:

$$[A : C_1 C_2 \dots C_n] \approx \dots \approx [I_n : X_1 X_2 \dots X_n]$$

بنابراین:

$$[A : I_n] \approx \dots \approx [I_n : A^{-1}]$$

بنابراین اگر شکل سطری پلکانی ماتریس  $[A : I_n]$  را محاسبه کنیم و ماتریس به فرم  $[I_n : B]$  به دست آوریم آنگاه  $B = A^{-1}$ .

به عبارت دیگر، اگر فرم تحویل شده سطری پلکانی را محاسبه کنیم و متوجه شویم که به فرم  $[I_n : B]$  نیست آنگاه  $A$  معکوس پذیر نخواهد بود. اکنون خلاصه‌ای از نتیجه بحث را مرور می‌کنیم.

## روش حذفی گوس برای پیدا کردن معکوس ماتریس

فرض کنیم  $A$  یک ماتریس  $n \times n$  باشد:

(۱) ماتریس همانی  $I_n$ ،  $n \times n$  را به ماتریس  $A$  وصل می‌کنیم تا ماتریسی به فرم  $[A : I_n]$  به وجود آید.

(۲) شکل تحویل شده سطری پلکانی  $[A : I_n]$  را محاسبه می‌کنیم. اگر فرم ماتریس به دست آمده شبیه ماتریس به فرم  $[I_n : B]$  بود در آن صورت  $B$  معکوس ماتریس  $A$  خواهد بود. اگر شکل تحویل شده سطری پلکانی به فرم  $[I_n : B]$  نبود در این صورت اولین ماتریس  $n \times n$  در ماتریس به دست آمده برابر با  $I_n$  نبوده پس می‌گوئیم که ماتریس  $A$  معکوس ندارد مثالهای زیر روش بیان شده را نشان می‌دهد. مثال (۲) معکوس ماتریس  $A$  را معین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

حل: با استفاده از روش حذفی گوس جردن خواهیم داشت:

$$[A : I_n] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_2 + (-2)R_1 \\ R_3 + R_1 \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)R_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\frac{R_1 + R_2}{R_2 + (-2)R_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

$$\frac{R_1 + R_2}{R_2 + (-1)R_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

بنابراین:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال زیر استفاده از روش گوس جردن را برای محاسبهٔ ماتریس معکوس ندارد نشان می‌دهد.

مثال ۳) معکوس ماتریس زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

حل: با استفاده از روش حذفی گوس جردن خواهیم داشت:

$$[A : I_3] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\frac{R_2 + (-1)R_1}{R_2 + R_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\frac{R_1 + (-1)R_2}{R_2 + 3R_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 3 & 1 \end{array} \right]$$

نیاز نیست که بیشتر ادامه دهیم چون اولین ماتریس  $3 \times 3$  در ماتریس نهایی به دست آمده یک ماتریس همانی نمی‌باشد و به عبارتی ماتریس به دست آمده به فرم  $[I_n : B]$  نمی‌باشد. پس  $A^{-1}$  وجود ندارد. روش گوس جردن برای محاسبهٔ معکوس یک ماتریس به ما می‌گوید که  $A$  یک ماتریس معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر تحویل شده سطری پلکانی  $[A : I_n]$  به فرم  $[I_n : B]$  باشد و ماتریس  $A$  نیز به ماتریس  $I_n$  تبدیل می‌شود و این مشاهده منجر به نتیجه زیر می‌شود:



**۳-۱۱-۲ قضیه:** ماتریس  $A$  که یک ماتریس  $n \times n$  می باشد معکوس پذیر است اگر و تنها اگر فرم تحویل شده سطری پلکانی آن  $I_n$  باشد.

اگر ماتریس ضرایب یک دستگاه معادلات خطی معکوس پذیر باشد آنگاه معکوس ماتریس می تواند قابل بحث در مورد جوابهای دستگاه باشد. قضیه زیر یک نتیجه کلیدی در این بحث می باشد.

**۴-۱۱-۲ قضیه:** فرض کنید  $AX = B$  یک دستگاه معادلات خطی با  $n$  متغیر باشد اگر  $A^{-1}$  وجود داشته باشد جواب دستگاه منحصر بفرد است و به صورت  $X = A^{-1}B$  می باشد.

اثبات: ابتدا ثابت می کنیم  $X = A^{-1}B$  یک جواب است.  $X = A^{-1}B$  را در معادله ماتریس جایگزین می کنیم. با استفاده از خواص ماتریس خواهیم داشت:

$$AX = A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = I_n B = B$$

چون  $X = A^{-1}B$  در معادله صدق می کند بنابراین یک جواب است. اکنون ثابت می کنیم جواب دستگاه یکتا است. فرض کنیم  $X_1$  جواب باشد پس  $AX_1 = B$  با ضرب کردن دو طرف معادله در  $A^{-1}$  داریم:

$$A^{-1}AX_1 = A^{-1}B \implies I_n X_1 = A^{-1}B \implies X_1 = A^{-1}B$$

بنابراین  $X_1 = A^{-1}B$  یک جواب یکتا می باشد.

حال نشان می دهیم که چگونه این نتیجه می تواند برای حل یک دستگاه معادلات استفاده گردد.

مثال ۴) دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$x_1 - x_2 - 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 3$$

$$-x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -2$$

حل: این دستگاه را می توان به فرم ماتریس زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

اگر ماتریس ضرایب معکوس‌پذیر باشد جواب منحصر بفرد دستگاه عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

معکوس ماتریس بالا در مثال ۲ به دست آمده است بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

جواب منحصر بفرد دستگاه عبارت است از:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 1$$

دانستن این مسئله که اگر ماتریس  $A$  معکوس‌پذیر باشد آنگاه حل دستگاه معادلات  $AX = B$  به صورت  $X = A^{-1}B$  می‌باشد اصولاً از لحاظ نظری اهمیت دارد. یک عبارت جبری برای حل دستگاه به ما می‌دهد، که معمولاً در حل دستگاه معادلات خاص استفاده نمی‌شود. روش حذفی گاوس - جردن که در بخش ۹-۱ معرفی شد برای حل دستگاه معادلات خطی مؤثرتر می‌باشند. اکثر دستگاه معادلات توسط کامپیوتر حل می‌شوند.

دو عامل مهم هنگام استفاده از کامپیوتر عبارتند از: کارایی و دقت. برای حل یک دستگاه  $n$  معادله  $n$  مجهولی روش معکوس ماتریس به  $n^2 + n^2$  عمل ضرب و  $n^2 - n^2$  عمل جمع نیاز داریم. در حالی که روش حذفی گاوس - جردن به  $\frac{1}{3}n^2 + n^2 - \frac{1}{3}n$  عمل ضرب و  $\frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{3}n^2 - \frac{5}{6}n$  عمل جمع نیاز خواهد داشت. بنابراین به عنوان مثال برای یک دستگاه ۴ معادله و ۴ مجهولی روش معکوس ماتریس شامل  $80$  عمل ضرب و  $48$  عمل جمع می‌باشد در حالی که روش مؤثرتر حذفی گاوس شامل  $36$  عمل ضرب و  $26$  عمل جمع خواهد بود. به علاوه وقتی محاسبات بیشتری انجام می‌گیرد خطای گرد کردن نیز افزایش می‌یابد. بنابراین روش حذفی گاوس (و گاوس - جردن) دقت بیشتری نسبت به روش معکوس ماتریس دارند.

ممکن است شخصی دچار اشتباه شود و فرض کند که بهترین روش حل چند دستگاه معادلات خطی که به شکل  $AX_1 = B_1, AX_2 = B_2, AX_3 = B_3, \dots, AX_k = B_k$  به این صورت است که چون ماتریس  $A$  در همه آنها مشترک است لازم است فقط یک بار  $A^{-1}$  محاسبه شود و سپس جواب

دستگاه به صورت  $x_1 = A^{-1}B_1$  ز  $x_2 = A^{-1}B_2$  و  $x_3 = A^{-1}B_3$  و ... و  $x_k = A^{-1}B_k$  محاسبه خواهد شد ولی به طور رایج، دقیق‌ترین و کارآمدترین روش حل چنین دستگاه‌هایی استفاده از یک ماتریس الحاقی بزرگ که بیانگر تمام دستگاه‌ها می‌باشد و سپس استفاده از یک روش حذفی مثل گاوس-جردن خواهد بود.

در مثالهای معینی روش معکوس ماتریس از حل دستگاه معادلات خطی برای رسیدن به جوابهای ویژه و معینی استفاده می‌شود. در بخش زیر این شرایط را نشان خواهیم داد (یک مدل برای تحلیل و بررسی وابستگی متقابل صنایع). درایه‌های ماتریس ضرایب در آن مثال برای محاسبه یک الگوریتم مؤثر برای محاسبه معکوس ماتریس مناسب می‌باشد.

اکنون بعضی از خواص جبری ماتریس‌های معکوس را مرور می‌کنیم.

## خواص ماتریس معکوس

فرض کنیم  $A$  و  $B$  معکوس پذیر و  $c$  یک اسکالر غیرصفر باشد. آنگاه:

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad (۱)$$

$$(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1} \quad (۲)$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad (۳)$$

$$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n \quad (۴)$$

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t \quad (۵)$$

نتایج ۱ و ۳ را بررسی می‌کنیم. اثبات بقیه نتایج را به عنوان تمرین به عهده خواننده واگذار می‌کنیم.  $(A^{-1})^{-1} = A$  این نتیجه مستقیم با استفاده از تعریف معکوس ماتریس به دست می‌آید. از آنجا که  $A^{-1}$  معکوس ماتریس  $A$  می‌باشد خواهیم داشت:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

این بیان هم چنین می‌گوید که  $A$  معکوس ماتریس  $A^{-1}$  می‌باشد بنابراین:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  نشان می‌دهیم که  $B^{-1}A^{-1}$  معکوس ماتریس  $AB$  می‌باشد. با استفاده از

خواص ماتریس‌ها خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} \\ &= AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n\end{aligned}$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد که  $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$ . بنابراین  $B^{-1}A^{-1}$  معکوس ماتریس  $AB$  است.

مثال ۵: اگر  $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ، آنگاه می‌توان نشان داد  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ . با استفاده از این مطلب  $(A^t)^{-1}$  را محاسبه کنید.

حل: نتیجه ۵ از بالا این نکته را بیان می‌کند که اگر معکوس ماتریس را بدانیم هم‌چنین معکوس ترانپوز آن ماتریس را نیز می‌دانیم، داریم:

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

## رمزنویسی

رمزنویسی فرایند کدنویسی و از کد خارج کردن پیام‌ها است. این کلمه از کلمه یونانی Kryptos به معنای مخفی می‌آید. این تکنیک به یونانیان باستان برمی‌گردد. امروزه دولتها روشهای پیچیده و پیشرفته‌ای برای کدگذاری و از حالت کد خارج کردن پیامها استفاده می‌کنند و یک نوع از این کدها که شکستن آن خیلی دشوار است موجب استفاده از ماتریس بزرگ برای از حالت کد خارج کردن یک پیام می‌باشد. گیرنده پیام با استفاده از ماتریس معکوس بزرگ آن را از حالت کد خارج می‌کند. ماتریس اول، ماتریس رمزگذاری و معکوس آن ماتریس رمزگشایی است. این روش را برای یک ماتریس  $3 \times 3$  توضیح می‌دهیم.

فرض کنید که پیام به صورت زیر باشد:

PREPARE TO ATTACK (آماده برای جنگ)

ماتریس رمزگذاری به صورت  $\begin{bmatrix} -3 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$  باشد. برای سهولت کار به هر کدام از حروف الفبا

یک شماره اختصاص می‌دهیم مثلاً برای  $A$ ، ۱ و برای  $B$ ، ۲ و غیره. فرض کنیم فاصله بین دو کلمه با

شماره ۲۷ نشان داده شود بنابراین پیام به شکل زیر درمی آید:

*P R E P A R E \* T O \* A T T A C K*

۱۶ ۱۸ ۵ ۱۶ ۱ ۱۸ ۵ ۲۷ ۲۰ ۱۵ ۲۷ ۱ ۲۰ ۲۰ ۱ ۳ ۱۱

از آنجا که می خواهیم از یک ماتریس  $3 \times 3$  برای کدگذاری پیام استفاده کنیم بنابراین پیام شماره گذاری شده را به ترتیب به صورت ماتریس های  $3 \times 1$  ستونی به صورت زیر فرض می کنیم:

$$\begin{bmatrix} 16 \\ 18 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 1 \\ 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 27 \\ 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 27 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 27 \end{bmatrix}$$

ضروری است که یک فاصله در آخر پیام برای کامل کردن آخرین ماتریس اضافه کنیم. حال با ضرب کردن هر کدام از ماتریس های ستونی بالا در ماتریس رمزگذاری پیام به صورت رمز درمی آوریم. این مرحله می تواند به راحتی با نوشتن ماتریس های ستونی به عنوان ستون های ماتریس و ضرب مجدد ماتریس در ماتریس کدگذاری انجام شود. داریم

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 16 & 5 & 15 & 20 & 3 \\ 18 & 1 & 27 & 27 & 20 & 11 \\ 15 & 18 & 20 & 1 & 1 & 27 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -122 & -123 & -176 & -130 & -124 & -150 \\ 23 & 19 & 47 & 28 & 21 & 38 \\ 138 & 139 & 181 & 145 & 144 & 153 \end{bmatrix}$$

ستون های این ماتریس پیام رمزگذاری شده را می دهد. پیام را به فرم های خطی زیر منتقل می کند.

$$-122, 23, 138, -123, 19, 139, -176, 47, 181,$$

$$-130, 28, 145, -124, 21, 144, -150, 38, 153.$$

برای گشودن رمز پیام، گیرنده رشته ای را به عنوان یک ردیف از ماتریس های ستونی  $3 \times 1$  می نویسد و با استفاده از معکوس ماتریس کدگذاری شده تکنیک را تکرار می کند. معکوس ماتریس کدگذاری شده به

صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ -4 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

برای کشف کردن رمز ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ -4 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -122 & -123 & -176 & -130 & -124 & -150 \\ 23 & 19 & 47 & 28 & 21 & 38 \\ 138 & 139 & 181 & 145 & 144 & 153 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 16 & 16 & 5 & 15 & 20 & 3 \\ 18 & 1 & 27 & 27 & 20 & 11 \\ 15 & 18 & 20 & 1 & 1 & 27 \end{bmatrix}$$

ستون‌های ماتریس نهایی به فرم خطی زیر نوشته می‌شود، که پیام اصلی را می‌دهد:

۱۶ ۱۸ ۵ ۱۶ ۱ ۱۸ ۵ ۲۷ ۲۰ ۱۵ ۲۷ ۱ ۲۰ ۲۰ ۱ ۳ ۱۱  
 P R E P A R E \* T O \* A T T A C K

## تمرینات

(۱) با استفاده از معکوس  $AB = BA = I_2$  بررسی کنید که آیا  $B$  معکوس  $A$  برای هر کدام از

ماتریس‌های  $2 \times 2$ ،  $A$  و  $B$  زیرین است یا خیر؟

(الف)  $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$  و  $A = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

(ب)  $B = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$  و  $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

(ج)  $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$  و  $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

(د)  $B = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}$  و  $A = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$

(۲) با استفاده از تعریف معکوس  $AB = BA = I_3$  برای هر کدام از ماتریس‌های  $3 \times 3$ ،  $A$  و  $B$

زیر بررسی کنید که آیا  $B$  معکوس  $A$  است یا خیر؟

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

۳) معکوس هر کدام از ماتریس‌های  $2 \times 2$  زیر را در صورت وجود معین کنید. از روش حذفی گوس جردن استفاده نمایید.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{الف}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \\ & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{د}) \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{ج}) \\ & \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} \quad (\text{و}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad (\text{ه}) \end{aligned}$$

۴) معکوس هر کدام از ماتریس‌های  $3 \times 3$  زیر را در صورت وجود پیدا کنید. از روش حذفی گوس جردن استفاده نمایید.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{الف}) \\ & \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{د}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad (\text{ج}) \end{aligned}$$

۵) معکوس هر کدام از ماتریس‌های  $3 \times 3$  زیر را در صورت وجود معین کنید. از روش حذفی گوس جردن استفاده نمایید.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ب)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{الف)} \\ & \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad \text{د)} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{ج)} \end{aligned}$$

۶) معکوس هر کدام از ماتریس‌های  $4 \times 4$  زیر را در صورت وجود پیدا کنید. از روش حذفی گوس

جردن استفاده نمایید.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ب)} \quad \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{الف)} \\ & \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ج)} \end{aligned}$$

۷) دستگاه‌های دو معادله و دو مجهول زیر را با تعیین معکوس ماتریس ضرایب و سپس با استفاده از

ضرب ماتریس‌ها حل کنید.

$$\text{الف) } x_1 + 2x_2 = 2 \text{ و } 3x_1 + 5x_2 = 4$$

$$\text{ب) } x_1 + 5x_2 = -1 \text{ و } 2x_1 + 9x_2 = 3$$

$$\text{ج) } x_1 + 3x_2 = 5 \text{ و } 2x_1 + x_2 = 10$$

$$\text{د) } 2x_1 + x_2 = 4 \text{ و } 4x_1 + 3x_2 = 6$$

$$\text{ه) } 2x_1 + 4x_2 = 6 \text{ و } 3x_1 + 8x_2 = 1$$

$$\text{و) } 3x_1 + 9x_2 = 9 \text{ و } 2x_1 + 7x_2 = 4$$

۸) دستگاه‌های سه معادله و سه مجهول زیر را با تعیین معکوس ماتریس ضرایب و سپس با استفاده از

ضرب ماتریس‌ها حل کنید.

$$\text{الف) } x_1 - x_2 - x_3 = 1, x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$

$$\text{ب) } x_1 - x_2 = 1 \text{ و } x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \text{ و } x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$$\text{ج) } x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \text{ و } 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3 \text{ و } x_1 + 8x_2 = 15$$



$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \text{ و } -x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \text{ و } x_1 - x_2 - 4x_3 = 1 \text{ (د)}$$

$$-x_1 + x_2 = 5 \text{ و } -x_1 + x_2 = -2 \text{ و } 6x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1 \text{ (ه)}$$

۹) دستگاه‌های چهار معادله و چهار مجهول زیر را با تعیین معکوس ماتریس ضرایب و سپس با استفاده از ضرب ماتریس‌ها حل کنید.

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_4 = 6$$

$$x_2 + 3x_3 - x_4 = 1$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 7$$

۱۰) دستگاه معادلات زیر را که همگی دارای ماتریس ضرایب یکسان هستند با استفاده از روش معکوس ماتریس حل کنید.

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = b_1$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = b_1$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = b_2$$

برای

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$(۱۱) \text{ اگر } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ نشان دهید که:}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(ad - bc)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

برای محاسبه معکوس ماتریس  $2 \times 2$  این فرمول می‌تواند سریعتر از روش حذفی گاوس جردن باشد. معکوس ماتریس‌های  $2 \times 2$  زیر را با استفاده از هر دو روش محاسبه کنید. شما کدامیک را ترجیح می‌دهید؟

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} & \text{(ب)} & \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} & \text{(الف)} \\ \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} & \text{(د)} & \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} & \text{(ج)} \end{matrix}$$

این فرمول را در مباحث بعد نیز خواهیم دید و به عنوان تئوری عمومی ماتریس معکوس ثابت می‌شود).

۱۲) هر کدام از ویژگی‌های معکوس ماتریس زیر را که در پایان بخش لیست شده است ثابت کنید.

(الف)  $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$

(ب)  $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

(ج)  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

۱۳) اگر  $A^{-1} = [21]$ ،  $A$  را بیابید.

۱۴) اگر  $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 6 \end{bmatrix}$ ،  $A$  را بیابید.

۱۵) فرض کنید ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$  دارای معکوس  $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$  باشد. تعیین کنید:

(الف)  $(3A)^{-1}$  (ب)  $(A^2)^{-1}$  (ج)  $A^2$  (د)  $(A^t)^{-1}$

(نکته: از خاصیت‌های جبری معکوس ماتریس استفاده کنید).

۱۶) اگر  $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$  آنگاه  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -9 & 5 \end{bmatrix}$ ، با استفاده از این اطلاعات تعیین کنید:

(الف)  $(2A^t)^{-1}$  (ب)  $A^{-3}$  (ج)  $(AA^t)^{-1}$

۱۷)  $x$  را در  $\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2x & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$  بیابید.

۱۸)  $x$  را در  $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2x & x \\ 5 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$  بیابید.

۱۹)  $A$  را در  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}^{-1} (4A^t)^{-1}$  بیابید.

۲۰) ثابت کنید  $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ .

$$(21) \text{ ثابت کنید } (A^t B^t)^{-1} = (A^{-1} B^{-1})^t.$$

$$(22) \text{ ثابت کنید که به طور کلی } (A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}.$$

(23) ثابت کنید که اگر  $A$  معکوس نداشته باشد  $A^t$  نیز معکوس ندارد.

(24) فرض کنید  $A$  یک ماتریس معکوس پذیر است در این صورت:

$$\text{الف) } AB = AC \implies B = C$$

$$\text{ب) } AB = 0 \implies B = 0$$

(25) ثابت کنید که یک ماتریس معکوس ندارد هرگاه:

الف) دو سطر آن مساوی باشد.

ب) دو ستون آن مساوی باشد (نکته: از ترانهاده استفاده کنید).

(26) ثابت کنید که ماتریس قطری معکوس پذیر است اگر و تنها اگر تمامی درایه های قطری آن غیر صفر باشد.

آیا می توانید راه سریعتری را برای تعیین معکوس ماتریس قطری معکوس پذیر بیابید.

(27) فرض کنید که  $AX = B$  یک دستگاه ۵ معادله و ۵ مجهولی باشد. وقتی که  $A$  معکوس پذیر است.

تعداد ضربها و جمعهایی را که برای حل این معادله نیاز است بیابید. با استفاده از

الف) روش حذفی گاوس      ب) روش معکوس ماتریس

(28) فرض کنید  $A$  یک ماتریس معکوس پذیر باشد. نشان دهید که میزان محاسبه حل دستگاه  $AX = B$

با استفاده از روش حذفی گاوس جردن همان پیدا کردن ستون اول معکوس  $A$  می باشد. این تمرین

این حقیقت را بیان می کند که برای حل دستگاه معادلات روش حذفی گاوس جردن مؤثرتر از روش

معکوس ماتریس ضرایب است.

### تمرینهای رمزگذاری

در تمرینهای ۲۹ - ۳۲ هر حرف را با موفقیت در الفبا ارتباط دهید.

$$(29) \text{ پیام RETREAT را با استفاده از ماتریس } \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \text{ کدگذاری نمایید.}$$

$$(30) \text{ پیام The British Are Coming را با استفاده از ماتریس } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ کدگذاری نمایید.}$$

(۳۱) پیام ۳۹- و ۶۱- و ۳- و ۵- و ۳۸ و ۴۹ را به رمز درآورید. با استفاده از ماتریس تمرین ۲۹ کدگذاری شده است.

(۳۲) پیام ۲۷- و ۹۸ و ۹۶ و ۱۱- و ۱۲۲ و ۸۴ و ۵- و ۴۳ و ۲۸ و ۱- و ۱۰۰ و ۷۱ را کدگذاری نمایید با استفاده از ماتریس تمرین ۳۰ کدگذاری شده است.

## ۱۲-۲ مدل ورودی - خروجی لینتیف در اقتصاد

در این بخش، مدل ورودی - خروجی لینتیف که در آنالیز کردن وابستگی اقتصادی به کار می‌رود را معرفی می‌کنیم. وازلی لینتیف در سال ۱۹۷۳ برای این کارش در این رشته جایزه نوبل را اخذ کرده است. استفاده کاربردی از این روش اکنون به عنوان ابزار استاندارد برای درآمد ساختارهای اقتصاد از شهرها و همکاری‌های ایالتها و کشورها توسعه یافته است. یک موقعیت اقتصادی که شامل  $n$  صنایع وابسته است را در نظر بگیرید. خروجی هر صنعت نیازمند ورودی توسط صنعت‌های دیگر است و حتی در صورت امکان خود صنعت. خواهیم فهمید که چطور یک مدل ریاضی که شامل یک دستگاه معادلات خطی است می‌تواند این موقعیت را پایه‌گذاری سازد. برای سادگی کار فرض کنیم هر کدام از محصولات صنعتی یک کالا باشد. فرض کنید  $a_{ij}$  میزان ورودی یک کالای معین  $i$  برای تولید خروجی واحد کالای  $j$  اختصاص داده شود. در مدل ما فرض می‌کنیم میزان ورودی و خروجی کالا با دلار اندازه‌گیری می‌شود. بنابراین برای مثال  $a_{۲۳} = ۰/۴۵$  به این معناست که ۴۵ نسبت ارزش کالای ۳ برای تولید ۱ دلار از کالای ۴ فراهم شده است.

$$a_{ij} = \text{میزان کالای } i \text{ در یک دلار از کالای } j$$

درایه‌های  $a_{ij}$  ضرایب ورودی نامیده می‌شوند که ماتریس  $A$  را تعریف می‌کند، ماتریس ورودی - خروجی نامیده می‌شود که وابستگی صنایع را توصیف می‌کند.

مثال ۱) ماتریس‌های ورودی - خروجی بین‌المللی برای توصیف کردن صنایع وابسته که جایگزین محصول اقتصاد کشورهاست استفاده می‌شوند. اکنون قسمتی از ماتریس را که برای توصیف وابستگی اقتصاد ایالات متحده آمریکا در سال ۱۹۷۲ است را توصیف می‌کنیم. ساختار اقتصاد در حقیقت در میان ۷۹ محصول قرار دارد. بنابراین یک ماتریس  $۷۹ \times ۷۹$  است. البته ما نمی‌توانیم کل ماتریس را نشان دهیم. ما ۱۰ بخش را در اختیار خواننده قرار می‌دهیم که با طبقه‌بندی این ساختار کمی آشنا شود.

(۱) محصولات دامی

- (۲) محصولات کشاورزی  
 (۳) محصولات دریایی و جنگلی  
 (۴) خدمات کشاورزی، جنگلی و دریایی  
 (۵) استخراج آهن، سنگ معدن‌های آلیاژ آهن‌دار  
 (۶) استخراج سنگ معدنی‌های فلزات غیرآهنی  
 (۷) استخراج ذغال سنگ  
 (۸) بتن‌زین خام و سخت طبیعی  
 (۹) استخراج خاک رس و سنگ و معدن سنگ  
 (۱۰) استخراج آب معدنی حاصلخیز و شیمیایی  
 ماتریس  $A$  براساس این طبقه‌بندی‌ها عبارت است از

ردیف	۱	۲	۳	۴
۱	۰٫۲۶۱۱۰	۰٫۰۲۴۸۱	۰	۰٫۰۵۲۷۸
۲	۰٫۲۳۲۷۷	۰٫۰۳۲۱۸	۰	۰٫۰۱۴۴۴
۳	۰	۰	۰٫۰۰۰۴۶۷	۰٫۰۰۰۲۹۴
۴	۰٫۰۲۸۲۱	۰٫۰۰۰۳۶۷۳	۰٫۲۵۰۲	۰٫۰۲۹۵۹
۵	۰	۰	۰	۰
۶	۰	۰	۰	۰
۷	۰	۰٫۰۰۰۰۰۲	۰	۰
۸	۰	۰	۰	۰
۹	۰٫۰۰۰۰۰۱	۰٫۰۰۰۲۵۱	۰	۰٫۰۰۰۰۳۴
۱۰	۰	۰٫۰۰۰۱۳۰	۰	۰
...	...	...	...	...

بنابراین، برای مثال  $a_{۷۲} = ۰٫۰۰۰۰۰۲$  بر این نکته دلالت دارد که  $۰٫۰۰۰۰۰۲$  دلار از بخش استخراج معدن زغال سنگ (بخش ۷) به هر بخش از محصولات کشاورزی (بخش ۲)، یک دلار اختصاص یافته است. اکنون مدلی که شامل یک بخش باز است را توسعه می‌دهیم. محصولات صنایع منجر به صنایع تولیدی دیگر می‌شوند، بلکه بخش‌هایی از اقتصاد غیرتولیدی از قبیل مصرف‌کننده‌ها و دولت‌ها را شامل می‌شوند. تمامی چنین بخش‌های غیرتولیدی طبقه‌بندی می‌شوند به آنچه که بخش باز نامیده می‌شود. بخش باز اقتصادی در مدل بالا در سال ۱۹۷۲ در ایالات متحده آمریکا شامل خریدهای فدرال، ایالات و دولت مرکزی (محلی) می‌باشد.

تقاضای بخش باز از صنعت  $i$   $d_i =$

کل خرجی صنعتی  $i$  برای برخورد کردن با تقاضاهای تمامی  $n$  صنایع و بخش باز  $x_i = a_{ij}$  میزان موردنیاز از صنعت  $i$  برای تولید خروجی واحد در صنعت  $j$  است. بنابراین  $a_{ij}x_j$  می‌تواند میزان موردنیاز برای تولید  $x_j$  واحدهای خروجی در صنعت  $j$  می‌باشد. داریم:

$$\underbrace{x_i}_{\text{کل محصول صنعتی } i} = \underbrace{a_{i1}x_1}_{\text{تقاضای صنعتی ۱}} + \underbrace{a_{i2}x_2}_{\text{تقاضای صنعتی ۲}} + \dots + \underbrace{x_{in}x_n}_{\text{تقاضای صنعتی } n} + \underbrace{d_i}_{\text{تقاضای صنعتی باز}}$$

این فرایند را به صورت یک دستگاه معادلات خطی نشان می‌دهیم:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + d_1 \\ x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + d_2 \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + d_n \end{aligned}$$

این دستگاه معادلات را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

اجازه دهید به ما که نمادهای زیر را این چنین معرفی کنیم:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

اکنون دستگاه معادلات را می‌توان به عنوان یک ماتریس منفرد همراه با یک نتیجه‌گیری مهم نوشت:

$$X = AX + D$$

زمانی که این مدل برای صنعت یک کشور به کار گرفته می‌شود،  $X$  نشان دهنده کل خروجی هر کدام از بخشهای تولیدی اقتصادی و  $AX$  نیازمندیهای ورودی اقتصادی را توصیف می‌کند.  $D$  مسایر است با

$(X - AX)$ . یعنی اختلاف میان خروجی کل و معادله صنعتی  $AX$ . بنابراین  $D$  ناخالصی محصولات ملی اقتصادی است در عمل معادله  $X = AX + D$  به روشهای مختلفی به کار گرفته می شود که به متغیرهای شناخته شده (معلوم) و شناخته نشده (مجهول) بستگی دارد. برای مثال یک محقق که جویای تعیین کردن دلیل و مفهوم تغییر در خریدهای دولتی یا تقاضاهای مصرف کننده است با توجیه اقتصادی  $A$  و  $D$ ، حل معادله برای  $X$  را ارائه می دهد. این معادله می تواند در این روش استفاده شود از طریق پیش بینی مقدار خروجی از هر بخش که نیازمند به دست یابی  $GNP_s$  های مختلف می باشد. (مثال ۲، که در پایین می آید کاربرد این مدل را نشان می دهد) از سوی دیگر، یک اقتصاد دان می داند محدودیت ظرفیت تولیدی یک دستگاه اقتصادی توصیف شده با  $A$  و  $X$  را معلوم فرض خواهد کرد و پیش بینی مقدار ماکزیم  $GNP$  حل دستگاه معادله برای  $D$  را امکان پذیر می کند.

مثال ۲) یک اقتصاد شامل سه صنعت که دارای ورودی - خروجی ماتریس  $A$  است را ملاحظه کنید (فرض کنیم) ترازهای خروجی مورد نیاز این صنایع برای مواجه شدن با نیازها و تقاضاهای صنایع دیگر و هم چنین بخش باز در هر وضعیت را تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{15} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 16 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \\ 32 \end{bmatrix}$$

هر واحد  $D$  یک میلیون دلار است.

حل: می خواهیم ترازهای خروجی  $X$  متناظر با تقاضاهای بخش های باز مختلف  $D$  را محاسبه نماییم.  $X$  با معادله  $X = AX + D$  مشخص می شود که به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$X - AX = D$$

$$(\mathbf{1} - A)X = D$$

برای حل معادله  $X$  می توانیم از روش حذف گاوس جردن و یا روش ماتریس معکوس استفاده کنیم. در حل تمرین از روش ماتریس معکوس استفاده می شود. داریم:

$$X = (\mathbf{1} - A)^{-1}D$$

از این رابطه برای تعیین  $X$  وقتی  $A$  و  $D$  معلوم هستند استفاده می‌کنیم. برای ماتریس  $A$  چنین به دست می‌آید:

$$I - XA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \frac{2}{10} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{10} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$(I - A)^{-1}$  با استفاده از روش حذفی گاوس - جردن محاسبه می‌شود.

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

می‌توانیم به طور مؤثری  $X = (I - A)^{-1}D$  را برای هر سه مقدار  $D$  با تشکیل دادن ماتریسی که شامل سه مقدار  $D$  به عنوان ستون است محاسبه کنیم:

$$X = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 6 & 12 \\ 12 & 9 & 18 \\ 16 & 8 & 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 21 & 52 \\ 57 & 39 & 88 \\ 20 & 10 & 40 \end{bmatrix}$$

$$= (I - A)^{-1}$$

ترازهای خروجی لازم با تقاضاها به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 16 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \\ 32 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 33 \\ 57 \\ 20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 21 \\ 39 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 52 \\ 88 \\ 40 \end{bmatrix}$$

که این واحدها میلیونها دلار هستند.

## ۱۳-۲ نکته محاسباتی

آنالیز کردن این نوع معمولاً شامل بخشهای زیادی می‌شود که ماتریس‌های خروجی و ورودی را نشان می‌دهد. معمولاً قسمتی از محاسبات بزرگ شامل پیاده کردن مدل و نیازمند یک الگوریتم کارآمد است. (درایه‌های ماتریس ورودی - خروجی  $A$  معمولاً صفر یا خیلی ناچیز هستند.)

این مشخصه  $A$  منجر به یک روش عددی مناسب برای محاسبه  $(I - A)^{-1}$  می‌شود که باعث می‌شود روش ماتریس معکوس برای حل معادله دستگاه  $(I - A)X = D$  کارآمدتر از روش گاوس - جردن شود استفاده کنیم، نتیجه بهتری نسبت به حل گاوس- جردن می‌دهد.



حال این روش را برای محاسبه  $(I - A)^{-1}$  توضیح می‌دهیم. ضرب ماتریسی زیر را برای هر عدد صحیح و مثبت  $m$  در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}(I - A)(I + A + A^2 + \dots + A^m) &= I(I + A + A^2 + \dots + A^m) \\ &\quad - A(I + A + A^2 + \dots + A^m) \\ &= (I + A + A^2 + \dots + A^m) \\ &\quad - (A + A^2 + \dots + A^m + A^{m+1}) \\ &= I - A^{m+1}\end{aligned}$$

مؤلفه‌های توانهای متوالی  $A$  سریعاً کوچک شده و  $A^{m+1}$  به ماتریس صفر نزدیک می‌شود بنابراین برای  $m$  مناسب بزرگ:

$$(I - A)(I + A + A^2 + \dots + A^m) = I$$

که این نتیجه می‌دهد

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^m$$

از این عبارت در محاسبه کامپیوتری  $(I - A)^{-1}$  استفاده می‌شود.

خوانندگانی که علاقمند به یافتن کاربردهای بیشتر این مدل هستند باید مقاله‌ی اقتصاد جهانی سال ۲۰۰۰ نوشته‌ی واسلی را بخوانند. این مقاله کاربرد این مدل در اقتصاد جهان را توضیح می‌دهد. این مدل، در آمریکا با پشتوانه‌های مخصوص مالی در دست اجرا بود.

در این مدل جهان به ۱۵ منطقه یا ناحیه‌ی جغرافیایی مجزا که هر یک را یک ماتریس ورودی و خروجی یکتا می‌نامند تقسیم می‌شود. هر یک از این نواحی به یک ماتریس بزرگتر که برای این کار از مدل ورودی و خروجی استفاده می‌شود، مرتبط می‌شود. کلاً بیشتر از ۲۰۰۰ بخش اقتصادی این مدل را شامل می‌شوند. از میان مقدارهای مختلف ورودی، اقتصاددان‌ها می‌توانند وضعیت اقتصادی آینده را حدس بزنند یا بسازند.

## تمرینات

(۱) ماتریس ورودی - خروجی زیر را که وابسته به ۵ صنعت است در نظر بگیرید:

	۱	۲	۳	۴	۵
خودکار (۱)	۰٫۱۵	۰٫۱۰	۰٫۰۵	۰٫۰۵	۰٫۱۰
فولاد (۲)	۰٫۴۰	۰٫۲۰	۰٫۱۰	۰٫۱۰	۰٫۱۰
الکتریسیته (۳)	۰٫۱۰	۰٫۲۵	۰٫۲۰	۰٫۱۰	۰٫۲۰
زغال سنگ (۴)	۰٫۱۰	۰٫۲۰	۰٫۳۰	۰٫۱۵	۰٫۱۰
شیمیایی (۵)	۰٫۰۵	۰٫۱۰	۰٫۰۵	۰٫۰۲	۰٫۰۵

تعیین کنید:

الف) میزان الکتریسیته مصرفی برای تولید یک دلار از فولاد

ب) میزان فولاد مصرفی در تولید یک دلار خودکار صنعتی

ج) بزرگترین مصرف کننده زغال سنگ

د) بزرگترین مصرف کننده الکتریسیته

ه) صنعتی که در صنعت خودکار بزرگترین وابسته است.

در تمرین‌های ۲ تا ۶ اقتصادهایی را در نظر بگیرید که شامل ۲ یا ۳ صنعت باشند. ترازهای خروجی موردنیاز برای هر کدام از صنعت‌ها برای مواجه شدن با مطالعات دیگر صنایع و بخش باز را محاسبه کنید.

(۲) در گردش

$$A = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.60 \\ 0.40 & 0.10 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 24 \\ 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \end{bmatrix}$$

(۳) در گردش

$$A = \begin{bmatrix} 0.10 & 0.40 \\ 0.30 & 0.20 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 18 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 24 \\ 12 \end{bmatrix}$$

(۴)

$$A = \begin{bmatrix} 0.30 & 0.60 \\ 0.35 & 0.10 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 42 \\ 84 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 14 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 43 \\ 42 \end{bmatrix}$$

(۵)

$$A = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.20 & 0.10 \\ 0 & 0.40 & 0.20 \\ 0 & 0.20 & 0.60 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\text{و در گردش} \begin{bmatrix} ۸ \\ ۲۴ \\ ۸ \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} ۰,۲۰ & ۰,۲۰ & ۰ \\ ۰,۴۰ & ۰,۴۰ & ۰,۶۰ \\ ۰,۴۰ & ۰,۱۰ & ۰,۴۰ \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} ۳۶ \\ ۷۲ \\ ۳۶ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۳۶ \\ ۰ \\ ۱۸ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۳۶ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\text{و در گردش} \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱۸ \\ ۱۸ \end{bmatrix}$$

در تمرین‌های ۷ تا ۹ اقتصادهایی را در نظر بگیرید که شامل ۲ یا ۳ صنایع باشند. ترازهای خروجی صنایع داده شده‌اند. میزان دسترسی برای بخش باز از هر صنعت را معین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۰,۲۰ & ۰,۴۰ \\ ۰,۵۰ & ۰,۱۰ \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} ۸ \\ ۱۰ \end{bmatrix} \quad (۶)$$

$$A = \begin{bmatrix} ۰,۱۰ & ۰,۲۰ & ۰,۳۰ \\ ۰ & ۰,۱۰ & ۰,۴۰ \\ ۰,۵۰ & ۰,۴۰ & ۰,۲۰ \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} ۱۰ \\ ۱۰ \\ ۲۰ \end{bmatrix} \quad (۷)$$

$$A = \begin{bmatrix} ۰,۱۰ & ۰,۱۰ & ۰,۲۰ \\ ۰,۲۰ & ۰,۱۰ & ۰,۳۰ \\ ۰,۴۰ & ۰,۳۰ & ۰,۱۵ \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} ۶ \\ ۴ \\ ۵ \end{bmatrix} \quad (۸)$$

(۹) فرض کنید  $a_{ij}$  درایه دلخواه از ماتریس ورودی - خروجی باشد. چرا شما انتظار دارید  $a_{ij}$  باید در شرط  $۰ \leq a_{ij} \leq ۱$  صدق کند؟

(۱۰) در اقتصاد این احتمال وجود دارد که مجموع درایه‌های هر ستون از ماتریس ورودی - خروجی کمتر یا مساوی یک شود. علت این مورد را توضیح دهید.

## ۱۴-۲ جنبش‌های آماری و ژنتیکی - زنجیره مارکوف

ماتریس‌های خاصی، که ماتریس‌های تصادفی نامیده می‌شود در مطالعه پدیده تصادفی مهم می‌باشند به طوری که این پیامد دقیقاً شناخته شده نیست بلکه احتمالات می‌توانند تعیین شوند. در این بخش، ما ماتریس‌های تصادفی را معرفی می‌کنیم و بعضی از خواصشان را استخراج می‌نمائیم و مثالهایی از

کاربردهایشان را می‌آوریم. یک مثال تحلیلی از جنبش جمعیت میان شهرها و حومه شهرها در ایالات متحده می‌باشد. مثال دوم بیانگر استفاده از ماتریس‌های تصادفی در ژنتیک می‌باشد.

در این زمان، ما به خواننده بعضی از ایده‌های احتمالاتی را یادآور می‌شویم. اگر پیامد هر واقعه این باشد که مطمئناً رخ دهد، ما می‌گوئیم که احتمال این پیامد ۱ است. از طرف دیگر، اگر آن واقعه رخ ندهد، ما می‌گوئیم احتمال آن ۰ است. احتمالات دیگر توسط کسرهایی میان ۰ و ۱ نمایش داده می‌شود: بزرگتر سر، بزرگترین احتمال  $P$  از رخ دادن پیامد را دارد. بنابراین احتمال  $P$  به فاصله  $1 - P \leq 0$  محدود می‌شود. اگر هر یک از  $n$  پیامدهای به طور کامل مستقل از هم به نسبت مساوی رخ دهند، و اگر  $m$  تا از این پیامدها مطلوب ما باشد، آنگاه احتمال  $P$  که یکی از این پیامدها رخ خواهد داد با کسر  $\frac{m}{n}$  تعریف می‌شود. به عنوان یک مثال، واقعه کشیدن یک ورق تکی از ۵۲ ورق بازی را در نظر بگیرید. احتمال این که نتیجه این پیامد یک آس یا شاه باشد چقدر است؟ اول از همه می‌بینیم که ۵۲ پیامد ممکن وجود دارد. ۴ آس و ۴ شاه در بسته وجود دارند: ۸ پیامد جالب وجود دارد. بنابراین احتمال کشیدن یک آس یا یک شاه برابر است با  $\frac{4}{52}$  یا  $\frac{1}{13}$ . ما اینک ماتریس‌هایی را معرفی می‌کنیم که درایه‌هایشان احتمالات می‌باشند.

### ۲-۱۴-۱ تعریف: یک ماتریس تصادفی یک ماتریس مربعی است که درآیه‌هایشان احتمالات

می‌باشند و جمع ستون‌هایشان ۱ می‌شوند. ماتریس‌های زیر ماتریس‌های تصادفی هستند.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های زیر ماتریس‌های تصادفی نیستند.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌ها در اولین ستون برابر ۱ نیست.

۲ موجود در اولین ردیف یک احتمال نیست زیرا از ۱ بزرگتر است.

یک ماتریس  $2 \times 2$  تصادفی به طور کلی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 1-x & 1-y \end{bmatrix}$$

که در آن  $0 \leq x \leq 1$ ،  $0 \leq y \leq 1$ .

ماتریس‌های تصادفی دارای خواص مفید زیر هستند (خواننده این نتیجه را برای ماتریس‌های  $2 \times 2$  تصادفی در تمرینات اثبات می‌کند).

**۲-۱۴-۲ قضیه:** اگر  $A$  و  $B$  ماتریس‌های تصادفی هم‌اندازه باشند (یکسان باشند) آنگاه  $AB$  نیز ماتریس تصادفی است. بنابراین اگر  $A$  تصادفی باشد آنگاه  $A^2, A^3, A^4, \dots$  همگی تصادفی هستند.

**مثال ۱:** این مثال یک ماتریس تصادفی را توصیف می‌کند که در آنالیز کردن سطح مرکزی شهر تورنتو در دوره زمانی ۱۹۶۲-۱۹۵۲ استفاده شده است.

محققان داده‌ها و اطلاعات را به فرم ماتریس تصادفی  $P$  جمع‌آوری و سپس نوشتند. سطرها و ستون‌های  $P$  نمایانگر استفاده‌های زمینی هستند. مؤلفه  $p_{ij}$  احتمال سطحی است که در  $j$  در سال ۱۹۵۲ استفاده می‌شده است و یا احتمال  $i$  است که در سال ۱۹۶۲ استفاده شده است.

استفاده در سال ۱۹۵۲

استفاده	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
تراکم پایین محلی	۰٫۲	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱
	۵	۱	۱	۱	۸	۰	۲	۰	۲	۳
تراکم بالای محلی	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۴	۰٫۳
	۸	۸	۲	۳	۵	۰	۱	۷	۱	۴
اداری	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۴	۰٫۱	۰٫۱
	۳	۴	۲	۲	۴	۱	۹	۳	۵	۰
تجارت اصلی	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۳	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱
	۳	۴	۳	۲	۸	۷	۰	۵	۴	۱
تجارت خودکار	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۷	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱
	۵	۰	۳	۳	۲	۰	۹	۱	۰	۱
پارکینگ	۰٫۱	۰٫۳	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۳	۰٫۰۶	۰٫۲	۰٫۲	۰٫۲	۰٫۲
	۵	۹	۸	۱	۹		۷	۸	۴	۲
خانه‌های فروشی	۰٫۲	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۳	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱
	۲	۳	۸	۸	۸	۴	۵	۴	۰	۳
صنعت	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۲	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱
	۳	۳		۱	۰	۱	۸	۰	۰	۲
انتقال	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱
حمل و نقل	۰٫۰۰	۰٫۰۸	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۰۱	۰٫۰۰	۰٫۰۱	۰٫۰۰	۰٫۰۰	۰٫۰۰
بیکار	۰٫۰۶	۰٫۰۸	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۱	۰٫۴	۰٫۱
اشتغال نشده		۸	۲	۸	۹	۵	۸	۲	۴	۸

یکی از اطلاعات به دست آمده از این ماتریس را تفسیر می‌کنیم. برای مثال  $p_{۳۳} = ۰٫۲۸$  این احتمال بیانگر این است که سطح فضای دفتر در سال ۱۹۵۲ دارای احتمال  $۰٫۲۸$  از ناحیه پارک شده در سال ۱۹۶۲ است.

حال ماتریس‌های احتمالی را مشخص می‌کنیم و تعدادی از مشخصه‌های آن را ثابت می‌کنیم. حال برای کاربردهای آن مثالهایی را بیان می‌کنیم.

مثال ۱) آنالیز جنبش آماری بین شهرها و حومه آنها در آمریکا

مثال ۲) استفاده از ماتریس‌های احتمالی در ژنتیک.

حال تعداد نظریه‌های پایه‌ای احتمال را بیان می‌کنیم. اگر نتیجه یک رخداد مطمئناً اتفاق بیفتد می‌گوییم احتمال اتفاق افتادن آن یک می‌باشد. از سوی دیگر اگر اتفاق نیفتد می‌گوییم احتمال آن صفر است. احتمالات دیگر بین صفر و یک هستند. بنابراین برای احتمال  $P$  داریم  $0 \leq P \leq 1$ .

اگر تعداد کل احتمالهای موجود  $n$  باشد و  $m$  تا از آنها اتفاق بیفتد احتمال  $P$  را به صورت  $\frac{m}{n}$  تعریف می‌کنیم. به عنوان مثال فرض کنیم احتمال کشیدن یک کارت واحد از یک جعبه بازی ۵۲ کاردی را داریم. چقدر احتمال دارد که کارت خارج شده تک (آس) یا شاه باشد؟

ابتدا می‌بینیم که ۵۲ حالت برای خارج کردن کارت داریم. ۴ حالت برای تک کارتها و ۴ حالت برای شاه‌ها داریم. بنابراین احتمال تک آمدن یا شاه آمدن  $\frac{4}{52}$  یا  $\frac{4}{13}$  است.

حال ماتریس را می‌سازیم که عناصرش این احتمالات باشد.

سطر ششم احتمال نواحی مختلف شهر که دارای نواحی پارکینگ هستند. در سال ۱۹۶۲ نشان می‌دهد. این وابستگی ارقام بزرگ افزایش متقابل نقش پارکینگ در سطح را آشکار می‌سازد.

درایه‌های قطری سطح مورد استفاده باقیمانده در طبقه یکسان را می‌دهد. برای مثال  $P_{77} = 0.38$  احتمال خانه‌های فروشی باقیمانده در سطح هستند. نسبت اعداد بزرگ این مؤلفه‌های قطری تمایل برای باقیمانده همان طبقه عریض مورد استفاده را منعکس می‌کند. حمل و نقل و فاضلاب‌های خالی استثنائات هستند.

نکته جالب توجه این است که  $P_{102} = 0.44$  این عدد، احتمال سطحی است که تراکم مراکز مسکونی در سال ۱۹۵۲ است که در سال ۱۹۶۲ این سطح اشغال نشده است. این سطح برای مرکز شهر تورنتو مفید است ولی دیرکاربرد است.

خوانندگانی که بر ادامه‌ی این آنالیز علاقه دارند تشویق به خواندن مقاله‌ای که این ماتریس از آن سرچشمه گرفته است می‌شوند که نام آن «مراحل تطبیقی فیزیکی و سطح جانشینی (در تورنتو)» تالیف لاری اس بورنی جغرافیای اقتصاد ۴۷- شماره ۱ ژانویه ۱۹۷۱ صفحات ۱ تا ۱۵ است.

مثال ۲) در این مثال یک مدل جنبش جمعیت بین شهرها و حومه شهرهای آمریکا را توسعه می‌دهیم فرض می‌کنیم تعداد جمعیت در شهر آمریکا در سال ۲۰۰۰، ۵۸ میلیون است و جمعیت در حومه‌ی این

شهر ۱۴۲ میلیون است. این اطلاعات را با ماتریس  $X_0 = \begin{bmatrix} 58 \\ 142 \end{bmatrix}$  نشان می‌دهیم. فرض کنید جمعیت

از سمت شهرها به حومه‌های اطراف سرازیر می‌شود. در طول سال ۲۰۰۰ احتمال شخص باقی مانده در شهر ۰/۹۶ بود. بنابراین مهاجرت به حومه‌ها ۰/۰۴ بوده است. (فرض کنید تمام این مهاجرتها به سوی حومه‌ها باشد.)

اکنون فرض کنید معکوس جمعیت از حومه به شهر سرازیر شده است. احتمال شخص آمده به شهر ۰/۰۱ و احتمال باقیمانده به حومه ۰/۹۹ است. این احتمال به عنوان درایه‌های تصادفی ماتریس  $P$  به صورت زیر نوشته شود:

$$P = \begin{bmatrix} 0.96 & 0.01 \\ 0.04 & 0.99 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{شهر} \\ \text{حومه} \end{matrix}$$

احتمال رفتن از محل  $A$  به محل  $B$  با درایه ستون  $A$  و سطر  $B$  داده شده است. این مورد از ماتریس تصادفی احتمال تغییر وضعیت نامیده می‌شود.

اکنون توزیع جمعیت در سال ۲۰۰۱ یک سال بعد را در نظر بگیرید.

افرادی که به حومه‌ها رفتند + افرادی که از سال ۲۰۰۰ باقی ماندند = جمعیت شهر در سال ۲۰۰۱

$$571 \text{ میلیون} = (0.96 \times 58) + (0.01 \times 142)$$

افرادی که در سال ۲۰۰۰ ماندند + افرادی که از شهر آمدند = جمعیت حومه در سال ۲۰۰۱

$$1429 \text{ میلیون} = (0.04 \times 58) + (0.99 \times 142)$$

توجه کنید که ما می‌توانیم با استفاده از ماتریس حاصلضرب به این ارقام دست یابیم:

$$\begin{bmatrix} 0.96 & 0.01 \\ 0.04 & 0.99 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 58 \\ 142 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 571 \\ 1429 \end{bmatrix}$$

از سال ۲۰۰۰ به عنوان پایه استفاده می‌کنیم. فرض کنید  $X_1$  جمعیت در سال ۲۰۰۱ باشد یک سال بعد. می‌توانیم بنویسیم:  $X_1 = PX_0$ .

فرض کنید جمعیت نشان داده شده با ماتریس  $P$  بالای چند سال غیرقابل تغییر باشد.

توزیع جمعیت  $X_2$  بعد از ۲ سال داده شده است  $X_2 = PX_1$ .

بعد از سه سال توزیع جمعیت این چنین است  $X_3 = PX_2$ .



بعد از  $n$  سال داریم:  $X_n = PX_{n-1}$ .

پیش‌گویی‌های این مدل (تا چهار رقم اعشار) به صورت زیر هستند و به همین ترتیب

$$X_0 = \begin{bmatrix} 58 \\ 142 \end{bmatrix} \quad X_1 = \begin{bmatrix} 57,1 \\ 142,9 \end{bmatrix} \quad X_2 = \begin{bmatrix} 56,245 \\ 143,755 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 55,4327 \\ 144,5672 \end{bmatrix} \quad X_4 = \begin{bmatrix} 54,6611 \\ 145,3389 \end{bmatrix}$$

و غیره.

مشاهده می‌کنیم که چگونه جمعیت شهرها سالانه رو به کاهش است. در حالی که جمعیت افراد در حومه‌ها رو به افزایش است. به این مدل در بخش ۲-۶ رجوع می‌کنیم. بنابراین دنباله‌ای  $X_0, X_1, X_2, \dots$  را یافتیم که به سمت  $\begin{bmatrix} 40 \\ 160 \end{bmatrix}$  میل می‌کند. اگر شرایط تغییر نکنند، جمعیت شهر به تدریج به  $40$  میلیون می‌رسد و جمعیت حومه به  $160$  میلیون می‌رسد. به علاوه توجه کنید که دنباله  $X_1, X_2, \dots, X_n$  به طور مستقیم از  $X_0$  محاسبه می‌شود مانند زیر:

$$X_1 = PX_0 \quad X_2 = P^2 X_0 \quad X_3 = P^3 X_0 \quad \dots \quad X_n = P^n X_0$$

ماتریس  $P^n$  یک ماتریس تصادفی از  $X_0$  به سوی  $X_n$  در  $n$  مرحله است. این نتیجه می‌تواند کلی باشد که  $P^n$  در این حالت برای توزیع  $n$  مرحله بعد از هر توزیع داده شده و نیز پیش‌بینی شود.

$$X_{i+n} = P^n X_i$$

$P^n$  ماتریس تغییر وضعیت  $n$  مرحله‌ای نامیده می‌شود.  $(i, j)$  مؤلفه‌ای از  $P^n$  می‌باشد که احتمال به دست آمده از مرحله  $i$  به مرحله  $j$  در  $n$  مرحله است. به عنوان مثال می‌توانیم ۲ رقم اعشار در نظر بگیریم:

حومه شهر

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,04 \end{bmatrix} \quad \text{شهر}$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0,15 & 0,96 \end{bmatrix} \quad \text{حومه}$$

بنابراین، احتمال زندگی در شهر در سال  $2000$  و احتمال بودن در حومه‌ها ۴ سال بعد  $0,15$  می‌باشد. احتمالات در این مدل فقط به ثابت بودن تکرار افرادی که در شهر و حومه زندگی می‌کنند بستگی دارد. این مدل که احتمالاتش یکی پس از دیگری است مدلی رایج‌تر نسبت به نسخه تاریخی کامل آن است، و

زنجیره مارکوف نامیده می‌شود. یک تغییر و تحول که برای آمار سالانه رشد یا کاهش جمعیت است به طور تخمینی از توزیع آماری آینده توسعه می‌یابد. خواننده ساخت این عامل را در تمرینها اثبات می‌کند. این مفهوم می‌تواند مراحل نظریه مارکوف را بیشتر از دو بیانیه توسعه دهد. مثال زیر زنجیره مارکوف را در سه بیانیه توضیح می‌دهد.

**مثال ۳** زنجیره مارکوف ابزار مهمی برای دانشمندان در بسیاری از رشته‌ها مانند ژنتیک است. ژنتیک شاخه‌ای از زیست‌شناسی است که با وراثت سروکار دارد. ژنتیک مطالعه واحدهای ژنی است که تعیین‌کننده صفات موجودات زنده که از والدین به ارث رسیده است می‌باشد. وراثت این گونه صفات مثل جنسیت، قد، رنگ چشم، رنگ موی انسانها به وسیله ژنها مدیریت می‌شود. به دلیل این که بسیاری از بیماریها ارثی هستند. ژنتیک در پزشکی و نیز در علم کشاورزی اهمیت دارد. تولیدمثل کردن براساس ژنهای مهمی است که هم در گیاهان و هم در تولید مثل حیوانات وجود دارد صورت می‌گیرد. دانه گیاهان پیوندی به عنوان مهمترین کمک کننده به ژنها برای افزایش محصول (مواد) غذایی است. در مورد یک مدل ریاضی برای آنالیز کردن رفتار اختصاصی یک جفت از ژنها بحث می‌کنیم. مفاهیمی را که شامل یک جفت خوک گینه‌ای است را شرح می‌دهیم. رفتارهای که می‌بایست در خوکهای گینه‌ای مطالعه کنیم آنهایی‌اند که دارای خصوصیت مو بلندی و مو کوتاهی‌اند. طول مو متوسط یک جفت ژن که با علامت  $A$  و  $a$  مشخص می‌شود هدایت می‌شود. یک خوک گینه‌ای ممکن است دارای یکی از ترکیبات  $AA$ ،  $Aa$  و  $aa$  باشد هر کدام از این حالت‌ها به ژنوتایپ (معرف و نماینده یک جنس از موجودات دارای صفات مشابه ارثی) معروفند. انواع خوکهای گینه‌ای که حاوی ژن  $AA$  می‌باشند. از نظر ظاهری از انواع  $Aa$  قابل تمایز نیستند در صورتی که خوکهایی که از نوع  $aa$  هستند با موهای کوتاه می‌باشند ژن  $A$  گفته می‌شود که به ژن  $a$  غالب است یک حیوان را زمانی غالب گویند که دارای ژن  $AA$  باشد و هیبرید (دوتایی) به آنهایی گفته می‌شود که ژن  $Aa$  را دارند و آنهایی که قد  $aa$  دارند مغلوب‌اند یک جمعیت خوک گینه‌ای را در نظر بگیرید. پس با  $AA$ ،  $Aa$  و  $aa$  آمیزش می‌دهیم احتمال نتیجه زاد و ولد  $aa$ ،  $Aa$  یا  $AA$  در کدام از حالت‌ها چیست؟

آمیزش  $AA$  را با  $AA$  در نظر بگیرید، بنابراین باید از نوع  $AA$  باشد. بنابراین احتمالات  $AA$ ،  $Aa$ ،  $aa$  به ترتیب به صورت  $1$ ،  $0$ ،  $0$  خواهد بود. همه زاد و ولدها دارای موی بلند هستند. در مرحله بعد آمیزش  $Aa$  را با  $AA$  تصور کنید، که یک ژن از هر والد احتمال  $A$  را می‌گیرد،  $A$  (با گرفتن  $A$  از والد اول و هر  $A$  به نوبت از والد دوم).

$Aa$  و  $aa$  (با گرفتن  $a$  از والد اول و هر  $A$  به نوبت از والد دوم). بنابراین احتمالات  $AA$ ،  $Aa$ ،  $aa$  به ترتیب برابر با  $\frac{1}{4}$ ،  $\frac{1}{4}$  و  $0$  می‌باشند. دوباره، تمام زاد و ولدها با موهای بلند هستند. سرانجام آمیزش بین  $aa$  و

$AA$  فقط با یک احتمال وجود دارد که آن  $aA$  نام دارد. بنابراین احتمالات  $AA$ ،  $Aa$ ،  $Aa$  به ترتیب برابر با  $100^\circ$  و  $0^\circ$  می‌باشند. همه نتایج حاصل از این آزمایشها دارای موهای بلند هستند و این سری از آزمایشها زنجیره مارکوف که دارای ماتریس جابه‌جایی است می‌باشد و به شکل زیر است:

$$P = \begin{bmatrix} AA & Aa & aa \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

فرض کنید جمعیت اولیهٔ خوک‌های گینه‌ای از عددی مساوی با هر ژنوتایپ ساخته شده باشد. فرض کنید توزیع اولیه برابر با  $x_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$  باشد، کسر خوک‌های گینه‌ای از هر نوع اولیه را دوباره نمایش می‌دهیم. اجزا  $x_1$ ،  $x_2$ ،  $x_3$ ، ... به ترتیب کسرهایی از نسل‌های زیر را خواهند داد که از نوع  $AA$ ،  $Aa$  و  $aa$  می‌باشند. داریم:

$$x_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad x_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_3 = \begin{bmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{1}{8} \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_4 = \begin{bmatrix} \frac{15}{16} \\ \frac{1}{16} \\ 0 \end{bmatrix}$$

و غیره. مشاهده می‌کنید که نوع  $aa$  بعد از نسل اول ظاهر می‌شود و آن که نوع  $Aa$  کسر کوچکتر و کوچکتر از هر نسل بعدی می‌شود. این دنباله را در حقیقت به صورت یک ماتریس نمایش می‌دهیم:  $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ . ژنوتایپ  $AA$  در این مدل حالت جذبی نامیده می‌شود.

ملاحظه کردید که حالتی از زاد و ولد یک حیوان چیره دست را ارائه کردیم. خواننده در این قسمت مدلی مشابه با مدل قبلی با یک هیبرید در تمرین‌هایی که در زیر می‌آید را توصیف می‌کند. در این سری از آزمایشها بعضی از زاد و ولدها با موهای بلند و بعضی از آنها با موهای کوتاه می‌باشند.

## تمرینات

(۱) با ذکر دلیل ماتریس‌های تصادفی و غیرتصادفی را مشخص کنید.

$$\begin{array}{l} \text{(الف)} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{2}{4} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(ب)} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -1 \\ \frac{1}{3} & 12 \end{bmatrix} \\ \text{(ج)} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{7} \end{bmatrix} \quad \text{(د)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{(ه)} \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{8} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(و)} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{4} \\ \frac{5}{6} & \frac{2}{5} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

(۲) ثابت کنید که ضرب دو ماتریس  $2 \times 2$  تصادفی یک ماتریس تصادفی است.

(۳) یک ماتریس تصادفی که مجموع سطرهای آن یک است ماتریس تصادفی دوپل نامیده می‌شود.

مثالی برای ماتریس‌های تصادفی دوپل  $2 \times 2$ ،  $3 \times 3$  بیاورید آیا ضرب در ماتریس‌های تصادفی دوپل ماتریس تصادفی دوپل است؟

(۴) با استفاده از ماتریس تصادفی مثال ۱ در این بخش سئوالهای زیر را پاسخ دهید.

(الف) احتمال این که سطح مورد استفاده برای صنعت در سال ۱۹۵۲ مورد استفاده برای دفاتر در سال ۱۹۶۲ باشد چقدر است؟

(ب) احتمال این که سطح مورد استفاده برای پارکینگ در سال ۱۹۵۲ در ناحیه تراکم بالای محلی در سال ۱۹۶۲ باشد چیست؟

(ج) سطوح اشغال نشده در سال ۱۹۵۲ بیشترین احتمال را داراست و دارای چه نوع سطحی در سال ۱۹۶۲ است؟

(د) در دوره زمانی ۱۹۵۲-۱۹۶۲ بیشترین استفاده پایا از سطوح کدام است؟

(۵) در مدل مثال ۲ عبارتهای زیر را معین کنید.

الف) احتمال رفتن از شهر به حومه در ۲ سال؟

ب) احتمال رفتن از حومه به شهر در ۳ سال؟

(۶) مدلی از جمعیت بسازید که از نواحی مرکزی و غیرمرکزی آمریکا روانه می‌شوند. به طوری که جمعیت آنها در ۲۰۰۰، به ترتیب ۲۰۰ میلیون و ۶۰ میلیون داده شده است. احتمالات با ماتریس زیر داده شده است:

مرکزی	غیرمرکزی
[۰٫۹۹ ۰٫۰۲]	مرکزی
[۰٫۰۱ ۰٫۹۸]	غیرمرکزی

توزیعات جمعیتی از نواحی مرکزی و غیرمرکزی برای سالهای ۲۰۰۲ تا ۲۰۰۵ (برحسب میلیون تا چهار رقم اعشار) پیشنهاد کنید. اگر شخصی در ناحیه مرکزی در حال زندگی کردن در سال ۲۰۰۰ باشد احتمال این که شخص هنوز در ناحیه مرکزی در سال ۲۰۰۵ زندگی کند چقدر است؟

(۷) مدل از جمعیت که میان شهرها، حومه‌ها و نواحی غیرمرکزی آمریکا روانه می‌شوند را بسازید جمعیت آنها در سال ۲۰۰۰، به ترتیب ۵۸ میلیون، ۱۴۲ میلیون و ۶۰ میلیون است. ماتریس تصادفی احتمالات این مهاجرتها به صورت زیر است:

(به)	غیرمرکز	حومه	شهر
۰٫۹۶	۰٫۰۱	۰٫۰۱۵	شهر
۰٫۰۳	۰٫۹۸	۰٫۰۰۵	حومه
۰٫۰۱	۰٫۰۱	۰٫۹۸	غیرمرکزی

این مدل مناسب‌تر از مدل قبل در تمرین قبلی است که جمعیت مرکزی نیز داده شده بود. و هم‌چنین این مدل کاملتر از مثال ۲ در این بخش است که برای هر جمعیت خارج از شهر و حومه کاربرد دارد. جمعیت شهر، حومه و نواحی غیرمرکزی در سال ۲۰۰۱ و ۲۰۰۲ را پیشگویی کنید. اگر شخص در سال ۲۰۰۰ در شهر زندگی کند احتمال این که این شخص در سال ۲۰۰۲ در نواحی غیرمرکزی زندگی کند چقدر است؟

۸) در دوره زمانی ۱۹۹۵ تا ۲۰۰۰ کل جمعیت آمریکا یک درصد در سال افزایش می‌یافت. فرض کنید جمعیت سالانه در طول ۱ درصد به سرعت افزایش یابد. عاملی از مدل مثال ۲ بسازید و جمعیت شهر و حومه را در سال ۲۰۰۵ پیشگویی کنید.

۹) فرض کنید جمعیت شهرها در آمریکا با توجه به تولدها، مرگها و مهاجرتها ۱٫۲ درصد در دوره زمانی ۲۰۰۰ تا ۲۰۰۵ افزایش یابد و جمعیت حومه‌ها تا ۸ درصد که ناشی از این عاملهاست افزایش یابد. این افزایشها را در مدل مثال ۲ در نظر بگیرید و نیز جمعیت را برای ۲۰۰۵ پیشگویی کنید.

۱۰) مدل حرکت جمعیت بین شهرها و حومه‌های مثال ۲ در همین بخش را ملاحظه کنید. توزیع‌های جمعیت برای سال ۱۹۹۵ تا ۱۹۹۹ و از قبل برای سال ۲۰۰۰ تعیین کنید. آیا زنجیره از سال ۲۰۰۰ به زنجیره گذشته مارکوف می‌رود؟ خصوصیت‌های ماتریسی که از یک توزیع به توزیع گذشته می‌باشد چیست؟

۱۱) ماتریس تصادفی زیر که احتمالات گذار شغلی می‌باشد داده شده است:

نسل اولیه

دستی کارمند دفتری

نسل بعد کارمند دفتری ۰٫۲ ۱

دستی ۰٫۸ ۰

الف) اگر پدر کارمند دستی باشد احتمال این که پسر کارمند دفتری باشد چقدر است؟

ب) اگر ۱۰٫۰۰۰ طبقه کارمند دفتری و ۲۰٫۰۰۰ طبقه کارمند دستی وجود داشته باشند، توزیع احتمال نسل بعد چقدر خواهد بود.

۱۲) ماتریس زیر احتمالات گذار شغلی را نشان می‌دهد.

کشاورزی غیرکشاورزی

(نسل بعد) غیرکشاورزی ۰٫۴ ۱

کشاورزی ۰٫۶ ۰

- الف) اگر پدر کشاورز باشد احتمال این که پسر کشاورز باشد چقدر است؟  
 ب) اگر ۱۰,۰۰۰ طبقه غیرکشاورز و ۱۰۰۰ طبقه کشاورز از یک زمان معین وجود داشته باشد توزیع نسل بعد چقدر خواهد بود؟ چهار نسل بعد چطور؟  
 ج) اگر پدر کشاورز باشد احتمال این که نوه کشاورز باشد چقدر است؟
- ۱۳) یک بازار خرید ماشین در یک منطقه معین وجود دارد که خانواده‌ای به طور متوسط هر ۳ سال یک بار یک ماشین جدید از این بازار خریداری می‌کند الگوهای خرید به شکل ماتریس زیر است:

کوچک    بزرگ

کوچک    ۴۰٪    ۸۰٪

$P =$

بزرگ    ۶۰٪    ۲۰٪

مؤلفه‌های  $P$  مانند زیر تعیین می‌شوند:

ستون اول نمایانگر ماشینهای کوچک رایج است. ۸۰٪ قابل جایگزین کردن با ماشینهای کوچک است. ۲۰٪ با ماشین بزرگ، ستون دوم دلالت بر این نکته دارد که ۴۰٪ از ماشینهای بزرگ رایج است، جایگزین با ماشینهای کوچک خواهند شد. در حالی که ۶۰٪ قابل جایگزین شدن با ماشینهای بزرگ است. درایه‌های  $P$  به عنوان ماتریس تصادفی که در تعریف زنجیره مارکوف آمده است را بنویسد.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{80}{100} & \frac{40}{100} \\ \frac{20}{100} & \frac{60}{100} \end{bmatrix}$$

اگر ۴۰,۰۰۰ ماشین کوچک و ۵۰,۰۰۰ ماشین بزرگ در منطقه وجود داشته باشد پیش‌بینی شما در مورد توزیع ۱۲ سال دیگر چیست؟

۱۴) نتیجه‌ای از تجزیه و تحلیل گرایشات رای دادن در یک منطقه معین الگوهای موفقیت‌آمیز نسلهاست که با ماتریس  $P$  در زیر توصیف می‌شود.

مستقل جمهوری خواه دموکرات

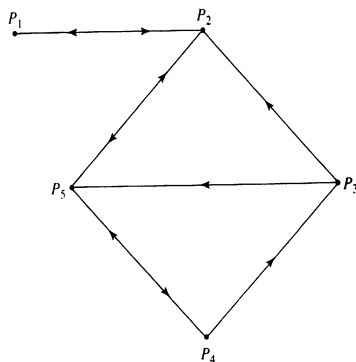
$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{دموکرات} & \text{جمهوری خواه} & \text{مستقل} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{دموکرات} & \text{جمهوری خواه} & \text{مستقل} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 80\% & 20\% & 60\% \\ 15\% & 70\% & 30\% \\ 5\% & 10\% & 10\% \end{bmatrix} \end{matrix}$$

در میان دموکرات‌های یک نسل  $80\%$  از نسل بعد نیز دموکرات هستند.  $50\%$  جمهوریخواه،  $50\%$  خودمختار هستند و به همین ترتیب  $P$  را به عنوان یک ماتریس تصادفی بیان می‌کنیم که الگوهای رای دادن مدل زنجیره‌ای مارکوف است. اگر  $2/5$  میلیون دموکرات ثبت نام شده،  $1/5$  میلیون جمهوری خواه ثبت نام شده و  $2/5$  خودمختار ثبت شده در یک زمان معین وجود داشته باشند. توزیع احتمالی نسل آینده چیست؟

## ۱۵-۲ یک مدل ارتباطی و ارتباطات گروهی در جامعه

بسیاری از شاخه‌های علوم فیزیک، علوم اجتماعی و تجارت از نظریه گراف برای تجزیه و تحلیل ارتباطات استفاده می‌کنند. به خواننده، این قسمت مهم از ریاضیات را که در جبر خطی از آن استفاده می‌شود با یک مثال از رشته ارتباطات، معرفی می‌کنیم.

یک شبکه ارتباطی که از ۵ قسمت تشکیل شده است و با  $P_1, \dots, P_5$  نام‌گذاری شده است را در نظر بگیرید. خطوطی که ایستگاه‌ها را به هم متصل می‌کند به صورت ارتباطات مستقیم می‌باشد و فلشها جهت این ارتباطات را نشان می‌دهند. برای مثال، ایستگاه  $P_1$  و  $P_2$  دو راه ارتباطی مستقیم دارند.



شکل ۲-۴

ایستگاه  $P_4$  می‌تواند به  $P_1$  پیام بفرستد از طریق ایستگاه‌های  $P_2$  و  $P_3$  یا به وسیله ایستگاه‌های  $P_5$  و  $P_2$ . این شبکه ارتباطی یک مثال از یک دیگرگراف می‌باشد.

**تعریف ۱-۱۵-۲:** یک دیگرگراف مجموعه‌ای محدود از رأس‌های  $P_1, P_2, \dots, P_n$  می‌باشد که توسط کمان‌های مستقیم زوج‌هایی از رأس‌های مشخصی را به هم متصل می‌کند. مسیر بین رأسها حالتی



از کمان‌هاست که به این مسیرها اجازه می‌دهد از یک رأس به رأس دیگر حرکت کند. طول این مسیر برابر با تعداد کمانها می‌باشد. مسیری به طول  $n, n$  مسیر نامیده می‌شود.

در شبکه ارتباطی بالا ۵ رأس وجود دارد به نام‌های  $P_1, \dots, P_5$ . فرض کنیم علاقه‌مندیم تا پیامی را از  $P_1$  به  $P_2$  ارسال کنیم. از شکل می‌بینیم که مسیرهای مختلفی برای انتخاب وجود دارد. مسیر  $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow P_4 \rightarrow P_5 \rightarrow P_2 \rightarrow P_1$  (یک مسیر با طول ۲) وقتی که مسیر  $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow P_4 \rightarrow P_5 \rightarrow P_2 \rightarrow P_1$  (یک مسیر با طول ۳) است. (یک مسیر با طول ۵) که از رأس ۳ دو بار استفاده شده است. این چنین مسیرها جالب خواهند بود اگر برای مثال  $P_2$  بخواهد با  $P_5$  و  $P_4$  قبل از فرستادن پیام به  $P_1$  هم‌فکر می‌کند. ما در این بخش کوتاه‌ترین مسیر را برای ارتباط برقرار کردن و فرستادن پیام از یک ایستگاه به ایستگاه دیگر انتخاب کنیم.

شبکه‌های ارتباطی می‌توانند بسیار گسترده باشند و از ایستگاه‌های زیادی تشکیل شده باشند. این کار غیرعملی است برای این که اطلاعاتی را در مورد یک شبکه بزرگ از نمودارها به دست آوریم. همانند آنچه که در بالا انجام داده‌ایم. در این نظریه ریاضی که در حال حاضر ارائه می‌دهیم استفاده از نظریه گراف، می‌تواند اطلاعاتی را در مورد شبکه‌های بزرگ به ما بدهد. این ریاضیات به وسیله کامپیوتر می‌تواند اجرا شود. یک دیگرگراف می‌تواند توسط ماتریس  $A$  تعریف شود که به آن ماتریس مجاورتی گویند.

این ماتریس از ۰ و ۱ تشکیل شده و به صورت ذیل تعریف می‌شود.

**۲-۱۵-۲ تعریف:** یک دیگرگراف را با رأس‌های  $P_1, \dots, P_n$  در نظر بگیرید ماتریس مجاورتی  $A$

به صورت زیر است:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر یک کمان از حلقه } P_i \text{ به } P_j \text{ داشته باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ماتریس مجاورتی از شبکه ارتباطی به این صورت می‌باشد:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

برای مثال  $a_{12} = 1$  چون کمانی از  $P_1$  به  $P_2$  وجود دارد  $a_{13} = 0$  چون کمانی از  $P_1$  به  $P_3$  وجود ندارد. شبکه کاملاً توسط ماتریس مجاورت توصیف می‌شود. این ماتریس یک تصویر ریاضی از شبکه است که

به کامپیوتر داده می‌شود. می‌توانیم طرح خلاصه شبکه را که در شکل ۲-۴ داده شده است، مشاهده کنیم و در مورد بهترین فرستادن پیام از  $P_2$  به  $P_1$  تصمیم‌گیری نمائیم. چطور می‌توانیم این اطلاعات را از ماتریس مجاورت استخراج کنیم؟  
قضیه زیر از نظریه گراف اطلاعاتی در مورد مسیرهای داخل دیگراف به ما می‌دهد.

**۳-۱۵-۲ قضیه:** اگر  $A$  یک ماتریس مجاورت از یک دیگراف باشد. فرض کنید  $(a_{ij})^m$  درایه‌ای در سطر  $i$  و ستون  $j$  از ماتریس  $A^m$  باشد.

$$P_j \text{ به } P_i \text{ تعداد } m = (a_{ij})^m \text{ مسیر از } P_i \text{ به } P_j$$

اثبات: یک دیگراف با  $n$  رأس را در نظر بگیرید.  $a_{i1}$  تعداد کمانها از  $P_i$  تا  $P_1$  و  $a_{ij}$  تعداد کمانها از  $P_1$  تا  $P_j$  است. بنابراین  $a_{1j}$ ،  $a_{i1}$  تعداد دو مسیر عبور کرده از  $P_i$  تا  $P_j$  است. خواهیم دید که با جمع همه مسیرهای میانی، تعداد کل ۲-مسیرهای از  $P_i$  به  $P_j$  عبارت است از:

$$a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + \dots + a_{in}a_{nj}$$

این درایه موجود در سطر  $i$  و ستون  $j$  از ماتریس  $A^2$  است. بنابراین  $(a_{ij})^{(2)}$  تعداد ۲-مسیرهای از  $P_i$  به  $P_j$  است.

اکنون به سه مسیر توجه می‌کنیم. یک ۳-مسیر همانند یک ۲-مسیر با یک کمان تفسیر می‌کنیم. تعداد ۲-مسیرهای از  $P_i$  به  $P_1$  با یک کمان از  $P_1$  به  $P_j$  برابر است با  $(a_{ij})^{(2)}$ . با جمع همه مسیرهای میانی خواهیم که کل تعداد ۳-مسیرهای از  $P_i$  به  $P_j$  به صورت زیر است:

$$(a_{i1}^{(2)})a_{1j} + (a_{i2}^{(2)})a_{2j} + \dots + (a_{in}^{(2)})a_{nj}$$

این درایه در سطر  $i$ ، ستون  $j$  از ماتریس حاصلضرب  $A^2A$  است که از  $A^3$  می‌باشد، بنابراین  $(a_{ij})^{(3)}$  تعداد ۳-مسیرها از  $P_i$  به  $P_j$  می‌باشد.

با ادامه این روند، می‌توانیم به یک ۴-مسیر به عنوان یک ۳-مسیر با یک کمال برسیم و به همین ترتیب. و در نهایت به نتیجه  $(a_{ij})^{(m)}$  که تعداد  $m$ -مسیرهای از  $P_i$  به  $P_j$  است می‌رسیم. اکنون کاربرد این قضیه را در شبکه ارتباطی خودمان نشان می‌دهیم. توان‌های زنجیروار از ماتریس مجاورت در زیر نشان داده شده

است:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & A^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
 A^3 &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} & A^4 &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} & A^5 &= \dots
 \end{aligned}$$

اجازه دهید به ما که از این ماتریس‌ها برای بحث بر روی مسیرهایی از  $P_4$  تا  $P_1$  استفاده کنیم. ارتباط مستقیم وجود ندارد.  $A$ ،  $a_{41} = 0$  را می‌دهد. ۲- مسیرهای از  $P_4$  به  $P_1$  وجود ندارد.  $A^2$ ،  $a_{41}^{(2)} = 0$  را می‌دهد. دو مسیر متمایز ۳- مسیرها از  $P_4$  به  $P_1$  وجود دارد.  $A^3$ ،  $a_{41}^{(3)} = 2$  را می‌دهد. کوتاهترین مسیرها از  $P_4$  به  $P_1$  وجود دارند. اگر شکل ۲-۴ را بررسی کنیم به این مهم دست می‌یابیم. این دو مسیر با طول ۳ (۳- مسیرهای) عبارتند از:

$$P_4 \longrightarrow P_3 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1, \quad P_4 \longrightarrow P_3 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1$$

به عنوان دومین مثال اجازه دهید به ما که طول کوتاهترین مسیر از  $P_3$  به  $P_1$  را تعیین کنیم. ارتباط مستقیم وجود ندارد.  $A$ ،  $a_{13} = 0$  را می‌دهد.

۲- مسیرهای از  $P_3$  به  $P_1$  وجود ندارد.  $A^2$ ،  $a_{13}^{(2)} = 0$  را می‌دهد.

۳- مسیرهای از  $P_3$  به  $P_1$  وجود ندارد.  $A^3$ ،  $a_{13}^{(3)} = 0$  را می‌دهد.

یک ۴- مسیر منفرد از  $P_3$  به  $P_1$  وجود دارد.  $A^4$ ،  $a_{13}^{(4)} = 1$  را می‌دهد.

این نتیجه تأیید می‌شود زمانی که دیگرگراف را امتحان می‌کنیم، سریعترین راه برای فرستادن پیام از  $P_3$  به  $P_1$  مسیری با طول ۴ (۴- مسیر) است.

$$P_3 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_0 \longrightarrow P_4 \longrightarrow P_1$$

این مدل طول‌های کوتاهترین مسیرها را از دیگرگراف می‌دهد و ایستگاه‌های میانی ساخته شده در آن مسیر را نمی‌دهد. ریاضی‌دانان هنوز موفق به استخراج کردن این اطلاعات از ماتریس مجاورت نشده‌اند. یک

الگوریتم برای یافتن کوتاهترین مسیرها برای دیگرگراف ویژه با استفاده از فرآیند تحقیق، با کامپیوتر داج دانشمندی به نام **دیجک استرا** توسعه یافته است. بحث زیر کاربردی است، جایی که طول‌های کوتاهترین مسیرها نه مسیرهای حقیقی بلکه مسیرهایی را که مهم هستند، منجر می‌شود.

## فاصله در دیگرگراف

فاصله از رأس یک دیگرگراف تا رأس دیگری طول کوتاهترین مسیر از آن رأس تا رأس دیگر است. اگر مسیری از یک رأس به رأس دیگر وجود نداشت می‌گوییم آن فاصله تعریف نشده است. فاصله‌های میان رأس‌های متفاوت از یک دیگرگراف، درایه‌های ماتریس را تشکیل می‌دهد. ماتریس فاصله  $D$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعداد کمانها در کوتاهترین مسیر از رأس  $P_i$  تا رأس  $P_j$

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } i = j \\ x & \text{اگر مسیری از } P_i \text{ به } P_j \text{ موجود نباشد} \end{cases}$$

اگر دیگرگراف کوچک باشد ماتریس فاصله  $D$  می‌تواند با مشاهده ساخته شود از توانهای ماتریس مجاورت برای ساخت ماتریس فاصله از یک دیگرگراف بزرگ، استفاده می‌شود. ماتریس فاصله شبکه ارتباطی بالا چنین است:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

توجه کنید که نیازی نیست فاصله از  $P_i$  تا  $P_j$  با فاصله از  $P_i$  به  $P_j$  در دیگرگراف برابر باشد که این نکته بر این دلالت دارد که ماتریس فاصله در گراف نیازی ندارد که متقارن باشد.

اکنون نشان می‌دهیم که چگونه یک دیگرگراف و یک ماتریس فاصله برای تحلیل ارتباطات گروهی در جامعه‌شناسی استفاده می‌شوند.

## ارتباطات گروهی در جامعه‌شناسی

یک گروه ۵ نفره مردم را در نظر بگیرید. یک جامعه‌شناس علاقمند به شناخت و تسلط بر یکی از این ۵ نفر که پرتأثیرترین فرد نسبت به بقیه است را دارد. از گروه خواسته می‌شود که پرسشنامه زیر را تکمیل کنند.

- اسم

- شخصی که به نظرش بیشترین ارزش را می‌دهید.

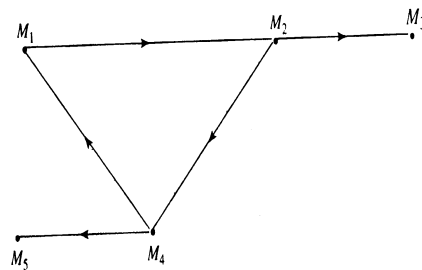
سپس این پاسخها جدول بندی می‌شوند. اعضای گروه را با  $M_1, M_2, \dots, M_5$  برچسب‌گذاری می‌کنیم. فرض کنید که نتایج به صورت زیر در جدول ۱-۲ مشخص شده باشد:

شخصی که نظرش با ارزش است عضو گروه

$M_1$	$M_4$
$M_2$	$M_1$
$M_3$	$M_2$
$M_4$	$M_2$
$M_5$	$M_4$

جدول ۱-۲

جامعه‌شناس فرضیه‌ای را می‌سازد که براساس آن شخصی که اعتقاد یا ایده‌اش بیشترین ارزش را در بین بقیه دارد، همان فردی است که بیشترین تأثیر را روی دیگر اعضا دارد. پس تأثیر (نفوذ) از ستون راست به ستون چپ در جدول بالا حرکت می‌کند. این نتایج را می‌توان با یک دیگرگراف نشان داد. اعضای گروه نشان دهنده رأسها، تأثیر مستقیم با یک کمان، جهت اثر، جهت کمان است. شکل ۲-۵ را نگاه کنید.



شکل ۲-۵

ماتریس فاصله این دیگرگراف را تشکیل دهید و همه درایه‌ها در هر سطر را با یکدیگر جمع می‌کند.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ x & x & 0 & x & x \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ x & x & x & x & 0 \end{bmatrix}$$

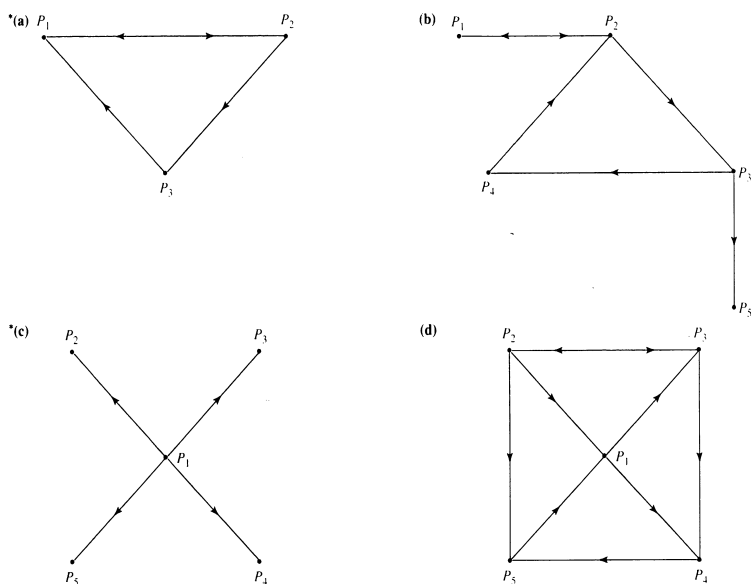
در این گراف کمانها با اثر مستقیم متناظرند و مسیرهای ۲، مسیرهای ۳ و غیره با اثر غیرمستقیم متناظرند. بنابراین کوچکترین فاصله از  $M_i$  به  $M_j$  بزرگترین اثری است که  $M_i$  روی  $M_j$  دارد و مجموع درایه‌ها در سطر  $i$  کل فاصله از  $M_i$  به رأس‌های دیگر را می‌دهد و این موضوع منجر به تفسیر زیر از سطرها می‌شود. کوچکترین مجموع سطر  $i$ ، بزرگترین تأثیر شخص  $M_i$  بر روی گروه است. می‌دانیم که جمع کوچکترین سطر برای سطر ۲، ۶ می‌باشد. بنابراین  $M_2$  پرتأثیرترین شخص در گروه است که از  $M_4$  و سپس از  $M_1$  پیروی می‌کند. خوانندگانی که علاقمند به یادگیری بیشتر نظریه گرافها هستند به کتاب زیر رجوع کنند: معرفی نظریه گراف تألیف رابین جی ویلسون جان ویلی و پسران در سال ۱۹۸۷ و ساختارهای ریاضی گسسته تألیف فرد اس رابرتز پرنیتک هال در سال ۱۹۷۶ است.

کتاب سابق (اولی) معرف زیبایی از ریاضیات نظریه گراف است، کتاب اخیر مجموعه باشکوهی از کاربردهاست «پیشگویی شیمی توسط توپولوژی» اثر دنیس ژورئ دانشمند آمریکایی سپتامبر ۴۰ در سال ۱۹۸۶ است که شامل جذب میزان روش‌های نظریه گراف برای پیشگویی خاصیت‌های شیمیایی مولکول‌هایی که هنوز با هم ترکیب نشده‌اند می‌باشد.

## تمرینات

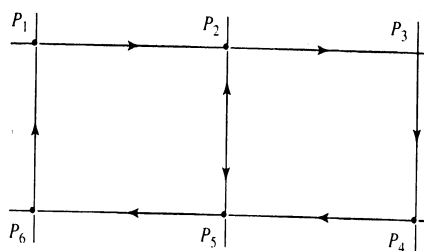
- ۱) ماتریس مجاورت و ماتریس فاصله هر کدام از دیگرگراف‌ها در شکل ۲-۶ را معین کنید.
- ۲) قطر یک دیگرگراف بزرگترین فاصله میان رأس‌هاست. قطرهای دیگرگراف‌های شکل ۲-۶ را تعیین کنید.
- ۳) طرح دیگرگراف‌هایی که دارای ماتریس‌های مجاورت زیر هستند را رسم کنید.

$$\begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(ب)} \\
 \\
 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(د)} \\
 \\
 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(الف)} \\
 \\
 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(ج)} \\
 \\
 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(ه)}
 \end{array}$$



شکل ۶-۲

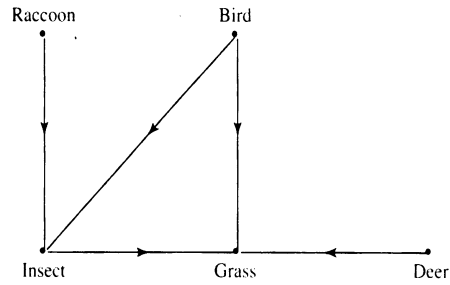
۴) شبکه داده شده در شکل ۷-۲ سیستمی از خیابانها را در منطقه پایین شهر نشان می‌دهد بسیاری از خیابانها یک طرفه هستند. شبکه را به عنوان یک دیگرگراف تفسیر کنید. ماتریس مجاورت و ماتریس فاصله را بیابید.



شکل ۷-۲

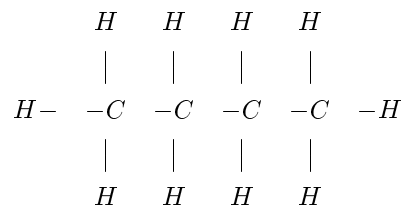
۵) از نظریه گراف در مدل‌های ریاضی برای بهتر فهمیدن تعادل دقیق و ظریف طبیعت استفاده می‌شود. شکل ۸-۲ دیگرگرافی را ارائه می‌دهد که شبکه غذایی یک جامعه محیط زیست را در یک جنگل ملی آکالا نشان می‌دهد (در فلوریدای مرکزی) ماتریس مجاورت را تعیین کنید.

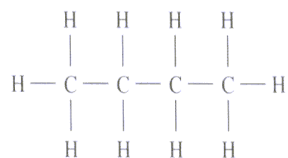




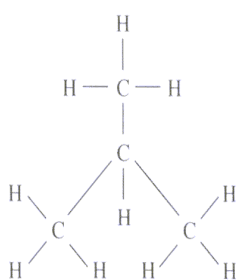
شکل ۸-۲

۶) وقتی که در یک شبکه تمامی کمانها دو طرفه باشند از پلکان یا فلش استفاده نمی‌شود زیرا که آنها غیرضروری می‌باشند. پس از اصطلاح گراف استفاده می‌شود. دانشمندان از گرافها برای پیش‌بینی خواص شیمیایی مولکولها استفاده می‌کنند. گرافها در شکل ۹-۲ ساختارهای مولکولی بوتان ایزوبوتان که هر دو ساختار شیمیایی مشابهی دارند، را نشان می‌دهد. ماتریس‌های مجاورت این گرافها را تعیین کنید. توجه کنید که ماتریس‌ها متقارن می‌باشند. آیا انتظار دارید که ماتریس مجاورت هر گراف متقارن باشد؟





Butane



Isobutane

شکل ۹-۲

۷) ماتریس زیر یک شبکه ارتباطی را تعریف می‌کند. طرح شبکه را رسم کنید. کوتاهترین مسیر برای فرستادن یک پیام الف (به  $P_5$  به  $P_2$  ب)  $P_5$  به  $P_4$  را معین کنید. ماتریس فاصله دیگراف را بیابید.

$$\begin{bmatrix}
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

۸) در هر کدام از تمرین‌های زیر، ماتریس  $A$  ماتریس مجاورت برای شبکه ارتباطی است، طرح شبکه را رسم کنید. توانهای ماتریس مجاورت داده شده است. مؤلفه‌هایی که پررنگ‌تر از بقیه است را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{د})$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ه})$$

۹) فرض کنید  $A$  یک ماتریس مجاورت از دیگراف باشد. در مورد دیگراف در هر یک از حالت‌های زیر

چه می‌دانید؟

الف) سومین سطر از  $A$  همگی صفرند.

ب) چهارمین سطر از  $A$  همگی صفرند.

ج) مجموع مؤلفه‌ها در سطر پنجم از  $A$ ، ۳ است.

د) مجموع مؤلفه‌ها در ستون دوم از  $A$ ، ۲ است.

ه) سطر دوم از  $A^3$  همگی صفر است.

(و) ستون سوم از  $A^2$  همگی صفرند.

(۱۰) فرض کنید دیگرافهایی با ماتریس‌های مجاورت دارای مشخصات زیر باشند چه چیزی می‌توانید در

مورد هر یک از دیگرافهای زیر بگویید؟

(الف) سطر دوم همگی صفرند.

(ب) ستون سوم همگی صفرند.

(ج) سطر چهارم همگی یک دارند به جز صفر در موقعیت قطری

(د) ستون پنجم همگی دارای یک هستند به جز صفر در موقعیت قطری

(ه) مجموع درایه‌ها در سطر سوم، ۵ است.

(و) مجموع درایه‌ها در ستون دوم، ۴ است.

(ح) تعداد یکها در ماتریس، ۷ است.

(ط) مجموع درایه‌ها در سطر ۲ از توان چهارم برابر ۳ است.

(ی) مجموع درایه‌ها در ستون ۳ از توان پنجم برابر ۴ است.

(ک) سطر چهارم مربع ماتریس همگی صفر است.

(ل) ستون سوم توان چهارم همگی صفر است.

(۱۱) فرض کنید  $A$  ماتریس مجاورت یک دیگراف باشد. شکل دیگراف اگر  $A^2$  مانند زیر باشد را رسم

کنید. از دیگراف برای پیدا کردن  $A^3$  استفاده نمایید.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(توجه: تمام مسیرهای به طول ۲ (۲-مسیرهای) در دیگراف دده شده است.)

(۱۲) فرض کنید  $A$  ماتریس مجاورت یک دیگراف باشد. تمام حالت‌های ممکن دیگراف توصیف شده به

$$\text{وسيلة } A \text{ را اگر } A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ باشد، رسم کنید.}$$

۱۳) جداول زیر اطلاعات برگرفته از پرسشنامه‌های داده شده به گروه‌های مردم را نمایش می‌دهد. در هر مورد دیگرافی بسازید که ساختار رهبری در گروه را توضیح دهد. مؤلفه‌ها را براساس تأثیرشان روی گروه دسته‌بندی کنید.

شخصی که نظرش با ارزش است عضو گروه

$M_1$	$M_4$	
$M_2$	$M_1$	(الف)
$M_3$	$M_2$	
$M_4$	$M_2$	

شخصی که نظرش با ارزش است عضو گروه

$M_1$	$M_5$	
$M_2$	$M_1$	(ب)
$M_3$	$M_2$	
$M_4$	$M_3$	
$M_5$	$M_4$	

شخصی که نظرش با ارزش است عضو گروه

$M_1$	$M_4$	
$M_2$	$M_4, M_5$	(ج)
$M_3$	$M_2$	
$M_4$	$M_3$	
$M_5$	$M_1$	

شخصی که نظرش با ارزش است عضو گروه

$M_1$	$M_5$	
$M_2$	$M_1$	(د)
$M_3$	$M_1, M_4$	
$M_4$	$M_5$	
$M_5$	$M_3$	

۱۴) ماتریس زیر رابطه دوستی بین گروه‌های مردم را توصیف می‌کند  $a_{ij} = 1$  اگر  $M_i$  دوست  $M_j$  باشد در غیر این صورت  $a_{ij} = 0$  است. نمودارهایی بکشید که این روابط را توضیح دهید. توجه کنید که تمام ماتریس‌ها متقارن هستند. اهمیت این تقارن چیست؟ آیا ارتباط توصیف شده را می‌توان با یک ماتریس نامتقارن توصیف کرد؟

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

۱۵) ساختار در دیگرگراف که مورد علاقه دانشمندان علوم اجتماعی است یک دسته است. یک دسته بزرگترین زیرمجموعه دیگرگراف است که از ۳ رأس یا بیشتر، که هر جفت از آنها به طور متقابل ارتباط دارند، تشکیل شده است. کاربرد این مفهوم برای ارتباطات دوستی سریع است. سه فرد یا بیشتر یک دسته را تشکیل می‌دهند اگر همگی با هم دوست باشند و اگر هیچ کدامشان دوستی متقابلی با هر فرد بیرون از دسته نداشته باشند. مثالی از یک دیگرگراف که شامل یک گروه است ارائه دهید.

۱۶) ثابت کنید که ماتریس مجاورت از یک دیگرگراف الزاماً مربعی است؟

۱۷) فرض کنید  $A$  ماتریس مجاورت از یک دیگرگراف باشد. ماتریس  $A^t$  ماتریس مربعی است که شامل صفرها و یکها است. و آن هم چنین ماتریس مجاورت از یک دیگرگراف است. چگونه دیگرگراف  $A$  و  $A^t$  به یکدیگر مرتبط‌اند.

۱۸) اگر ماتریس مجاورت یک دیگرگراف متقارن باشد. این مطلب چه چیزی در مورد دیگرگراف در اختیار شما می‌گذارد؟

۱۹) ثابت کنید که کوتاهترین مسیر از رأس دیگرگراف به رأس دیگر نمی‌تواند شامل رأسهای تکراری باشد.

۲۰) در یک گراف با  $n$  رأس، بزرگترین فاصله ممکن بین دو رأس چیست؟

۲۱) فرض کنید که  $A$  ماتریس مجاورت از یک دیگرگراف ارتباطی باشد. فرض کنید  $C = AA^t$  نشان دهید تعداد ایستگاه‌هایی که می‌توانند یک پیام مستقیم از هر دو ایستگاه  $i$  و  $j$  دریافت کنند  $c_{ij}$ .

(۲۲) ماتریس دستیابی  $R$  از دیگرگراف به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r_{ij} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر یک مسیر از رأس } p_i \text{ به } p_j \text{ وجود داشته باشد} \\ ۱ & \text{اگر } i = j \\ ۰ & \text{اگر مسیری از } p_i \text{ به } p_j \text{ موجود نباشد} \end{cases}$$

ماتریس‌های دستیابی دیگرگراف‌های تمرین ۸ را معین کنید.

(۲۳) ماتریس‌های دستیابی از یک دیگرگراف می‌تواند با استفاده از اطلاعات ماتریس مجاورت و توانهای متفاوت آن ساخته شود. چه تعداد توانهای ماتریس مجاورت از یک دیگرگراف دارای  $n$  رأس بایستی محاسبه شوند تا تمام اطلاعات مورد نیاز را به دست آورند.

(۲۴) الف) اگر ماتریس مجاورت یک دیگرگراف متقارن باشد. آیا این بدان معناست که ماتریس دستیابی نیز متقارن است.

ب) اگر ماتریس دستیابی یک دیگرگراف متقارن باشد آیا بدان معناست که ماتریس مجاورت نیز متقارن است.

(۲۵) فرض کنید  $R$  یک ماتریس دستیابی از یک دیگرگراف ارتباطی باشد فرض کنید  $r(i)$  مجموع درایه‌های سطر  $i$  از  $R$  و  $c(j)$  مجموع درایه‌های ستون  $j$  از  $R$  باشد چه اطلاعاتی در مورد  $r(i)$  و  $c(j)$  می‌دهید.

(۲۶) فرض کنید که  $R$  یک ماتریس دستیابی از یک دیگرگراف باشد چه اطلاعاتی در مورد دیگرگراف درایه‌ها موجود در سطر  $i$  و ستون  $j$  از  $R^2$  می‌توانید ارائه دهید.

(۲۷) فرض کنید که  $R$  ماتریس دستیابی دیگرگراف باشد چه اطلاعاتی درباره دیگرگراف  $R^t$  می‌دهید.

(۲۸) ماتریس مجاورت  $A$  و ماتریس دستیابی  $R$  از یک دیگرگراف هر دو هم از درایه‌های صفر و هم از درایه‌های یک ساخته شده‌اند.

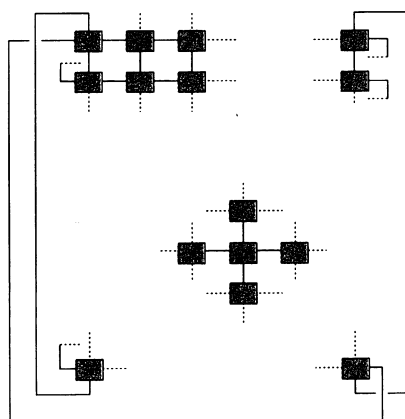
الف) آیا  $A$  و  $R$  عدد یکسان یک‌ها را دارا می‌باشند.

ب) آیا  $A$  می‌تواند یک‌های بیشتری نسبت به  $R$  داشته باشد.

ج) آیا  $A$  می‌تواند یک‌های کمتری نسبت به  $R$  داشته باشد.

(۲۹) ابرکامپیوتر IhhIAC IV در مرکز تحقیقات افرناسا NASA، ۶۴ پردازنده، تحت کنترل واحد دارد. پردازنده‌ها با یکدیگر در یک شبکه‌اند. اگر پردازنده‌ها را به عنوان ماتریسی با درایه‌های  $۸ \times ۸$  تصویر

کنید سپس هر پردازنده در موقعیت  $(i, j)$  می‌تواند با همسایگان ضروری خود پردازنده‌ها در موقعیت  $(i, j - 1)$  و  $(i - 1, j)$  و  $(i, j + 1)$  و  $(i + 1, j)$  ارتباط داشته باشد. پردازنده‌ها در سطر اول با آنهایی که در سطر آخر در مدل گردش پنهان هستند ارتباط برقرار می‌کنند آنهایی که در ستون اول هستند با آنهایی که در ستون آخر مدل گردش پنهان هستند ارتباط دارند. شکل ۱۰-۲ را ببینید. بیشترین فاصله بین پردازنده‌ها در این شبکه را مشخص کنید.



شکل ۱۰-۲

## تمرین‌های دوره‌ای فصل دوم

۱) فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$  و  $D = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ .

عبارت‌های زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف)  $2AB$  (ب)  $AB + C$  (ج)  $BA + AB$

د)  $AD - 3D$  (ه)  $AC + BC$  (و)  $2DA + B$

۲) فرض کنید  $A$  ماتریس  $2 \times 2$ ،  $B$  یک ماتریس  $2 \times 2$ ،  $C$  یک ماتریس  $3 \times 2$ ،  $D$  یک ماتریس

$3 \times 2$  باشد و در صورت وجود اندازه نتایج ماتریس‌های حاصل را بیابید.

الف)  $AB$  (ب)  $(A^2)C$

ج)  $B^2 + 3(CD)$  (د)  $DA - 2(DB)$

ه)  $C - 3D$  (و)  $3(BA)(CD) + (4A)(BC)D$



(۳) اگر  $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \\ ۵ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$  و  $C = \begin{bmatrix} ۲ & -۴ & ۵ \\ ۷ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$  درایه‌های عبارت  $D = ۲AB - ۳C$  بدون محاسبه کل ماتریس معین کنید.

الف)  $d_{۱۲}$  ب)  $d_{۲۳}$

(۴) ضرب  $AB$  از ماتریس‌های  $۲ \times ۲$  زیر را با استفاده از الگوریتم استراسن مشخص کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & -۴ \end{bmatrix}$$

(۵) اگر  $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$  و  $C = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$  عبارتهای زیر را محاسبه کنید.

الف)  $(A^t)^۲$  ب)  $A^t - B^۲$  ج)  $AB^۲ - ۲C^۲$  د)  $A^۲ - A + ۴I_۲$

(۶) اگر  $A$  و  $B$  ماتریس‌هایی با اندازه‌های داده شده باشند، تعداد ضرب‌های اسکالر لازم برای محاسبه

$AB$  را معین کنید.

الف)  $B_{۲۶}$  و  $A_{۲۲}$  ب)  $B_{۲ \times ۳}$  و  $A_{۴ \times ۲}$

ج)  $B_{۷ \times ۲۵}$  و  $A_{۱ \times ۷}$  د)  $B_{۵ \times ۱۱}$  و  $A_{۹ \times ۵}$

(۷) معکوس هر یک از ماتریس‌های زیر را در صورت وجود با استفاده از روش حذفی گاوس-جردن

معین کنید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۵ & ۳ \\ ۱ & ۰ & ۸ \end{bmatrix} \text{ (ج) } \begin{bmatrix} ۰ & ۳ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۴ & ۶ \end{bmatrix} \text{ (ب) } \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} \text{ (الف)}$$

(۸) با استفاده از روش معکوس ماتریس دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$x_1 + ۳x_2 - ۲x_3 = ۱$$

$$۲x_1 + ۵x_2 - ۳x_3 = ۵$$

$$-۳x_1 + ۲x_2 - ۴x_3 = ۷$$

(۹)  $A$  را بیابید در صورتی که  $۳A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۵ & -۶ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$  باشد.

(۱۰) خاصیت شرکت‌پذیری ضرب را بررسی کنید.

$$A(BC) = (AB)C$$

(۱۱) عبارت  $A(AB + A^2) - B(A^2 + AB) + 3ABA - 4AB^2$  را ساده کنید.

(۱۲) اگر  $n$  عدد صحیح نامنفی باشد و  $c$  اسکالر باشد عبارت  $(cA)^n = c^n A^n$  را ثابت کنید.

(۱۳) فرض کنید  $A$  یک ماتریس باشد به طوری که  $AA^t = 0$  نشان دهید که  $A = 0$ .

(۱۴) ماتریس  $A$  را نرمال گوئیم اگر  $AA^t = A^tA$ ، ثابت کنید که تمام ماتریس‌های متقارن نرمال هستند.

(۱۵) نشان دهید اگر  $A$  خودتوان باشد آنگاه  $A^t$  نیز خودتوان است.

(۱۶) نشان دهید اگر  $A$  پوچ‌توان باشد آنگاه  $A^t$  نیز با درجهٔ یکسان از پوچ‌توانی، پوچ‌توان است.

(۱۷) ثابت کنید که اگر  $A$  متقارن و معکوس‌پذیر باشد آنگاه  $A^{-1}$  نیز متقارن است.

(۱۸) ثابت کنید که یک ماتریس با سطری از صفرها یا ستونی از صفرها معکوس ندارد.

(۱۹)  $A + B$  و  $AB$  را برای ماتریس‌های زیر محاسبه کنید و نشان دهید که  $A$  هرمیتی است

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 - 3i \\ 4 + 3i & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 + i & 1 - 2i \\ 2 + 7i & -2 + i \end{bmatrix}$$

(۲۰) ثابت کنید که تمام ماتریس‌های متقارن حقیقی، هرمیتی هستند؟

(۲۱) ماتریس  $A$  که در زیر آمده محتویات سفال قبرهای مختلف را توصیف می‌کند. ترتیب زمانی ممکن

قبور و انواع سفالگری آنها را تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(۲۲) ماتریس تصادفی  $P$  که در زیر می‌آید، احتمالات ممکن برای خانواده‌های تحصیل کرده دانشگاهی

و تحصیل نکرده یک ناحیه معین که حداقل یک فرزند تحصیل کرده دانشگاهی دارند را می‌دهد.

با تحصیل کرده‌های دانشگاهی به این مهم دست می‌یابیم که حداقل یکی از والدین تحصیل کرده

دانشگاهی می‌باشند، همراه با در نظر گرفتن تحصیل نکرده دانشگاهی منظور این است که هیچ یک

از والدین تحصیل نکرده‌اند.

$$P = \begin{matrix} & \text{خانواده‌ها} & \\ & \begin{matrix} \text{تحصیل نکرده} & \text{تحصیل کرده} \end{matrix} & \\ \text{فرزند تحصیلات دانشگاهی} & \begin{matrix} ۰,۲۵ & ۰,۰۹ \end{matrix} & \end{matrix}$$

فرزند بدون تحصیلات دانشگاهی  $۰,۷۵$  و  $۰,۰۱$  اگر به طور عادی  $۳۰۰,۰۰۰$  خانواده تحصیل کرده و  $۷۵۰,۰۰۰$  خانواده تحصیل نکرده وجود داشته باشد توزیع پیش‌بینی شده برای این دو نسل چیست؟ احتمال این که یک زوج تحصیل نکرده باشد و یکی از نوه‌هایشان تحصیل کرده باشند چقدر است؟

(۲۳) فرض کنید  $A$  ماتریس مجاورت یک دیگراف باشد. در مورد هر یک از حالت‌های زیر چه چیزی می‌دانید.

- الف) تمام درایه‌های ستون چهارم  $A$  صفرند.
- ب) مجموع درایه‌های ستون سوم  $A$ ، ۲ است.
- ج) مجموع درایه‌ها در سطر دوم از  $A^2$  برابر ۴ است.
- د) ستون سوم  $A^2$  همگی صفر می‌باشند.
- ه) مؤلفه موجود در مکان  $(۴, ۴)$  از  $A^2$  برابر ۲ است.
- و) تعداد درایه‌های غیرصفر در  $A^4$  برابر ۳ است.

## هدف‌های رفتاری فصل سه

دانشجو باید بتواند پس از مطالعه و کار روی این فصل

- مفهوم عددی دترمینان یک ماتریس مربعی را درک کرده و محاسبه آن را با استفاده از بسط سطری یا بسط ستونی انجام دهد.
- جدول علامت‌های دترمینان را به خاطر بسپارد.
- ویژگی‌های دترمینان را توضیح دهد از جمله این که هرگاه دو سطر (ستون) یک دترمینان را تعویض کنیم دترمینان آن قرینه می‌شود.
- مفاهیم ماتریس منفرد و ماتریس نامنفرد را برحسب مقدار دترمینان توضیح دهد.
- نقش و رابطه دترمینان را در ارتباط با ماتریس وارون و حل دستگاه معادلات خطی توضیح دهد. همچنین فرمول محاسبه وارون را برحسب ماتریس وابسته و دترمینان آن اثبات کرده و آن را به خاطر داشته باشد.
- تعداد جوابها و یا فقدان آن را در یک معادله خطی ماتریس

$$AX = B$$

برحسب دترمینان  $A$  ارتباط داده و از عهده‌ی اثبات آن برآید.

- سرانجام از عهده‌ی حل تمرین‌ها و مسائل پایان فصل به خوبی برآید.

## فصل سوم

### دترمینان‌ها

به هر ماتریس مربعی عددی نسبت داده می‌شود که آن را دترمینان آن ماتریس می‌نامیم، دترمینان یک ماتریس ایزاری است که در بیشتر شاخه‌های ریاضی، علوم و مهندسی به کار گرفته می‌شود. دترمینان را در این فصل تعریف کرده و خواص آن را گسترش خواهیم داد. مشاهده خواهیم کرد که این مفهوم اطلاعاتی در مورد حل دستگاه معادلات خطی به ما می‌دهد و به علاوه در فرمولی که برای به دست آوردن معکوس یک ماتریس مربع به دست می‌آوریم استفاده می‌گردد.

#### ۱-۳ مقدمه‌ای بر دترمینان‌ها

بحث دترمینان‌ها را با تعریف دترمینان یک ماتریس  $2 \times 2$  آغاز می‌کنیم.

تعریف: دترمینان ماتریس  $2 \times 2$ ،  $A$  را با  $|A|$  نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

دقت کنید که دترمینان یک ماتریس  $2 \times 2$  به وسیلهٔ تفاضل حاصل ضرب‌های دو قطر ماتریس بیان شده است، از نماد  $\det(A)$  نیز برای دترمینان  $A$  استفاده می‌شود.

مثال ۱: دترمینان ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$  را به دست آورید.

حل: با به کارگیری تعریف بالا داریم:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = (2 \times 1) - (4 \times (-3)) = 2 + 12 = 14$$

دترمینان یک ماتریس  $3 \times 3$  برحسب دترمینان ماتریس‌های  $2 \times 2$  تعریف می‌شود. دترمینان یک ماتریس  $4 \times 4$  برحسب دترمینان ماتریس‌های  $3 \times 3$  تعریف می‌شود و به همین ترتیب دترمینان ماتریس‌های  $n \times n$  برحسب دترمینان ماتریس‌های  $(n-1) \times (n-1)$  تعریف می‌شوند. برای این تعاریف به مفاهیم کهاد و همسازه که در زیر تعریف می‌شوند نیاز داریم.

تعریف: فرض کنیم  $A$  ماتریسی مربعی باشد.

کهاد: کهاد درایه  $a_{ij}$  را با  $M_{ij}$  نشان می‌دهیم و عبارت است از دترمینان ماتریس حاصل از حذف ردیف  $i$ ام و ستون  $j$ ام ماتریس  $A$ .

همسازه: همسازه درایه  $a_{ij}$  را با  $C_{ij}$  نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

توجه کنید که کهاد و همساز یک درایه حداکثر تفاوت‌شان در یک علامت است.

$$C_{ij} = +M_{ij} \quad \text{یا} \quad -M_{ij}$$

مثال ۲: کهاد و همساز درایه‌های  $a_{12}$  و  $a_{22}$  را از ماتریس زیر به دست آورید:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

حل: با به کارگیری تعریف بالا داریم:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \times (-2) - (4 \times 2) = -8$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -1 \times -8 = 8$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - (-1) \times 2 = 6$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 1 \times 6 = 6$$

حال با استفاده از مفاهیم فوق دترمینان ماتریس‌های  $n \times n$  ( $n \leq 3$ ) را تعریف می‌کنیم.

**تعریف:** دترمینان ماتریس مربعی  $A$  عبارت است از مجموع حاصل ضرب‌های درایه‌های سطر اول در همساز مربوط به آن درایه.  
اگر  $A$  ماتریسی  $۳ \times ۳$  باشد:

$$|A| = a_{۱۱}C_{۱۱} + a_{۱۲}C_{۱۲} + a_{۱۳}C_{۱۳}$$

اگر  $A$  ماتریسی  $۴ \times ۴$  باشد:

$$|A| = a_{۱۱}C_{۱۱} + a_{۱۲}C_{۱۲} + a_{۱۳}C_{۱۳} + a_{۱۴}C_{۱۴}$$

اگر  $A$  ماتریسی  $n \times n$  باشد:

$$|A| = a_{۱۱}C_{۱۱} + a_{۱۲}C_{۱۲} + \dots + a_{۱n}C_{۱n}$$

معادلات بالا بسط دترمینان  $A$  نسبت به سطر اول نامیده می‌شوند.

مثال ۳: دترمینان ماتریس  $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۳ \\ -۲ & ۵ & -۱ \end{bmatrix}$  را به دست آورید.

**حل:** با استفاده از درایه‌های سطر اول و همسازهای آن داریم:

$$\begin{aligned} |A| &= (-۱) \times (-۱)^{۱+۱} \begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۵ & -۱ \end{vmatrix} + ۲ \times (-۱)^{۱+۲} \begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ -۲ & -۱ \end{vmatrix} + ۰ \times (-۱)^{۱+۳} \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ -۲ & ۵ \end{vmatrix} \\ &= -[(۱ \times -۱) - (۳ \times ۵)] - ۲[(۱ \times -۱) - (۳ \times (-۲))] + ۰[(۱ \times ۵) - (۱ \times (-۲))] \\ &= ۱۶ - ۱۰ + ۰ = ۶ \end{aligned}$$

در بالا دترمینان  $A$  بر حسب درایه‌های سطر اول تعریف شده است. می‌توان ثابت کرد که دترمینان یک ماتریس مربعی  $A$  براساس قاعده زیر به وسیله هر سطر یا هر ستون از این ماتریس قابل تعریف است.

**قضیه ۱-۱-۳:** دترمینان ماتریس مربعی  $A$  برابر است با مجموع حاصل ضرب درایه‌های هر سطر یا هر ستون در همساز مربوط به آن درایه.

دترمینان ماتریس  $A$  بر حسب بسط سطر  $i$ ام برابر است با

$$|A| = a_{i۱}C_{i۱} + a_{i۲}C_{i۲} + \dots + a_{in}C_{in}$$

و برحسب بسط ستون  $j$  ام برابر است با

$$|A| = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + a_{nj}C_{nj}$$

قاعده ساده و مفیدی وجود دارد که مقدار  $(-1)^{i+j}$  را در بسط  $|A|$  برحسب هر سطر یا هر ستون مشخص می‌سازد. این قاعده به وسیله آرایش علامت درایه‌های  $A$  به صورت زیر مشخص می‌شود.

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

اگر به عنوان مثال بخواهیم دترمینان ماتریسی مربعی  $A$  را برحسب سطر دوم بسط دهیم علامت‌ها به ترتیب  $-$ ،  $+$ ،  $-$ ،  $+$ ،  $-$ ،  $+$ ،  $-$ ،  $+$  خواهند بود.

مثال ۴: دترمینان ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  را برحسب بسط سطر دوم به دست آورید.

حل:

$$\begin{aligned} |A| &= -2 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -2 \times [(-1) \times 3 - (3 \times 0)] + 1 \times [(1 \times 3) - (3 \times (-5))] - 4 \times [(1 \times 0) - ((-1) \times (-5))] \\ &= 6 + 18 + 20 = 44 \end{aligned}$$

دترمینان این ماتریس را برحسب هر سطر و یا ستون دیگر نیز بسط دهید، خواهیم دید که مقدار به دست آمده همان عدد ۴۴ خواهد بود.

نکته: محاسبه دترمینان یک ماتریس مربعی برحسب سطر یا ستونی که بیشترین  $0$  را دارد به حداقل می‌رسد. مثال زیر، گویای این حقیقت است.



مثال ۵: دترمینان ماتریس  $4 \times 4$  زیر را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

حل: ستون سوم این ماتریس دارای بیشترین ۰ است. بنابراین  $|A|$  را برحسب ستون سوم بسط می‌دهیم.

$$\begin{aligned} |A| &= a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} + a_{43}C_{43} \\ &= 0 \cdot C_{13} + 5C_{23} + 0 \cdot C_{33} + 0 \cdot C_{43} \\ &= 5 \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

در این مرحله سطر سوم بیشترین صفر را داراست. پس ماتریس  $3 \times 3$  حاصل را نسبت به سطر سوم بسط می‌دهیم.

$$|A| = -5 \times -2 \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 10 [ (1 \times 1) - (3 \times (-1)) ] = 10 \times 4 = 40$$

درایه‌های یک ماتریس می‌توانند به صورت متغیرهای  $x$ ،  $y$  و ... باشند و معادلات می‌توانند به صورت دترمینان ماتریسها ظاهر شوند. مثال زیر یک چنین معادلاتی را نمایش می‌دهد.

مثال ۶: معادله زیر را برحسب  $x$  حل کنید.

$$\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix} = 7$$

حل: با استفاده از بسط دترمینان، معادله را به صورت طبیعی آن می‌توانیم بنویسیم:

$$x(x-2) - (x+1)(-1) = 7$$

با ساده کردن این معادله  $x$  را به دست می‌آوریم:

$$x^2 - 2x + x + 1 = 7$$

$$\begin{aligned}
 x^2 - x - 6 &= 0 \\
 (x + 2)(x - 3) &= 0 \\
 x &= -2 \quad \text{یا} \quad 3
 \end{aligned}$$

### محاسبه دترمینان‌های ماتریس‌های $2 \times 2$ و $3 \times 3$

دترمینان ماتریس‌های  $2 \times 2$  و  $3 \times 3$  را می‌توان با استفاده از قطر ماتریس با صرف وقت کمتری به دست آورد. برای ماتریس‌های  $2 \times 2$  از دو قطر اصلی ماتریس استفاده می‌کنیم و برای ماتریس‌های  $3 \times 3$  اقطاری را مورد استفاده قرار خواهیم داد که با اضافه کردن ۲ ستون اول به ماتریس اولیه به دست می‌آیند. دترمینان یک ماتریس  $2 \times 2$  و  $3 \times 3$  عبارت خواهد بود از مجموع حاصل ضرب‌های اعضای قطرهایی که جهت‌شان از چپ به راست است منهای حاصل ضرب‌های اعضای قطرهایی که جهت‌شان از راست به چپ است.

$$\begin{array}{cc}
 A & B \\
 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}
 \end{array}
 \begin{array}{cc}
 a_{11} & a_{12} \\
 a_{21} & a_{22} \\
 a_{31} & a_{33}
 \end{array}$$

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$|B| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

اثبات این که دترمینان یک ماتریس  $3 \times 3$  در واقع به صورت فوق می‌باشد، به عهده دانشجو است.

مثال ۷:

$$\begin{array}{cc}
 A & B \\
 \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \begin{array}{cc}
 1 & 2 \\
 0 & 1 \\
 1 & -2
 \end{array}$$

$$|A| = 12 - 7 = 5$$

$$|B| = (5 + 8 + 0) - (-1 - 8 + 0) = 13 - (-9) = 22$$

برای ماتریس‌های  $n \times n$  ( $n \geq 3$ ) چنین قاعده‌ای وجود ندارد.

## تعریف دیگری از دترمینان

در اینجا تعریف دیگری از دترمینان را با استفاده از مفهوم جایگشت‌ها بیان می‌کنیم. این تعریف جدید عمده‌تاً برای مقاصد نظری به کار گرفته می‌شود. ابتدا پیش زمینه‌های لازم را در مورد جایگشت‌ها ارایه می‌کنیم.

فرض کنید  $S = \{1, 2, \dots, n\}$  مجموعه اعداد صحیح از ۱ تا  $n$  باشد، هر ترتیبی مانند  $i_1 i_2 \dots i_n$  از اعضای  $S$  را یک جایگشت روی  $S$  می‌نامیم. برای مثال ۲، ۳، ۴، ۱ جایگشتی روی مجموعه  $\{1, 2, 3, 4\}$  است. منظور از یک تغییر روی یک جایگشت تغییر دو عدد متوالی با یکدیگر است. مثلاً با یک تغییر می‌توان جایگشت ۱، ۲، ۳، ۴ را تبدیل به ۲، ۴، ۳، ۱ کرد و با دو تغییر می‌توان ۲، ۳، ۴، ۱ را به ۲، ۱، ۳، ۴ تبدیل کرد.

با استفاده از این تعریف جایگشت  $i_1 \dots i_n$  را یک جایگشت زوج می‌نامیم، اگر بتوان این جایگشت را با تعداد زوجی تغییر و تبدیل به جایگشت  $1 \ 2 \ 3 \dots n$  کرد و آن را جایگشت فرد می‌نامیم اگر با تعداد فردی تغییر بتوان آن را به  $1 \ 2 \ 3 \dots n$  تبدیل کرد. در این صورت  $1 \ 2 \ 3 \dots n$  خود یک جایگشت زوج است زیرا با صفر تغییر تبدیل به  $1 \ 2 \ 3 \dots n$  می‌شود و صفر عددی زوج است.

مثال ۸: نشان دهید ۱۳۴۲۵ یک جایگشت زوج و ۱۳۴۵۲ یک جایگشت فرد است.

حل: برای جایگشت ۱۳۴۲۵ داریم:

$$13425 \rightarrow 13245 \rightarrow 12345$$

و برای جایگشت ۱۳۴۵۲ داریم:

$$13452 \rightarrow 13425 \rightarrow 13245 \rightarrow 12345$$

در اولین جایگشت دو تغییر و در دومین جایگشت سه تغییر مشاهده می‌کنیم. پس اولی زوج و دومی فرد است.

مثال ۹: تمام جایگشت‌های ممکن مجموعه  $\{1, 2, 3\}$  را نوشته و زوج یا فرد بودن آن را مشخص کنید.

حل: ابتدا جایگشت‌های را در نظر می‌گیریم که با ۱ شروع می‌شود و سپس آنهایی که با ۲ و سرانجام آنهایی که با ۳ شروع می‌شوند.

۱	۲	۳	زوج
۱۳۲	→	۱۲۳	فرد
۲۱۳	→	۱۲۳	فرد
۲۳۱	→	۲۱۳	زوج
۳۱۲	→	۱۳۲	زوج
۳۲۱	→	۲۳۱	فرد
۳۲۱	→	۲۱۳	→ ۱۲۳

تذکر مهم: در جبریک، جایگشت‌ها به صورت عمومی‌تری تعریف شده‌اند جایگشت‌هایی که در این کتاب از آن صحبت می‌کنیم در واقع جایگشت‌های بخصوصی در جبریک هستند که آنها را جایگشت دوری از بعد  $n$  روی مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$  می‌نامیم.

تعریف: فرض کنیم  $A$  یک ماتریس  $n \times n$  باشد در این صورت:

$$\|A\| = \sum \pm a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

$\sum$  روی تمام جایگشت‌های  $j_1 j_2 \dots j_n$  از مجموعه  $\{1, 2, \dots, n\}$  تغییر می‌کند. علامت‌های  $+$  یا  $-$  به ترتیب برای جایگشت‌های زوج و فرد استفاده می‌شود.

مثال ۱۰: برای ماتریس  $2 \times 2$ ،  $A$  ثابت کنید  $\|A\| = |A|$ .

حل: فرض کنید  $A$  ماتریس  $2 \times 2$ ،  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  باشد در این صورت:

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

و با توجه به این که جایگشت‌های روی  $\{1, 2\}$ ، ۱۲ و ۲۱ هستند پس:

$$\|A\| = \sum_{\text{جایگشت}} \pm a_{1j_1} a_{2j_2} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

نکته: می‌توان ثابت کرد که به‌ازای هر ماتریس  $n \times n$ ، دو عدد  $|A|$  و  $\|A\|$  یکی هستند لذا تعریف  $\|A\|$  را می‌توان تعریف دیگری از دترمینان ماتریس  $A$  دانست و از این پس  $\|A\|$  را با علامت  $|A|$  در نظر می‌گیریم.

## تمرین ۱-۱-۳

(۱) دترمینان ماتریس‌های زیر را پیدا کنید:

$$\begin{array}{l} \text{الف)} \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix} \text{ (ب)} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix} \text{ (ج)} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \text{ (د)} \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix} \\ \text{ه)} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix} \text{ (و)} \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۳ & ۷ \end{bmatrix} \text{ (ز)} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \text{ (ح)} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \end{array}$$

آیا می‌توانید حدس بزنید که چرا دترمینان‌ها در قسمت‌های (ه) و (و) برابر صفر است (در قسمت (ه) به رابطه بین دو سطر توجه کنید).

(۲) فرض کنید ماتریس  $A$  به صورت زیر تعریف شده است:

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ & -۳ \end{bmatrix}$$

در هر حالت کهاد و همسازهای داده شده را بیابید.

$$\text{الف)} M_{۱۲}, C_{۱۲} \quad \text{ب)} M_{۲۱}, C_{۲۱}$$

$$\text{ج)} M_{۲۲}, C_{۲۲} \quad \text{د)} M_{۳۳}, C_{۳۳}$$

(۳) فرض کنید ماتریس  $B$  به صورت زیر داده شده است:

$$B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۲ & ۲ & ۵ \\ -۲ & -۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

در هر حالت کهاد و همسازهای داده شده را بیابید:

$$\text{الف)} M_{۲۲}, C_{۲۲} \quad \text{ب)} M_{۳۱}, C_{۳۱}$$

$$\text{ج)} M_{۱۴}, C_{۱۴} \quad \text{د)} M_{۴۳}, C_{۴۳}$$

(۴) دترمینان ماتریس‌های زیر را یک بار از طریق بسط سطر اول و یک بار از طریق قطری به دست آورید:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{ج}) \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & 5 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

می‌توانید حدس بزنید که چرا دترمینان قسمت (ج) صفر می‌شود.

۵) دترمینان ماتریس‌های زیر را طبق دستورالعمل ذکر شده در ذیل ماتریس به دست آورید:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

بسط سطر اول و ستون دوم بسط سطر دوم و ستون سوم

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{د}) \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

بسط سطر دوم و ردیف دوم بسط سطر سوم و ستون اول

۶) دترمینان ماتریس‌های زیر را با حداقل عملیات محاسباتی به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ج}) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

۷) معادلات زیر را برحسب  $x$  حل کنید:

$$\begin{bmatrix} x+1 & 2 \\ -x & x \end{bmatrix} = 10 \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} x-1 & x \\ 7 & x+2 \end{bmatrix} = 5 \quad (\text{الف})$$

۸)  $x$  را طوری تعیین کنید که دترمینان ماتریس زیر صفر شود:

$$\begin{bmatrix} x & 3-x \\ 2 & 3x+1 \end{bmatrix}$$

۹) به ازای چه مقادیری از  $x$  دترمینان ماتریس زیر صفر می‌شود:

$$\begin{bmatrix} x+1 & 0 & 1 \\ 2 & 2x & 2x+2 \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix}$$

۱۰) با چه استدلالی دترمینان دو ماتریس زیر برابر هستند، جوابتان را بدون محاسبه دترمینان این دو ماتریس ارائه دهید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 7 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 9 & 0 & 5 \\ 7 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۱) با چه استدلالی دترمینان ماتریس زیر به‌ازای هر  $a$  و  $b$  یکسان است؟

$$\begin{bmatrix} a & 3 & 1 \\ b & -5 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۲) زوج و فرد بودن جایگشت‌های زیر را تعیین کنید.

الف) ۴۲۱۳      ب) ۱۲۴۳

ج) ۲۴۱۳      د) ۴۳۲۱

۱۳) تمام جایگشت‌های  $\{1, 2, 3, 4\}$  را مشخص کرده و زوج و فرد بودن آنها را تعیین کنید.

۱۴) برای یک ماتریس  $3 \times 3$  مانند  $A$  ثابت کنید دو عدد  $\|A\|$  و  $|A|$  در واقع یکی هستند.

### ۲-۳ خواص دترمینان‌ها

در این بخش خواص جبری دترمینان‌ها را مورد بحث قرار می‌دهیم. بیشتر خواص دترمینان‌ها در مورد سطرهای یک ماتریس و ستون‌های آن یکی هستند. در یک چنین مواردی اغلب عبارت را به صورت سطر (ستون) می‌نویسیم تا نشان دهیم که می‌توان به جای کلمه سطر در بحث مورد نظر کلمه ستون را قرار داد. اثبات قضایا فقط در مواردی در متن درس و یا به صورت تمرین به عهده دانشجویان گذاشته می‌شود که احساس شود این اثبات تکنیک مفیدی را آرایه می‌کند.

قضیه بعدی نشان می‌دهد که چگونه اعمال مقدماتی روی سطرهای یک ماتریس بر دترمینان آن ماتریس اثر دارد. این قضیه هم نین می‌گوید که این اعمال را روی ستون نیز می‌توان بسط داد.

**۱-۲-۳ قضیه:** فرض کنیم  $A$  ماتریسی  $n \times n$  و  $c$  عددی غیر صفر باشد.

(الف) اگر ماتریس  $B$  با ضرب یک سطر (ستون) از  $A$  در عدد  $c$  به دست آمده باشد آنگاه  $|B| = c|A|$ .

(ب) اگر ماتریس  $B$  با جابجایی دو سطر (ستون) متوالی ماتریس  $A$  به دست آمده باشد آنگاه

$$|B| = -|A|$$

(ج) اگر ماتریس  $B$  با جمع جبری مضربی از یک سطر (ستون) با سطر (ستون) دیگر ماتریس  $A$  به

$$|B| = |A|$$

اثبات: (الف) فرض کنیم درایه‌های ماتریس  $A$  به صورت  $a_{ij}$  بوده و ماتریس  $B$  با ضرب  $c$  در سطر  $k$  ام

$A$  به دست آمده باشد در این صورت  $k$  امین سطر  $B$  عبارت است از:

$$ca_{k1} \quad ca_{k2} \quad \dots \quad ca_{kn}$$

$|B|$  را با بسط این سطر به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} |B| &= ca_{k1}C_{k1} + ca_{k2}C_{k2} + \dots + ca_{kn}C_{kn} \\ &= c(a_{k1}C_{k1} + a_{k2}C_{k2} + \dots + a_{kn}C_{kn}) \\ &= c|A| \end{aligned}$$

نتیجه‌ی مشابه‌ای برای ستون‌ها از بسط  $k$  امین ستون ماتریس  $B$  به دست می‌آید، به شرطی که  $B$  ماتریسی



باشد که از ضرب  $k$  امین ستون  $A$  در عدد  $c$  به دست آمده باشد.



مثال زیر نشان می‌دهد که چگونه عملیات سطری (ستونی) که در قضیه قبل بیان کردیم می‌توانند در ایجاد هر چه بیشتر عدد صفر در سطرها (ستونها)، محاسبه دترمینان یک ماتریس را ساده کنند.  
مثال ۱: دترمینان زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & -6 & 3 \\ 2 & 9 & -3 \end{vmatrix}$$

حل: با استفاده از اعمال سطری و ستونی در دترمینان فوق سعی می‌کنیم تا حد امکان درایه‌های یک سطر یا ستون را تبدیل به صفر کنیم. دقت کنیم که با جمع دو برابر ستون سوم با ستون دوم و جایگزینی آن در ستون دوم می‌توانیم دو درایه از این ستون را تبدیل به صفر کنیم.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & -6 & 3 \\ 2 & 9 & -3 \end{vmatrix} \stackrel{C_2+2C_3}{=} \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

با بسط دترمینان روی ستون دوم حاصل و این که صفرها محاسبه دترمینان را ساده می‌کنند خواهیم داشت:

$$(-3) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (-3)(9 - 2) = -21$$

مثال ۲: فرض کنید  $A$  ماتریس  $3 \times 3$  زیر باشد:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ -2 & -4 & 10 \end{vmatrix}$$

با استفاده از بسط همسازها می‌توان نشان داد که  $|A| = 12$  با استفاده از مقدار دترمینان  $A$  و خواص سطری و ستونی دترمینان، دترمینان ماتریس‌های زیر را به دست آورید:

$$B_1 = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 3 \\ 0 & 6 & 5 \\ -2 & -12 & 10 \end{vmatrix} \text{ (الف)} \quad B_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -2 & -4 & 10 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} \text{ (ب)} \quad B_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 16 \end{vmatrix} \text{ (ج)}$$

حل: مشاهده می‌شود که  $B_1$  می‌تواند با ضرب ستون دوم  $A$  در عدد ۳ به دست آید در این صورت

$$|B_1| = 3|A| = 36$$

مشاهده می‌شود که  $B_2$  می‌تواند با تعویض سطر دوم و سوم از روی ماتریس  $A$  به دست آید در این صورت

$$|B_2| = -|A| = -12$$

مشاهده می‌شود که  $B_3$  می‌تواند از جمع دو برابر سطر اول با سطر سوم و جایگزینی آن در سطر سوم از روی ماتریس  $A$  به دست آید در این صورت

$$|B_3| = |A| = 12$$

از آنچه که در زیر می‌آید متوجه خواهیم شد که ماتریس‌های با دترمینان صفر نقش مهمی در نظریه دترمینان‌ها بازی خواهند کرد.

**تعریف:** ماتریس مربعی  $A$  را منفرد می‌گوئیم اگر  $|A| \neq 0$  در غیر این صورت  $A$  را نامنفرد می‌نامیم. قضیه زیر شرایطی به دست می‌دهد که تحت آن شرایط می‌توان منفرد بودن ماتریس را تشخیص داد.

**۲-۲-۳ قضیه:** فرض کنیم  $A$  ماتریسی مربعی باشد در این صورت  $A$  منفرد است اگر

(الف) تمام اعضای یک سطر (ستون) صفر باشند.

(ب) دو سطر (ستون) از ماتریس  $A$  یکسان باشند.

(ج) یک سطر (ستون) از ماتریس  $A$  مضربی از سطر (ستون) دیگر باشد.

توجه کنید که (ب) حالت خاصی از (ج) است ولی به دلیل اهمیت این حالت خاص، آن را جداگانه ذکر کرده‌ایم.

**اثبات:** الف) فرض کنیم اعضای سطر  $k$ ام  $A$  همگی صفرند. در این صورت  $|A|$  را با بسط سطر  $k$ ام به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} |A| &= a_{k1}C_{k1} + a_{k2}C_{k2} + \cdots + a_{kn}C_{kn} \\ &= 0 \cdot C_{k1} + 0 \cdot C_{k2} + \cdots + 0 \cdot C_{kn} \\ &= 0 \end{aligned}$$

شرایط مشابه برای ماتریسی که یک ستون آن صفر است منجر به نتیجه مشابه می‌شود.

(ب) فرض کنیم  $k$ امین و  $l$ امین سطر ماتریس  $A$  با هم برابرند در این صورت با ضرب عدد  $-1$  در سطر

$k$ ام و جمع آن با سطر  $l$ ام و جایگزینی حاصل در سطر  $l$ ام ماتریس  $B$  به دست می‌آید که  $|B| = |A|$

ولی سطر  $l$ ام ماتریس  $B$  صفر است و طبق قسمت (الف)،  $|B| = 0$  در نتیجه  $|A| = 0$ .

اثبات برای ستونها مشابه اثبات بالاست.

(ج) مشابه قسمت (ب) اثبات می‌شود.

مثال ۳: نشان دهید که دو ماتریس زیر منفرد هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & -8 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

حل: الف) تمام اعضای ستون سوم صفرند بنابراین  $|A| = 0$ .

ب) ردیف دوم ۲- برابر ردیف سوم است پس طبق قسمت (ج) قضیه قبل  $|B| = 0$ .

قضیه بعدی رابطه بین دترمینان ماتریس‌های حاصل از روی دترمینان ماتریس‌های داده شده را مشخص

می‌کند.

۳-۲-۳ قضیه: فرض کنیم  $A$  و  $B$  ماتریس‌های  $n \times n$  و  $c$  عددی غیرصفر است.

$$|cA| = c^n |A|$$

الف) دترمینان ضرب عدد در ماتریس

$$|AB| = |A||B|$$

ب) دترمینان ضرب دو ماتریس

$$|A^t| = |A|$$

ج) دترمینان ترانزاده یک ماتریس

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

د) دترمینان معکوس یک ماتریس

در صورتی که  $A^{-1}$  وجود داشته باشد.

مثال ۴: فرض کنید  $A$  ماتریسی  $2 \times 2$  با  $|A| = 4$  باشد با استفاده از قضیه ۳-۲-۳ دترمینان‌های زیر

را به دست آورید.

$$|3A| \quad \text{الف)} \quad |A^2| \quad \text{ب)} \quad |5A^t A^{-1}| \quad \text{ج)}$$

در صورتی که  $A^{-1}$  وجود داشته باشد.

حل: با استفاده از قضیه فوق

$$|3A| = (3^2)|A| = 9 \times 4 = 36 \quad \text{الف)}$$

$$|A^2| = |AA| = |A||A| = 4 \times 4 = 16 \quad \text{ب)}$$

$$|5A^t A^{-1}| = (5)^2 |A^t A^{-1}| = 25 |A^t| |A^{-1}| = 25 |A| \frac{1}{|A|} = 25 \quad \text{ج)}$$

مثال ۵: ثابت کنید به‌ازای هر ماتریس مربعی  $A$  داریم  $|A^{-1} A^t A| = |A|$ .

حل: با استفاده از خواص ماتریس‌ها، دترمینان‌ها و اعداد حقیقی داریم:

$$|A^{-1}A^tA| = |(\bar{A}A^t)A| = |A^{-1}A^t||A| = |A^{-1}||A^t||A| = \frac{1}{|A|}|A||A| = |A|$$

از دانشجو انتظار می‌رود در هر مرحله تشخیص دهید که از چه خواصی از ماتریس‌ها، دترمینان‌ها و اعداد حقیقی استفاده شده است.

مثال ۶: ثابت کنید که اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس  $n \times n$  و  $A$  منفرد باشد آنگاه  $AB$  نیز منفرد است، آیا عکس مطلب نیز درست است؟

حل: چون  $A$  منفرد است، پس  $|A| \neq 0$ ، با کاربرد خواص دترمینان داریم:

$$|AB| = |A||B| \neq 0 \implies |B| \neq 0$$

پس ماتریس  $AB$  نیز منفرد است.

حال عکس این مطلب را بررسی می‌کنیم. می‌خواهیم ببینیم اگر  $AB$  منفرد باشد آنگاه  $A$  نیز منفرد است.

$$|AB| \neq 0 \implies |A||B| \neq 0 \implies |A| \neq 0 \quad \text{یا} \quad |B| \neq 0$$

بنابراین منفرد بودن  $AB$  نتیجه می‌دهد که یا  $A$  منفرد است و یا  $B$  (و یا ممکن است هر دو منفرد باشند). پس عکس قضیه لزوماً درست نیست. می‌توان این مثال را به شکل زیر و به صورتی لازم و کافی نیز ارایه کرد.

شرط لازم و کافی برای آن که ماتریس  $AB$  منفرد باشد آن است که  $A$  یا  $B$  منفرد باشند.

### ۱-۲-۳ تمرین

(۱) با استفاده از عملیات سطری (ستونی) و ایجاد حداکثر صفر در سطرها (ستونها) محاسبه دترمینان ماتریس‌های زیر را به صورت ساده انجام دهید.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\
 \text{(ج)} & \text{(ب)} & \text{(الف)} \\
 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ -6 & -3 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \\
 \text{(و)} & \text{(ه)} & \text{(د)}
 \end{array}$$

(۲) فرض کنید  $A$  ماتریس زیر باشد:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

با بسط همسازها می‌توان نشان داد که  $|A| = -2$  با استفاده از این مطلب و خواص دترمینان‌ها، دترمینان ماتریس‌های زیر را به دست آورید.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & -2 & -10 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \\
 \text{(ج)} & \text{(ب)} & \text{(الف)}
 \end{array}$$

(۳) اگر  $A$  ماتریس  $3 \times 3$  زیر باشد، آنگاه  $|A| = 5$

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

با استفاده از این مطلب و با به کارگیری خواص سطری و ستونی دترمینان‌ها، دترمینان ماتریس‌های

زیر را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{(ج)} \quad \begin{bmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{(ب)} \quad \begin{bmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{(الف)}$$

(۴) در آنچه که در ذیل می‌آید دترمینان یک ماتریس به دو طریق با استفاده از عملیات سطری با دو مقدار مختلف به دست آمده است که یکی صحیح و دیگری غلط است. آیا می‌توانید مقدار صحیح را تشخیص دهید و ایراد عملیات سطری غلط را توضیح دهید؟

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & -2 \end{vmatrix} \stackrel{=}{=}_{3R_1+R_2} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -1(-18 - 3) = 21$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & -2 \end{vmatrix} \stackrel{=}{=}_{R_1+3R_2} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7$$

(۵) با استفاده از خواص سطری و ستونی دلیل این که چرا ماتریس‌های زیر منفرد هستند را بیان کنید.

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} & \text{(ب)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} & \text{(الف)} \\ & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{(د)} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ -4 & 8 & -2 \end{bmatrix} & \text{(ج)} \end{array}$$

۶) اگر  $A$  ماتریسی  $2 \times 2$  با دترمینان ۵ باشد دترمینان‌های زیر را با استفاده از خواص دترمینان‌ها به دست آورید.

$$\begin{array}{l} \text{(الف)} |3A| \quad \text{(ب)} |6A^t| \quad \text{(ج)} |A^2| \quad \text{(د)} |(A^t)^2| \\ \text{(ه)} |(A^t)^t| \quad \text{(و)} |4A^{-1}| \end{array}$$

۷) اگر  $A$  و  $B$  ماتریس‌های  $3 \times 3$  باشند به طوری که  $|A| = 3$  و  $|B| = -5$ ، دترمینان‌های زیر را به دست آورید:

$$\begin{array}{l} \text{(الف)} |AB| \quad \text{(ب)} |AA^t| \quad \text{(ج)} |AB^t| \quad \text{(د)} |4A^tB^2| \\ \text{(ه)} |2AB^{-1}| \quad \text{(و)} |3A^tB^{-1}A^t| \quad \text{(ز)} |3AB^tA^{-1}B^{-1}| \\ \text{(ح)} |(ABA^{-1})^t| \end{array}$$

۸) اگر  $A$  ماتریس  $3 \times 3$ ،  $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$  باشد و  $|A| = 3$  دترمینان‌های زیر را به دست آورید.

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} d & a & g \\ e & b & h \\ f & c & i \end{bmatrix} & \text{(ب)} & \begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{bmatrix} \text{ (الف)} \\ \begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ 2g & 2h & 2i \end{bmatrix} & \text{(د)} & \begin{bmatrix} d & f & e \\ a & c & b \\ g & i & h \end{bmatrix} \text{ (ج)} \end{array}$$

۹) معادله زیر را بدون به دست آوردن مستقیم دترمینان‌ها ثابت کنید.

$$\begin{vmatrix} a+b & c+d & e+f \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & e \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d & f \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

۱۰) ثابت کنید دترمینان یک ماتریس قطری برابر حاصل ضرب درایه‌های قطر آن است.

۱۱) قسمت (ب) و (ج) قضیه ۱-۲-۳ را ثابت کنید.

۱۲) قسمت (ج) قضیه ۲-۲-۳ را ثابت کنید.

۱۳) ثابت کنید اگر جمع هر سطر (ستون) یک ماتریس مربعی  $A$  برابر صفر باشد آنگاه  $|A| = 0$ .

۱۴) فرض کنید  $A$  ماتریسی مربعی و  $n$  عددی طبیعی است به طوری که  $A^n = 0$  ثابت کنید  $|A| = 0$ .

۱۵) ثابت کنید برای دو ماتریس  $n \times n$ ،  $A$  و  $B$  داریم  $|AB| = |BA|$ .

۱۶) اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس  $n \times n$  باشند آیا معادله  $|A+B| = |A| + |B|$  برقرار است. آن را ثابت

کنید و یا مثال نقضی برای آن ارائه دهید.

۱۷) فرض کنید  $A$  ماتریس مربعی و  $B$  ماتریسی است که با عملیات سطری (ستونی) از ماتریس  $A$

حاصل شده است ثابت کنید  $|B| \neq 0$  اگر فقط اگر  $|A| \neq 0$ .

۱۸) الف) فرض کنید  $A$  ماتریسی  $2 \times 2$  است نشان دهید که تنها ماتریس به فرم پلکانی که دارای

سطر صفر نیست  $I_2$  است.



ب) فرض کنید  $A$  ماتریسی  $3 \times 3$  است نشان دهید که تنها ماتریسی به فرم پلکانی که دارای سطر صفر نیست  $I_3$  است.

ج) فرض کنید  $A$  ماتریسی  $n \times n$  است نشان دهید که تنها ماتریس به فرم پلکانی که دارای سطر صفر نیست  $I_n$  است.

د) فرض کنید  $A$  ماتریسی  $n \times n$  باشد که فرم پلکانی آن  $E$  است نشان دهید  $|A| \neq 0$  اگر و فقط اگر  $E = I_n$ .

### ۳-۳ ارزیابی عددی یک دترمینان

در بخش‌های قبلی برای تعیین دترمینان یک ماتریس مربعی از روش تعیین همسازها استفاده کردیم. آن روش که براساس تعریف کهاد و همسازها بنا شده بود ما را درگیر محاسبات زیادی می‌کرد. در این بخش روش عددی کارایی را معرفی می‌کنیم، که برای برنامه‌ریزی کامپیوتری نیز مناسب است، این روش مقدار دترمینان یک ماتریس را سریع‌تر در اختیار ما قرار می‌دهد.

در روش حذفی گاوس - جردن که برای حل دستگاه معادلات به کار می‌رفت از روش عملیات سطری برای تبدیل یک دستگاه معادلات به دستگاه معادلات ساده‌تر استفاده کردیم و از این طریق جواب دستگاه معادلات را به دست آوردیم. برای محاسبه دترمینان یک ماتریس مربعی از روش مشابه استفاده خواهیم کرد. در بخش قبلی در مورد اثرات عملیات سطری برای محاسبه دترمینان یک ماتریس بحث کردیم. در اینجا روش تبدیلات سطری مقدماتی را برای تبدیل یک ماتریس به ماتریسی که آن را ماتریس بالا مثلثی می‌نامیم به کار خواهیم برد. این شکل از ماتریس محاسبه دترمینان را بسیار ساده خواهد کرد.

**تعریف:** یک ماتریس مربعی را **ماتریس بالا مثلثی** می‌نامیم اگر تمام درایه‌های زیر قطر صفر باشند. ماتریس مربعی، **پایین مثلثی** نامیده می‌شود اگر تمام درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر باشند.

ماتریس‌های زیر مثال‌هایی از ماتریس‌های مثلثی هستند.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های مثلثی بالا                      ماتریس‌های مثلثی پایین

قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد که به دست آوردن دترمینان ماتریس‌های مثلثی تا چه اندازه ساده است.

**۳-۳-۱ قضیه:** دترمینان یک ماتریس مثلثی برابر حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی آن است.

اثبات: فرض کنیم ماتریس  $n \times n$ ،  $A$  بالا مثلثی باشد. دترمینان آن را روی اولین ستون بسط می‌دهیم و دترمینان به دست آمده از حاصل این بسط را نیز روی اولین ستون بسط داده و در مراحل بعدی نیز همین عمل را انجام می‌دهیم، مراحل به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \dots = a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn} \end{aligned}$$

■ اثبات برای ماتریس‌های پایین مثلثی به طریقی مشابه است.

مثال ۱: دترمینان ماتریس زیر را به دست آورید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

حل: چون ماتریس یک ماتریس مثلثی است داریم:

$$|A| = 1 \times (-3) \times (-5) = 15$$

حال روش عددی برای محاسبه دترمینان یک ماتریس مربعی را به طور خلاصه بازگو می‌کنیم.

## محاسبه عددی یک دترمینان

ماتریس داده شده را با استفاده از دو عمل سطری مقدماتی زیر به صورت ماتریس بالا مثلثی درمی‌آوریم.

۱) ضربی از یک سطر را به سطر دیگر اضافه می‌کنیم، این عمل تغییری در مقدار دترمینان ماتریس جدید نمی‌دهد.

۲) تعویض دو سطر با یکدیگر، در این صورت اگر دو سطر متوالی باشند یعنی فاصله دو سطر ۱ باشد و یا در حالت کلی اگر فاصله دو سطر  $k$  باشد دترمینان حاصل  $(-1)^k$  برابر دترمینان اولیه است. برای مثال اگر بخواهیم سطر اول و سطر سوم را با یکدیگر تعویض کنیم دترمینان ماتریس حاصل برابر دترمینان ماتریس اولیه است و اگر بخواهیم سطر اول و چهارم را تعویض کنیم دترمینان ماتریس حاصل  $-1$  برابر دترمینان ماتریس اولیه است.

با این روش دترمینان ماتریس اولیه بسته به تعداد تعویض سطرها یا برابر حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس مثلثی حاصل و یا منفی این مقدار می‌باشد. مثال زیر روش کار را نشان می‌دهد.

مثال ۲: دترمینان ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -2 & -5 & 4 \\ 4 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

حل: با استفاده از الگوریتم بالا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -2 & -5 & 4 \\ 4 & 9 & 10 \end{vmatrix} & \stackrel{\substack{R_2+R_1 \\ R_3+(-2)R_1}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} \\ & \stackrel{R_3+R_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 13 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) \times 13 = -26 \end{aligned}$$

مثال ۳: دترمینان زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

حل: با به کارگیری الگوریتم بالا خواهیم داشت:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{R_2 + (-2)R_1 \\ R_3 - R_1 \\ R_4 + R_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} \\ \stackrel{R_4 + 2R_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) \times (-2) \times 6 = 12$$

برای به دست آوردن ماتریس مثلثی بالاگاهی لازم است که جای دو سطر را با یکدیگر عوض کنیم مثال زیر یکی از این موارد است در این حالت هر زمان که دو سطر متوالی را با یکدیگر عوض می‌کنیم دترمینان ماتریس حاصل از این عمل برابر منفی دترمینان ماتریس قبلی خواهد شد.

مثال ۴: دترمینان زیر را به دست آورید:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 11 \end{vmatrix}$$

حل:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 11 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{R_2 + R_1 \\ R_3 + (-2)R_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

در این جا احساس می‌شود که درایه سطر دوم و ستون دوم باید غیرصفر باشد در این صورت سطر دوم را با سطر سوم تعویض کرده و به صورت زیر دترمینان را به دست می‌آوریم:

$$\stackrel{R_2 \leftrightarrow R_3}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \times 1 \times 2 \times (-1) = 2$$

اگر در مرحله‌ای عضوی از قطر صفر باشد و تمام درایه‌های زیر ستون مربوط به این صفر نیز صفر باشد در این صورت امکان این که با تعویض دو سطر درایه غیرصفری در قطر قرار دهیم وجود ندارد در این صورت ماتریس بالا مثلثی حاصل از عملیات سطری، ماتریسی خواهد بود که روی قطر اصلی آن صفر وجود دارد.

در این صورت عملیات بیشتر بی نتیجه است و دترمینان این ماتریس صفر خواهد بود. مثال زیر نمونه‌ای از این حالت است.

مثال ۵: دترمینان زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 4 \\ 6 & -6 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

حل: داریم

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 4 \\ 6 & -6 & 5 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{R_2+R_1 \\ R_3+(-2)R_1 \\ R_4+(-6)R_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -11 \end{vmatrix} = 0$$

درایه قطر صفر است و تمام درایه‌های زیر آن نیز صفر است.

### ۱-۳-۳ تمرین

(۱) دترمینان ماتریس‌های مثلثی زیر را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(۲) با استفاده از عملیات سطری دترمینان ماتریس‌های  $3 \times 3$  زیر را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ -2 & -3 & 4 \\ 4 & 6 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

(۳) با استفاده از عملیات سطری، دترمینان ماتریسهای  $4 \times 4$  زیر را به دست آورید:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -4 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(۴)  $I_n$  ماتریس  $n \times n$  واحد است، ثابت کنید  $|I_n| = 1$ .

(۵) نشان دهید اگر ماتریس  $A$  معکوس‌پذیر باشد آنگاه  $|A||A^{-1}| = 1$ .

(۶) ثابت کنید دترمینان یک ماتریس قطری برابر حاصل ضرب درایه‌های قطر آن ماتریس می‌باشد.

(۷) ثابت کنید دترمینان یک ماتریس پایین مثلثی برابر حاصل ضرب درایه‌های قطر آن ماتریس است.

(۸) نشان دهید:

الف) اگر  $A = A^{-1}$ ، آنگاه  $|A| = \pm 1$ .

ب) اگر  $A^t = A^{-1}$ ، آنگاه  $|A| = \pm 1$ .

(۹) اگر  $A$  یک ماتریس باشد ثابت کنید،  $|A| \neq 0$  اگر و فقط اگر  $|A^{-1}| \neq 0$ .

(۱۰) اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس  $n \times n$  و  $AB = I_n$  نشان دهید که،  $|A| \neq 0$  و  $|B| \neq 0$ .

(۱۱) ثابت کنید هر ماتریس مثلثی متقارن یک ماتریس قطری است.

### ۴-۳ دترمینان‌ها، معکوس ماتریس و دستگاه معادلات خطی

در بخش‌های قبلی مفهوم دترمینان را تعریف کرده و روش‌های مختلف محاسبه آن را بحث کرده‌ایم و به خواص جبری آن نیز نظر افکنده‌ایم در این جا می‌خواهیم ببینیم که چگونه مفهوم دترمینان می‌تواند در مورد معکوس یک ماتریس به ما کمک کند و چگونه می‌تواند اطلاعاتی در مورد حل دستگاه معادلات خطی ارائه دهد.

برای به دست آوردن فرمولی که بتوان از آن معکوس یک ماتریس نامنفرد را به دست آورد احتیاج به

معرفی ابزاری داریم که در زیر می‌آید:

**تعریف:** فرض کنید  $A$  ماتریسی  $n \times n$  و  $C_{ij}$  همسازه درایه  $a_{ij}$  باشد، ماتریسی که درایه سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام آن  $C_{ij}$  باشد ماتریس همساز  $A$  نامیده می‌شود و ترانواده این ماتریس را ماتریس الحاقی می‌گوئیم و آن را با  $\text{adj}(A)$  نشان می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}^t$$

ماتریس همساز  $A$                       ماتریس الحاقی  $A$

مثال ۱: ماتریس همساز و الحاقی ماتریس زیر را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

حل:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 & C_{12} &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 & C_{13} &= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \\ C_{21} &= \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6 & C_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 & C_{23} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \\ C_{31} &= \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 & C_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 & C_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \end{aligned}$$

در این صورت ماتریس همساز عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -6 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

و ماتریس الحاقی که ترانواده ماتریس فوق است عبارت است از:

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

قضیهٔ زیر معکوس یک ماتریس نامنفرد را به صورت فرمول ارائه می‌دهد.

**۳-۴-۱ قضیه:** فرض کنید  $A$  ماتریسی مربعی است که  $|A| \neq 0$ ، در این صورت  $A$  معکوس پذیر بوده و معکوس آن عبارت است از:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$$

اثبات: ماتریس حاصل ضربی  $A \cdot \text{adj}(A)$  را در نظر بگیرید و  $b_{ij}$  را درایه سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام آن فرض کنید در این صورت:

$$b_{ij} = \text{ستون } j\text{ام } \text{adj}(A) \times \text{سطر } i\text{ام } A$$

$$= [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}] \begin{bmatrix} c_{j1} \\ c_{j2} \\ \vdots \\ c_{jn} \end{bmatrix}$$

$$= a_{i1}c_{j1} + a_{i2}c_{j2} + \dots + a_{in}c_{jn}$$

حال اگر  $j = i$  آنگاه  $b_{ij}$  بسط  $|A|$  روی سطر  $i$ ام است و اگر  $j \neq i$  باشد  $b_{ij}$  بسط دترمینان ماتریسی است که از جایگزینی  $j$ امین سطر ماتریس  $A$  در سطر  $i$ ام به دست آمده است. یعنی ماتریسی که دارای دو سطر برابر است و به وضوح دترمینان یک چنین ماتریسی صفر است. پس

$$b_{ij} = \begin{cases} |A|, & \text{اگر } j = i \\ 0, & \text{اگر } j \neq i \end{cases}$$

بنابراین ماتریس  $A \cdot \text{adj}(A)$  ماتریسی است قطری که تمام درایه‌های قطر آن  $|A|$  می‌باشد. با فاکتورگیری از عدد  $|A|$  این ماتریس به صورت  $|A|I_n$  درمی‌آید. بنابراین

$$A \cdot \text{adj}(A) = |A|I_n.$$

و چون می‌دانیم  $|A| \neq 0$  معادله بالا را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم.

$$A \cdot \left( \frac{1}{|A|} \text{adj}(A) \right) = I_n$$

به طریق مشابه می‌توان نشان داد که

$$\left( \frac{1}{|A|} \text{adj}(A) \right) \cdot A = I_n$$



■ بنابراین  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$  و قضیه ثابت می‌گردد.

اهمیت این قضیه در این است که فرمولی برای محاسبه هر ماتریس مربعی نامنفرد در اختیار می‌گذارد که برای گسترش مفاهیم نظری مفید خواهد بود. الگاریتم گوس - جردن در فصول قبل معرفی شد روش کاراتری را نسبت به این فرمول برای محاسبه معکوس یک ماتریس بخصوص ارایه می‌داد هر چند که روش حذفی گوس - جردن را نمی‌توان برای محاسبه معکوس هر ماتریس دلخواهی به کار گرفت.

قضیه‌ی زیر که در واقع مکمل قضیه بالاست بیان می‌دارد که ماتریس‌های نامنفرد دقیقاً همان‌هایی هستند که معکوس پذیرند.

**۲-۴-۳ قضیه:** یک ماتریس مربعی  $n \times n$ ،  $A$  معکوس پذیر است اگر و فقط اگر  $|A| \neq 0$ .

اثبات: فرض کنید  $A$  معکوس پذیر است در این صورت  $AA^{-1} = I_n$  در نتیجه  $|AA^{-1}| = |I_n|$  و با استفاده از خواص دترمینان  $|A||A^{-1}| = 1$  و بنابراین  $|A| \neq 0$ .

بالعکس فرض کنیم  $|A| \neq 0$ ، بنابر قضیه ۱-۴-۳ معکوس پذیر است.

مثال ۲: با کاربرد مفهوم دترمینان مشخص کنید که کدامیک از ماتریس‌های زیر معکوس پذیرند.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ - & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 4 & 12 & -7 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

حل:  $C$  منفرد است و معکوس پذیر نیست زیرا  $|C| = 0$ .  $A$  معکوس پذیر است چون که  $|A| = 2 \neq 0$ .

$D$  معکوس پذیر است زیرا  $|D| = 27 \neq 0$ .  $B$  منفرد است و معکوس پذیر نیست  $|B| = 0$ .

مثال ۳: با استفاده از فرمول معکوس یک ماتریس، معکوس ماتریس زیر را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

حل: با محاسبه دترمینان این ماتریس می‌بینیم که  $|A| = ۱۴$  پس  $A$  معکوس پذیر است.  $\text{adj}(A)$  قبلاً در مثال ۱ معین شده است و عبارت است از:

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} ۵ & -۶ & ۳ \\ ۳ & ۲ & -۱ \\ -۱ & -۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

در نتیجه داریم:

$$A^{-1} = \frac{1}{14} \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} \frac{5}{14} & -\frac{6}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{3}{14} & \frac{2}{14} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{1}{14} & \frac{4}{14} & \frac{5}{14} \end{bmatrix}$$

حال رابطه مابین وجود یکتایی جواب یک دستگاه  $n$  معادله و  $n$  مجهول را با ماتریس ضرایب آن دستگاه بررسی می‌کنیم.

**۳-۴-۳ قضیه:** فرض کنیم  $AX = b$  یک دستگاه معادله،  $n$  مجهولی با  $n$  معادله باشد. اگر  $|A| \neq 0$  آنگاه یک جواب منحصر بفرد برای این دستگاه وجود دارد در صورتی که  $|A| = 0$  دستگاه ممکن است هیچ جوابی نداشته باشد و یا دارای بی‌نهایت جواب باشد.

اثبات: اگر  $|A| \neq 0$  طبق قضیه ۳-۴-۳،  $A^{-1}$  وجود دارد و طبق قضیه ۳-۴-۳ جواب منحصر بفرد عبارت خواهد بود از

$$X = A^{-1}b$$

اگر  $|A| = 0$  هر ماتریسی که با عملیات سطری از ماتریس  $A$  حاصل شود و بخصوص ماتریس فرم پلکانی  $A$  باید دارای دترمینان صفر باشد (۳-۲). بنابراین فرم پلکانی  $A$  برابر  $I_n$  نیست پس جواب دستگاه معادلات  $AX = b$  یکتا نیست. ■

مثال ۴: طی ارایه دو دستگاه معادلات زیر که ماتریس ضرایبشان منفرد است ملاحظه می‌کنیم که ممکن است این نوع دستگاه جوابی نداشته باشد و یا دارای بی‌نهایت جواب باشد.

$$\begin{array}{ll} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 3 & 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2 & x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{array}$$

ستون اول جواب ندارد و ستون دوم بی‌نهایت جواب دارد که عبارتند از:

$$x_3 = r \quad x_2 = 2r \quad x_1 = r + 1, \quad r \in \mathbb{R}$$

مثال ۵: مشخص کنید که آیا دستگاه معادله زیر دارای جواب منحصر بفرد است یا نه؟

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = -5 \\ 7x_1 + 4x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$$

حل: دترمینان ماتریس ضرایب این دستگاه را محاسبه می‌کنیم و می‌بینیم که

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

بنابراین دستگاه معادله بالا دارای جوابی منحصر بفرد نیست.

حال روشی را معرفی می‌کنیم که به قاعده کرامر موسوم است و برای حل دستگاهی با  $n$  معادله و  $n$  مجهول به کار می‌رود که دارای یک جواب منحصر بفرد است. این قاعده از لحاظ نظری بدین جهت دارای اهمیت است که فرمولی برای حل دستگاههای معادلات به دست می‌دهد.

**۴-۴-۳ قضیه (قاعده کرامر):** فرض کنیم  $AX = b$  دستگاهی با  $n$  معادله با  $n$  معادله و  $n$  مجهول است به طوری که  $|A| \neq 0$  در این صورت دستگاه دارای جوابی منحصر بفرد است که توسط فرمول زیر ارایه می‌شود:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad \dots \quad x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

که به ازای هر  $i$ ،  $A_i$  ماتریسی است که با جایگزینی ستون  $i$  ام  $A$  به وسیله  $B$  به دست آمده است.

اثبات: از آنجا که  $|A| \neq 0$  دستگاه فوق دارای جواب منحصر بفرد است.

$$X = A^{-1}b = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)b$$

به طوری که  $x_i$ ،  $i$ امین عضو  $X$  به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{|A|} [\text{adj}(A) \text{م}i] \times b \\ &= \frac{1}{|A|} [C_{1i}, C_{2i}, \dots, C_{ni}] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{|A|} (b_1 C_{1i} + b_2 C_{2i} + \dots + b_n C_{ni}) \end{aligned}$$

عبارت داخل پرانتز عبارت است از بسط همساز  $|A_i|$  بر حسب ستون  $i$ ام آن و بنابراین

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

مثال ۶: با استفاده از قاعده کرامر دستگاه معادله زیر را حل کنید:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = -2$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 = -5$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

حل: ماتریس  $A$  ماتریس ضرایب و ماتریس  $b$  ماتریس مقادیر ثابت به صورت زیر هستند:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

می‌توان به آسانی نشان داد که  $|A| = -3 \neq 0$  و در نتیجه قاعده کرامر را می‌توان به کار گرفت.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

که با محاسبه‌ای ساده می‌بینیم که  $|A_1| = -3$ ،  $|A_2| = 6$ ،  $|A_3| = -9$ . و در این صورت قاعده کرامر

مجهولات را به صورت زیر مشخص می‌کند:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-3}{-3} = 1 \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{6}{-3} = -2 \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-9}{-3} = 3$$

و جواب منحصر بفرد عبارت است از  $x_1 = 1$ ،  $x_2 = -2$  و  $x_3 = 3$ .

بسیار مهم است که دانشجو قاعده کرامر را با حل چندین دستگاه معادلات مختلف به خاطر بسپارد ولی تأکید بر این نکته کاملاً ضروری است که قاعده کرامر فقط برای حل دستگاه معادلاتی به کار می‌رود که دارای جواب منحصر بفرد هستند. البته در عمل برای حل یک دستگاه معادلات معمولاً از قاعده کرامر استفاده نمی‌شود. روش گوس - جردن و روش حذفی گوس که در بخش ۹-۱ معرفی شده‌اند برای حل یک دستگاه معادلات کارآمدتر هستند. جالب است بدانید که برای حل یک دستگاه معادلات با  $n$  معادله و  $n$  مجهول روش حذفی گوس از  $\frac{1}{2}n^2 + n^2 - \frac{1}{2}n^2 = \frac{5}{2}n^2$  عمل ضرب و  $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{2}n^2 = -\frac{3}{2}n^2$  عمل جمع استفاده می‌کند در حالی که این مقادیر برای حل یک چنین دستگاه معادله‌ای با روش کرامر  $1 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n^2 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 1$  عمل ضرب و  $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n^2 = \frac{1}{2}n^2$  عمل جمع می‌باشد. این بدان معناست که برای حل یک دستگاه معادلات با ۴ معادله و ۴ مجهول به روش قاعده حذفی گوس ۳۶ عمل ضرب و ۲۶ عمل ضرب و ۲۶ عمل جمع به کار گرفته می‌شود و همین دستگاه به روش قاعده کرامر به ترتیب با ۱۱۵ عمل ضرب و ۷۰ عمل جمع حل می‌گردد. در نتیجه کامپیوترها ترجیح می‌دهند که از روش حذفی گوس - جردن استفاده کنند!

قضیه ۲-۸ نتیجه می‌دهد که حل یک دستگاه معادلات خطی با  $n$  معادله و  $n$  مجهول  $AX = b$  دارای جوابی منحصر بفرد است اگر و فقط اگر  $|A| \neq 0$ . دستگاه همگن  $AX = 0$  را در نظر بگیرید می‌بینیم که  $X = 0$  یک جواب این دستگاه است، این جواب را یک جواب بدیهی می‌نامیم اگر قرار باشد که از این دستگاه انتظار جواب غیر بدیهی داشته باشیم (همان طور که در اغلب مواقع پیش می‌آید) باید  $|A| = 0$ . مثال زیر نمونه‌ای از این حالت است.

مثال ۷: مقادیر  $\lambda$  را طوری به دست آورید که دستگاه معادله زیر دارای جواب غیر بدیهی باشد و به ازای هر  $\lambda$ ، جوابهای غیر بدیهی را به دست آورید.

$$(\lambda + 2)x_1 + (\lambda + 4)x_2 = 0$$

$$2x_1 + (\lambda + 1)x_2 = 0$$

حل: دستگاه بالا یک دستگاه معادلات خطی همگن است و بنابراین جواب بدیهی  $x_1 = 0$  و  $x_2 = 0$  یک جواب این دستگاه است. قضیه ۳-۸ بیان می‌دارد که اگر دترمینان ماتریس ضرایب این دستگاه برابر صفر باشد ممکن است این دستگاه جواب غیر بدیهی نیز داشته باشد پس دترمینان این دستگاه

را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix} \lambda + 2 & \lambda + 4 \\ 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda + 1) - 2(\lambda + 4) = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \implies (\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0$$

بنابراین دترمینان ضرایب صفر است اگر  $\lambda = -3$  و یا  $\lambda = 2$ ، برای  $\lambda = -3$  معادله به صورت زیر خواهد بود.

$$-x_1 + x_2 = 0$$

$$2x_1 - 2x_2 = 0$$

که به ازای هر عدد حقیقی  $r$ ،  $x_1 = r$  و  $x_2 = r$  یک جواب است. هم‌چنین اگر  $\lambda = 2$  دستگاه معادله زیر را به دست می‌آوریم:

$$4x_1 + 6x_2 = 0$$

$$2x_1 + 3x_2 = 0$$

این دستگاه نیز به ازای هر عدد حقیقی  $r$  دارای جواب  $x_1 = r$  و  $x_2 = -\frac{2}{3}r$  است.

### ۱-۴-۳ تمرین

(۱) با استفاده از مفهوم دترمینان بدون محاسبه معکوس ماتریس‌های زیر، تعیین کنید کدام یک معکوس پذیرند.

$$\begin{array}{ll} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \text{ (د)} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ (ج)} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ (ح)} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ (ز)} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \text{ (ب)} & \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \text{ (الف)} \\ \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ (و)} & \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ (ه)} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \text{ (ی)} & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ (ط)}$$

(۲) با استفاده از مفهوم دترمینان و بدون محاسبه معکوس ماتریس‌های زیر تعیین کنید کدام یک معکوس‌پذیرند.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ (د)}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 7 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ (ج)}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ (ب)}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ (الف)}$$

(۳) تعیین کنید کدام یک از ماتریس‌های زیر معکوس‌پذیرند و معکوس آنهایی را که معکوس‌پذیر هستند به دست آورید.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (د)}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \text{ (ج)}, \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ (ب)}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ (الف)}$$

(۴) تعیین کنید کدام یک از ماتریس‌های زیر معکوس‌پذیرند و معکوس آنهایی را که معکوس‌پذیر هستند به دست آورید.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ (د)}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & 6 \\ 0 & 13 & 8 \end{pmatrix} \text{ (ج)}, \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ (ب)}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ (الف)}$$

(۵) با استفاده از قاعده کرامر دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } x_1 - x_2 = 2, x_1 + 2x_2 = 11$$

$$\text{ب) } 2x_1 + x_2 = 15, x_1 - 5x_2 = 2$$

$$\text{ج) } 2x_1 + 3x_2 = 1, 3x_1 + 2x_2 = 0$$

(۶) با استفاده از قاعده کرامر دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } x_1 + 3x_2 - x_3 = 9 \quad \text{ب) } x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 5 \quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$$

$$x_1 - 2x_2 = 0 \quad x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$$

$$\text{ج) } 8x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \quad \text{د) } x_1 + x_2 - x_3 = 20$$

$$2x_1 - x_2 + 6x_3 = 3 \quad 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0$$

$$6x_1 + x_2 + 4x_3 = 3 \quad 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0$$

(۷) با محاسبه دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه معادلات زیر مشخص کنید کدام دستگاه دارای جواب منحصر بفرده است.

$$\text{الف) } -6x_1 + 4x_2 = 3, 3x_1 - 2x_2 = 1$$

$$\text{ب) } x_1 - 2x_2 = 5, x_1 + 2x_2 = 0$$

$$\text{ج) } x_1 - x_2 = 2, \quad -3x_1 + 3x_2 = -6$$

۸) با محاسبه دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه معادلات زیر مشخص کنید کدام دستگاه دارای جواب منحصر بفرد است.

$$\text{الف) } x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \quad \text{ب) } x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \text{ج) } x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$x_1 - x_2 = 1 \quad x_1 - x_2 - x_3 = 1 \quad -x_1 + x_2 - 5x_3 = 1$$

$$2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0 \quad 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 4 \quad 4x_1 - 2x_2 + 1x_3 = -2$$

۹) به ازای چه مقادیری از  $\lambda$  دستگاه معادلات زیر دارای جواب غیربدیهی است. به ازای یک چنین  $\lambda$  ای جوابهای غیربدیهی دستگاه را به دست آورید.

$$(1 - \lambda)x_1 + 6x_2 = 0$$

$$5x_1 + (2 - \lambda)x_2 = 0$$

۱۰) به ازای چه مقادیری از  $\lambda$  دستگاه معادلات زیر دارای جواب غیربدیهی است. به ازای یک چنین  $\lambda$  ای جوابهای غیربدیهی دستگاه را به دست آورید.

$$(\lambda - 3)x_1 - 8x_2 = 0$$

$$2x_1 + (\lambda + 5)x_2 = 0$$

۱۱) به ازای چه مقادیری از  $\lambda$  دستگاه معادلات زیر دارای جواب غیربدیهی است. به ازای یک چنین  $\lambda$  ای جوابهای غیربدیهی دستگاه را به دست آورید.

$$(\lambda - 5)x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0$$

$$4x_1 + (\lambda - 5)x_2 + 2x_3 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 + (2 - \lambda)x_3 = 0$$

۱۲) فرض کنید  $AX = \lambda X$  یک دستگاه معادلات با  $n$  معادله و  $n$  مجهول باشد. ثابت کنید این دستگاه دارای جوابهای غیربدیهی است اگر و فقط اگر  $|A - \lambda I_n| = 0$ .

۱۳) نشان دهید که اگر  $A$  ماتریس مربعی متقارن باشد آنگاه  $\text{adj}(A)$  نیز متقارن است.

۱۴) نشان دهید که اگر ماتریس مربعی  $A$  معکوس پذیر نباشد  $\text{adj}(A)$  نیز معکوس پذیر نیست.



۱۵) نشان دهید که اگر ماتریس مربعی  $A$  معکوس پذیر باشد  $\text{adj}(A)$  نیز معکوس پذیر بوده و معکوس آن به صورت زیر است:

$$(\text{adj}(A))^{-1} = \frac{1}{|A|}A$$

۱۶) اگر  $A$  ماتریس مربعی معکوس پذیر باشد نشان دهید  $(\text{adj}(A))^{-1} = \text{adj}(A^{-1})$ .

۱۷) نشان دهید که اگر  $A$  و  $B$  هر دو ماتریس‌های  $n \times n$  باشند به طوری که  $AB$  معکوس پذیر باشد آنگاه  $A$  و  $B$  هر دو معکوس پذیرند. آیا عکس این مطلب صحیح است.

۱۸) نشان دهید که اگر ماتریس معکوس پذیر  $A$  و بالامثلشی باشد  $A^{-1}$  نیز بالامثلشی است.

۱۹) فرض کنید  $A$  ماتریس مربعی باشد که تمام درایه‌های آن عدد صحیح هستند و  $|A| = \pm 1$  در این صورت ثابت کنید درایه‌های  $A^{-1}$  نیز اعداد صحیح هستند.

۲۰) فرض کنید  $AX = 0$  دستگاه معادلات همگن با  $n$  معادله و  $n$  مجهول باشد به طوری که فقط جواب بدیهی دارد. ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی  $k$ ،  $A^k X = 0$  نیز فقط دارای جواب بدیهی است.

۲۱) فرض کنید دو دستگاه معادلات  $AX = b_1$  و  $AX = b_2$  دستگاه‌های  $n$  معادله و  $n$  مجهول باشند که ماتریس ضرایب هر دو  $A$  است. ثابت کنید  $AX = b_1$  دارای جواب منحصر بفرد است اگر و فقط اگر  $AX = b_2$  دارای جواب منحصر بفرد باشد.

## هدف‌های رفتاری فصل چهار

- معرفی  $\mathbb{R}^n$  به عنوان یک فضای برداری
- شناخت هندسه  $\mathbb{R}^2$  و  $\mathbb{R}^3$  و تعمیم مفاهیم هندسی آن به فضای کلی  $\mathbb{R}^n$
- استفاده از مفاهیم ماتریس‌ها و دستگاه‌های معادلات خطی در مباحث مربوط به  $\mathbb{R}^n$

## هدف‌های آموزشی و رفتاری فصل

دانشجو پس از مطالعه این فصل باید بتواند

- ماهیت برداری  $\mathbb{R}^n$  را شناخته و خواص جبری آنها را توضیح دهد.
- مفاهیم بردار سطری، بردار ستونی و نرم بردار را تعریف کرده و برای هر یک مثال‌هایی ارائه دهد.
- نامساوی کوشی - شوارتز را بیان کرده و از عهده‌ی اثبات آن برآید.
- مفاهیم زاویه بین دو بردار را برحسب کسینوس آن تعریف کرده و دو بردار متعامد را تعریف کند.
- نامساوی مثلث و قضیه فیثاغورس را در  $\mathbb{R}^n$  بیان و اثبات کند.
- ویژگی‌های نرم و ویژگی‌های فاصله را ذکر کرده و با هم مقایسه کند.
- مفهوم تبدیل خطی را تعریف و برای آن مثال‌هایی ارائه دهد.
- شکل ماتریس یک تبدیل خطی را بنویسید.
- تبدیلات ماتریسی، گرافیک کامپیوتری و فرکتالها را توضیح دهد.
- تبدیلات نامفرد را تعریف کرده و ویژگی‌های آن را به لحاظ هندسی بیان کند.
- از تصاویر هندسی فرکتالها در طبیعت درک و آشنایی داشته باشد.

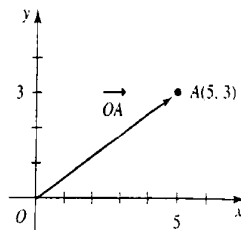
## فصل چهارم

### فضای برداری $\mathbb{R}^n$

در این قسمت درس ماهیت هندسی می‌گیرد فضاهای دوبعدی و سه‌بعدی را بررسی می‌کنیم که به فضاهای  $n$  بعدی منجر می‌شوند. ماتریس‌ها و دستگاه معادلات خطی ابزارهای باارزشی برای این بررسی خواهند بود.

#### ۱-۴ مقدمه بر بردارها

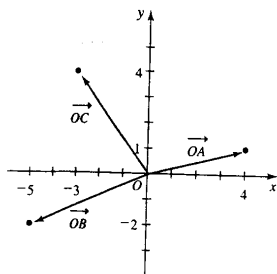
موقعیت نقاط در یک صفحه معمولاً برحسب سیستم مختصات مورد بررسی قرار می‌گیرد. به عنوان مثال، در شکل ۱-۴، مکان هر نقطه در صفحه می‌تواند با استفاده از سیستم مختصات قائم بررسی شود. نقطه  $A$ ، نقطه  $(5, 3)$  است.



شکل ۱-۴

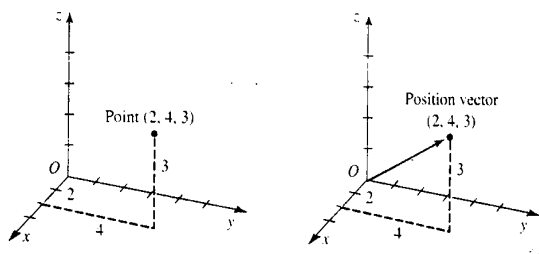
به علاوه،  $A$  به فاصله معینی از مبدأ  $(0, 0)$  و در جهت معینی از آن می‌باشد. فاصله و جهت، توسط درازا و جهت پاره‌خط از مبدأ  $O$  به  $A$  مشخص می‌شود. چنین پاره‌خط جهت‌دار را بردار مکان نامیده و آن را با  $\vec{OA}$  نشان می‌دهیم.  $O$  نقطه ابتدا و  $A$  نقطه‌ی انتهای  $\vec{OA}$  نامیده می‌شود. بنابراین دو نوع تعبیر برای  $(5, 3)$  وجود دارد، یکی این که مکان یک نقطه را در صفحه تعریف می‌کند، دوم آن که بردار مکان  $\vec{OA}$  را بیان می‌کند.

مثال ۱: بردارهای مکانی  $\vec{OA} = (4, 1)$ ،  $\vec{OB} = (-5, -2)$  و  $\vec{OC} = (-3, 4)$  را رسم کنید. شکل ۲-۴ را ببینید.



شکل ۲-۴

مجموعه‌ی تمامی زوج‌های مرتب از اعداد حقیقی را با  $R^2$  نشان می‌دهیم. توجه داشته باشید که به عنوان مثال  $(5, 3)$  همان بردار  $(3, 5)$  نیست. ترتیب حائز اهمیت است. این مفاهیم می‌تواند به آرایه‌های سه تایی از اعداد حقیقی مانند  $(2, 4, 3)$  توسعه یابد که برای آن دو تعبیر ممکن بیان شود، به عنوان مکان یک نقطه در سه فضا نسبت به دستگاه مختصات  $x, y, z$  یا به عنوان یک بردار مکان. این تعبیر در شکل ۳-۴ نشان داده شده‌اند. مجموعه‌ی تمامی سه تایی‌های مرتب از اعداد حقیقی را با  $R^3$  نشان می‌دهیم.



شکل ۳-۴

حال این مفاهیم را با تعریف زیر کلیت می‌دهیم.

**۱-۱-۴ تعریف:** فرض کنیم  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  دنباله‌ای از  $n$  عدد حقیقی باشد. مجموعه‌ی تمامی این چنین دنباله‌ها  $n$ -فضا نامیده و با  $R^n$  نشان می‌دهیم.  $u_1$  مؤلفه اول،  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  مؤلفه دوم و به همین ترتیب نامیده می‌شود.

بسیاری از نتایج و فنونی را که در حالت  $n > 3$  برای  $R^n$  به دست می‌آوریم، صرف‌نظر از اهمیت مستقیم هندسی، ابزارهای مفید ریاضی خواهند بود. با وجود این، عناصر  $R^n$  می‌توانند به عنوان نقاط به عنوان بردارهای مکانی در  $n$ -فضا در نظر گرفته شوند. برای  $n > 3$ ، تصور  $n$ -فضا مشکل است، اما خواننده تشویق می‌شود تا سعی کند یک تصویر ذاتی در ذهنش بسازد. یک «احساس» هندسی برای آن چه که اتفاق می‌افتد اغلب بحث جبری را برای ادامه آسان‌تر می‌کند. ریاضیاتی را که در  $R^n$  توسعه خواهیم داد از هندسه‌ای نشأت می‌گیرند که در  $R^2$  و  $R^3$  با آن آشنا هستیم. با این طرح، فرض کنیم که  $R$  نشانگر اعداد حقیقی باشد.

**مثال ۲:**  $R^4$  گردایه‌ی تمامی مجموعه‌های ۴ عضوی مرتب از اعداد حقیقی است. به عنوان مثال  $(1, 2, 3, 4)$  و  $(5, 0, \frac{2}{3}, -1)$  عضوهایی از  $R^4$  می‌باشند.  $R^5$ ، گردایه‌ی تمامی مجموعه‌های ۵ عضوی مرتب از اعداد حقیقی است. و به عنوان مثال  $(9, \frac{5}{8}, 0, 2, -1)$  در این گردایه قرار دارد.

**۲-۱-۴ تعریف:** فرض کنیم  $u = (u_1, \dots, u_n)$  و  $v = (v_1, \dots, v_n)$  دو عضو از  $R^n$  باشند. می‌گوییم  $u$  و  $v$  مساوی هستند اگر  $u_1 = v_1, \dots, u_n = v_n$ . بنابراین دو عضو  $R^n$  مساوی هستند هرگاه مؤلفه‌های متناظر آن‌ها با هم برابر باشند.

حال ساختار جبری  $R^n$  را می‌سازیم. تعریف‌های زیر برای جمع و ضرب اسکالر، شبیه اعمال ماتریس‌ها هستند. هم‌چنین خواهیم دید که ویژگی‌های جبری نیز مشابه هستند.

**۳-۱-۴ تعریف:** فرض کنیم  $u = (u_1, \dots, u_n)$  و  $v = (v_1, \dots, v_n)$  دو عضو  $R^n$  و  $c$  یک اسکالر باشد. جمع و ضرب اسکالر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u + v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) \quad \text{جمع:}$$

$$cu = (cu_1, \dots, cu_n) \quad \text{ضرب اسکالر:}$$

در جمع دو عضو  $R^n$ ، مؤلفه‌های متناظر را با هم جمع می‌کنیم و برای ضرب عضوی از  $R^n$  در یک اسکالر، هر مؤلفه را در همان اسکالر ضرب می‌کنیم. توجه داشته باشید که عناصر به دست آمده در  $R^n$  هستند و

می‌گوییم که  $R^n$  نسبت به اعمال جمع و ضرب اسکالر بسته است.  $R^n$  با اعمال جمع مؤلفه‌وار و ضرب اسکالر مثالی از یک فضای برداری است و اعضای آن بردار نامیده می‌شوند. از این به بعد،  $R^n$  را به عنوان یک فضای برداری در نظر خواهیم گرفت.

مثال ۳: فرض کنیم  $u = (-1, 4, 3, 7)$  و  $v = (-2, -3, 1, 0)$  بردارهایی در  $R^4$  باشند.  $u + v$  و  $3u$  را بیابید.

حل: داریم:

$$u + v = (-1, 4, 3, 7) + (-2, -3, 1, 0) = (-3, 1, 4, 7)$$

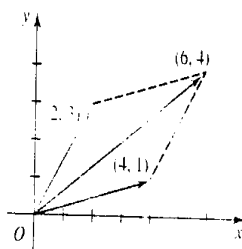
$$3u = 3(-1, 4, 3, 7) = (-3, 12, 9, 21)$$

توجه داشته باشید که بردارهای حاصل تحت هر یک از اعمال، بردارهایی از فضای برداری  $R^4$  می‌باشند. حال مثال‌هایی را برای بیان تعبیر هندسی این بردارها و اعمال آن می‌آوریم.

مثال ۴: این مثال تعبیری هندسی از جمع بردارها را بیان می‌کند. جمع بردارهای  $(4, 1)$  و  $(2, 3)$  را در نظر بگیرید. داریم:

$$(4, 1) + (2, 3) = (6, 4)$$

در شکل ۴-۴ این بردارها را به صورت بردارهای مکانی در نظر می‌گیریم. جمع دو بردار یعنی  $(6, 4)$ ، قطر متوازی‌الاضلاعی است که بردارهای  $(4, 1)$  و  $(2, 3)$  دو ضلع مجاور آن می‌باشد.



شکل ۴-۴

در حالت کلی اگر  $u$  و  $v$  بردارهایی در یک فضای برداری باشند، آنگاه  $u + v$ ، قطر متوازی‌الاضلاعی است که توسط  $u$  و  $v$  تعریف می‌شود. شکل ۴-۵ را ببینید. (از حروف پررنگ (boldface) برای نشان دادن بردارها و از حروف ساده (plain) برای نشان دادن اسکالرها استفاده خواهیم کرد.) این روش نشان دادن جمع بردارها، در تمامی فضاهای برداری سودمند است.

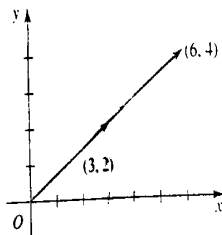


شکل ۵-۴

مثال ۵: این مثال تعبیری هندسی از ضرب اسکالر است. ضرب عدد ۲ در بردار  $(۳, ۲)$  را در نظر بگیرید. داریم:

$$۲(۳, ۲) = (۶, ۴)$$

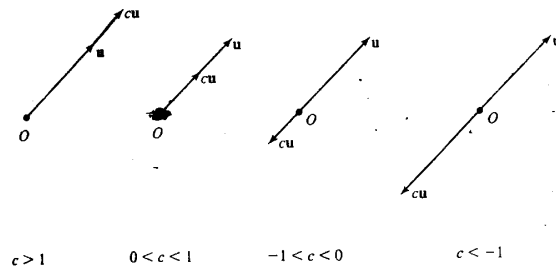
در شکل ۶-۴ ملاحظه می‌کنیم که  $(۶, ۴)$  برداری هم‌جهت با بردار  $(۳, ۲)$  بوده و طول آن ۲ برابر طول بردار  $(۳, ۲)$  است.



شکل ۶-۴

جهت بردار حاصل ضرب به علامت عدد بستگی دارد. نتیجه کلی به صورت زیر است.

فرض کنیم  $u$  یک بردار و  $c$  یک عدد باشد. اگر  $c > 0$ ،  $cu$  هم‌جهت با بردار  $u$  و اگر  $c < 0$ ،  $cu$  در خلاف جهت بردار  $u$  می‌باشد. طول بردار  $cu$ ،  $|c|$  برابر طول بردار  $u$  است. شکل ۷-۴ را ببینید.



شکل ۷-۴

**بردار صفر** بردار  $(0, 0, \dots, 0)$  که  $n$  مؤلفه‌اش صفر می‌باشد، بردار صفر  $\mathbb{R}^n$  نامیده و با  $0$  نشان داده می‌شود. برای مثال، بردار صفر  $\mathbb{R}^3$  می‌باشد. ملاحظه خواهیم کرد که بردار صفر نقش اساسی در توسعه فضاهای برداری خواهد داشت.

**بردار قرینه**<sup>۱</sup>: بردار  $(-1)u$  که به صورت  $-u$  نوشته می‌شود، قرینه  $u$  نامیده می‌شود و برداری است که طول آن برابر با طول بردار  $u$  ولی جهت آن در خلاف جهت  $u$  می‌باشد.

**تفاضل**: تفاضل روی عناصر  $\mathbb{R}^n$  با کم کردن مؤلفه‌های متناظر صورت می‌گیرد. برای مثال در  $\mathbb{R}^3$ ،  
 $(3, 2, -9) = (2, 1, 3) - (5, 3, -6)$ . توجه کنید که این عمل معادل است با

$$(5, 3, -6) + (-1)(2, 1, 3) = (3, 2, -9)$$

بنابراین تفاضل عمل جدیدی روی  $\mathbb{R}^n$  نیست بلکه ترکیبی از جمع و ضرب اسکالر در  $-1$  است. فقط دو عمل مستقل روی  $\mathbb{R}^n$  داریم، جمع و ضرب اسکالر.

**۴-۱-۴ قضیه:** فرض کنیم  $u$  و  $v$  و  $w$  بردارهایی در  $\mathbb{R}^n$ ،  $c$  و  $d$  اسکالر باشند.

الف)  $u + v = v + u$

ب)  $u + (v + w) = (u + v) + w$

پ)  $u + 0 = 0 + u = u$

ت)  $u + (-u) = 0$

ث)  $c(u + v) = cu + cv$

ج)  $(c + d)u = cu + du$

1) Negative vector



$$c(\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u} \quad \text{ج}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u} \quad \text{ح}$$

درستی این نتایج با نوشتن بردارها برحسب مؤلفه‌ها و با استفاده از تعاریف جمع و ضرب اسکالر بردارها و ویژگی‌های اعداد حقیقی، بررسی می‌شود. اثبات الف و پ را بیان می‌کنیم.

فرض کنیم  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  و  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ . در این صورت

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} :$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n) \\ &= (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) \\ &= (v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n) \\ &= \mathbf{v} + \mathbf{u} \end{aligned}$$

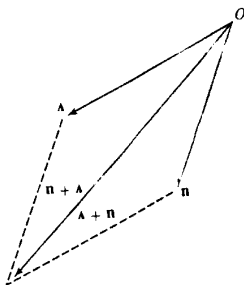
$$c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v};$$

$$\begin{aligned} c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= c((u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n)) \\ &= c((u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)) \\ &= (c(u_1 + v_1), \dots, c(u_n + v_n)) \\ &= (cu_1 + cv_1, \dots, cu_n + cv_n) \\ &= (cu_1, \dots, cu_n) + (cv_1, \dots, cv_n) \\ &= c\mathbf{u} + c\mathbf{v} \end{aligned}$$

برخی از احکام قضیه بالا می‌تواند به طور هندسی توسط شکل توضیح داده شود. ویژگی جابجایی جمع بردارها در شکل ۸-۴ نشان داده شده است.

توجه داشته باشید که قطر متوازی‌الاضلاع در هر دو جمع بردار  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  و  $\mathbf{v} + \mathbf{u}$  یکی است. یکی از نکات (ب) در بالا، این است که در نوشتن برخی از عبارات‌های جبری که شامل بردارها می‌باشند شبیه عبارات‌های ماتریس، می‌توانیم پارامترها را ننویسیم.

### جابجایی جمع بردارها



شکل ۴-۸

مثال ۶: فرض کنیم  $u = (2, 5, -3)$ ،  $v = (-4, 1, 9)$  و  $w = (4, 0, 2)$  بردار  $2u - 3v + w$  را تعیین کنید.

حل: داریم:

$$\begin{aligned} 2u - 3v + w &= 2(2, 5, -3) - 3(-4, 1, 9) + (4, 0, 2) \\ &= (4, 10, -6) - (-12, 3, 27) + (4, 0, 2) \\ &= (4 + 12 + 4, 10 - 3 + 0, -6 - 27 + 2) \\ &= (20, 7, -31) \end{aligned}$$

کمیت‌های فیزیکی مانند نیرو و سرعت که دارای مقدار و جهت هستند، بردار می‌باشند. و می‌توانند به وسیله‌ی عناصری از  $R^2$  و  $R^3$  به طور ریاضی نشان داده شوند. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۷: اگر همه نیروهایی که روی یک جسم اثر می‌کنند در یک صفحه قرار داشته باشند، می‌توانند توسط عناصری از  $R^2$  نشان داده شوند و اگر در سه بعدی قرار داشته باشند، می‌توانند توسط عناصری از  $R^3$  نشان داده شوند. دو نیرویی که به طور هم‌زمان روی یک جسم اثر می‌کنند معادل با یک نیرو هستند که نیروی برآیند نامیده می‌شود.

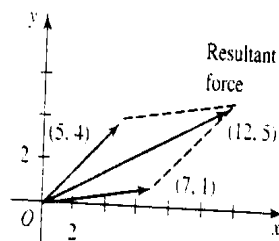
آزمایش‌ها نشان می‌دهد که اگر دو نیرو توسط عناصری از  $R^2$  یا  $R^3$  نشان داده شده باشند نیروی برآیند با جمع این دو بردار نشان داده می‌شود. این قانون، متوازی‌الاضلاع نیروها نامیده می‌شود. دیده‌ایم که این بردار حاصل جمع، قطر متوازی‌الاضلاعی است که بردارهای داده شده دو ضلع مجاور آن می‌باشند بنابراین اصطلاح متوازی‌الاضلاع نیروها بامعنی است.

فرض کنیم که یک جسم در مبداء سیستم مختصات قائم قرار گرفته باشد، دو نیرو که توسط  $(۵, ۴)$  و  $(۷, ۱)$  نشان داده شده‌اند روی آن اثر کنند، شکل ۹-۴ را ببینید. می‌خواهیم بردار برآیند و مقدار آن را بیابیم. با جمع  $(۵, ۴)$  و  $(۷, ۱)$  داریم:

$$(۵, ۴) + (۷, ۱) = (۱۲, ۵)$$

نیروی برآیند عبارت است از  $(۱۲, ۵)$ .

نیروی برآیند :



شکل ۹-۴

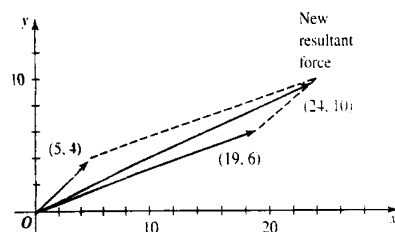
مقدار این نیرو توسط طول این بردار داده می‌شود و می‌تواند با استفاده از قضیه فیثاغورث محاسبه شود.

$$\text{طول } (۱۲, ۵) = \sqrt{۱۲^2 + ۵} = \sqrt{۱۴۴ + ۲۵} = \sqrt{۱۶۹} = ۱۳.$$

مقدار نیرو برآیند برابر ۱۳ است.

فرض کنیم می‌خواهیم که با ثابت نگه داشتن نیروی  $(۵, ۴)$  و تغییر نیروی  $(۷, ۱)$ ، مقدار نیروی برآیند را دو برابر کنیم، چگونه می‌توان این کار را انجام داد؟ از ضرب اسکالر استفاده می‌شود. نیروی برآیند جدید برابر  $۲(۱۲, ۵) = (۲۴, ۱۰)$  خواهد شد. این بردار هم جهت با  $(۱۲, ۵)$  بوده و طولش دو برابر آن است. شکل ۱۰-۴ را ببینید. ملاحظه می‌کنیم که:

$$(۲۴, ۱۰) = (۵, ۴) + (۱۹, ۶)$$



شکل ۴-۱۰

برای دو برابر کردن نیروی برآیند روی جسم، نیروی  $(7, 1)$  باید با نیروی  $(19, 6)$  جایگزین شود.

**بردارهای ستونی** تا به حال فقط بردارهای سطری را بررسی کرده‌ایم که بردارهایی هستند که مؤلفه‌های آن‌ها به صورت سطری نوشته می‌شوند. خواهیم دید که گاهی اوقات استفاده از بردارهای ستونی که مؤلفه‌ها به صورت ستونی نوشته می‌شوند، مناسب‌تر است. مجدداً جمع و ضرب اسکالر بردارهای ستونی در  $\mathbb{R}^n$  به روش مؤلفه‌ای تعریف می‌شود:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}, \quad c \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cu_1 \\ \vdots \\ cu_n \end{bmatrix}$$

به عنوان مثال در  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad 4 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \end{bmatrix}$$

#### ۵-۱-۴ تمرین

۱) بردارهای مکانی  $(1, 0)$  و  $(0, 1)$  را در  $\mathbb{R}^2$  رسم کنید. در علوم اغلب نماد  $i$  و  $j$  برای این بردارها به کار برده می‌شود.

۲) بردارهای مکانی  $(1, 0, 0)$  و  $(0, 1, 0)$  و  $(0, 0, 1)$  را در  $\mathbb{R}^3$  رسم کنید. در علوم اغلب نماد  $i, j$  و  $k$  برای این بردارها مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۳) بردارهای مکانی زیر را در  $\mathbb{R}^3$  رسم کنید.

$$\vec{OC} = (1, -3), \quad \vec{OB} = (-3, 2), \quad \vec{OA} = (5, 6) \text{ (الف)}$$

$$\vec{OR} = (3, -3), \quad \vec{OQ} = (-4, 5), \quad \vec{OP} = (2, 4) \text{ (ب)}$$

$$\mathbf{w} = (5, 3), \quad \mathbf{v} = (-1, -4), \quad \mathbf{u} = (1, 1) \text{ (پ)}$$

۴ بردارهای مکانی زیر را در  $R^3$  رسم کنید.

$$\vec{OC} = (-1, 3, 4), \quad \vec{OB} = (0, 5, -1), \quad (2, 3, 1) \text{ (الف)}$$

$$\mathbf{w} = (0, 0, -3), \quad \mathbf{v} = (-1, -2, -4), \quad \mathbf{u} = (1, 1, 1) \text{ (ب)}$$

۵ بردارها را با اعداد داده شده ضرب کنید:

$$\text{الف) } (3, (1, 4) \text{ (ب) } (-1, 3), -2$$

$$\text{پ) } (2, 6), \frac{1}{4} \text{ (ت) } (2, 4, 2), -\frac{1}{8}$$

$$\text{ث) } (-1, 2, 3), 3 \text{ (ج) } (-1, 2, 3, -2), 4$$

$$\text{چ) } (1, -4, 3, -2, 5), 3 \text{ (ح) } (3, 0, 4, 2, -1), 3$$

۶ عبارتهای زیر را برای بردارهای  $\mathbf{u} = (1, 2)$ ,  $\mathbf{v} = (4, -1)$  و  $\mathbf{w} = (-3, 5)$  محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \mathbf{u} + \mathbf{w} \text{ (ب) } \mathbf{u} + 3\mathbf{v}$$

$$\text{پ) } \mathbf{v} + \mathbf{w} \text{ (ت) } 2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} - \mathbf{w}$$

$$\text{ث) } -3\mathbf{u}, \mathbf{v} - 2\mathbf{w}$$

۷ عبارتهای زیر را برای بردارهای  $\mathbf{u} = (2, 1, 3)$ ,  $\mathbf{v} = (-1, 3, 2)$  و  $\mathbf{w} = (2, 4, -2)$  محاسبه

کنید.

$$\text{الف) } \mathbf{w} + \mathbf{w} \text{ (ب) } 2\mathbf{u} + \mathbf{v}$$

$$\text{پ) } \mathbf{u} + 3\mathbf{w} \text{ (ت) } 5\mathbf{u} - 2\mathbf{v} + 6\mathbf{w}$$

$$\text{ث) } 2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} - 4\mathbf{w}$$

۸ ویژگیهای زیر را در مورد جمع و ضرب اسکالرها که در این بخش معرفی شدند، اثبات کنید.

$$\text{الف) } u + (v + w) = (u + v) + w \text{ (ب) } u + (-u) = 0$$

$$\text{پ) } (c + d)u = cu + du \text{ (ت) } 1u = u$$

۹ هرگاه  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}$  و  $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  بردارهای ستونی در  $R^2$  باشند، عبارتهای زیر را

محاسبه کنید.

$$\text{الف) } u + 2v \text{ (ب) } -4v + 3w$$

$$\text{پ) } 3u - 2v + 4w \text{ (ت) } 2u + 3v - 8w$$

۱۰ برآیند نیروهای زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } (5, -5), (3, 2) \text{ (ب) } (-2, 3), (-1, 3) \text{ (پ) } (-3, 2), (9, -1)$$

۱۱ برآیند نیروهای زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } (1, 4, 6), (2, 5, 1) \text{ (ب) } (3, -1, 7), (-2, 5, -1)$$

۱۲) برآیند نیروهای  $(0, 3)$  و  $(3, 1)$  را بیابید. هرگاه  $(3, 1)$  ثابت نگه داشته شود، چگونه تغییر کند تا برآیند دو برابر شود؟

۱۳) برآیند نیروهای  $(2, 8)$  و  $(-1, 3)$  را بیابید. هرگاه برآیند به  $(2, 5)$  تغییر یابد و  $(-1, 3)$  ثابت نگه داشته شود، چگونه تغییر یابد؟

۱۴) کدام یک از کمیت‌های فیزیکی زیر بردار و کدام یک اسکالر است؟

الف) دما    ب) شتاب    پ) فشار    ت) فرکانس    ث) ثقل    ج) مکان    چ) زمان  
ح) صوت    خ) هزینه

## ۲-۴ حاصل ضرب نقطه‌ای، نرم، زاویه و فاصله

در حالی که هندسه‌ای برای فضای برداری  $R^n$  می‌سازیم، شما باید توجه دقیق به روشی که استفاده می‌کنیم داشته باشید. (البته ضمن آن‌که نتایج حاصله مهم هستند، روشی که به نتایج می‌رسیم مهم‌تر می‌باشند. مقدار، زاویه و فاصله برای  $R^n$  توسط تعمیم عبارت‌ها برای مقدار، زاویه و فاصله برای  $R^2$  تعریف می‌شوند. قضیه فیثاغورث را به  $R^n$  توسعه می‌دهیم. این فرآیند توسعه مفاهیم آشنا به حالت‌های کلی‌تر در ریاضیات، اساسی است.

بحث را با تعریف حاصل ضرب نقطه‌ای دو بردار شروع می‌کنیم. حاصل ضرب نقطه‌ای ابزاری است که در ساختن هندسه برای  $R^n$  استفاده می‌شود.

**تعریف:** فرض کنیم  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  و  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  دو بردار در  $R^n$  باشند. حاصل ضرب نقطه‌ای  $\mathbf{u}$  و  $\mathbf{v}$  که با  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  نشان داده می‌شود توسط رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

حاصل ضرب نقطه‌ای هر زوج از بردارها یک عدد حقیقی است.

مثال ۱: حاصل ضرب نقطه‌ای بردارهای  $\mathbf{u} = (1, -2, 4)$  و  $\mathbf{v} = (3, 0, 2)$  را بیابید.

حل: داریم:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1 \times 3) + (-2 \times 0) + (4 \times 2) = 2 + 0 + 8 = 11$$

ویژگی‌های حاصل ضرب نقطه‌ای: فرض کنید  $u, v, w$  بردارهایی در  $R^n$  و  $c$  یک عدد باشد. آنگاه

$$u \cdot v = v \cdot u \quad (\text{الف})$$

$$(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w \quad (\text{ب})$$

$$cu \cdot v = c(u \cdot v) = u \cdot (cv) \quad (\text{پ})$$

$$u \cdot u \geq 0 \quad \text{و} \quad u \cdot u = 0 \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad u = 0.$$

درستی بندهای الف و ت را بررسی کرده و بقیه را به تمرینات آتی واگذار می‌کنیم.

$$\text{الف) فرض کنید } u = (u_1, \dots, u_n) \quad \text{و} \quad v = (v_1, \dots, v_n). \quad \text{داریم:}$$

$$u \cdot v = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

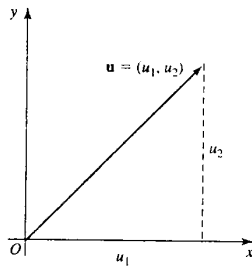
$$= v_1 u_1 + \dots + v_n u_n \quad \text{بنابه خاصیت جابجایی اعداد حقیقی}$$

$$= v \cdot u$$

ت)  $u \cdot u = u_1 u_1 + \dots + u_n u_n = u_1^2 + \dots + u_n^2$  زیرا حاصل جمع مربعات است. بنابراین  $u \cdot u \geq 0$ . به علاوه،  $u_1^2 + \dots + u_n^2 = 0$  اگر و تنها اگر  $u_1 = 0, \dots, u_n = 0$ . لذا  $u \cdot u = 0$  اگر و تنها اگر  $u = 0$ .

با استفاده از این ویژگی‌ها عبارت‌های شامل ضرب نقطه‌ای را ساده‌تر می‌کنیم. در این بخش، به عنوان مثال از این ویژگی‌ها برای به دست آوردن عبارت مناسبی برای زاویه بین دو بردار در  $R^n$ ، استفاده خواهیم کرد. در بخش‌های بعد این ویژگی‌ها را در تعمیم مفهوم ضرب نقطه‌ای به فضای ماتریس‌ها و توابع به کار خواهیم برد.

**نرم یک بردار در  $R^n$**  فرض کنیم  $u = (u_1, u_2)$  برداری در  $R^2$  باشد. می‌دانیم که طول این بردار  $\sqrt{u_1^2 + u_2^2}$  می‌باشد. شکل ۱۱-۴ را ببینید. این نتیجه را برای تعریف طول (یا نام فنی نرم) یک بردار در  $R^n$  تعمیم می‌دهیم.



شکل ۱۱-۴

**تعریف نرم (طول یا مقدار):** نرم بردار  $u = (u_1, \dots, u_n)$  در  $\mathbb{R}^n$  که با  $\|u\|$  نشان داده می‌شود به صورت  $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}$  تعریف می‌شود. توجه کنید که نرم یک بردار می‌تواند برحسب حاصل ضرب نقطه‌ای نیز نوشته شود.

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$$

**تمرین ۲:** نرم بردار  $u = (1, 3, 5)$  در  $\mathbb{R}^3$  و  $v = (3, 0, 1, 4)$  را در  $\mathbb{R}^4$  بیابید.

**حل:** با استفاده از تعریف بالا داریم:

$$\|u\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{35}$$

$$\|v\| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{26}$$

**تعریف:** یک بردار یکه برداری است که نرم آن برابر ۱ باشد. اگر  $v$  یک بردار ناصفر باشد. آنگاه  $u = \frac{1}{\|v\|}v$  برداری یکه در جهت  $v$  است. (تمرین زیر را ببینید.)  
روش ساختن بردار یکه هم جهت با بردار داده شده نرمال سازی بردار نامیده می‌شود.

**تمرین ۳:** الف) نشان دهید که بردار  $(1, 0)$  یک بردار یکه است.

ب) نرم بردار  $(2, -1, 3)$  را بیابید و آن را نرمال کنید.

**حل:** الف)  $\|(1, 0)\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$  بنابراین  $(1, 0)$  یک بردار یکه است. به طور مشابه

می‌توان نشان داد که  $(0, 1)$  نیز یک بردار یکه در  $\mathbb{R}^2$  است.



ب)  $\|(2, -1, 3)\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$  نرم  $(2, -1, 3)$  برابر  $\sqrt{14}$  و بردار نرمال شده  $\frac{1}{\sqrt{14}}(2, -1, 3)$  می‌باشد. این بردار می‌تواند به صورت  $(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}})$  نیز نوشته شود، که برداری یک‌جهت در جهت بردار  $(2, -1, 3)$  است.

بردارهای یک‌جهت زیر حائز اهمیت می‌باشند.

$(1, 0), (0, 1)$  بردارهای یک‌جهت در  $R^2$ .

$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$  بردارهای یک‌جهت در  $R^3$ .

$(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$  بردارهای یک‌جهت در  $R^n$ .

حال یک نتیجه مهم ریاضی به نام نامساوی کوشی - شوارتز<sup>۱</sup> را معرفی می‌کنیم. این نامساوی به عنوان مثال ما را قادر خواهد ساخت که تعریف زاویه در  $R^2$  را به  $R^n$  تعمیم دهیم.

#### ۱-۲-۴ قضیه (نامساوی کوشی شوارتز): اگر $u$ و $v$ دو بردار در $R^n$ باشند آنگاه

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$$

$|u \cdot v|$  در این جا نشان دهنده قدر مطلق عدد  $u \cdot v$  است.

برهان: ابتدا حالت خاص  $u = 0$  را در نظر می‌گیریم. اگر  $u = 0$ ، آنگاه  $|u \cdot v| = 0$  و  $\|u\| \|v\| = 0$  که تساوی برقرار است.

حال فرض کنیم  $u \neq 0$ . اثبات نامساوی در این حالت شامل حالت بسیار جالبی از کاربرد فرمول درجه دوم می‌باشد. بردار  $ru + v$  را در نظر بگیرید که در آن  $r$  عدد حقیقی دلخواهی می‌باشد. با استفاده از ویژگی‌های حاصل ضرب عددی داریم:

$$(ru + v) \cdot (ru + v) = r^2(u \cdot u) + 2r(u \cdot v) + v \cdot v$$

(۱) آگوستین لوئیس کوشی (۱۸۵۷-۱۷۸۹) در پاریس تحصیل کرد و سپس قبل از این که برای تدریس به پاریس برگردد، مدتی به عنوان مهندس کار کرد. او یکی از بزرگترین و پرکارترین ریاضیدانان تا به امروز بوده است. او هفت جلد کتاب و بیش از هشتصد مقاله نوشت. بیش از هر ریاضیدان دیگری مفاهیم و قضایای زیادی بعد از او اسم‌گذاری شده‌اند. او زندگی متلاطمی داشت. بعد از انقلاب ۱۸۳۰، از بیعت با لوئیس فیلیپ خودداری نموده و به تورین تبعید شد. اما بعد توانست به پاریس برگردد. کوشی یک کاتولیک مذهبی و درگیر کارهای اجتماعی بود. او مشغول امور خیریه مادران ازدواج نکرده، کمک به گرسنگان ایرلند و توان‌بخشی و اسکان محرومان بود. هنگام بخشش حقوق یک ساله به شهردار ساوکس او چنین گفت: «نگران نباشید، آن فقط حقوق من است، پول من نیست، پول امپراطور است». هرمان آماندوس شوارتز (۱۹۲۱-۱۸۴۳) در برلین تحصیل کرد و در زوریخ، گوتینگن و برلین تدریس کرد. بیشترین توانایی‌اش در نیوچ هندسی او بود و در مسائل تعریف شده ظریف کار کرد. این روش کار او اهمیت مسائل واقعی را توسعه داد. تدریس و علاقه‌مندی او به دانشجویان، فرصت زیادی را برای تألیف به او نداد.

هم‌چنین بنابه خواص حاصل ضرب داخلی:

$$(ru + v) \cdot (ru + v) \geq 0$$

با ترکیب این نتایج داریم:

$$r^2(u \cdot u) + 2r(u \cdot v) + v \cdot v \geq 0$$

فرض کنیم  $a = u \cdot u$ ,  $b = 2u \cdot v$  و  $c = v \cdot v$ . بنابراین

$$ar^2 + br + c \geq 0$$

این نشان می‌دهد که تابع درجهٔ دوم  $f(r) = ar^2 + br + c$  هرگز منفی نیست. لذا  $f(r)$  که نمودار آن یک سهمی است باید یک ریشه داشته باشد و یا ریشه‌ای نداشته باشد. ریشه‌های  $f(r)$  ریشه‌های معادلهٔ  $ar^2 + br + c = 0$  می‌باشند.

دترمینان تعداد ریشه‌ها را تعیین می‌کند. هرگاه  $b^2 - 4ac = 0$ ، یک ریشه و اگر  $b^2 - 4ac < 0$  ریشه‌ای وجود نخواهد داشت. بنابراین

$$b^2 - 4ac \leq 0$$

$$b^2 \leq 4ac$$

$$(2u \cdot v)^2 \leq 4(u \cdot u)(v \cdot v)$$

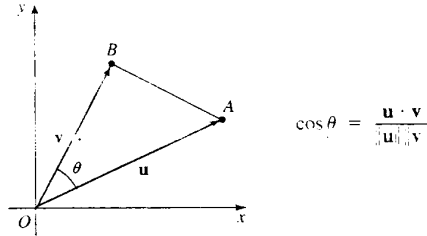
$$(u \cdot v)^2 \leq (u \cdot u)(v \cdot v)$$

$$(u \cdot v)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$$

با جذرگیری از طرفین، نامساوی کوشی - شوارتز را نتیجه می‌دهد.

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|$$

**زاویه بین بردارها** فرض کنید  $u = (a, b)$  و  $v = (c, d)$  بردارهای مکانی در  $R^2$  باشند. شکل ۴-۱۲ را ببینید. می‌خواهیم عبارتی را برای کسینوس  $\theta$ ، زاویهٔ بین بردارها به دست بیاوریم.



شکل ۱۲-۴

بنابه قانون کسینوس داریم:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2(OA)(OB) \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2(OA)(OB)}$$

$$\begin{aligned} OA^2 + OB^2 - AB^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - \|v - u\|^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - [(c - a)^2 + cd - b]^2 \\ &= 2ac + 2db = 2u.v \end{aligned}$$

به علاوه

$$2(OA)(OB) = 2\|u\|\|v\|$$

بنابراین زاویه  $\theta$  بین دو بردار در  $R^2$  توسط رابطه زیر داده می‌شود.

$$\cos \theta = \frac{u.v}{\|u\|\|v\|}$$

می‌دانیم که کسینوس زاویه‌ای در شرط  $|\cos \theta| \leq 1$  صدق می‌کند. نامساوی کوشی شوارتز تعیین می‌کند

$$\left| \frac{u.v}{\|u\|\|v\|} \right| \leq 1$$

می‌توانیم مفهوم زاویه بین دو بردار در  $R^2$  را به شرح زیر به  $R^n$  توسعه دهیم.

**تعریف:** فرض کنید  $u$  و  $v$  دو بردار ناصفر در  $R^n$  باشند. کسینوس زاویه  $\theta$  بین این بردارها عبارت است

$$\cos \theta = \frac{u.v}{\|u\|\|v\|} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

مثال ۴: زاویه بین بردارهای  $u = (1, 0, 0)$  و  $v = (1, 0, 1)$  در  $R^3$  را تعیین کنید.

حل: داریم

$$u \cdot v = (1, 0, 0) \cdot (1, 0, 1) = 1, \quad \|u\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1, \quad \|v\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

لذا  $\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  و زاویه بین  $u$  و  $v$  برابر  $45^\circ$  است. دو بردار ناصفر را عمود برهم می‌گوئیم اگر زاویه بین آن‌ها قائمه باشد. قضیه بعدی که از خواننده خواسته می‌شود در تمرین زیر ثابت کنید شرط عمود بودن را بیان می‌کند.

۲-۲-۴ قضیه: دو بردار ناصفر  $u$  و  $v$  بر هم عمودند اگر و تنها اگر  $u \cdot v = 0$ .

مثال ۵: نشان دهید که هر زوج از بردارهای زیر بر هم عمودند.

الف)  $(0, 1), (1, 0)$

ب)  $(1, 2, 4), (2, -3, 1)$

حل: با استفاده از ضرب نقطه‌ای داریم:

الف)  $(1, 0) \cdot (0, 1) = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$ . بردارها بر هم عمودند.

ب)  $(1, 2, 4) \cdot (2, -3, 1) = 2 \times 1 + (-3 \times 2) + 1 \times 4 = 0$ . لذا بردارها بر هم عمودند.

بردارهای زیر بردارهایی دوجه‌دو عمود بر هم مهمی هستند.

$(1, 0), (0, 1)$  در  $R^2$  بر هم عمودند.

$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$  در  $R^3$  بر هم عمودند.

$(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$  در  $R^n$  بر هم عمود هستند.

مثال ۶: در  $R^2$  برداری را بیابید که بر  $(3, -1)$  عمود باشد. نشان دهید که بردارهای زیادی با این شرط وجود دارند که همگی بر یک خط قرار دارند.

حل: فرض کنید که بردار  $(a, b)$  بر  $(3, -1)$  عمود باشد. داریم:

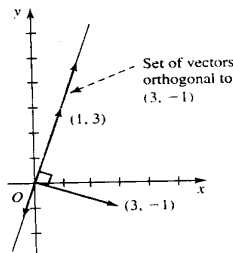
$$(a, b) \cdot (3, -1) = 0$$

$$a \times 3 + b \times (-1) = 0$$

$$3a - b = 0$$

$$b = 3a$$

بنابراین هر بردار به صورت  $(a, 3a)$  بر بردار  $(3, -1)$  عمود است. چنین برداری به صورت  $a(1, 3)$  نوشته می‌شود. مجموعه چنین بردارهایی روی خطی قرار دارند که توسط بردار  $(1, 3)$  تعریف می‌شود. شکل ۱۳-۴ را ببینید.



شکل ۱۳-۴

حال دو نتیجه هندسی آشنا را از  $R^2$  به  $R^3$  تعمیم می‌دهیم.

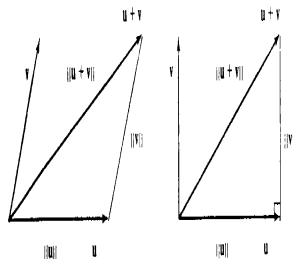
**۳-۲-۴ قضیه:** فرض کنید  $u$  و  $v$  بردارهایی در  $R^n$  باشند.

الف) نامساوی مثلثی:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

این نامساوی بیان می‌کند که اندازه یک ضلع مثلث نمی‌تواند از حاصل جمع اندازه‌های دو ضلع دیگر بیشتر باشد. شکل ۱۴-۴ الف را ببینید.

ب) قضیه فیثاغورث: اگر  $u, v = 0$  آن‌گاه  $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ . مربع وتر یک مثلث قائم‌الزاویه برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر، شکل ۱۴-۴ ب را ببینید.



$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

الف

ب

شکل ۱۴-۴

برهان: الف) بنابه ویژگی نرم

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= (u + v) \cdot (u + v) \\ &= u \cdot u + 2u \cdot v + v \cdot v \\ &= \|u\|^2 + 2u \cdot v + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2|u \cdot v| + \|v\|^2 \end{aligned}$$

از نامساوی کوشی - شوارتز نتیجه می شود که

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \\ &\leq (\|u\| + \|v\|)^2 \end{aligned}$$

با حذف رگیری از طرفین نامساوی مثلثی حاصل می شود.

ب) بنا بر ویژگی های نرم و این که  $u \cdot v = 0$  داریم

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= (u + v) \cdot (u + v) \\ &= u \cdot u + 2u \cdot v + v \cdot v \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 \end{aligned}$$

که اثبات قضیه فیثاغورث می باشد.

**فاصله بین نقاط:** فاصله بین نقاط  $X = (x_1, x_2)$  و  $Y = (y_1, y_2)$  در  $R^2$  برابر است با  $d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ . با تعمیم این مطلب به شرح زیر فاصله را در  $R^n$  تعریف می کنیم.

**تعریف:** فرض کنید  $(x_1, \dots, x_n)$  و  $(y_1, \dots, y_n)$  دو نقطه در  $R^n$  باشند. فاصله بین  $X$  و  $Y$  که با  $d(X, Y)$  نشان داده می شود توسط

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

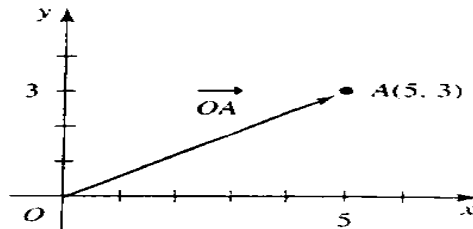
تعریف می‌شود.

توجه داشته باشید که می‌توانیم این فاصله را به صورت  $d(X, Y) = \|X - Y\|$  نیز بنویسیم. شکل ۱۵-۴ را برای فاصله در  $R^2$  و  $R^3$  و  $R^n$  ببینید.

$$R^2 : d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$R^3 : d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

$$R^n : d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$



شکل ۱۵-۴

تمرین ۷: فاصله بین نقاط  $X = (1, -2, 3, 0)$  و  $Y = (4, 0, -3, 5)$  را در  $R^4$  بیابید.

حل: با استفاده از فرمول فاصله بالا، داریم:

$$\begin{aligned} d(X, Y) &= \sqrt{(1 - 4)^2 + (-2 - 0)^2 + (3 + 3)^2 + (0 - 5)^2} \\ &= \sqrt{9 + 4 + 36 + 25} \\ &= \sqrt{74} \end{aligned}$$

مثال ۸: نشان دهید که تابع فاصله در  $R^n$  دارای خاصیت تقارن زیر است:

$$d(X, Y) = d(Y, X)$$

حل: فرض کنیم  $X = (x_1, \dots, x_n)$  و  $Y = (y_1, \dots, y_n)$ . داریم

$$\begin{aligned} d(X, Y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \\ &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2} = d(Y, X) \end{aligned}$$

این نتیجه بیان می‌کند که فاصله  $X$  از  $Y$  همان فاصله  $Y$  از  $X$  است. این ویژگی آن چیزی است که می‌خواهیم تابع فاصله، به طور طبیعی آن را داشته باشد. در زیر مهمترین ویژگی‌های نرم و فاصله را خلاصه می‌کنیم. در تمرینات آتی از شما خواسته می‌شود، آن ویژگی‌هایی را قبلاً بحث نشده‌اند ثابت کنید. نرم و فاصله‌ای که در این بخش معرفی شدند، از حاصل ضرب نقطه‌ای به دست آمده بودند. در کارهای عددی اغلب راحت‌تر است که نرم‌ها و فاصله‌های دیگری را تعریف می‌کنیم که در آن‌ها این ویژگیها به عنوان اصول یعنی خواص اساسی که هر نرم یا تابع فاصله‌ای باید دارا باشد، مورد استفاده قرار می‌گیرد. شما برخی از این مفاهیم را در قسمت‌های بعدی این بخش خواهید دید.

ویژگی‌های فاصله	ویژگی‌های نرم
۱- $d(X, Y) \geq 0$	۱- $\ u\  \geq 0$
فاصله بین دو نقطه نمی‌تواند منفی باشد.	(طول یک بردار نمی‌تواند منفی باشد)
۲- $d(X, Y) = 0$ اگر و تنها اگر $X = Y$	۲- $\ u\  = 0$ اگر و تنها اگر $u = 0$ .
فاصله بین دو نقطه برابر صفر است اگر و تنها اگر (طول بردار برابر صفر است اگر و تنها اگر بردار برابر دو نقطه بر هم منطبق باشند.)	بردار صفر باشد.)
۳- $d(X, Y) = d(Y, X)$ (ویژگی جابجایی)	۳- $\ cu\  =  c \ u\ $
فاصله $X$ از $Y$ همان فاصله $Y$ از $X$ است	(طول $cu$ ، $ c $ برابر طول بردار $u$ است.)
۴- $d(X, Z) \leq d(X, Y) + d(Y, Z)$	۴- $\ u + v\  \leq \ u\  + \ v\ $
(نامساوی مثلثی)	(نامساوی مثلثی)

(حاصل جمع طول‌های دو ضلع یک مثلث بزرگتر یا مساوی ضلع سوم است.)

حال این ساختارهای هندسی  $\mathbb{R}^n$  را خلاصه می‌کنیم. این هندسه، هندسی اقلیدسی نامیده می‌شود.

### هندسه اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ :

$$u \cdot v = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

حاصل ضرب نقطه‌ای دو بردار  $u$  و  $v$ :

$$\|U\| = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}$$

نرم بردار  $U$ :



$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} \quad \text{زاویه بین بردارهای } u \text{ و } v:$$

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \quad \text{فاصله بین نقاط } X \text{ و } Y:$$

## تمرین

### حاصل ضرب نقطه‌ای

۱) حاصل ضرب نقطه‌ای هر زوج بردارهای زیر را محاسبه کنید.

الف)  $(3, 4), (2, 1)$  ب)  $(3, 0), (1, -4)$

پ)  $(0, -1), (2, 0)$  ت)  $(-3, -4), (5, -2)$

۲) حاصل ضرب نقطه‌ای هر زوج بردارهای زیر را محاسبه کنید:

الف)  $(4, 1, 0), (1, 2, 3)$  ب)  $(5, 1, -1), (3, 4, -2)$  پ)  $(3, -5, 8), (7, 1, -2)$

۳) نرم بردارهای زیر را بیابید.

الف)  $(1, 3, -1)$  ب)  $(3, 0, 4)$

پ)  $(5, 1, 1)$  ت)  $(7, -2, -3)$

۴) بردارهای زیر را نرمال نمائید.

الف)  $(4, 2)$  ب)  $(4, 1, 1)$  پ)  $(7, 2, 0, 1)$  ت)  $(0, 0, 0, 7, 0, 0)$

۵) زاویه بین هر زوج از بردارهای زیر را بیابید:

الف)  $(0, 1), (-1, 1)$  ب)  $(1, \sqrt{3}), (2, 0)$  پ)  $(3, -2), (2, 3)$

۶) کسینوس زاویه بین هر زوج از بردارهای زیر را بیابید.

الف)  $(4, 1, 1), (3, -1, 2)$  ب)  $(5, 3, 1), (2, -1, 0)$  پ)  $(2, 0, 1, 0, 4), (1, 2, -1, 3, 1)$

۷) نشان دهید که زوج‌های زیر از بردارها بر هم عمودند:

الف)  $(3, -1), (1, 3)$  ب)  $(4, 1, 2), (1, 2, -3)$  پ)  $(4, 7, 4, 1, 0), (1, -1, 2, -5, 9)$

۸) بردارهای ناصف‌ری را بیابید که بر هر یک از بردارهای زیر عمود باشد:

الف)  $(5, -1)$  ب)  $(1, -2, 3)$  پ)  $(5, 0, 1, 1)$  ت)  $(0, -2, 3, 1, 5)$

۹) فاصله بین هر زوج از بردارهای زیر را بیابید.

الف)  $(2, -3), (4, 1)$  ب)  $(4, -1, 1), (-3, 1, 2)$  پ)  $(2, 0, 1, 3), (5, 1, 0, 0)$

۱۰) ویژگی‌های زیر را از ضرب نقطه‌ای بردارها بیان کنید.

الف)  $(u + v) \cdot w = u \cdot v + v \cdot w$

ب)  $cu \cdot v = c(u \cdot v) = u \cdot cv$

۱۱) ثابت کنید که اگر  $v$  برداری ناصفر باشد، آنگاه بردار  $u = \frac{1}{\|v\|}v$  برداری بکه در جهت  $v$  است.

۱۲) ثابت کنید که دو بردار ناصفر  $u$  و  $v$  بر هم عمودند اگر و تنها اگر  $u \cdot v = 0$ .

۱۳) نشان دهید که اگر  $u$  و  $w$  دو بردار در فضای برداری  $U$  و برای تمامی بردارهای  $u \cdot v = u \cdot w$  آنگاه  $v = w$ .

۱۴) فرض کنید  $u, v_1, \dots, v_n$  بردارهایی در یک فضای برداری و  $a_1, \dots, a_n, b$  عدد باشد. ثابت کنید

$$u \cdot (a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = a_1 u \cdot v_1 + \dots + a_n u \cdot v_n$$

۱۵) فرض کنید  $u, v$  و  $w$  بردارهایی در یک فضای برداری و  $c$  و  $d$  دو عدد ناصفر باشد. تعیین کنید که

کدام یک از عبارتهای زیر یک عدد، یک بردار و یا بی‌معنی است.

الف)  $(u \cdot v)w$  ب)  $(u \cdot v) \cdot w$  پ)  $u \cdot v + cw$

پ)  $u \cdot v + c$  ت)  $c(u \cdot v) + dw$  ث)  $\|u + cv\| + d$

ج)  $\|u \cdot v\|$  چ)  $cu \cdot dv + \|w\|v$

۱۶) مقادیر  $c$  را چنان بیابید که  $\|c(3, 0, 4)\| = 15$ .

۱۷) ثابت کنید  $u$  و  $v$  بردارهای عمود بر هم هستند اگر و تنها اگر  $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ .

۱۸) فرض کنید  $(a, b)$  برداری در  $R^2$  باشد. ثابت کنید که بردار  $(-b, a)$  بر  $(a, b)$  عمود است.

۱۹) فرض کنید  $u$  و  $v$  بردارهایی در  $R^2$  باشند. ثابت کنید که  $\|u\| = \|v\|$  اگر و تنها اگر  $u + v$  و  $u - v$  بر هم عمود باشند.

۲۰) فرض کنید  $u$  برداری در  $R^n$  و  $c$  یک عدد باشد. ثابت کنید که نرم یک بردار دارای ویژگی‌های زیر است:

الف)  $\|u\| \geq 0$

ب)  $\|u\| = 0$  اگر و تنها اگر  $u = 0$

$$\|cU\| = |c|\|U\| \quad (\text{پ})$$

(۲۱) فضای برداری  $R^n$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $u = (a_1, \dots, a_n)$  برداری در  $R^n$  باشد. ثابت کنید هر یک از دو تابع زیر در ویژگیهای نرم مساله ۱۹ صدق می‌کند. این توابع هر چند که به هندسه اقلیدسی رهنمون نمی‌شوند، تمامی ویژگیهای جبری را که انتظار می‌رود یک نرم داشته باشد، دارند. و در ریاضیات عددی استفاده می‌شوند.

$$\|u\| = |u_1| + \dots + |u_n| \quad (\text{الف})$$

$$\|U\| = \max_{i=1, \dots, n} |u_i| \quad (\text{ب})$$

این نرم‌ها را برای بردارهای  $(1, 2)$ ،  $(-3, 4)$  و  $(1, 2, -5)$  و  $(1, 2, -5)$  و  $(0, -2, 7)$  محاسبه کنید.

(۲۲) فرض کنید  $X$ ،  $Y$  و  $Z$  نقاطی در  $R^n$  باشند. ثابت کنید که تابع فاصله دارای ویژگیهای زیر است:

$$d(X, Y) \geq 0 \quad (\text{الف})$$

$$d(X, Y) = 0 \quad \text{اگر و تنها اگر } X = Y \quad (\text{ب})$$

$$d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y) \quad (\text{پ})$$

این ویژگیها به عنوان اصول در تعمیم مفهوم فاصله برای فضاهای معین مورد استفاده قرار می‌گیرند.

## ۳-۴ مقدمه‌ای بر نگاشت‌های خطی

یک تابع قانونی است که بر هر یک از عناصر یک مجموعه، عنصری یکتا از مجموعه دیگری را نسبت می‌دهد. توابع در اغلب زمینه‌های ریاضی مورد استفاده قرار گرفته و در تعیین وابستگی یکی از متغیرها به دیگری در کاربرد، با اهمیت می‌باشند. به عنوان مثال، ارتفاع یک Projectile تابعی از زمان است هزینه کل یک کالا تابعی از آیتها است و ... در این بخش، دسته مهمی از توابع بین فضاهای برداری به نام نگاشت‌های خطی معرفی می‌کنیم. در بخش بعدی خواهیم دید که چگونه نگاشت‌های خطی در زمینه‌هایی مانند گرافیک کامپیوتری و هندسه فراکتالی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

**تعریف:** یک نگاشت مانند  $T$  از  $R^n$  به  $R^m$  به صورت  $T: R^n \rightarrow R^m$  نوشته می‌شود، قانونی است که به هر بردار  $u$  از  $R^n$ ، بردار یکتای  $v$  از  $R^m$  را نسبت می‌دهد.

$R^n$  دامنه و  $R^m$  هم دامنه  $T$  نامیده می شود. می نویسیم  $T(u) = v$  و  $v$  را تصویر  $u$  تحت  $T$  مجموعه تمامی تصاویر، برد  $T$  نامیده می شود. برد ممکن است تمام  $R^m$  یا فقط قسمتی از آن باشد. اصطلاحات نگاشت و تابع نیز برای نگاشت های به کار برده می شوند.

برای مثال، نگاشت  $T: R^3 \rightarrow R^2$  با تعریف  $T(x, y, z) = (2x, y - z)$  را در نظر بگیرید. دامنه  $T$ ،  $R^3$  و هم دامنه آن  $R^2$  است. تصویر هر بردار در  $R^3$  می تواند توسط این تعریف تعیین شود. مثلاً تصویر بردار  $(1, 4, 2)$  با فرض  $x = 1, y = 4, z = 2$  برابر  $(2, 2)$  است.

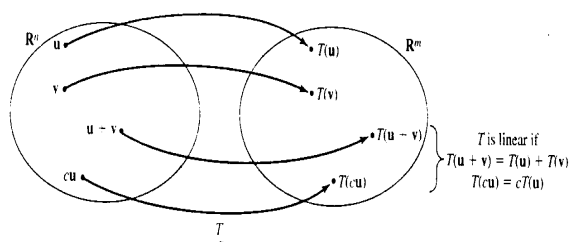
از هر فضای برداری دو عمل به نام های جمع و ضرب اسکالر تعریف می شود. مهم ترین نگاشت های خطی بین فضاهای برداری آن هایی هستند که این ساختارهای خطی را به مفهوم زیر حفظ می کنند.

**تعریف:** فرض کنیم  $u$  و  $v$  بردارهایی در  $R^n$  و  $c$  یک عدد باشد. نگاشت خطی  $T: R^n \rightarrow R^m$  خطی نامیده می شود اگر

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

$$T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$$

اولین شرط به این معنی است که  $T$  حاصل جمع دو بردار را به جمع تصاویر آن دو برابر می نگارد دومین شرط به این مطلب دلالت می کند که  $T$  ضرب عددی یک بردار را به همان ضرب عددی از تصویر آن بردار می نگارد. بنابراین اعمال جمع و ضرب تحت تبدیلات حفظ می شوند. این مفاهیم حفظ کردن ساختارهای نگاشت های خطی در شکل ۱۶-۴ نشان داده شده اند.



شکل ۱۶-۴

مثال ۱: نشان دهید که نگاشت  $T: R^2 \rightarrow R^2$  خطی است.

$$T(x, y) = (x - y, 3x)$$

حل: ابتدا نشان می‌دهیم که  $T$  جمع را حفظ می‌کند. فرض کنید  $(x_1, y_1)$  و  $(x_2, y_2)$  عناصری از  $R^2$  باشند. آنگاه

$$\begin{aligned} T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \text{بنابه جمع بردارها} \\ &= (x_1 + x_2 - y_1 - y_2, 3x_1 + 3x_2) \quad T \text{ بنابه تعریف} \\ &= (x_1 - y_1, 3x_1) + (x_2 - y_2, 3x_2) \quad \text{بنابه جمع بردارها} \\ &= T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) \quad T \text{ بنابه تعریف} \end{aligned}$$

بنابراین  $T$  جمع بردارها را حفظ می‌کند.

حال نشان می‌دهیم که  $T$  ضرب اسکالر را حفظ می‌کند. فرض کنید  $c$  یک عدد باشد. بنابه ضرب اسکالر یک بردار

$$\begin{aligned} T(c(x_1, y_1)) &= T(cx_1, cy_1) \quad \text{بنابه ضرب اسکالر یک بردار} \\ &= (cx_1 - cy, 3cx_1) \quad T \text{ بنابه تعریف} \\ &= c(x_1 - y_1, 3x_1) \quad \text{بنابه ضرب اسکالر یک بردار} \\ &= cT(x_1, y_1) \quad T \text{ بنابه تعریف} \end{aligned}$$

لذا،  $T$  ضرب اسکالر را حفظ می‌کند و  $T$  خطی است.

یک نگاشت خطی از یک فضای برداری به خودش یک عملگر خطی نامیده می‌شود.  $T: R^2 \rightarrow R^2$  با تعریف  $T(x, y) = (x - y, 3x)$  مثالی از یک عملگر خطی است. مثال زیر نگاشتی را نشان می‌دهد که خطی نیست.

مثال ۲: نشان دهید که نگاشت

$$\begin{aligned} T: R^3 &\rightarrow R^3 \\ T(x, y, z) &= (xy, z) \end{aligned}$$

خطی نیست.

حل: ابتدا شرط اول را آزمایش می‌کنیم. فرض کنید  $(x_1, y_1, z_1)$  و  $(x_2, y_2, z_2)$  عناصری از  $\mathbb{R}^3$  باشند. در این صورت

$$\begin{aligned} T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= ((x_1 + x_2)(y_1 + y_2), z_1 + z_2) \\ &= (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1, z_1 + z_2) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2) &= (x_1 y_1, z_1) + (x_2 y_2, z_2) \\ &= (x_1 y_1 + x_2 y_2, z_1 + z_2) \end{aligned}$$

بنابراین در حالت کلی

$$T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) \neq T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2)$$

چون عمل جمع حفظ نمی‌شود،  $T$  خطی نیست.

حال در می‌یابیم که هر ماتریس یک نگاشت را تعریف می‌کند. به علاوه هر چنین نگاشتی خطی است.

به عنوان مثال، ماتریس  $3 \times 2$ ،  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$  و بردار ستونی  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  از  $\mathbb{R}^3$  را در نظر

بگیرید. این ماتریس نگاشت خطی  $T(X) = AX$  از  $\mathbb{R}^2$  به  $\mathbb{R}^3$  را با استفاده از ضرب ماتریسی به

صورت زیر تعریف می‌کند:

$$T(X) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 3y - 2z \\ 4y + z \end{bmatrix}$$

تصویر هر بردار مشخص با استفاده از مقادیر مناسب  $x$ ،  $y$  و  $z$  محاسبه می‌شود. به عنوان مثال

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8 \\ 17 \end{bmatrix}$$

**۱-۳-۴ قضیه:** فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  و  $X$  عضوی از  $R^n$  باشد که به صورت یک ماتریس ستونی در نظر گرفته می شود. تبدیل  $T: R^n \rightarrow R^m$  تعریف شده توسط  $T(X) = AX$  خطی است. چنین تبدیل خطی، نگاشت ماتریسی نامیده می شود.

اثبات: توجه کنید که چون  $A$ ، ماتریس  $m \times n$  و  $X$  ماتریسی  $n \times ۱$  بنابراین  $AX$  ماتریس  $m \times ۱$  است. بنابراین  $T(X) = AX$  نگاشتی از  $R^n$  به  $R^m$  را تعریف می کند. خطی بودن  $T$  باقی مانده است. فرض کنید  $X$  و  $Y$  عناصری از  $R^n$  باشند که به صورت ماتریس های ستونی نوشته شده اند و  $c$  یک عدد باشد. بنابر تعریف  $T$  و خواص ماتریس ها داریم:

$$\begin{aligned} T(X + Y) &= A(X + Y) \\ &= AX + AY \\ &= T(X) + T(Y) \quad \text{جمع حفظ شده است} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(cX) &= A(cX) \\ &= cAX \\ &= cT(X) \quad \text{ضرب اسکالر حفظ شده است} \end{aligned}$$

بنابراین تبدیل، خطی است.

**مثال ۳:** نگاشت خطی  $T$  را در نظر بگیرید که توسط ماتریس  $۳ \times ۳$ ،  $A$  تعریف شده است. تصویر برداری دلخواه را تحت  $T$  بیابید و این نتیجه را برای تعیین تصویر بردار داده شده  $X$  به کار ببرید.

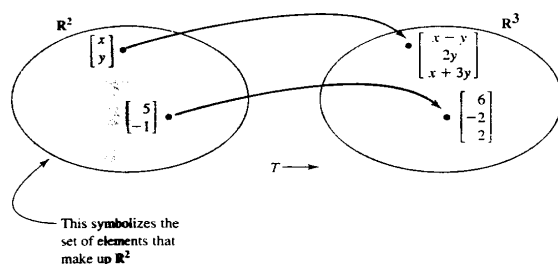
$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} ۵ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

**حل:** چون  $A$  ماتریسی  $۳ \times ۲$  است بنابراین تبدیل خطی  $T: R^۲ \rightarrow R^۳$  را تعریف می کند.

داریم:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ ۲y \\ x + ۳y \end{bmatrix}$$

با فرض  $x = 5, y = -1$  داریم  $T\left(\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$  را ببینید.



شکل ۱۷-۴

تمرین ۴: فرض کنیم  $A$  ماتریسی  $3 \times 2$  و  $B$  ماتریسی  $4 \times 6$  باشد. دامنه و هم‌دامنه نگاشت‌های خطی را که توسط  $A$  و  $B$  تعریف می‌شوند، تعیین کنید.

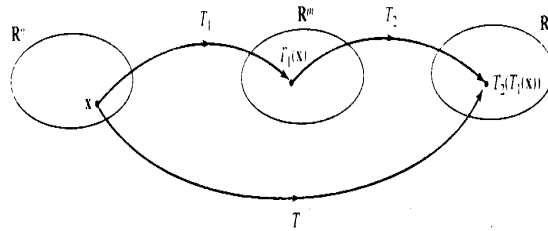
حل: فرض می‌کنیم  $X$  برداری از دامنه نگاشت تعریف شده توسط  $A$  باشد، در این صورت  $T(X) = AX$  که ماتریسی  $3 \times 2$  است. برای این که حاصل ضرب  $AX$  وجود داشته باشد،  $X$  باید ماتریس  $2 \times 1$  یا یک بردار در  $R^2$  باشد. تصویر  $AX$  ماتریس  $3 \times 1$  یا برداری در  $R^3$  خواهد بود. بنابراین دامنه نگاشت  $R^2$  و هم‌دامنه آن  $R^3$  است.  
با استدلالی مشابه دامنه نگاشت تعریف شده توسط ماتریس  $4 \times 6$ ،  $B$  برابر  $R^6$  و هم‌دامنه آن  $R^4$  است.

## ترکیب نگاشت‌های ماتریسی

شما با مفهوم ترکیب توابع به یک تابع مرکب آشنا هستید. نگاشت‌های ماتریسی نیز به طور مشابه ترکیب می‌شوند. فرض کنید  $T_1: R^n \rightarrow R^m$  و  $T_2: R^m \rightarrow R^s$  نگاشت‌های ماتریس تعریف شده توسط  $T_2(Y) = A_2Y$  و  $T_1(X) = A_1X$  شده و تبدیل  $T$  از  $R^n$  به  $R^s$  را بسازید. این تبدیل مرکب  $T$ ، نگاشتی است که از ترکیب  $T_1$  با  $T_2$  ساخته شده و به صورت  $T(X) = T_2(T_1(X))$  تعریف می‌شود. شکل ۱۸-۴ را ببینید. نماد  $T = T_2 \circ T_1$  برای ترکیب دو تبدیل به کار می‌رود.



حال ملاحظه می‌کنیم که نگاشت مرکب  $T$  یک نگاشت ماتریس است که توسط حاصل ضرب ماتریس های  $A_1, A_2$  تعریف می‌شود.



شکل ۱۸-۴

**۲-۳-۴ قضیه:** نگاشت مرکب  $T$  از دو نگاشت ماتریس  $T_1 : R^n \rightarrow R^m$  و  $T_2 : R^m \rightarrow R^s$  که توسط ماتریس های  $A_1$  و  $A_2$  تعریف شده‌اند، نگاشت ماتریس  $T : R^n \rightarrow R^s$  است که توسط ماتریس حاصل ضرب  $A_2 A_1$  تعریف شده است.

اثبات: با استفاده از تعریف  $T$  داریم  $T(X) = T_2(T_1(X)) = T_2(A_1 X) = A_2(A_1 X)$  چون حاصل ضرب ماتریس شرکت پذیر است، نتیجه می‌شود  $T(X) = (A_2 A_1)X$ ،  $A_2$  ماتریسی  $s \times m$  و  $A_1$  ماتریس  $m \times n$  است، ماتریس حاصل ضرب  $A_2 A_1$  ماتریسی از مرتبه  $s \times n$  است. بنابراین  $T$  نگاشتی از  $R^n$  به  $R^s$  تعریف شده توسط ماتریس  $A_2 A_1$  است.

**مثال ۵:** فرض کنید  $T_2(X) = A_2 X$  و  $T_1(X) = A_1 X$  توسط ماتریس های  $A_2$  و  $A_1$  تعریف شده باشند. فرض کنید  $T = T_2 \circ T_1$ . تصویر بردار  $X$  را تحت  $T$  بیابید.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

حل:  $T$  توسط ماتریس حاصل ضرب  $A_2 A_1$  تعریف شده است. داریم:

$$A_2 A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -4 & -1 \\ 12 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$T(X) = \begin{bmatrix} -5 & -4 & -1 \\ 12 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23 \\ 4 \end{bmatrix}$$

می‌توانیم نتایج این بخش را به طور طبیعی توسعه دهیم. فرض کنید  $T_1, \dots, T_n$  یک دنباله از نگاشت‌های خطی روی  $R^p, \dots, R^s$  باشند که با ماتریس‌های  $A_1, \dots, A_n$  تعریف شده‌اند ترکیب  $T = T_1, \dots, T_n$  توسط ماتریس حاصل  $A_1 \dots A_n$  داده می‌شود. (در صورتی که حاصل ضرب موجود باشد).

### ۳-۳-۴ تمرین

(۱) نشان دهید که نگاشت  $T: R^2 \rightarrow R^2$  با تعریف  $T(x, y) = (2x, x - y)$  خطی است.

تصاویر عناصر  $(1, 2)$ ،  $(-1, 4)$  را تحت این نگاشت بیابید.

(۲) نشان دهید که  $T(x, y) = (3x + y, 2y, x - y)$  نگاشت خطی  $T: R^2 \rightarrow R^3$  را تعریف

می‌کند. تصاویر بردارهای  $(1, 2)$  و  $(2, -5)$  را تحت  $T$  بیابید.

(۳) نشان دهید که  $T: R^3 \rightarrow R^2$  تعریف شده توسط  $T(x, y, z) = (0, y, 0)$  خطی است. این

نگاشت تصویری نیز نامیده می‌شود. چرا این نامگذاری مناسب است؟

(۴) نشان دهید که نگاشت‌های زیر خطی نیستند.

$$T(x, y, z) = (3x, y^2) \quad \text{الف} \quad T(x, y, z) = (x + y, y^2) \quad \text{ب}$$

(۵) نشان دهید که  $T: R^2 \rightarrow R$  که توسط  $T(x, y) = x + a$  تعریف شده است. در حالتی که  $a$

عددی ناصفر باشد، خطی نیست.

در تمرینات ۶ تا ۱۱ تعیین کنید که آیا نگاشت‌های داده شده خطی هستند؟

$$(۶) \quad T(x, y, z) = (2x, y) \quad \text{از } R^3 \text{ به } R^2.$$

$$(۷) \quad T(x, y) = x - y \quad \text{از } R^2 \text{ به } R.$$

$$(۸) \quad T(x, y) = (x, y, z) \quad \text{از } R^2 \text{ به } R^3 \text{ هرگاه:}$$

$$\text{الف) } z = 0 \quad \text{ب) } z = 1$$

$$(۹) \quad T(x) = (x, 2x, 3x) \quad \text{از } R \text{ به } R^3.$$

$$(۱۰) \quad T(x, y) = (x^2, y) \quad \text{از } R^2 \text{ به } R^2.$$

$$T(x, y, z) = (x + 2y, x + y + z, 3z) \quad (۱۱) \text{ از } R^3 \text{ به } R^3.$$

(۱۲) نگاشت  $T: R^3 \rightarrow R^3$  تعریف شده توسط ماتریس  $A$  در زیر را در نظر بگیرید. تصاویر بردارهای  $X, Y, Z$  را تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(۱۳) عملگر خطی  $T$  روی  $R^2$  را که توسط ماتریس داده شده  $A$  در زیر تعریف شده است در نظر بگیرید. تصاویر بردارهای  $X, Y, Z$  را تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(۱۴) فرض کنید  $A$  ماتریس  $m \times n$  و  $c$  یک بردار ستونی در  $R^n$  باشد. نشان دهید که هرگاه  $c \neq 0$  آن‌گاه نگاشت  $T: R^n \rightarrow R^m$  با تعریف  $T(X) = AX + c$  خطی نیست.

(۱۵) فرض کنید  $T$  یک نگاشت خطی با دامنه  $U$  باشد. اگر  $v$  و  $w$  بردارهایی در  $U$  باشند، ثابت کنید:

$$\text{الف) } T(-v) = -T(v) \quad \text{ب) } T(v - w) = T(v) - T(w)$$

(۱۶) فرض کنید  $T_1(X) = A_1X$  و  $T_2(X) = A_2X$  با ماتریس  $A_1, A_2$  در زیر تعریف شده و  $T = T_2 \circ T_1$  ماتریسی را که  $T$  تعریف می‌کند بیابید و توسط آن تصویر بردار  $X$  تحت  $T$  را تعیین کنید.

$$\text{الف) } A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ و } X = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{ب) } A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ و } X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{پ) } A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ و } X = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(۱۷) فرض کنید  $T_1(x, y) = (2x, -y)$  و  $T_2(x, y) = (0, x + y)$  و  $T = T_2 \circ T_1$  معادله‌ای برای  $T$  بیابید و آن را برای تعیین تصویر  $(2, -3)$  تحت  $T$  به کار ببرید.

۱۸) فرض کنید  $T_1(x, y) = (x+y, 2x, 3y)$  و  $T_2(x, y, z) = (x, x+y, 2x-z)$  و  $T = T_2 \circ T_1$  معادله‌ای برای  $T$  بیابید و از آن برای تعیین تصویر  $(-2, 5)$  تحت  $T$  استفاده کنید.

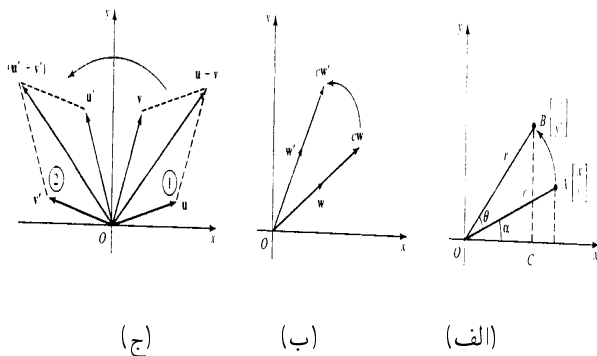
۱۹) فرض کنید  $U$  و  $V$  و  $W$  سه بردار و  $T_1$  یک نگاشت خطی از  $U$  به  $V$  و  $T_2$  یک نگاشت خطی از  $V$  به  $W$  باشد. آیا  $T_2 \circ T_1 = T_1 \circ T_2$ ؟

#### ۴-۴ نگاشت‌های ماتریسی، گرافیک‌های کامپیوتری و فراکتال‌ها

در بخش قبل دیدیم که هر ماتریس یک نگاشت خطی را تعریف می‌کند. در این بخش ملاحظه خواهیم کرد که هر نگاشت خطی  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  می‌تواند توسط یک ماتریس مانند  $A$  تعریف شود. این نمایش ماتریسی از نگاشت‌های خطی ابزاری مهم برای بررسی نگاشت‌های خطی است. ماتریس‌هایی را معین خواهیم کرد که تعدادی از نگاشت‌های خطی مهم مانند دوران و انبساط را توصیف می‌کنند. کاربردها در هندسه فراکتالی دیده خواهند شد.

#### دوران حول مبدا

دورانی مانند  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ، حول مبدا را در نظر بگیرید. شکل ۴-۱۹ الف) را ببینید.



شکل ۴-۱۹

فرض کنید  $T(u) = u'$  و  $T(v) = v'$ . متوازی‌الاضلاع (۱) به متوازی‌الاضلاع (۲) تبدیل می‌شود. چون قطر متوازی‌الاضلاع (۱) به قطر متوازی‌الاضلاع (۲) نگاشته می‌شود.

$$T(u + v) = u' + v'$$

$$= T(u) + T(v) \quad \text{جمع حفظ می‌شود.}$$

به علاوه، در شکل ۱۹-۴ (ب)،  $T(\mathbf{w}) = \mathbf{w}'$ ، چون تصویر بردار  $cw$ ،  $cw'$  است،

$$T(cw) = cw'$$

$$= cT(w) \quad \text{ضرب اسکالر حفظ می‌شود.}$$

بنابراین دوران حول مبدأ یک عملگر خطی است.

برای ملاحظه این که دوران یک عملگر خطی است، یک عبارت عملی برای چنین دورانی می‌بایم، عبارتی که می‌تواند در تعیین مختصات تصویر هر نقطه داده شده تحت دوران مورد استفاده قرار گیرد. دورانی را در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت تحت زاویه  $\theta$  حول مبدأ در نظر بگیرید. شکل ۱۹-۴ (پ) چنین دورانی نقطه  $A$  را به نقطه  $B$  خواهد نگاشت. فاصله  $OA$  برابر  $OB$  است. فرض کنید این فاصله برابر  $r$  و زاویه  $AOC$  برابر  $\alpha$  باشد. داریم:

$$X' = OC = r \cos(\alpha + \theta) = r \cos \alpha \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta$$

$$= x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$Y' = BC = r \sin(\alpha + \theta) = r \sin \alpha \cos \theta + r \cos \alpha \sin \theta$$

$$= y \cos \theta + x \sin \theta$$

$$= x \sin \theta + y \cos \theta$$

این عبارت‌ها برای  $X'$  و  $Y'$  می‌توانند به معادله ماتریسی به صورت زیر درآیند:

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

لذا

$$T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

یک دوران حول مبدأ توسط ضرب ماتریسی مشخص می‌شوند که در واقع تأیید می‌شود که یک عملگر خطی است توجه داشته باشید که  $\theta$  برای دوران در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت مثبت و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، منفی است.

به عنوان یک مثال تصویر نقطه  $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$  تحت دوران  $\frac{\pi}{4}$  حول مبدأ می‌یابیم. با استفاده از  $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  و  $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  در ماتریس دوران، داریم:

$$T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

تصویر نقطه  $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$  تحت دوران  $\frac{\pi}{4}$  حول مبدأ عبارت است از  $\begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \end{bmatrix}$ . شبیه حالت دوران، هر تبدیل خطی می‌تواند توسط یک ماتریس تعریف شود. هر چند که ممکن است مثل دوران با استفاده از روش خاصی به نمایش ماتریس نگاشت‌های خطی رسید، اما مطلوب‌تر است که از یک حالت استاندارد در تمامی حالات استفاده شود. چنین روشی را برای نگاشت‌های خطی در  $\mathbb{R}^n$  به دست می‌آوریم.

### نمایش ماتریسی

فرض کنید  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  یک نگاشت خطی باشد. در این مبحث بردارهای ستونی در نظر گرفته و بردارهای  $e_1, e_2, \dots, e_n$  از  $\mathbb{R}^n$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنید بردار  $u$  دلخواهی باشد.

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

بردارهای  $e_1, \dots, e_n$  مبنای استاندارد  $\mathbb{R}^n$  نامیده می‌شود. این بردارها نقش مهمی در مبحث  $\mathbb{R}^n$  دارند زیرا می‌توانیم هر بردار دلخواهی مانند  $u$  را به طور یکتا برحسب آن‌ها به صورت زیر بنویسیم:

$$u = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

چون  $T$  یک تبدیل خطی است،

$$\begin{aligned} T(u) &= T(a_1 e_1 + \dots + a_n e_n) \\ &= a_1 T(e_1) + \dots + a_n T(e_n) \end{aligned}$$

$$= [T(e_1) \dots T(e_n)] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

که در آن  $[T(e_1) \dots T(e_n)]$  ماتریسی با ستون‌های  $T(e_1), \dots, T(e_n)$  است. بنابراین تبدیل خطی  $T$  توسط ماتریس  $A = [T(e_1) \dots T(e_n)]$  تعریف می‌شود.

$A$  ماتریس استاندارد  $T$  نامیده می‌شود. توجه داشته باشید که بردارهای  $R^n$  باید به صورت ستونی نوشته شوند، تا بتوان از این روش بیان یک تبدیل خطی، استفاده نمود. در تمرینات زیر از خواننده خواسته می‌شود که ماتریس دوران را به این روش به دست آورد.

مثال ۱: ماتریس استاندارد  $T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2x + y \\ 3y \end{bmatrix}$  را تعیین کنید.

حل: اثر  $T$  روی مبنای استاندارد را به دست می‌آوریم:

$$T \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

این ماتریس‌ها ستون‌های ماتریس استاندارد  $A$  هستند.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$T$  می‌تواند به عنوان یک تبدیل ماتریس نوشته شود.

$$T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

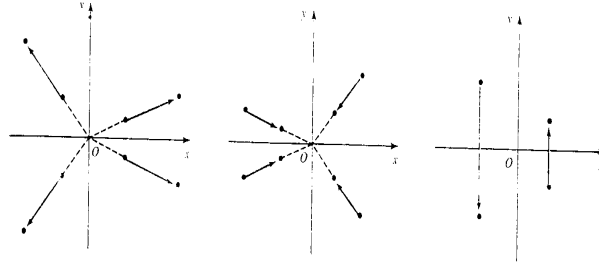
حال ماتریس‌هایی را پیدا می‌کنیم که تعدادی از نگاشت‌های مهم را تعریف می‌کنند.

### انبساط و انقباض<sup>۱</sup>

عملگر  $T: R^2 \rightarrow R^2$  را در نظر بگیرید که توسط  $T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = r \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  تعریف شده است و  $r$  یک عدد است. اگر  $r > 1$ ، آن‌گاه  $T$  نقاط را از مبدا دور می‌کند و انبساطی با ضریب  $r$  نامیده می‌شود. اگر  $0 < r < 1$ ، آن‌گاه  $T$  نقاط را به مبدا می‌کشاند و انقباضی با ضریب  $r$  نامیده می‌شود. شکل ۴-۲۰ (الف) را ببینید.

به راحتی نشان داده می‌شود که  $T$  خطی است. حال ماتریس استاندارد  $T$  را پیدا می‌کنیم.

1) Dilation and Contraction



(الف) انعکاس نسبت به محور  $x$       انقباض  $0 < r < 1$       (ب) انبساط  $r > 1$

شکل ۴-۲۰

اثر  $T$  را روی مبنای استاندارد پیدا می‌کنیم:

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix} \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}$$

ماتریس استاندارد عبارت است از

$$A = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}$$

$T$  می‌تواند به عنوان یک تبدیل ماتریس نوشته شود

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

به عنوان مثال، انبساط  $T$  را در نظر بگیرید که توسط ماتریس  $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  تعریف شده است. داریم

$$T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$



بنابراین  $T$  نقطه  $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$  را به نقطه  $\begin{bmatrix} ۶ \\ ۳ \end{bmatrix}$  می‌نگارد. تصویر در همان جهت نقطه داده شده از مبدأ ولی فاصله‌اش تا مبدأ سه برابر فاصله نقطه اولیه تا مبدأ است.

## انعکاس

عملگر  $T: R^2 \rightarrow R^2$  را در نظر بگیرید که توسط  $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$  تعریف شده است و هر نقطه را به قرینه‌اش نسبت به محور  $x$ ‌ها می‌نگارد. شکل ۴-۲ (ب) را ببینید.  $T$  یک انعکاس نامیده می‌شود. نشان داده می‌شود که  $T$  خطی است و ماتریس استاندارد آن را پیدا می‌کنیم. اثر  $T$  روی مبنای استاندارد عبارت است از

$$T\left(\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} \quad T\left(\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس استاندارد عبارت است از

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

لذا یک انعکاس نسبت به محور  $x$ ‌ها می‌تواند به صورت

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

نوشته شود.

کاربردها اغلب شامل دنباله‌ای از نگاشت‌های خطی می‌باشند. یک تبدیل مرکب  $T = T_n \circ \dots \circ T_1$  توسط حاصل ضرب ماتریس‌های نگاشت‌های مؤلفه‌ای  $A_1, \dots, A_n$  توصیف می‌شود.

مثال ۲: ماتریسی را تعیین کنید که از اعمال زیر حاصل شده است. انعکاس نسبت به محور  $x$ ‌ها سپس دوران به اندازه  $\frac{\pi}{4}$  و بعد انبساط با ضریب ۳. تصویر نقطه  $\begin{bmatrix} ۴ \\ ۱ \end{bmatrix}$  را تحت این دنباله از نگاشت‌ها بیابید.

حل: ماتریس‌هایی که انعکاس، دوران و انبساط را تعریف می‌کند به ترتیب عبارتند از

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین نگاشت مرکب توسط ماتریس حاصل ضرب تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

تصویر نقطه  $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$  عبارت است از

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix}$$

اکنون به تبدیلاتی می‌پردازیم که توسط ماتریس‌های نامنفرد تعریف می‌شوند.

#### ۱-۴-۴ قضیه: یک نگاشت خطی نامنفرد $T$

(الف) خطوط را به خطوط می‌نگارد.

(ب) پاره‌خط‌ها را به پاره‌خط‌ها می‌نگارد.

(پ) خطوط موازی را به خطوط موازی می‌نگارد.

(ت) خطوط گذرنده از مبدا را به خطوط گذرنده از مبدا می‌نگارد.

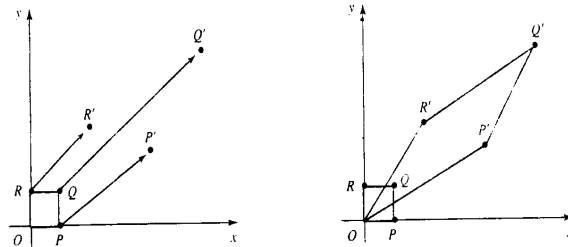
در تمریناتی که بعداً می‌آیند از خواننده می‌خواهیم که این نتایج را بررسی کنند.

مثال ۳: عملگر  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  تعریف شده توسط ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  را در نظر بگیرید. تصویر

مربع واحد را تحت این نگاشت تعیین کنید.

حل: مربع واحد در  $\mathbb{R}^2$ ، مربعی است که رئوس آن به ترتیب عبارتند از:

$$P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad R \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad O \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



شکل ۲۱-۴

شکل ۲۱-۴ را ببینید. تصاویر این نقاط را تحت تبدیل ماتریس می‌یابیم. استفاده از نماد  $Au \rightarrow u$  برای بررسی تصاویر نقاط معین، مفید است. با ضرب هر یک از نقاط به ماتریس داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

به علاوه،  $|A| = (4 \times 3) - (2 \times 3) = 6 \neq 0$ . ماتریس  $A$  نامنفرد است، بنابراین، پاره‌خط‌ها به پاره‌خط‌ها نگاشته می‌شوند. داریم:

$$OP \rightarrow OP', \quad PQ \rightarrow P'Q', \quad QR \rightarrow Q'R', \quad OR \rightarrow O'R'$$

مربع  $PQRO$  به متوازی‌الاضلاع  $P'Q'R'O'$  نگاشته می‌شود. شکل ۲۱-۴ (ب) را ببینید. این عملگرها در  $R^2$  نرم‌های کامپیوتری جهت دوران، منبسط یا منقبض نمودن اشکال به کار برده می‌شوند. بعداً در این بخش این کاربرد را بررسی خواهیم کرد.

اجسام جامد می‌توانند به طور هندسی بررسی شوند. وقتی که وزنه‌ها یا بارها به شکل اجسام را تغییر دهد، گوئیم تغییر شکل<sup>۱</sup> روی داده است. به عنوان مثال، مربع  $PQRO$  در شکل ۲۱-۴ می‌تواند جسم فیزیکی را نشان می‌دهد که به شکل  $P'Q'R'O'$  تغییر یافته است. این نوع تغییر شکل‌ها می‌تواند با استفاده از تکنیک‌های ریاضی در کامپیوتر مدل‌بندی و تحلیل شود. آن قسمت از علوم که چنین مسائلی را بررسی می‌کند، کشسانی<sup>۲</sup> نامیده می‌شود.

نگاشت‌های نامنفرد نیز مهم هستند زیرا این نگاشت‌ها دارای نگاشت وارون هستند. فرض کنید که  $T$  یک نگاشت نامنفردی باشد که توسط ماتریس  $A$  تعریف شده و  $AU = X$  چون  $A$  نامنفرد است،  $A^{-1}$

1) deformation    2) plasticity, elasticity

وجود دارد و  $A^{-1}V = UA^{-1}$  بنابراین دارای یک نگاشت وارون است که وارون نامیده شده و با  $T^{-1}$  نشان داده می‌شود.

دوران، انبساط، انقباض و انعکاس نگاشت‌های نامنفرد هستند. آن‌ها دارای وارون هستند. حال نشان می‌دهیم که وارون یک انبساط با ضریب  $r$ ، یک انقباض با ضریب  $\frac{1}{r}$  است. ماتریس انبساط  $A$  و وارون عبارتند از:

$$A = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix}$$

بنابراین  $A^{-1}$  یک انقباض با ضریب  $\frac{1}{r}$  را تعریف می‌کند. در تمرینات زیر از شما می‌خواهیم که وارون‌های دوران و انعکاس را بررسی کنید.

## نگاشت‌های آفین

این بخش را با بحث در مورد نگاشت‌هایی به پایان می‌رسانیم که هر چند که خطی نیستند اما در ریاضیات و در کاربرد مهم هستند.

یک انتقال نگاشتی است مانند  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  که توسط  $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{v}$  تعریف می‌شود که در آن برداری ثابت است.

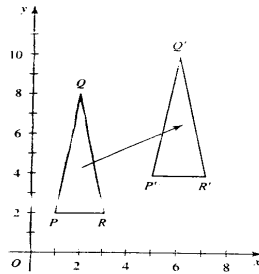
یک انتقال نقاط را در جهت و اندازه بردار  $\mathbf{v}$  می‌افزاید بنابراین به طور طبیعی، انتقال‌ها، خطوط، زوایا و فاصله‌ها را حفظ می‌کند. برای مثال، انتقال زیر را در  $\mathbb{R}^2$  در نظر بگیرید.

$$T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

اثر  $T$  را روی مثلث PQR با رأس‌های  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ،  $\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$  بررسی می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{matrix} P & \longrightarrow & P' & & Q & \longrightarrow & Q' & & R & \longrightarrow & R' \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

در شکل ۴-۲۲، مثلث PQR به مثلث P'Q'R' انتقال می‌یابد.



شکل ۲۲-۴

مثال ۴: معادله تصویر خط  $y = 2x + 3$  را تحت انتقال  $T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  بیابید.

حل: معادله  $y = 2x + 3$  نقاط خطی با شیب ۲ و عرض از مبدا ۳ تعریف می‌کند.  $T$  این خط را به خط دیگری می‌لغزاند. می‌خواهیم معادله این خط تصویر شده را بیابیم.

$$T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x + 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x + 2 \\ 2x + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

ملاحظه می‌کنیم که در نقاط تصویری  $y' = 2x'$ . بنابراین معادله خط تصویر شده عبارت است از  $y = 2x$ . یک نگاشت آفینی<sup>۱</sup> نگاشت  $T: R^n \rightarrow R'$  تعریف شده توسط  $T(u) = Au + v$  است که در آن  $A$  یک ماتریس و  $v$  یک بردار ثابت است. یک نگاشت آفینی می‌تواند به عنوان یک نگاشت ماتریس و یک انتقال در نظر گرفته شود. برای مثال، نگاشت آفین زیر روی  $R^2$  را در نظر بگیرید.

$$T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

می‌خواهیم تصویر مربع واحد در شکل ۲۳-۴ را پیدا کنیم. داریم:

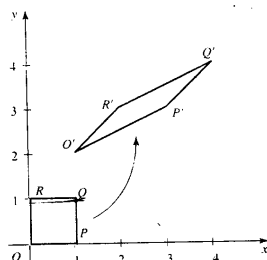
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

چون ماتریس نامنفرد است، پاره‌خط‌ها به پاره‌خط‌ها نگاشته می‌شوند. در نتیجه

$$OP \rightarrow O'P', \quad PQ \rightarrow P'Q', \quad QR \rightarrow Q'R', \quad OR \rightarrow O'R'$$

1) Affine transformation

مربع PQRO به متوازی‌الاضلاع P'Q'R'O' تبدیل می‌شود.



شکل ۴-۲۳

در تمرینات بعدی از شما خواسته می‌شود نشان دهید که انتقال‌ها و نگاشت‌های آفینی، نگاشت‌های خطی نیستند.

در این قسمت تعدادی تبدیل اساسی معرفی کرده‌ایم. نگاشت‌های دیگری مانند، تصویری<sup>۱</sup>، مقیاسی<sup>۲</sup>، چرخشی<sup>۳</sup> را در تمرینات بعدی خواهید دید. این نگاشت‌های پایه‌ای با استفاده از ترکیب توابع به مثابه بلوک‌های ساختمانی برای ایجاد نگاشت‌های جدید می‌باشند. حال کاربردهای این نگاشت‌های را در گرافیک‌های کامپیوتری بررسی می‌کنیم.

## نگاشت‌های در گرافیک‌های کامپیوتری

گرافیک‌های کامپیوتری حوزه‌ای است که ایجاد و بررسی تصاویر را توسط کامپیوتر مطالعه می‌کند. تأثیر گرافیک‌های کامپیوتری در بسیاری از منازل از طریق بازی‌ها مشاهده می‌شود و استفاده آن در تحقیقات، صنعت تجارت وسیع و در حال توسعه است. برخی از کاربردهای آن عبارتند از: بیان طرح‌های توسعه در شیتک‌ها، نمایش و بررسی مولکول‌ها توسط زیست‌شناسان مولکولی به منظور کسب دید عمیق در ساختار آن‌ها، شبیه‌سازی پروازها در تعلیم خلبان‌ها و استفاده مهندسی حمل و نقل در تولید گاشت‌های کامپیوتری در برنامه کاری.

کاربری تصاویر در گرافیک‌های کامپیوتری با استفاده از دنباله‌ای از تبدیلات انجام می‌شود. دوران‌ها، انعکاس‌ها، انبساط‌ها، انقباض‌ها توسط ماتریس‌ها تعریف شده و توسط ضرب ماتریس‌ها انجام می‌شود. دنباله‌ای از چنین تبدیلات می‌تواند توسط یک ماتریس که با حاصل ضرب ماتریس‌ها تعریف شده است

1) projection 2) scaling 3) shear

عملی شود. متأسفانه، در انتقال‌ها از جمع ماتریس‌ها استفاده می‌شود و هر دنباله از تبدیلات که شامل انتقال‌ها باشد نمی‌تواند در یک ماتریس ترکیب شود.

با وجود این اگر از مختصات همگن نامیده می‌شود برای تعریف نقاط در صفحه استفاده شود آن‌گاه انتقالات نیز می‌توانند بر حسب ضرب ماتریس‌ها انجام گیرد و هر دنباله از چنین تبدیلات می‌تواند بر حسب یک ماتریس تعریف شود. در مختصات همگن مؤلفه سوم ۱ به هر یک از مؤلفه‌ها اضافه می‌شود و دوران، انعکاس، انبساط، انقباض و انتقال به ترتیب  $R, E, D$  و  $T$  توسط ماتریس‌های زیر تعریف می‌شوند.

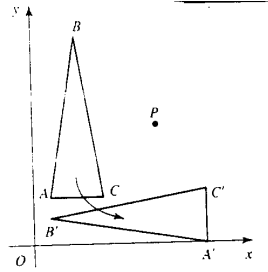
$$\begin{array}{c} \begin{matrix} X \\ x \\ y \\ 1 \end{matrix} \\ \text{نقطه} \end{array} \quad A = \begin{array}{c} R \\ \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{دوران} \end{array} \quad B = \begin{array}{c} Rg \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{انعکاس} \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} \begin{matrix} D \\ r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \\ \text{انبساط / انقباض} \end{array} \quad C = \begin{array}{c} T \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{انعکاس} \end{array}$$

بنابراین برای مثال، انجام یک انبساط  $D$ ، بعد یک انتقال  $T$  و سپس یک دوران  $R$  می‌تواند توسط  $RTD(X) = AEC(X)$  تعریف شود. تبدیل مرکب  $RTD$  توسط ماتریس  $AEC$  تعریف شود.

برخی زبان‌های برنامه‌ریزی روش‌های اجرایی برای دوران، انتقال و انبساط/انقباض (و هم‌چنین برای مقیاس و نمایش، تمرین ۱۵ و ۱۸ را که خواهد آمد ببینید.) فراهم می‌کنند، که می‌تواند برای حرکت تصاویر روی صفحه نمایش استفاده شود. برای انجام این حرکت، روش اجرایی مختصات صفحه نمایش را به مختصات همگن تبدیل کرده و از ماتریس‌هایی استفاده می‌کند که این تبدیلات را در مختصات همگن تعریف می‌کند.

حال نشان می‌دهیم که چگونه تبدیلات برای دوران یک شکل هندسی حول نقطه‌ای غیر از مبدا مورد استفاده قرار می‌گیرند.

مثال ۵: ماتریسی را تعیین کنید که دوران در یک صفحه به اندازه  $\theta$  حول نقطه  $P(h, k)$  را تعریف می‌کند. این نتیجه کلی را به کار برده و ماتریسی را بیابید که دوران در یک صفحه به اندازه زاویه  $\frac{\pi}{4}$  حول نقطه  $(5, 4)$  را تعریف می‌کند. تصویر مثالی با رئوس  $A(1, 2)$ ،  $B(2, 8)$  و  $C(3, 2)$  را تحت این دوران بیابید. شکل ۴-۲۴ را ببینید.



شکل ۴-۲۴

حل: دوران حول  $P$  می‌تواند توسط دنباله‌ای از سه تبدیل زیر انجام یابد:

الف) انتقال  $T_1$  در صفحه که نقطه  $P$  را به مبدا  $O$  می‌برد.

ب) دوران  $R$  در صفحه به اندازه  $\theta$  حول مبدا

پ) انتقال  $T_2$  در صفحه که  $O$  را به  $P$  برمی‌گرداند.

ماتریس‌هایی که این تبدیلات را تعریف می‌کنند، عبارتند از

$$\begin{matrix} T_1 & R & T_2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

دوران  $R_p$  حول  $P$  می‌تواند به شرح زیر صورت گیرد:

$$\begin{aligned} R_p \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} &= T_2 R T_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -h \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & -h \cos \theta + k \sin \theta + h \\ \sin \theta & \cos \theta & -h \sin \theta - k \cos \theta + k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

به عنوان مثال برای به دست آوردن ماتریسی که دوران در صفحه به اندازه زاویه  $\frac{\pi}{4}$  حول نقطه  $P(5, 4)$ .



فرض کنید  $h = 5$ ،  $k = 4$  و  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . ماتریس دوران عبارت است از

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 9 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

برای پیدا کردن تصاویر رئوس مثلث ABC، این مختصات را در مختصات همگن به صورت ستونی نوشته و آن‌ها را در  $M$  ضرب می‌کنیم. در نتیجه ضرب ماتریس داریم:

$$\begin{array}{ccc} \begin{matrix} A \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix} & \longrightarrow & \begin{matrix} A' \\ \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix} & \begin{matrix} B \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix} & \longrightarrow & \begin{matrix} B' \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix} & \begin{matrix} C \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix} & \longrightarrow & \begin{matrix} C' \\ \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \end{array}$$

مثلث یا رئوس  $A(1, 2)$ ،  $B(2, 8)$  و  $C(3, 2)$  به مثلث با رئوس  $A'(7, 0)$ ،  $B'(1, 1)$  و  $C'(7, 2)$  تبدیل می‌شود. شکل ۲۴-۴ را ببینید.

## تصاویر فراکتال طبیعت

سیستم‌های گرافیک کامپیوتری که براساس هندسه اقلیدسی بنا شده‌اند برای ایجاد تصاویر اشیاء ساخته شده توسط انسان مانند ماشین‌آلات، ساختمان‌ها و هواپیماها مناسب می‌باشند. تصاویر این اشیاء می‌تواند با استفاده از خطوط، دایره‌ها و غیره رسم شود. با وجود این، در ساختن اشکال اشیاء طبیعی مانند، حیوانات، درختان، سرزمین‌ها، این اشکال مناسب نیستند.

به گفته ریاضیدانی به نام Benoit B. Mandelbrot، ابرها کره نیستند. کره‌ها مخروط نیستند. سواحل دایره نیستند. و روز در خط مستقیم حرکت نمی‌کند. با وجود این، پوشش طبیعت به سبک غیرمنتظره‌ای مرتب است و پراز اشکالی است که در یک شیء با مقیاس‌های مختلفی تکرار می‌شوند. در سال ۱۹۷۵، مندل بروت Mandelbrot، هندسه جدیدی به نام هندسه فراکتالی معرفی کرد که می‌تواند پدیده‌های طبیعی را بیان کند. فراکتال یک برجسب ساده‌ای برای شکل‌های نامنظم و خرد شده، خودمتشابه است. اشیاء فراکتالی دارای ساختارهایی هستند که تودرتوی هم قرار گرفته و هر ساختار کوچکتر مینیاتوری از ساختار بزرگ است که لزوماً با آن یکی نیست. داستان پشت کلمه فراکتال جالب است مندل بروت با صفت لاتین fractus از فعل frangere به معنی شکستن در کتاب لاتین فرزندش برخوردار کرد. طنین کلمات هم ریشه انگلیسی اصلی، شکستگی و فراق به نظر مناسب آمد و او کلمه فراکتال را برگزید.

حال روش‌هایی را بررسی می‌کنیم که توسط تیم تحقیقاتی انستیتو تکنولوژی جورجیا برای شکل‌بندی تصاویر اشیاء طبیعی با استفاده از فراکتال‌ها توسعه می‌یابند. این تصاویر فراکتالی از طبیعت با استفاده از نگاشت‌های آفین تولید می‌شوند. شکل ۴-۲۵ تصویر فراکتال سرخسی را نشان دهد که به تدریج تولید می‌شود. ببینیم که این امر چگونه صورت می‌گیرد.



شکل ۴-۲۵

چهار نگاشت آفینی  $T_1, \dots, T_4$  زیر را در نظر بگیرید. احتمال‌های  $p_1, \dots, p_4$  را به هر یک از این نگاشت‌ها نسبت دهید.

$$T_1 \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0,185 & 0,03 \\ -0,03 & 0,185 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1,5 \end{bmatrix}, \quad p_1 = 0,185$$

$$T_2 \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0,2 & -0,25 \\ 0,21 & 0,23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1,5 \end{bmatrix}, \quad p_2 = 0,08$$

$$T_3 \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -0,15 & 0,27 \\ 0,25 & 0,26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,45 \end{bmatrix}, \quad p_3 = 0,08$$

$$T_4 \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_4 = 0,01$$

الگوریتم زیر در کامپیوتر برای تولید تصویر سرخس استفاده می‌شود.

$$(1) \text{ فرض کنید } x = 0, y = 0$$

(۲) یک مولد تصادفی را برای انتخاب یکی از تبدیلات آفین  $T_i$  نسبت به احتمالات داده شده به کار

ببرید.

$$(3) \text{ فرض کنید } (x', y') = T_i(x, y)$$

$$(4) (x', y') \text{ را رسم کنید.}$$

$$(5) \text{ فرض کنید } (x, y) = (x', y')$$

(۶) مراحل ۲، ۳، ۴ و را پنج هزار مرتبه تکرار کنید.

با اجرای مرحله ۴ در هر ۵ هزار مرتبه، تصویر سرخس به تدریج ظاهر می‌شود. هر نگاشت آفین  $T_i$  شامل شش پارامتر  $a, b, c, d, e, f$  و یک احتمال  $P_i$  به شرح زیر است:

$$T_i \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}, \quad P_i$$

نگاشت‌های آفین و احتمالات متناظر که یک فراکتال را تولید می‌کنند در سطرهای یک ماتریس به نام سیستم تابع تکراری IFS نوشته می‌شوند. IFS سرخس به شرح زیر است:

$$\begin{bmatrix} T & a & b & c & d & e & f & p \\ ۱ & ۰٫۸۶ & ۰٫۰۳ & -۰٫۰۳ & ۰٫۸۶ & ۰ & ۱٫۵ & ۰٫۸۳ \\ ۲ & ۰٫۲ & -۰٫۲۵ & ۰٫۲۱ & ۰٫۲۳ & ۰ & ۱٫۵ & ۰٫۸۳ \\ ۳ & -۰٫۱۵ & ۰٫۲۷ & ۰٫۲۵ & ۰٫۲۶ & ۰ & ۰٫۴۵ & ۰٫۰۸ \\ ۴ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰٫۱۷ & ۰ & ۰ & ۰٫۰۱ \end{bmatrix}$$

نگاشت‌های آفین مناسبی که شی فراکتال داده شده را تولید می‌کنند، با تعیین نگاشت‌هایی پیدا می‌شوند که شی (به نام جذب کننده<sup>۱</sup>) را به تصاویر مختلف مجزا می‌نگارد که اجتماع آن کل فراکتال است. قضیه‌ای به نام Collage، تضمین می‌کند که تبدیلات می‌توانند در یک IFS گروه‌بندی شوند که فراکتال را به وجود می‌آورد.

احتمالات مختلف در حالت کلی، به تصاویر متفاوت منجر نمی‌شوند اما در آهنگ تشکیل تصویر اثر می‌کنند. احتمالات مناسب برابرند با:

$$p_i = \frac{\text{مساحت تصویر تحت نگاشت } T_1}{\text{مساحت تصویر شی}}$$

خواننده‌هایی که علاقمند به اطلاعات بیشتر در این موضوع جالب هستند می‌توانند به مقاله پژوهشی برجسته مایکل بارنسلی مراجعه کنند. روشی که در انستیتو تکنولوژی جورجیا توسعه یافته است، بسیار مهم است زیرا می‌تواند با استفاده از داده‌های کمپرس شده، تصویری با هر دقت مطلوب تولید کند.

تصویر فراکتالی که شامل مقدار نامتناهی نقطه است که توصیف مستقیم مبدا آنها خیلی پیچیده است می‌تواند با استفاده از فرمول‌های ریاضی، مجدداً تولید شود. برای معرفی ریاضی‌وار بیشتر و عمیق هندسه فراکتالی که شامل جزئیات در مورد چگونگی ساخته شدن تبدیلات آفین است. مرج [۲] را پیشنهاد می‌کنیم. بسته نرم‌افزاری [۳] می‌تواند برای تولید فراکتال‌ها استفاده شود.

1) attractor

## تمرینات

(۱) ماتریس دوران در صفحه حول مبدأ به اندازه زاویه‌های داده شده را بیابید. تصویر نقطه  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  را

تحت هر یک از ماتریس‌ها تعیین کنید.

(الف)  $\begin{bmatrix} \frac{\pi}{4} & \\ & \frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$  (ب)  $\begin{bmatrix} -\frac{\pi}{4} & \\ & \frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$  (پ)  $\begin{bmatrix} \frac{\pi}{4} & \\ & \pi \end{bmatrix}$  (ت)

(ث)  $\begin{bmatrix} -\frac{2\pi}{3} & \\ & \frac{\pi}{6} \end{bmatrix}$  (ج)  $\begin{bmatrix} -\frac{\pi}{3} & \\ & \frac{\pi}{6} \end{bmatrix}$  (ح)

(۲) ماتریس دوران را به کمک اثر دوران روی مبنای استاندارد  $\mathbb{R}^2$ ، بیابید.

(۳) معادله تصویر بیضی  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$  را تحت دوران به اندازه  $\frac{\pi}{4}$  بیابید.

(۴) ماتریسی را بیابید که در صفحه، دوران حول مبدأ به اندازه  $\frac{\pi}{4}$  را انجام داده و همزمان نقاط را به اندازه دو برابر فاصله‌شان از مبدأ حرکت دهد. (راهنمایی: نگاشت مرکب را بسازید).

(۵) ماتریسی را معین کنید که دوران به اندازه  $\theta$  حول مبدأ و انبساط با ضریب  $r$  را تعریف کنید.

(۶) معادله تصویر دایره واحد  $x^2 + y^2 = 1$  را تحت انبساط با ضریب ۳ بیابید.

(۷) دنباله نگاشت‌های  $T_n(u) = A^n u, n = 1, \dots, 4$  را در نظر بگیرید که در آن  $A$  یک ماتریس انبساط با ضریب ۱٫۵ است. تحت این دنباله از نگاشت‌های تصویر دایره واحد را در یک سیستم مختصات رسم کنید.

(۸) ماتریسی را تعیین کنید که انعکاس نسبت به محور  $y$ ها را تعریف کند. تصویر نقطه  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  را تحت این نگاشت بیابید.

(۹) ماتریسی را بیابید که انعکاس نسبت به خط  $y = x$  را تعریف کند.

(۱۰) در  $\mathbb{R}^2$  تبدیلاتی را در نظر بگیرید که توسط هر یک از ماتریس‌های زیر تعریف شده است. تصویر مربع واحد را تحت هر یک از این نگاشت‌ها تعیین کنید.

(الف)  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  (ب)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  (پ)  $\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$

(ت)  $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$  (ج)  $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

(۱۱) ماتریس استاندارد هر یک از عملگرهای زیر را در  $\mathbb{R}^2$  پیدا کنید.

$$T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x-y \\ x+y \end{bmatrix} \text{ (ب) } \quad T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2x \\ x-y \end{bmatrix} \text{ (الف)}$$

$$T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2y \\ -3x \end{bmatrix} \text{ (ت) } \quad T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2x-5y \\ 3y \end{bmatrix} \text{ (پ)}$$

۱۲) ماتریس استاندارد عملگر  $T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$  را بیابید. توجه داشته باشید که این عملگر تمامی نقاط را به محور  $x$  ها می‌نگارد و عملگر تصویری نامیده می‌شود.

۱۳) ماتریس تصویری روی محور  $y$  ها را بیابید.

۱۴) ماتریس تصویری روی خط  $y = x$  را تعیین کنید. تصویر بردار  $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$  را تحت این عملگر تصویری بیابید.

۱۵) ماتریس استاندارد عملگر  $T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} ax \\ by \end{bmatrix}$  را بیابید که در آن  $a$  و  $b$  اعداد مثبتی می‌باشند.  $T$  مقیاس‌گذاری با ضریب  $a$  در جهت محور  $x$  ها و ضریب  $b$  در جهت محور  $y$  ها نامیده می‌شود. مقیاس‌گذاری شکل را به هم می‌ریزد زیرا،  $x$  و  $y$  به یک روش تغییر نمی‌کنند. تصویر مربع واحد را تحت تبدیلی که  $a = 3$  و  $b = 2$  است رسم کنید.

۱۶) معادله تصویری خط  $y = 2x$  را تحت مقیاس‌گذاری با ضریب ۲ در جهت محور  $x$  ها و ضریب ۳ در جهت محور  $y$  ها بیابید.

۱۷) معادله تصویری دایره واحد  $x^2 + y^2 = 1$  را تحت مقیاس‌گذاری با ضریب ۴ در جهت محور  $x$  ها و ضریب ۳ در جهت محور  $y$  ها بیابید.

۱۸) ماتریس استاندارد عملگر  $T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x+cy \\ y \end{bmatrix}$  را بیابید که  $c$  یک عدد است.  $T$  یک برش با ضریب  $c$  در جهت  $x$  نامیده می‌شود. تصویر مربع واحد را تحت برش با ضریب ۲ در جهت  $x$  رسم کنید. توجه کنید که چگونه مقدار  $x$  هر نقطه با ضریب  $2y$  افزایش یافته و برشی در شکل ایجاد می‌شود.

۱۹) تصویر مربع واحد تحت برشی با ضریب  $5/0$  در جهت  $y$  را رسم کنید.

۲۰) معادله تصویری خط  $y = 3x$  را تحت برشی با ضریب ۵ در جهت  $x$  بیابید.

(۲۱) نشان دهید که نگاشت تعریف شده توسط یک ماتریس نامنفرد  $2 \times 2$  همیشه، خطوط مستقیم را به خطوط مستقیم می نگارد.

(۲۲) نشان دهید که انتقال ها و نگاشت های آفینی خطی نیستند.

(۲۳) تصویر خط  $y = 3x + 1$  را تحت انتقال

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

در دو حالت بیابید.

الف)  $p = 2, q = 5$  ب)  $p = -1, q = 1$ .

(۲۴) تصویرهای مربع واحد را تحت نگاشت های آفینی  $T(u) = Au + v$  تعریف شده توسط ماتریس ها و بردارهای زیر پیدا کرده و رسم کنید:

الف)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$  ب)  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

ب)  $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$  ب)  $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

(۲۵) الف) نشان دهید که وارون یک دوران به اندازه زاویه  $\theta$ ، دوران به اندازه زاویه  $-\theta$  است.

ب) نشان دهید که وارون یک انعکاس در محور  $x$  ها یک انعکاس در محور  $x$  ها است.

(۲۶) وارون نگاشت آفین  $T(U) = AU + V$  را بیابید که  $A$  ماتریس نامنفرد است.

(۲۷) ماتریس های  $2 \times 2$  را بسازید که نگاشت های زیر را روی  $R^2$  تعریف کنند. تصویر نقطه  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  را تحت هر نگاشت بیابید.

الف) دوران به اندازه  $\frac{\pi}{4}$  در خلاف حرکت عقربه های ساعت و بعد انبساط با ضریب ۲.

ب) انبساط با ضریب ۴ و بعد انعکاس در محور  $x$  ها.

(۲۸) ماتریس های  $2 \times 2$  را بسازید که نگاشت های زیر را در  $R^2$  تعریف کنند. تصویر نقطه  $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$  را تحت هر نگاشت بیابید.

الف) انبساط با ضریب ۳ و سپس برش با ضریب ۲ در جهت  $x$ .

ب) مقیاس بندی با ضریب ۳ در جهت  $x$  با ضریب ۲ در جهت  $y$  و سپس انعکاس در خط

$$y = x.$$

پ) انبساط با ضریب ۲ سپس برش با ضریب ۳ در جهت  $x$  و بعد دوران در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت به اندازه  $\frac{\pi}{4}$ .

(۲۹) نگاشت  $T: R^n \rightarrow R^n$  را با تعریف  $T(U) = AU$  در نظر بگیرید.  $T$  هم چنین دارای ماتریس استاندارد  $A'$  است. نشان دهید که  $A$  و  $A'$  یکی هستند.

(۳۰) فرض کنید  $A$  ماتریس دوران برای  $\frac{\pi}{4}$  باشد. نشان دهید که  $A^n = I$  ماتریس همانی  $2 \times 2$  است. برای این نتیجه یک دلیل هندسی بیاورید.

(۳۱) نشان دهید که برای ماتریس‌های  $A$  و  $B$  نیز،  $A^2 B A^2 = I$ . برای این نتیجه یک برهان هندسی بیاورید.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(۳۲) دنباله نگاشت‌های  $T_n(u) = (B, A)^n u$  را در نظر بگیرید که  $A$  یک ماتریس دوران به اندازه  $1^\circ$ ،  $B$  یک انبساط با ضریب  $1.05$  و  $u$  نقطه  $x = 1$  و  $y = 0$  است. وقتی  $n$  از ۱ تا  $72^\circ$  تغییر کند، نقاط تصاویر چه شکلی خواهند بود؟ (اگر کامپیوتر دارید، استفاده کنید).

(۳۳) تصاویر مربع واحد را تحت نگاشت‌های آفین  $n = 1, 2, 3$  و  $T_n(u) = A^n u - v$  تعریف شده توسط ماتریس‌ها و نقاط  $v$  در زیر بیابید و رسم کنید.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{(الف)}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{(ب)}$$

(۳۴) تصویر مثلث با رئوس  $(1, 2)$ ،  $(3, 4)$  و  $(4, 6)$  را تحت انتقالی که نقطه  $(1, 2)$  را به  $(2, -3)$  می‌برد بیابید.

(۳۵) نگاشت‌های  $T_1$  و  $T_2$  جابجایی هستند هرگاه برای هر بردار  $u$

$$T_2 \circ T_1(u) = T_1 \circ T_2(u)$$

فرض کنید  $R$  یک دوران،  $D$  یک انبساط،  $F$  یک انعکاس،  $S$  یک مقیاس‌گذاری  $H$  یک برش و  $A$  یک نگاشت آفین باشد. کدام زوج از نگاشت‌های جابجایی هستند؟

(۳۶) ماتریسی را بیابید که دوران سه بعدی به اندازه زاویه  $\frac{\pi}{4}$  را حول محور  $z$ ها تعریف می‌کند. (هر زوج دلخواهی را می‌توانید در نظر بگیرید.)

۳۷) ماتریسی را بیابید که یک بسط از فضای سه بعدی به خارج از مبداء را چنان تعریف می‌کند که هر نقطه سه برابر فاصله‌اش از مبداء دور می‌شود.

۳۸) ماتریسی را معین کنید که می‌تواند برای تعریف یک دوران حول نقطه  $(5, 1)$  به اندازه  $\frac{\pi}{4}$  استفاده شود. تصویر مربع واحد تحت این دوران را بیابید.

۳۹) انتقال کلی را که توسط ماتریس  $T$  در زیر تعریف می‌شود در نظر بگیرید. آیا این نگاشت دارای وارون است؟ در صورت وجود آن را بیابید.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۴۰) ماتریس مقیاس‌گذاری کلی  $S$  را طبق تعریف زیر در نظر بگیرید.  $(d \neq 0, c \neq 0)$  آیا این ماتریس وارون‌پذیر است؟ وارون آن را در صورت وجود بیابید.

$$S = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۴۱) تصویر مثلث با رئوس  $A, B$  و  $C$  در زیر را (در مختصات همگن) تحت دنباله نگاشت‌های  $T$  بعد  $R$  و سپس  $S$  بیابید. تصاویر مثلث‌های اولیه و نهایی را رسم کنید.

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C \begin{bmatrix} 4 \\ 16 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### تمرین‌های دوره‌ای

۱) بردارهای مکانی زیر را در  $R^2$  و  $R^3$  رسم کنید.

الف)  $\vec{OA} = (1, 4)$  در  $R^2$

ب)  $(1, 4, 2), (0, -1, 0), (2, 0, 0)$  در  $R^3$



۲) عبارت‌های زیر را برای  $u = (۳, -۱, ۵)$ ،  $v = (۲, ۳, ۷)$  و  $w = (۰, ۱, -۳)$  محاسبه کنید.

الف)  $u + v$       ب)  $۲u - ۵v - w$       پ)  $۴u - ۲v + ۳w$

۳) حاصل ضرب نقطه‌ای زوج بردارهای زیر را تعیین کنید:

الف)  $(۱, ۲)$ ،  $(۳, -۴)$

ب)  $(۱, -۲, ۳)$ ،  $(۴, ۲, -۷)$

پ)  $(۳, ۲, -۱)$ ،  $(۲, ۲, -۵)$

۴) نرم بردارهای زیر را محاسبه کنید:

الف)  $(۱, -۴)$       ب)  $(-۲, ۱, ۳)$       پ)  $(۱, -۲, ۳, ۴)$

۵) کسینوس زاویه بین بردارهای زیر را بیابید:

الف)  $(۲, ۳)$ ،  $(-۱, ۱)$       ب)  $(۴, ۱, ۲)$ ،  $(۱, ۲, -۳)$

۶) برداری عمود بر بردار  $(-۲, ۱, ۵)$  را بیابید.

۷) فاصله بین زوج بردارهای زیر را بیابید.

الف)  $(۵, ۳)$ ،  $(۱, -۲)$       ب)  $(۷, ۱, ۲)$ ،  $(۳, ۲, ۱)$       پ)  $(۳, ۱, -۱, ۲)$ ،  $(۴, ۱, ۶, ۲)$

۸) تمام مقادیر  $c$  را بیابید به طوری که  $\|c(۱, ۲, ۳)\| = ۱۹۶$ .

۹) تعیین کنید که نگاشت‌های زیر خطی هستند؟

الف)  $T(x, y) = (۲x, y, y - x)$  از  $R^۲$  به  $R^۳$ .

ب)  $T(x, y) = (x + y, ۲y + ۳)$  از  $R^۲$  به  $R^۲$ .

۱۰) ماتریسی را پیدا کنید که  $R^۲$  را به  $R^۲$  می‌نگارد به طوری که

$$\begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱۱ \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} ۵ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

۱۱) فرض کنید  $T$  یک نگاشت خطی بین فضاهای برداری،  $u$  و  $v$  بردارهایی در دامنه و  $a$  و  $b$  اعداد

باشند. ثابت کنید  $T$  خطی است اگر و تنها اگر

$$T(au + bv) = aT(u) + bT(v)$$

این نتیجه می‌تواند تعریف دیگری برای نگاشت خطی باشد.

(۱۲) ماتریسی را بیابید که دوران به صفحه به اندازه  $\frac{\pi}{6}$  حول مبدأ را تعریف کرده و هم زمان نقاط را به سه برابر فاصله‌شان از مبدأ منتقل می‌کند.

(۱۳) ماتریسی را تعیین کنید که انعکاس نسبت به خط  $y = -x$  را تعریف می‌کند.

(۱۴) ماتریسی را تعیین کنید که تصویر روی خط  $y = -x$  را تعریف می‌کند.

(۱۵) معادلهٔ تصویر خط  $y = -5x + 1$  را تحت مقیاس‌گذاری با ضریب ۵ در جهت  $x$  و با ضریب ۲ در جهت  $y$  بیابید.

(۱۶) معادلهٔ تصویر خط  $y = 2x + 3$  را تحت یک برش با ضریب ۳ در جهت  $y$  بیابید.

(۱۷) یک ماتریس  $2 \times 2$  بسازید که برش با ضریب ۳ در جهت  $y$  سپس مقیاس‌گذاری با ضریب ۲ در جهت  $x$  و بعد انعکاس نسبت به محور  $y$  را تعریف می‌کند.

## هدف‌های رفتاری فصل ۵

دانشجویی پس از مطالعه و کاربردی این فصل باید بتواند.

- مفهوم فضای برداری را براساس پنداشت‌های آن تعریف کرده مثال‌های ملموس از آن ارائه دهد.
- مفهوم زیرفضا را درک کرده مثال‌های از آن ارائه دهد.
- مفاهیم کلیدی، استقلال خطی و وابستگی خطی مجموعه‌ای از بردارها را دقیقاً تعریف کرده و قضیه‌های مرتبط با آنها را بیان و اثبات کند.
- مفاهیم پایه، رتبه ماتریس، بردارهای متعامد، ماتریس وارون‌پذیر را تعریف کرده و ارتباط آنها را توضیح دهد.

## هدف‌های کلی فصل ۵

در این فصل مفهوم قبلی فضای برداری  $\mathbb{R}^n$  را تعمیم می‌دهیم. ساختار زیربنایی و اساسی جبری  $\mathbb{R}^n$  را مورد بررسی قرار خواهیم داد. هر مجموعه‌ای که دارای چنین ساختاری باشد دارای همان ویژگی‌های ریاضی  $\mathbb{R}^n$  بوده و یک فضای برداری نامیده می‌شود. نتیجه‌هایی که برای فضای برداری  $\mathbb{R}^n$  توسعه یافته است در مورد چنین مجموعه‌هایی نیز به‌کار خواهد رفت. برای نمونه، خواهیم دید که مجموعه‌های معینی از تابع‌ها دارای همان ویژگی‌های ریاضی هستند که فضای برداری  $\mathbb{R}^n$  دارا است.

## فصل پنجم

# فضاهای برداری عمومی

### ۱-۵ فضاهای برداری

فضاهای برداری  $R^n$  شامل مجموعه عناصری است که بردار نامیده شده که بر آنها دو عمل، یعنی جمع و ضرب اسکالر، تعریف شده است. در فصل قبیل ملاحظه کردیم که فضای برداری  $R^n$  تحت این عمل‌ها بسته است؛ حاصل جمع دو بردار  $R^n$  در  $R^n$  قرار دارد و همچنین حاصل ضرب اسکالر در یک بردار  $R^n$  در  $R^n$  می‌باشد. همچنین فضای برداری  $R^n$  دارای ویژگی‌های جبری دیگری است. برای نمونه، ملاحظه کردیم که جمع بردارها جابه‌جایی و شرکت‌پذیر است:

$$u + v = v + u$$

$$u + (v + w) = (u + v) + w$$

هدف‌مان در این بخش این است که بر این ویژگی‌ها و سایر ویژگی‌های جبری  $R^n$  تمرکز کنیم. ما مجموعه‌ای از بندها را که بر ویژگی‌های  $R^n$  استوار باشد استخراج می‌کنیم. هر مجموعه‌ای که در این بندها صدق کند ویژگی‌های جبری مشابه ویژگی‌های فضای برداری  $R^n$  خواهد داشت. چنین مجموعه‌ای یک فضای برداری و عناصر آن بردار نامیده می‌شوند. ارزش این رویکرد در این است که مفهوم‌ها و نتایجی که برای فضای برداری  $R^n$  به دست آمده‌اند برای سایر فضاهای برداری قابل اعمال هستند.

اینک تعریف رسمی فضای برداری را که بر پایه ویژگی‌های جبری  $R^n$  استوار است ارائه می‌کنیم. ویژگی‌هایی از  $R^n$  که در قضیه ۱-۴ عرضه شدند. ملاحظه می‌کنیم که این بندها را می‌توانیم به سه

گروه مناسب مجزا دسته‌بندی کنیم.

**۱-۱-۵ تعریف.** یک فضای برداری مجموعه‌ای مانند  $V$  متشکل از عناصری است که بردار نامیده می‌شوند، که اعمال جمع و ضرب اسکالری بر آن تعریف شده که در شرایط ذیل صدق می‌کنند ( $u, v$  و  $w$  عناصر دلخواه  $V$ ،  $c$  و  $d$  اسکالر هستند).

**بنداشت‌های بستاری** (۱) حاصل جمع  $u + v$  وجود دارد و متعلق به  $V$  است ( $V$  تحت جمع بسته است).

(۲)  $cu$  عنصری از  $V$  است ( $V$  تحت ضرب اسکالر بسته است).

**بنداشت‌های جمع** (۳)  $u + v = v + u$  (ویژگی جابه‌جایی).

(۴)  $u + (v + w) = (u + v) + w$  (ویژگی شرکت‌پذیری).

(۵) عنصری از  $V$ ، که بردار صفر نامیده می‌شود، به  $0$  نشان داده می‌شود، وجود دارد به قسمی که  $u + 0 = 0$ .

(۶) متناظر هر عنصر  $u$  از  $V$  عنصری وجود دارد که قرینه  $u$  نامیده و به  $-u$  نشان داده می‌شود، به قسمی که  $u + (-u) = 0$ .

**بنداشت‌های ضرب اسکالر** (۷)  $c(u + v) = cu + cv$

(۸)  $(c + d)u = cu + du$

(۹)  $c(du) = cd$

(۱۰)  $1u = u$

معمول‌ترین مجموعه‌هایی که به عنوان مجموعه‌های اسکالر در فضاهای برداری استفاده می‌شود مجموعه عددهای حقیقی و مجموعه عددهای مختلط می‌باشد. در این صورت فضاهای برداری را به ترتیب فضای برداری حقیقی و فضای برداری مختلط می‌نامیم. در این مبحث کوششمان اساساً بر فضاهای برداری حقیقی متمرکز شده، هر جا مناسب باشد، به اختصار نتایج به دست آمده را در مورد فضاهای برداری مختلط متذکر می‌شویم.

## ۲-۵ فضاهای برداری ماتریس‌ها

مجموعه ماتریس‌های حقیقی (ماتریس‌های با درایه‌های اعداد حقیقی)  $2 \times 2$  را در نظر می‌گیریم. تاکنون عمل‌های جمع و ضرب اسکالر را برای این ماتریس‌ها تعریف کرده‌ایم. این مجموعه در واقع یک فضای برداری تشکیل می‌دهد. ما بندهاها ۱، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ را بررسی کرده و برقراری مابقی بندهاها را به دانشجوی محول می‌کنیم.

نماد برداری را برای عناصر  $M_{2 \times 2}$  به کار می‌بریم. فرض کنیم

$$u = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

دو ماتریس  $2 \times 2$  دلخواه باشند. داریم:

بندهاها:

$$u + v = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + e & b + f \\ c + g & d + h \end{bmatrix}$$

پس  $u + v$  یک ماتریس  $2 \times 2$  است.

در نتیجه  $M_{2 \times 2}$  جمع بسته است.

بندهاها ۳ و ۴: بنابر بررسی‌های قبلی می‌دانیم که ماتریس‌های  $2 \times 2$  تحت جمع جابه‌جایی و شرکت‌پذیرند (قضیه ۲-۲).

بندهاها ۵: ماتریس صفر  $2 \times 2$  عبارت است از ماتریس  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، زیرا

$$\mathbf{u} + 0 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \mathbf{u}$$

بندهاها ۶: اگر  $u = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، آنگاه  $-u = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$ ، زیرا

$$u + (-u) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - a & b - b \\ c - c & d - d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

مجموعه  $M_{2 \times 2}$  متشکل از همه ماتریس‌های  $2 \times 2$  که فضای برداری است. ویژگی‌های جبری  $M_{2 \times 2}$  مشابه با ویژگی‌های  $R^n$  است. مشابهاً، داریم:

$M_{m \times n}$ ، مجموعه ماتریس‌های  $m \times n$ ، یک فضای برداری است

### ۳-۵ فضاهای برداری تابعها

فرض کنیم  $V$  مجموعه همه تابع‌های حقیقی با دامنه عددهای حقیقی باشد. هر عنصر  $V$  همانند  $f$ ، خط حقیقی را به خط حقیقی می‌نگارد. اکنون عمل‌های جمع و ضرب اسکالری را در  $V$  تعریف کرده و آن را به یک فضای برداری تبدیل می‌کنیم.

فرض کنیم  $f$  و  $g$  دو عنصر دلخواه  $V$  باشند. حاصل جمع این دو،  $f + g$  را به عنوان تابعی با ضابطه

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

تعریف می‌کنیم. این امر  $f + g$  را به عنوان تابعی با دامنه مجموعه عددهای حقیقی معرفی می‌نماید. برای یافتن مقدار  $f + g$  به ازای هر عدد حقیقی  $x$ ، مقدار  $f$  را در  $x$  با مقدار  $g$  در  $x$  جمع می‌کنیم. این عمل را جمع نقطه‌ای می‌نامیم.

در مرحله بعد ضرب اسکالر را بر عناصر  $V$  تعریف می‌کنیم. فرض کنیم  $c$  یک اسکالر دلخواه باشد. مضرب اسکالری  $f$ ،  $cf$  تابعی است با ضابطه

$$(cf)(x) = c(f(x))$$

این امر  $cf$  را به عنوان تابعی با دامنه مجموعه عددهای حقیقی معرفی می‌کند. برای یافتن مقدار  $cf$  در هر عدد حقیقی دلخواه  $x$ ، مقدار  $f$  را در  $x$  یافته و آنرا در  $c$  ضرب می‌کنیم. این عمل اسکالر نقطه‌ای نامیده می‌شود.

برای آنکه احساسی هندسی از این دو عمل بر توابع داشته باشیم، دو تابع مشخص زیر را در نظر

می‌گیریم

$$f(x) = x \quad , \quad g(x) = x^2$$

در این صورت  $f + g$  تابعی است که با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شود

$$(f + g)(x) = x + x^2$$

مضرب اسکالر  $f$  در اسکالری مانند  $\varepsilon$  تابع  $\varepsilon f$  است که با ضابطه

$$(\varepsilon f)(x) = \varepsilon x$$

تعریف می‌شود.

با تعریف عمل‌های جمع و ضرب اسکالر بر این فضای تابعی  $V$  اکنون نوبت به این می‌رسد که نشان دهیم  $V$  یک فضای برداری است.

بنداشت ۱:  $f + g$  تابعی است که با ضابطه  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  تعریف شده و لذا تابعی با دامنه مجموعه عددهای حقیقی بوده و بنابراین عنصری متعلق به  $V$  است. بنابراین  $V$  تحت جمع بسته است.

بنداشت ۲:  $cf$  با ضابطه  $(cf)(x) = c(f(x))$  تعریف شده، در نتیجه  $cf$  نیز تابعی با دامنه مجموعه عددهای حقیقی بوده و بنابراین به  $V$  تعلق دارد. بنابراین  $V$  تحت ضرب اسکالر بسته است.

بنداشت ۵: فرض کنیم  $0$  تابعی باشد که در آن  $0(x) = 0$  برای هر عدد حقیقی  $x$ .  $0$  تابع صفر نامیده می‌شود. در این صورت برای هر عدد حقیقی  $x$ :

$$(f + 0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x) + 0 = f(x)$$

بنابراین مقدار  $f + 0$  در هر  $x$  برابر مقدار  $f$  در  $x$  است، از این رو  $f + 0 = f$ ، یعنی  $0$  بردار صفر است.

بنداشت ۶: تابع  $-f$  را با ضابطه  $(-f)(x) = -f(x)$  در نظر می‌گیریم نشان می‌دهیم که  $-f$  قرینه  $f$  است.

$$\begin{aligned} (f + (-f))(x) &= f(x) + (-f)(x) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0 \\ &= 0(x) \end{aligned}$$

یعنی در هر  $x$  مقدار  $f + (-f)$  با مقدار  $0$  برابر است. لذا  $f + (-f) = 0$ . بنابراین  $-f$  قرینه  $f$  است. فضاهای برداری بسیاری وجود دارد که عناصر آنها تابع هستند. برای نمونه، مجموعه همه تابع‌هایی با دامنه  $(-\pi, \pi)$  با جمع نقطه‌ای و ضرب اسکالر نقطه‌ای یک فضای برداری است. دانشجوی ضمن تمرین‌هایی که در دنباله این بحث ارائه می‌گردد به بررسی فضاهای برداری تابعی دیگری خواهد پرداخت.



۴-۵ فضای برداری مختلط  $\mathbb{C}^n$ 

اکنون مفهوم فضای برداری حقیقی  $\mathbb{R}^n$  را به فضای برداری مختلط  $\mathbb{C}^n$  تعمیم می‌دهیم. فرض کنیم  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  دنباله‌ای متشکل از  $n$  عدد مختلط باشد. مجموعه همه چنین دنباله‌هایی ( $n$ -تایی مرتب) را به  $\mathbb{C}^n$  نشان می‌دهیم. برای نمونه  $(4 - 6i, 2 + 3i)$  عنصری از  $\mathbb{C}^2$  است، در حالی که  $(4, 1 - 5i, 3i)$  عنصری از  $\mathbb{C}^3$  است.

فرض کنیم عمل‌های جمع و ضرب اسکالر (به‌وسیله اسکالر مختلط  $\mathbb{C}$ ) را بر  $\mathbb{C}^n$  به روش زیر تعریف شده باشد:

$$(u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)$$

$$c(u_1, \dots, u_n) = (cu_1, \dots, cu_n)$$

برای نمونه دو بردار  $u = (2 + i, 3 - 4i)$  و  $v = (1 - 3i, 5 + 3i)$  از  $\mathbb{C}^2$  و اسکالر  $c = 4 + 3i$  را در نظر می‌گیریم

$$u + v = (2 + i, 3 - 4i) + (1 - 3i, 5 + 3i) = (3 - 2i, 8 - i)$$

$$cu = (4 + 3i)(2 + i, 3 - 4i) = (5 + 10i, 24 - 7i)$$

می‌توان نشان داد که  $\mathbb{C}^n$  با این عمل یک فضای برداری مختلط می‌باشد (تمرین‌های بعدی ملاحظه شود). اکنون قضیه‌ای مطرح می‌کنیم که مشتتمل بر ویژگی‌های مفید بردارها است. این‌ها ویژگی‌هایی هستند که در خصوص  $\mathbb{R}^n$  وضوح فوری داشتند و بنابراین تقریباً دانسته و معلوم فرض شده بودند. با این وجود، در مورد سایر فضاهای برداری وضوح آنها چندان آشکار نمی‌نماید.

**۱-۴-۵ قضیه.** فرض کنیم  $V$  یک فضای برداری،  $A_v$  برداری در  $V$ ،  $A_0$  بردار صفر  $c, V$

اسکالری داخواه و  $0$  اسکالر صفر باشد. در این صورت

الف)  $A_0 A v = A_0$

ب)  $A 0 = A_0$

ج)  $(-1) A v = -A v$

د) هرگاه  $c A v = A_0$ ، آنگاه  $c = 0$  یا  $A v = 0$

برهان. (الف) و (ج) را اثبات می‌کنیم، برهان (ب) و (د) را به‌عنوان تمرین به دانشجوی محول می‌کنیم.

$$\begin{aligned} 0Av + 0Av &= (0 + 0)Av && \text{(بنداشت ۸)} && \text{(الف)} \\ &= 0Av && \text{(ویزگی اسکالر 0)} \end{aligned}$$

به دو طرف تساوی اخیر قرینه  $-0Av$  را افزون می‌کنیم

$$\begin{aligned} 0Av + 0Av + (-0Av) &= 0Av + (-0Av) \\ 0Av + [0Av + (-0Av)] &= A0 && \text{(بنداشت ۴ و ۶)} \\ 0Av + A0 &= A0 && \text{(بنداشت ۶)} \\ 0Av &= 0 && \text{(بنداشت ۵)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-1)Av + Av &= (-1)Av + 1Av && \text{(بنداشت ۱۰)} && \text{(ج)} \\ &= [(-1) + 1]Av && \text{(بنداشت ۸)} \\ &= 0Av && \text{(ویزگی اسکالره)} \\ &= A0 && \text{(قسمت الف فوق)} \end{aligned}$$

بنابراین  $(-1)Av$  قرینه  $v$  است (بنداشت ۶).

### ۲-۴-۵ تمرین

(۱) در درس ثابت کردیم که  $M_{22}$ ، مجموعه ماتریس‌های  $2 \times 2$ ، با اعمال معمولی جمع و ضرب اسکالر ماتریس‌ها در بنداشت‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ صدق می‌کند. ثابت کنید  $M_{22}$  در مابقی بنداشت‌های فضای برداری نیز صدق کرده و لذا برهان اینکه  $M_{22}$  یک فضای برداری است را کامل کنید.

(۲) در درس ثابت کردیم که مجموعه توابع با اعمال جمع نقطه‌ای و ضرب اسکالر، با دامنه اعداد حقیقی، در بنداشت‌های ۱، ۲، ۵ و ۶ از فضای برداری صدق می‌کند. ثابت کنید این مجموعه در مابقی بنداشت‌های فضای برداری نیز صدق کرده و لذا یک فضای برداری است.

(۳) ثابت کنید مجموعه  $\mathbb{C}^n$  با اعمال جمع و ضرب اسکالر مشروح در ذیل یک فضای برداری است:

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)$$

$$= (u_1, u_2, \dots, u_n) = (cu_1, cu_2, \dots, cu_n)$$

$u + v$  و  $cu$  را برای برداری  $C^1$ ، که ذیلاً ذکر می‌شوند، محاسبه کنید

$$u = (2 - i, 3 + 4i), v = (5, 1, 3i), c = 3 - 2i \quad ۱-$$

$$u = (1 + 5i, -2 - 3i), v = (2i, 3 - 2i), c = 4 + i \quad ۲-$$

(۴) فرض کنیم  $V$  یک فضای برداری،  $u, v, w$  بردارهایی در  $V$ ،  $a, b, c$  اسکالرهایی باشند. با استفاده از بندهای فضای برداری احکام ذیل را ثابت کنید.

$$۱- \quad c0 = 0$$

$$۲- \quad \text{هرگاه } cv = 0, \text{ آنگاه } c = 0 \text{ یا } v = 0.$$

$$۳- \quad -(-v) = v$$

$$۴- \quad \text{اگر } u + v = u + w \text{ آنگاه } v = w.$$

$$۵- \quad \text{هرگاه } au = bu \text{ و } u \neq 0 \text{ آنگاه } a = b.$$

## ۵-۵ زیرفضاها

زیر مجموعه‌های خاصی از فضاهای برداری خود تشکیل فضای برداری می‌دهند. برای آنکه این ایده را اثر بخشی ببخشیم بار دیگر به فضای برداری  $\mathbb{R}^n$  نظری می‌افکنیم. فضای  $\mathbb{R}^n$  مشتمل بر مجموعه بردارهایی است که بر آنها عمل‌های جمع و ضرب اسکالر تعریف شده است. می‌دانیم  $\mathbb{R}^n$  تحت این عمل‌ها بسته است. هرگاه دو بردار  $\mathbb{R}^n$  را جمع کنیم برداری از  $\mathbb{R}^n$  به دست می‌آوریم. وانگهی، هرگاه عنصری از  $\mathbb{R}^n$  را در یک اسکالر ضرب کنیم عنصری از  $\mathbb{R}^n$  به دست می‌آوریم. برای نمونه، در  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad 5 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$                        $\uparrow$                        $\uparrow$                        $\uparrow$                        $\uparrow$   
 عنصر  $\mathbb{R}^3$                       عنصر  $\mathbb{R}^3$                       عنصر  $\mathbb{R}^3$                       عنصر  $\mathbb{R}^3$                       عنصر  $\mathbb{R}^3$

اکنون به زیر مجموعه‌های خاصی از  $\mathbb{R}^3$  می‌نگریم که همین ویژگی‌های بستاری را دارا هستند. زیرمجموعه  $V$  از  $\mathbb{R}^3$  متشکل از همه‌ی بردارهایی به فرم  $(a, a, b)$  را در نظر می‌گیریم.  $V$  مشتمل بر همه بردارهایی از  $\mathbb{R}^3$  است که مؤلفه‌های اول و دوم یکسان دارند. برای نمونه  $(2, 2, 3)$  و  $(-1, -1, 6)$  در  $V$  خواهند بود. مشاهده می‌کنیم که هرگاه دو عنصر  $V$  را با هم جمع کنیم عنصری از  $V$  به دست می‌آید؛

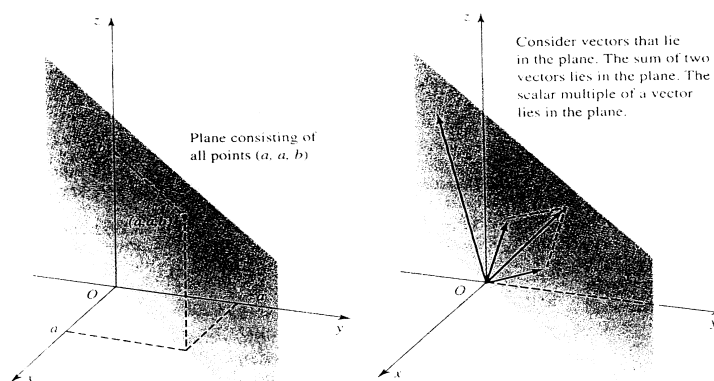
همچنین هرگاه یک عنصر  $V$  را در یک اسکالر ضرب کنیم باز عنصری از  $V$  حاصل می‌شود. فرض کنیم  $(a, a, b)$  و  $(c, c, d)$  دو عنصر دلخواه  $V$  و  $k$  یک اسکالر باشد. در این صورت

$$(a, a, b) + (c, c, d) = (a + c, a + c, b + d) \in V$$

$$k(a, a, b) = (ka, ka, kb) \in V$$

$V$  دارای جمع و ضرب اسکالری است که بر آن تعریف شده‌اند. همین  $V$  تحت این عمل‌ها بسته است.  $V$  دارای ویژگی‌های جبری است که  $\mathbb{R}^3$  داراست. بنابراین ما به  $V$  به مثابه یک فضای برداری می‌نگریم که در  $\mathbb{R}^3$  محاط شده باشد. چنین فضای محاط شده در فضای بزرگ‌تر را یک زیرفضا می‌نامیم.

اینک به تعبیر هندسی  $V$  می‌پردازیم.  $\mathbb{R}^3$  مجموعه همه نقطه‌هایی است که در فضای سه‌بعدی معمولی واقع‌اند.  $V$  مجموعه همه نقطه‌هایی است که مؤلفه‌های  $x$  و  $y$  برابر دارند. این نقطه‌ها صفحه‌ای می‌سازند که عمود بر صفحه  $xy$  بوده و مآر بر خط به معادله  $y = x$  و  $z = 0$  می‌باشد. شکل ۱-۵ ملاحظه شود. حاصل جمع هر دو بردار مکان که در این صفحه باشند نیز در این صفحه واقع است. همچنین مضرب اسکال هر بردار که در این صفحه باشد متعلق به این صفحه است. این بررسی به ما امکان تعریف کلی یک زیرفضا از یک فضای برداری را به‌دست می‌دهد.



شکل ۱-۵

تعریف. فرض کنیم  $V$  یک فضای برداری و  $U$  یک زیرمجموعه ناتهی  $V$  باشد.  $U$  را یک زیرفضای  $V$  نامیم هرگاه تحت جمع و ضرب اسکالر بسته باشد. برای آنکه ملاحظه کنیم که  $U$  یک فضای برداری است. یادآور می‌شویم که  $U$  در بنداشت‌های بستاری ۱ و ۲ صدق می‌کند. همچنین  $U$  شرایط بنداشت‌های ۳ تا

۱° را از فضای بزرگتر برداری  $V$  به «ارث» می‌برد. یک زیرفضا، فضای برداری است که در یک فضای برداری بزرگتر محاط شده باشد.

مثال ۱: فرض کنیم  $U$  زیرمجموعه‌ای از  $\mathbb{R}^3$  متشکل از همه بردارهایی به فرم  $(u, \circ, \circ)$  (یعنی مؤلفه‌های دوم و سوم صفر) باشد. نشان دهید که  $U$  یک زیرفضای  $\mathbb{R}^3$  است.

حل: فرض کنیم  $(u, \circ, \circ)$  و  $(b, \circ, \circ)$  دو بردار در  $U$  و  $k$  یک اسکالر باشد. داریم:

$$(a, \circ, \circ) + (b, \circ, \circ) = (a + b, \circ, \circ) \in U$$

$$k(a, \circ, \circ) = (ka, \circ, \circ) \in U$$

حاصل جمع و ضرب اسکالر در  $U$  هستند. بنابراین یک زیرفضای  $\mathbb{R}^3$  است.

از نظر هندسی،  $U$  مجموعه همه بردارهایی است که بر محور  $x$  واقع‌اند. متذکر می‌شویم که حاصل جمع و همچنین ضرب اسکالر هر دو بردار واقع بر محور  $x$  بر این محور واقع‌اند.

مثال ۲: فرض کنیم  $W$  مجموعه بردارهایی به فرم  $(a, a^2, b)$  باشد، نشان دهید که  $W$  یک زیرفضای  $\mathbb{R}^3$  نمی‌باشد.

حل:  $W$  مجموعه‌ی همه بردارهایی در  $\mathbb{R}^3$  است که برای آن‌ها مؤلفه دوم، مربع مؤلفه اول می‌باشد. برای نمونه بردار  $(2, 4, 3)$  در  $W$  است در حالی که بردار  $(1, 3, 5)$  در  $W$  نمی‌باشد.

فرض کنیم  $(a, a^2, b)$  و  $(c, c^2, d)$  دو بردار در  $W$  باشند. داریم

$$(a, a^2, b) + (c, c^2, d) = (a + c, a^2 + c^2, b + d)$$

$$\neq (a + c, (a + c)^2, b + d)$$

بنابراین  $(a, a^2, b) + (c, c^2, d)$  عنصری از  $W$  نمی‌باشد.  $W$  تحت جمع بسته نمی‌باشد، در نتیجه  $W$  یک زیرفضا نیست.

مثال ۳: ثابت کنید مجموعه  $U$  متشکل از ماتریس‌های قطری  $2 \times 2$  یک زیرفضای فضای برداری  $M_{2 \times 2}$  می‌باشد.

حل: باید نشان دهیم که  $U$  تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است. دو عنصر دلخواه زیر را از  $U$  در نظر می‌گیریم

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a & \circ \\ \circ & b \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} p & \circ \\ q & \circ \end{bmatrix}$$

داريم

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a & \circ \\ \circ & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & \circ \\ q & \circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+p & \circ \\ \circ & b+q \end{bmatrix}$$

ملاحظه مى‌کنيم که  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  يك ماتريس قطرى  $2 \times 2$  بوده و در اين صورت عنصرى از  $\underline{U}$  است.  $\underline{U}$  تحت جمع بسته است.

فرض كنيم  $c$  يك اسكالر باشد. داريم

$$c\mathbf{u} = c \begin{bmatrix} a & \circ \\ \circ & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca & \circ \\ \circ & cb \end{bmatrix}$$

$c\mathbf{u}$  يك ماتريس قطرى  $2 \times 2$  است. از اين رو  $U$  تحت ضرب اسكالر بسته است.  $U$  يك زیرفضای  $M_{2 \times 2}$  است.  $U$  يك فضای برداری ماتريس است. که در  $M_{2 \times 2}$  محاط شده است.

مثال ۴: فرض کنیم  $P_n$  نمائش مجموعه تابع‌های چندجمله‌ای حقیقی (با ضرب عدد حقیقی) از درجه کوچکتر یا برابر  $n$  باشد. ثابت کنید  $P_n$  یک فضای برداری است که در آن جمع و ضرب اسكالر به شکل نقطه‌ای تعريف شده‌اند.

حل: مى‌توانيم ثابت کنیم که  $P_n$  به همراه اين دو عمل در همه بنداشته‌های فضای برداری صدق مى‌کند. اما راه ساده‌تری وجود دارد،  $P_n$  يك زیرمجموعه از فضای برداری  $V$  متشکل از همه تابع‌هایی با دامنه عددهای حقیقی است. نشان می‌دهيم که اين زیرمجموعه يك زیرفضای  $V$  است؛ در آن صورت خود يك فضای برداری خواهد بود. نشان می‌دهيم که  $P_n$  تحت جمع و ضرب اسكالر بسته است. فرض کنیم  $f$  و  $g$  دو عنصر  $P_n$  باشند:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

ابتدا حاصل جمع  $f + g$  را در نظر می‌گیريم. داريم

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= [a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0] + [b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0] \\ &= (a_n + b_n) x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0) \end{aligned}$$

$(f+g)(x)$  یک چندجمله‌ای با درجه حداکثر برابر  $n$  است. بنابراین  $f+g$  عنصری از  $P_n$  بوده و  $P_n$  تحت جمع بسته است.

اکنون به حاصل ضرب اسکالری می‌پردازیم،  $cf$  چنین تعریف شده است

$$\begin{aligned}(cf)(x) &= c[f(x)] \\ &= c[a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0] \\ &= ca_n x^n + ca_{n-1} x^{n-1} + \cdots + ca_1 x + ca_0.\end{aligned}$$

$(cf)(x)$  چندجمله‌ای از درجه حداکثر  $n$  است. لذا  $cf$  عنصری از  $P_n$  بوده و  $P_n$  تحت ضرب اسکالری بسته است.

بدین‌سان ثابت کرده‌ایم که  $P_n$  زیرمجموعه‌ای از فضای برداری  $\underline{V}$  از توابع است که تحت جمع و ضرب اسکالری بسته است. بنابراین  $P_n$  یک زیرفضای  $\underline{V}$  بوده و خود یک فضای برداری است. قضیه‌ی زیر یک ویژگی مهم همه زیرفضاها را بیان می‌کند

**۱-۵-۵ قضیه.** فرض کنیم  $U$  یک زیرفضای فضای برداری  $V$  باشد.  $U$  شامل بردار صفر  $V$  است.

**برهان.** فرض کنیم  $\mathbf{u}$  یک بردار دلخواه  $U$  و  $0$  بردار صفر  $V$  باشد. همچنین فرض کنیم  $0$  اسکالر صفر باشد. بنا بر قضیه ۱-۵ قسمت (الف) می‌دانیم که  $0\mathbf{u} = 0$ . چون  $U$  تحت ضرب اسکالری بسته است، این بدان معنی است که  $0$  در  $U$  است.

از این قضیه نتیجه می‌گیریم که همه زیرفضاهای  $\mathbb{R}^3$  شامل  $(0, 0, 0)$  اند. از نظر هندسی این بدان معنی است که همه زیرفضاهای فضای بسته سه‌بعدی از مبدأ می‌گذرند. از این قضیه می‌توان به‌عنوان یک محک سریع بهره جست و در مواردی نشان داد که برخی از زیرمجموعه‌ها زیرفضا نمی‌باشند. هرگاه یک زیرمجموعه مفروض شامل بردار صفر نباشد نمی‌تواند یک زیرفضا بوده باشد. مثال زیر این رویکرد را به نمایش می‌گذارد.

**مثال:** فرض کنیم  $W$  مجموعه بردارهایی به فرم  $(a, a, a+2)$  باشد نشان دهید که  $W$  یک زیرفضای  $\mathbb{R}^3$  نمی‌باشد.

حل: چک می‌کنیم که آیا  $(0, 0, 0)$  در  $W$  است. آیا مقداری از  $a$  هست که برای آن  $(a, a, a + 2)$  برابر  $(0, 0, 0)$  باشد؛ با تساوی کردن  $(a, a, a + 2)$  و  $(0, 0, 0)$  داریم

$$(a, a, a + 2) = (0, 0, 0)$$

با مساوی قرار دادن مؤلفه‌های متناظر، به دست می‌آوریم:

$$a = 0, a + 2 = 0$$

این دستگاه معادلات فاقد جواب است. بنابراین  $(0, 0, 0)$  عنصری از  $W$  نمی‌باشد و لذا  $W$  یک زیرفضا نیست.

در بخش‌های بعدی ابزاری به دست می‌آوریم که ما را قادر به شناخت بیشتر زیرفضاها خواهد کرد.

### ۲-۵-۵ تمرین

(۱) مجموعه‌ای از بردارها به فرم مفروض را در نظر بگیرید. ثابت کنید این مجموعه‌ها زیرفضاهای  $\mathbb{R}^2$  هستند. هر زیرفضا را از نظر هندسی تعبیر کنید.

(الف) $(a, 0)$	(ب) $(a, a)$
(ج) $(a, 2a)$	(د) $(a, a + 3b)$

(۲) مجموعه بردارهای به فرم مفروض را در نظر بگیرید. ثابت کنید این مجموعه‌ها زیر فضاهای  $\mathbb{R}^3$  هستند. هر زیرفضا را از نظر هندسی تعبیر کنید.

(الف) $(a, b, 0)$	(ب) $(0, a, 0)$
(ج) $(a, 2a, b)$	(د) $(a, b, a + b)$

(۳) مجموعه بردارهای به فرم مفروض را در نظر بگیرید. ثابت کنید این مجموعه‌ها زیر فضاهای  $\mathbb{R}^3$  هستند. هر زیرفضا را از نظر هندسی تعبیر کنید.

(الف) $(a, a, a)$	(ب) $(0, a, 2a)$
(ج) $(a, a + b, 3a)$	(د) $(a, 2a, 3a + 5b)$

(۴) مجموعه بردارهای به فرم مفروض را در نظر بگیرید. ثابت کنید این مجموعه‌ها زیرفضاهای  $\mathbb{R}^4$  هستند.



$$(a, 2a, 3a, 4a) \text{ (ب)} \quad (a, 2a, b, 3b) \text{ (الف)}$$

$$(a, b, c, a + 2b + 3c) \text{ (د)} \quad (0, a, b, a + 2b) \text{ (ج)}$$

۵) فرض کنیم  $A$  مجموعه بردارهایی به فرم  $(a, 2a)$ ،  $B$  مجموعه بردارهایی به فرم  $(a, a^2)$  و  $C$  مجموعه بردارهایی به فرم  $(a, a^2 + 3)$  باشد. تعیین کنید که آیا  $A$ ،  $B$  یا  $C$  زیرفضاهای  $\mathbb{R}^2$  هستند؟

۶) مجموعه بردارهایی به فرم زیر را در نظر بگیرید. با چک کردن شرایط بستاری جمع و ضرب اسکالر تعیین کنید که آیا این مجموعه‌ها زیرفضاهای  $\mathbb{R}^3$  هستند؟

$$(a, 4a, -3a) \text{ (ب)} \quad (a, b, a + 3) \text{ (الف)}$$

$$(a, b, 4a - 1) \text{ (د)} \quad (a, b, 2) \text{ (ج)}$$

۷) مجموعه بردارهایی به فرم زیر را در نظر بگیرید. با چک کردن شرایط بستاری جمع و ضرب اسکالر تعیین کنید که آیا این مجموعه‌ها زیرفضاهایی از  $\mathbb{R}^3$  هستند؟

$$(a, a^2, 5a) \text{ (ب)} \quad (a, b, a - 4b) \text{ (الف)}$$

$$(a, b, 2a + 3b + 6) \text{ (د)} \quad (a, 1, 1) \text{ (ج)}$$

۸) آیا مجموعه‌های زیر زیرفضاهای  $\mathbb{R}^2$  هستند؟ مجموعه همه بردارهای  $(a, b, c)$  که در آن

$$a + b + c = 1 \text{ (ب)} \quad a + b + c = 0 \text{ (الف)}$$

$$ab = 5 \text{ (د)} \quad ab = 0 \text{ (ج)}$$

$$a = b + c \text{ (و)} \quad ab = ac \text{ (ه)}$$

۹) کدامیک از مجموعه‌های زیر زیرفضای  $\mathbb{R}^3$  هستند؟ مجموعه همه بردارهایی به فرم  $(a, b, c)$  که در آن  $a, b, c$

$$\text{الف) عددهایی صحیح‌اند} \quad \text{ب) عددهایی حقیقی و نامنفی‌اند}$$

$$\text{ج) عددهایی گویا‌اند} \quad \text{د) } (a, a + 3b)$$

۱۰) آیا مجموعه‌های زیر زیرفضای  $\mathbb{R}^2$  هستند؟ مجموعه همه بردارهایی به فرم

$$(a, b^2) \text{ (الف)} \quad (a, b^3) \text{ (ب)}$$

$$\text{ج) } (a, b) \text{ که در آن } a > 0 \quad \text{د) } (a, b) \text{ که در آن } ab < 0$$

۱۱) زیرمجموعه‌ای از  $\mathbb{R}^3$  ارائه دهید که تحت جمع بسته بوده اما تحت ضرب اسکالر بسته نباشد. همچنین زیرمجموعه‌ای ارائه دهید که تحت ضرب اسکالر بسته باشد اما تحت جمع بسته نباشد.

۱۲) نشان دهید که زیرمجموعه‌هاى زیر زیرفضاى  $\mathbb{R}^3$  نیستند. (بردار صفر را در نظر بگیرید). مجموعه همه بردارهایی به فرم

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} & (a, a+1, b) \\ \text{ب)} & (a, 3, 2a) \\ \text{ج)} & (a, b, a+b-4) \\ \text{د)} & (a, b, c) \text{ که } a > 0 \end{array}$$

۱۳) زیرمجموعه‌اى از  $\mathbb{R}^2$  ارائه دهید که شامل بردار صفر باشد اما زیرفضا نباشد. نظیر این مثال را برای  $\mathbb{R}^2$  بیان و حل کنید.

۱۴) فرض کنیم  $U$  مجموعه همه بردارهایی به فرم  $(a, 3a, b)$  و  $V$  مجموعه بردارهایی به فرم  $(p, 2p, q)$  باشند. آیا  $U$  و  $V$  یکسان‌اند؟ آیا آنها زیرفضا هستند؟

۱۵) فرض کنیم  $U$  مجموعه همه بردارهایی به فرم  $(a, b, c)$  و  $V$  مجموعه بردارهایی به فرم  $(a, a+b, c)$  باشند. آیا  $U = V$ ؟

۱۶) فرض کنیم  $U$  مجموعه بردارهایی به فرم  $(a, 3a, b+2)$  و  $V$  مجموعه بردارهایی به فرم  $(p, 3p, r^3)$  باشند. نشان دهید که  $U$  و  $V$  یکی هستند. آیا این مجموعه یک زیرفضاى  $\mathbb{R}^3$  است؟

۱۷) فرض کنیم  $U \subset \mathbb{R}^3$ ,  $u_1$  و  $u_2$  بردارهایی در  $U$  و  $a$  و  $b$  دو اسکالر دلخواه باشند. ثابت کنید  $U$  یک زیرفضاى  $\mathbb{R}^3$  است اگر و فقط اگر برای هر  $a$  و  $b$ , بردارى  $au_1 + bu_2$  در  $U$  باشد.

۱۸) تعیین کنید کدامیک از زیرمجموعه‌هاى  $M_{2 \times 2}$  تشکیل زیرفضا می‌دهند.

الف) زیرمجموعه‌اى از ماتریس‌ها که در آن عناصر قطرى شان صفر باشد.

ب) زیرمجموعه‌اى از ماتریس‌ها که حاصل جمع عناصر آنها برابر باشد. (برای مثال ماتریس

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

ج) مجموعه ماتریس‌هایی به فرم

$$\begin{bmatrix} a & a^2 \\ b & b^2 \end{bmatrix}$$

د) مجموعه ماتریس‌هایی به فرم

$$\begin{bmatrix} a & a+2 \\ b & c \end{bmatrix}$$

ه) مجموعه ماتریس‌های متقارن  $2 \times 2$

و) مجموعه ماتریس‌های وارون‌پذیر  $2 \times 2$

۱۹) کدامیک از زیرمجموعه‌های ذیل از  $M_{2 \times 2}$  تشکیل زیرفضا می‌دهند؟

الف) مجموعه ماتریس‌هایی به فرم

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{bmatrix}$$

ب) مجموعه ماتریس‌هایی به فرم

$$\begin{bmatrix} a & 2a & 3b & b & 2b & 3b \end{bmatrix}$$

۲۰) ثابت کنید  $P_2$  یک زیرفضای  $P_3$  است. (به‌خاطر داریم که  $P_n$  مجموعه چندجمله‌ای‌های با درجه حداکثر  $n$  است).

۲۱) آیا  $\mathbb{R}^n$  یک زیرفضای  $\mathbb{C}^n$  است؟

۲۲) ثابت کنید

الف) مجموعه ماتریس‌هایی به فرم

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ b & c \end{bmatrix}$$

یک زیرفضای  $M_{2 \times 2}$  نیست.

ب) مجموعه همه تابع‌هایی به فرم  $f(x) = ax + 2$  یک زیرفضای  $P_2$  نیست.

۲۳) فضای برداری تابعی را با تابع‌های دامنه عددهای حقیقی در نظر می‌گیریم. کدامیک از مجموعه‌های زیر زیرفضای این فضای برداری هستند؟

الف) زیرمجموعه متشکل از همه تابع‌های  $f$  که در آن  $f(0) = 0$

ب) زیرمجموعه متشکل از همه تابع‌های  $f$  به‌قسمی که  $f(0) = 3$

ج) زیرمجموعه متشکل از همه تابع‌های ثابت

۲۴) فرض کنیم  $U$  یک زیرفضای فضای برداری  $V$  باشد. همچنین  $u$  و  $v$  بردارهایی از  $U$  باشد؛ آیا

ممکن است برای اسکالر غیرصفری مانند  $c$ ،  $cu \in U$  در حالی که  $u \in U$ ؟

(۲۵) فرض کنیم  $V$  یک فضای برداری و  $U \subset V$ . ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آنکه  $U$  زیرفضا باشد آن است که برای هر  $u, v \in U$  و هر اسکالرها  $a$  و  $b$ ،  $au + bv \in U$ .

(۲۶) ثابت کنید

الف) اجتماع دو زیرفضا ممکن است زیرفضا نباشد.

ب) اشتراک دو زیرفضا یک زیرفضا است.

ج) اشتراک هر تعداد از زیرفضاهای یک فضای برداری، زیرفضاست.

(۲۷) مجموعه تمام توابع پیوسته بر  $\mathbb{R}$  یعنی  $C(\mathbb{R})$  زیرفضای  $\text{map}(\mathbb{R})$  است.

(۲۸)  $\text{Diff}(\mathbb{R})$  زیرفضای  $C(\mathbb{R})$  است.

## ۵-۶ ترکیبات خطی بردارها

در بخش قبلی زیرفضایی از  $\mathbb{R}^3$  متشکل از همه بردارهایی به فرم  $(a, a, b)$  را مورد بررسی قرار دادیم. ملاحظه می‌کنیم که یک بردار دلخواه در این فضا را می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$(a, a, b) = a(1, 1, 0) + b(0, 0, 1)$$

نتیجه این امر از این قرار است که هر بردار در این زیرفضا را می‌توان برحسب بردارهایی  $(1, 1, 0)$  و  $(0, 0, 1)$  نوشت. برای مثال،

$$(2, 2, 3) = 2(1, 1, 0) + 3(0, 0, 1)$$

و

$$(-1, -1, 7) = -1(1, 1, 0) + 7(0, 0, 1)$$

بردارهای  $(1, 1, 0)$  و  $(0, 0, 1)$  به یک معنی مشخص کننده این زیرفضا هستند. در این بخش و بخش‌های بعدی این رویکرد را بیشتر بررسی کرده و از این امر برای درک بهتر فضاهای برداری برحسب بردارهای خاصی که نمایشگر کل فضا هستند بهره خواهیم برد.

تعریف. فرض کنیم  $v_1, v_2, \dots, v_m$  بردارهایی در فضای برداری  $V$  باشند. گوییم  $v$  برداری در  $V$ ، یک ترکیب خطی از  $v_1, v_2, \dots, v_m$  است هرگاه اسکالرهایی چون  $c_1, c_2, \dots, c_m$  موجود باشند به قسمی که  $v$  را بتوان چنین نوشت:

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_m v_m$$

مثال ۱: بردار  $(5, 4, 2)$  ترکیبی خطی از بردارهای  $(1, 2, 0)$ ،  $(3, 1, 4)$  و  $(1, 0, 3)$  است زیرا می‌تواند چنین نوشته شود:

$$(5, 4, 2) = (1, 2, 0) + 2(3, 1, 4) - 2(1, 0, 3)$$

این مسأله که معین کنیم آیا یک بردار ترکیبی خطی از بردارهای دیگر است در واقع به حل یک دستگاه معادلات خطی منجر می‌شود.

مثال ۲: تعیین کنید که آیا بردار  $(-1, 1, 5)$  ترکیبی خطی از بردارهای  $(1, 2, 3)$ ،  $(0, 1, 4)$  و  $(2, 3, 6)$  است یا خیر.

حل: تساوی زیر را بررسی می‌کنیم

$$c_1(1, 2, 3) + c_2(0, 1, 4) + c_3(2, 3, 6) = (-1, 1, 5)$$

آیا می‌توانیم اسکالرهای  $c_1, c_2$  و  $c_3$  را چنان بیابیم که تساوی برقرار باشد؟ با استفاده از جمع و ضرب اسکالر به دست می‌آوریم

$$(c_1, 2c_1, 3c_1) + (0, c_2, 4c_2) + (2c_3, 3c_3, 6c_3) = (-1, 1, 5)$$

$$(c_1 + 2c_3, 2c_1 + c_2 + 3c_3, 3c_1 + 4c_2 + 6c_3) = (-1, 1, 5)$$

با تساوی قرار دادن مؤلفه‌های متناظر هم به دستگاه معادلات خطی زیر می‌رسیم

$$c_1 + 2c_3 = -1$$

$$2c_1 + c_2 + 3c_3 = 1$$

$$3c_1 + 4c_2 + 6c_3 = 5$$

می‌توان نشان داد که این دستگاه معادلات دارای جواب منحصر به فرد زیر است

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 3, \quad c_3 = -1$$

بنابراین بردار  $(-1, 1, 5)$  به شکل ترکیب خطی زیر از بردارهای  $(1, 2, 3)$ ،  $(0, 1, 4)$  و  $(2, 3, 6)$  نوشته می‌شود:

$$(0, 1, 5) = (1, 2, 3) + 2(0, 1, 4) - 1(2, 3, 6)$$

مثال زیر نشان می‌دهد که ممکن است این اتفاق بیفتد که یک بردار را بتوان به بیش از یک راه به شکل ترکیبی خطی از دیگر بردارها نوشت.

مثال ۳: بردار  $(4, 5, 5)$  را به صورت ترکیبی خطی از بردارهای  $(1, 2, 3)$ ،  $(-1, 1, 4)$  و  $(3, 3, 2)$  بنویسید.

حل: تساوی زیر را برحسب مقدارهای مجهول  $c_1$ ،  $c_2$  و  $c_3$  بررسی می‌کنیم:

$$c_1(1, 2, 3) + c_2(-1, 1, 4) + c_3(3, 3, 2) = (4, 5, 5)$$

داریم:

$$(c_1, 2c_1, 3c_1) + (-c_2, c_2, 4c_2) + (3c_3, 3c_3, 2c_3) = (4, 5, 5)$$

$$(c_1 - c_2 + 3c_3, 2c_1 + c_2 + 3c_3, 3c_1 + 3c_2 + 2c_3) = (4, 5, 5)$$

تساوی قرار دادن مؤلفه‌های متناظر منجر به دستگاه معادلات خطی زیر می‌شود:

$$c_1 - c_2 + 3c_3 = 4$$

$$2c_1 + c_2 + 3c_3 = 5$$

$$3c_1 + 4c_2 + 2c_3 = 5$$

این دستگاه معادلات دارای جواب‌های بیشماری است،

$$c_1 = -2r + 3, \quad c_2 = r - 1, \quad c_3 = r$$

بنابراین بردار  $(4, 5, 5)$  می‌تواند به راه‌های بسیاری به شکل ترکیبی خطی از بردارهای  $(1, 2, 3)$ ،  $(-1, 1, 4)$  و  $(3, 3, 2)$  نوشته شود:

$$(4, 5, 5) = (-2r + 3)(1, 2, 3) + (r - 1)(-1, 1, 4) + r(3, 3, 2)$$

برای نمونه

$$(4, 5, 5) = -3(1, 2, 3) + 2(-1, 1, 4) + 3(3, 3, 2) \quad r = 3 \text{ به دست می دهد}$$

$$(4, 5, 5) = 5(1, 2, 3) - 2(-1, 1, 4) - (3, 3, 2) \quad r = -1 \text{ به دست می دهد}$$

مثال زیر نشانگر آن است که ممکن است یک بردار را نتوان به شکل ترکیبی خطی از بردارهای دیگر نوشت.

مثال ۴: نشان دهید که بردار  $(3, -4, -6)$  را نمی توان به شکل ترکیبی خطی از بردارهای  $(1, 2, 3)$ ،  $(-1, -1, -2)$  و  $(1, 4, 5)$  نوشت.

حل: تساوی زیر را بررسی می کنیم

$$c_1(1, 2, 3) + c_2(-1, -1, -2) + c_3(1, 4, 5) = (3, -4, -6)$$

این تساوی منجر به دستگاه معادلات زیر می شود

$$c_1 + c_2 + c_3 = 3$$

$$2c_1 - c_2 + 4c_3 = -4$$

$$3c_1 - 2c_2 + 5c_3 = -6$$

این دستگاه فاقد جواب است. بنابراین  $(3, -4, -6)$  ترکیبی خطی از بردارهای  $(1, 2, 3)$ ،  $(-1, -1, -2)$  و  $(1, 4, 5)$  نمی باشد.

مثال ۵: تعیین کنید که آیا ماتریس

$$\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

ترکیبی خطی از ماتریس های

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

در فضای برداری  $M_{2 \times 2}$  می باشد یا خیر؟

حل: تساوى زير را بررسى مى‌کنيم

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

آيا مى‌توانيم اسكالرهاى  $c_1$ ،  $c_2$  و  $c_3$  را چنان بياييم كه اين تساوى برقرار باشد؟ با استفاده از جمع و ضرب اسكالر ماتريس‌ها به‌دست مى‌آوريم

$$\begin{bmatrix} c_1 + 2c_2 & -3c_2 + c_3 \\ 2c_1 + 2c_2 & c_1 + 2c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

با تساوى قرار دادن مؤلفه‌هاى متناظر، دستگاه معادلات خطى زير را به‌دست مى‌آوريم

$$c_1 + 2c_2 = -1$$

$$-3c_2 + c_3 = 7$$

$$2c_1 + 2c_2 = 8$$

$$c_1 + 2c_2 = -1$$

مى‌توان نشان داد كه اين دستگاه دارى جواب منحصر به‌فرد  $c_1 = 3$ ،  $c_2 = -2$  و  $c_3 = 1$  است. از اين رو ماتريس مفروض تركيبى خطى از سه ماتريس ديگر به شكل زير مى‌باشد

$$\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

**تعريف.** مجموعه بردارهاى  $v_1, v_2, \dots, v_m$  از يك فضاى بردارى را وقتى يك مولد اين فضا مى‌ناميم كه هر بردار فضا تركيبى خطى از اين بردارها باشد. يك مجموعه مولد از بردارها به يك معنى فضاى بردارى مربوطه را معرفى مى‌كند، زيرا هر بردار آن فضا را مى‌توان از اين بردارها به‌دست آورد.

مثال ۶: نشان دهيد بردارهاى  $(1, 2, 0)$ ،  $(0, 1, -1)$  و  $(1, 1, 2)$  مولد  $\mathbb{R}^3$  هستند.

حل: فرض كنيم  $(x, y, z)$  بردارى دلخواه در  $\mathbb{R}^3$  باشد. بايد مشخص كنيم كه آيا مى‌توانيم بنويسيم

$$(x, y, z) = c_1(1, 2, 0) + c_2(0, 1, -1) + c_3(1, 1, 2)$$

با ضرب اسكالرها و جمع بردارها به‌دست مى‌آوريم

$$(x, y, z) = (c_1 + c_3, 2c_1 + c_2 + c_3, -c_2 + 2c_3)$$



در این صورت

$$c_1 + c_2 = x$$

$$2c_1 + c_2 + c_3 = y$$

$$-c_2 + 2c_3 = z$$

این دستگاه معادلات را در متغیرهای  $c_1, c_2, c_3$  با استفاده از روش حذفی گوس-جردن حل کرده و جواب زیر را به دست می‌آوریم

$$c_1 = 3x - y - z, \quad c_2 = -4x + 2y + z, \quad c_3 = -2x + y + z$$

در این صورت بردارهای  $(1, 2, 0), (0, 1, -1), (1, 1, 2)$  و  $(1, 1, 2)$  را تولید می‌کنند. یک بردار دلخواه  $\mathbb{R}^3$  را به صورت ترکیبی خطی از این بردارها به شکل زیر می‌توانیم بنویسیم

$$(x, y, z) = (3x - y - z)(1, 2, 0) + (-4x + 2y + z)(0, 1, -1) + (-2x + y + z)(1, 1, 2)$$

این فرمول برداری ما را قادر می‌سازد تا به فوریت بتوانیم هر بردار  $\mathbb{R}^3$  را به عنوان ترکیبی خطی از  $(1, 2, 0), (0, 1, -1), (1, 1, 2)$  بنویسیم. برای نمونه، هرگاه بخواهیم دریابیم که بردار  $(2, 4, -1)$  چگونه برحسب این بردارها در می‌آید.  $x = 2, y = 4, z = -1$  در این معادله قرار می‌دهیم، به دست می‌آوریم

$$(2, 4, -1) = 3(1, 2, 0) - (0, 1, -1) - (1, 1, 2)$$

مثال ۷: نشان دهید که ماتریس‌های زیرفضای برداری  $M_{2 \times 2}$  را تولید می‌کنند.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حل: فرض کنیم  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  عنصری دلخواه از  $M_{2 \times 2}$  باشد. می‌توانیم این ماتریس را به شکل زیر بیان کنیم

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

که نتیجه مطلوب را ثابت می‌کنند.

تاکنون ریاضیاتی را توسعه داده‌ایم که به ما کمک می‌کند تا نگرش پیدا کنیم که به یک فضای برداری برحسب بردارهای مولد در آن فضا بنگریم. همچنین توانایی انجام عکس این کار نیز مفید خواهد بود، بدین معنی با استفاده از مجموعه‌ای از بردارها یک فضای برداری تولید کنیم.

**۵-۶-۱ قضيه.** فرض كنيم  $v_1, v_2, \dots, v_m$  بردارهايى در فضاى بردارى  $V$  باشند. همچنين فرض كنيم  $U$  مجموعه همه تركيبات خطى  $v_1, v_2, \dots, v_m$  باشد. در اين صورت  $U$  يك زیرفضا  $V$  بوده كه به وسيله بردارهاي  $v_1, v_2, \dots, v_m$  گسترش يافته است.  
برهان. فرض كنيم

$$u_1 = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m, \quad u_2 = b_1 v_1 + \dots + b_m v_m$$

$$v_1 + v_2 = (a_1 + b_1)v_1 + \dots + (a_m + b_m)v_m$$

يعنى  $u_1 + u_2$  تركيبى خطى از  $v_1, v_2, \dots, v_m$  است. بنا بر اين  $u_1 + u_2$  در  $U$  بوده و  $U$  تحت جمع بردارى بسته است.

فرض كنيم  $c$  اسكالى دلخواه باشد، در اين صورت

$$cu_1 = c(a_1 v_1 + \dots + a_m v_m)$$

$$= ca_1 v_1 + \dots + ca_m v_m$$

يعنى  $cu_1$  تركيبى خطى از  $v_1, \dots, v_m$  است. بنا بر اين  $cu_1$  در  $U$  بوده و  $U$  تحت ضرب اسكالى بسته است. در اين صورت  $U$  يك زیرفضاى  $V$  است. بنا بر تعريف  $U$  هر بردار در  $U$  تركيبى خطى از  $v_1, \dots, v_m$  است. از اين رو  $v_1, \dots, v_m$  را توليد مى کنند.

**مثال ۸:** فضاى بردارى  $\mathbb{R}^3$  را در نظر مى گيريم. بردارهاي  $(-1, 5, 3)$  و  $(2, -3, 4)$  در  $\mathbb{R}^3$  هستند. فرض كنيم  $U$  زیرمجموعه اى از  $\mathbb{R}^3$  متشكل از همه بردارهايى به فرم

$$c_1(-1, 5, 3) + c_2(2, -3, 4)$$

بوده باشد. در اين صورت  $U$  زیرفضايى از  $\mathbb{R}^3$  است و به وسيله  $(-1, 5, 3)$  و  $(2, -3, 4)$  گسترش يافته است.

در زیر نمونه هايى از بردارهاي  $U$  را، كه با مقاديردهى هاي متفاوت به  $c_1$  و  $c_2$  به دست آمده اند، نوشته

شده اند

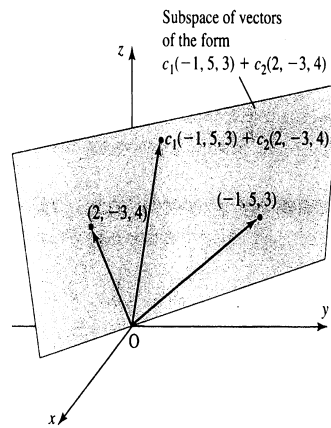
$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0 \quad \text{بردار} \quad (-1, 5, 3)$$

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0 \quad \text{بردار} \quad (2, -3, 4)$$

$$c_1 = 0, c_2 = 0 \quad \text{بردار} \quad (0, 0, 0)$$

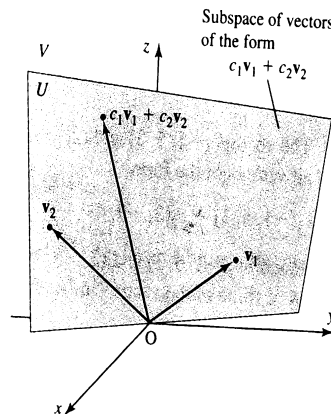
$$c_1 = 2, c_2 = 3 \quad \text{بردار} \quad (4, 1, 18)$$

می‌توانیم  $U$  را ببینیم.  $U$  از بردارهایی ساخته شده در صفحه‌ای قرار دارد که به وسیله بردارهای  $(-1, 5, 3)$  و  $(2, -3, 4)$  تعریف می‌شود. شکل ۲-۵ ملاحظه شود.



شکل ۲-۵

می‌توانیم نتیجه فوق را تعمیم دهیم. فرض کنیم  $v_1$  و  $v_2$  بردارهایی در فضای برداری  $\mathbb{R}^3$  باشند. زیرفضای  $U$  تولید شده به وسیله  $v_1$  و  $v_2$  مجموعه همه بردارهایی به فرم  $c_1v_1 + c_2v_2$  است. هرگاه  $v_1$  و  $v_2$  هم راستا نباشند، آنگاه  $U$  صفحه‌ای است که به وسیله  $v_1$  و  $v_2$  به وجود می‌آید. شکل ۳-۵ ملاحظه شود.



شکل ۳-۵

مثال ۹: فرض کنیم  $v_1$  و  $v_2$  زیرفضای  $U$  از فضای برداری  $V$  را تولید کنند. همچنین  $k_1$  و  $k_2$  اسکالرهایی غیرصفر باشند. نشان دهید که بردارهای  $k_1 v_1$  و  $k_2 v_2$  نیز  $U$  را تولید می‌کنند.

حل: فرض کنیم  $v$  برداری در  $U$  باشد. چون  $v_1$  و  $v_2$ ،  $U$  را تولید می‌کنند اسکالرهایی  $a$  و  $b$  وجود دارد به قسمی که

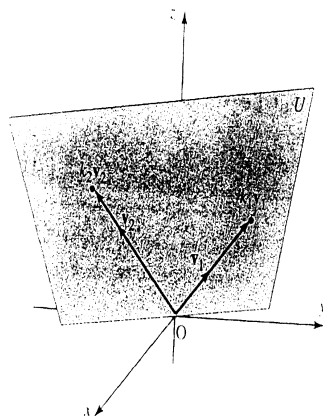
$$v = av_1 + bv_2$$

می‌توانیم بنویسیم

$$v = \frac{a}{k_1}(k_1 v_1) + \frac{b}{k_2}(k_2 v_2)$$

لذا بردارهای  $k_1 v_1$  و  $k_2 v_2$  مولد  $U$  هستند.

تبصره. هرگاه  $v_1$  و  $v_2$  دو بردار  $\mathbb{R}^3$  و هم‌راستا نباشند. می‌توانیم به  $U$  به‌عنوان صفحه‌ای در فضای معمولی (سه جهت‌دار) بنگریم.  $k_1 v_1$  و  $k_2 v_2$  بردارهایی در همان راستای  $v_1$  و  $v_2$  می‌باشند. شکل ۴-۵ ملاحظه شود.



شکل ۴-۵

یادآوری می‌کنیم که دو مجموعه وقتی مساوی هستند که دارای عناصر یکسان باشند. یک روش استاندارد که نشان می‌دهد دو مجموعه مانند  $A$  و  $B$  یکی هستند از این قرار است که نشان دهیم هر عنصر  $A$  در  $B$  است، و هر عنصر  $B$  در  $A$  است. ما از این روش برای نشان دادن اینکه دو زیرفضا برابرند استفاده می‌کنیم.

مثال ۱۰: فرض کنیم  $U$  زیرفضایی از  $\mathbb{R}^3$  باشد که به‌وسیله بردارهای  $(1, 2, 0)$  و  $(-3, 1, 2)$  تولید می‌شود. همچنین  $V$  زیرفضایی از  $\mathbb{R}^3$  است که به‌وسیله بردارهای  $(-1, 5, 2)$  و  $(4, 1, -3)$  تولید

می‌شود. نشان دهید که  $U = V$ .

حل: فرض کنیم  $\mathbf{u}$  برداری در  $U$  باشد. نشان می‌دهیم که  $\mathbf{u} \in V$ . چون  $\mathbf{u} \in U$ ، اسکالرهای  $a$  و  $b$  هست به قسمی که

$$\mathbf{u} = a(1, 2, 0) + b(-3, 1, 2) = (a - 3b, 2a + b, 2b)$$

اکنون بررسی می‌کنیم که چگونه  $\mathbf{u}$  را می‌توانیم به شکل ترکیبی خطی از  $(-1, 5, 2)$  و  $(4, 1, -2)$  بنویسیم.

$$\mathbf{u} = p(-1, 5, 2) + q(4, 1, -2) = (-p + 4q, 5p + q, 2p - 2q)$$

چنین  $p$  و  $q$ هایی (مجهولات) باید در تساوی‌های زیر صدق کنند.

$$-p + 4q = a - 3b$$

$$5p + q = 2a + b$$

$$2p - 2q = 2b$$

این دستگاه معادلات دارای جواب منحصر به فرد  $p = \frac{a+b}{3}$  و  $q = \frac{a-2b}{3}$  باشد. بنابراین  $\mathbf{u}$  را می‌توان نوشت:

$$\mathbf{u} = \frac{a+b}{3}(-1, 5, 2) + \frac{a-2b}{3}(4, 1, -2)$$

از این رو  $\mathbf{u}$  برداری در  $V$  است.

بالعکس، فرض کنیم

$$\mathbf{v} = c(-1, 5, 2) + d(4, 1, -2)$$

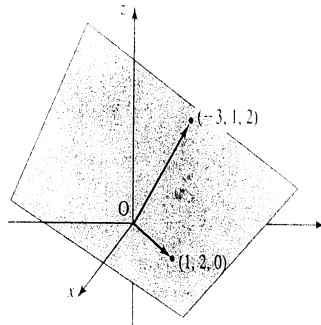
برداری در  $V$  باشد.  $\mathbf{v}$  را می‌توان چنین نوشت

$$\mathbf{v} = (2c + d)(1, 2, 0) + (c - d)(-3, 1, 2)$$

(چرا؟) در این صورت  $\mathbf{v}$  برداری در  $U$  است.

بنابراین  $U = V$ . این زیرفضا صفحه‌ای است که از مبدأ گذشته و به وسیله بردارهای  $(1, 2, 0)$  و

$(-3, 1, 2)$  تعریف می‌گردد. شکل ۵-۵ ملاحظه شود.



شکل ۵-۵

مثال ۱۱: فرض کنیم  $U$  فضای برداری تولید شده به وسیله تابع‌های  $f(x) = x + ۱$  و  $g(x) = ۲x^۲ - ۲x + ۳$  باشد. نشان دهید که تابع  $h(x) = ۶x^۲ - ۱۰x + ۵$  در  $U$  واقع است.  
 حل: تابع  $h$  وقتی در فضای تولید شده به وسیله  $f$  و  $g$  قرار دارد که اسکالرهایی چون  $a$  و  $b$  یافت شود به قسمی که

$$a(x + ۱) + b(۲x^۲ - ۲x + ۳) = ۶x^۲ - ۱۰x + ۵$$

از این به دست می‌آید

$$۲bx^۲ + (a - ۲b)x + a + ۳b = ۶x^۲ - ۱۰x + ۵$$

با مساوی قرار دادن ضرایب متناظر

$$۲b = ۶$$

$$a - ۲b = -۱۰$$

$$a + ۳b = ۵$$

این دستگاه دارای جواب منحصر به فرد  $a = -۴$  و  $b = ۳$  می‌باشد. در این صورت

$$-۴(x + ۱) + ۳(۲x^۲ - ۲x + ۳) = ۶x^۲ - ۱۰x + ۵$$

یعنی تابع  $h(x) = ۶x^۲ - ۱۰x + ۵$  در فضای تولید شده به وسیله  $f(x) = x + ۱$  و  $g(x) = ۲x^۲ - ۲x + ۳$  قرار دارد.

## ۲-۶-۵ تمرین

(۱) در مجموعه بردارهای داده شده، تعیین کنید که آیا بردار اول ترکیبی خطی از دیگر بردارها می باشد

$$\text{الف) } (-1, 7) : (1, -1), (2, 4)$$

$$\text{ب) } (8, 13) : (1, 2), (2, 3)$$

$$\text{ج) } (-1, 15) : (1, -4), (2, -8)$$

$$\text{د) } (13, 6) : (1, 3), (4, 1)$$

(۲) در مجموعه بردارهای زیر تعیین کنید که آیا بردار نخست ترکیبی خطی از دیگر بردارها است یا خیر؟

$$\text{الف) } (4, -4, 6) : (1, 2, -3), (2, -4, 6), (-1, 2, -3)$$

$$\text{ب) } (-1, 4, -9) : (-1, 3, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 4)$$

$$\text{ج) } (1, 5, 3) : (1, 2, 1), (-1, 3, 2), (-1, 8, 5)$$

(۳) نشان دهید که هر یک از مجموعه بردارهای زیر،  $\mathbb{R}^3$  را تولید می کنند. بردار  $(3, 5)$  را به صورت ترکیبی خطی از هر یک از مجموعه های مولد بنویسید.

$$\text{الف) } (1, 1), (1, -1) \quad \text{ب) } (1, 4), (-2, 0)$$

$$\text{ج) } (1, 0), (0, 1) \quad \text{د) } (1, 3), (3, 1)$$

(۴) نشان دهید که هر یک از مجموعه های بردارهای زیر  $\mathbb{R}^3$  را تولید می کنند. بردار  $(1, 3, -2)$  را به صورت ترکیبی خطی از هر یک از مجموعه های مولد بنویسید.

$$\text{الف) } (1, 2, 3), (-1, -1, 0), (2, 5, 4) \quad \text{ب) } (1, 3, 1), (-1, 1, 0), (4, 1, 1)$$

$$\text{ج) } (5, 1, 3), (2, 0, 1), (-2, -3, -1) \quad \text{د) } (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$$

(۵) تعیین کنید که آیا مجموعه بردارها  $\mathbb{R}^2$  را تولید می کند؟

$$\text{الف) } (1, -3), (2, -5)$$

$$\text{ب) } (1, 1), (-2, 1)$$

$$\text{ج) } (6, 2), (2, 3), (6, -1)$$

(۶) سه بردار در  $\mathbb{R}^2$  ارائه دهید که به وسیله بردارهای  $(1, 2, 3)$ ،  $(1, 2, 0)$  تولید شوند.

(۷) سه بردار در  $\mathbb{R}^2$  ارائه دهید که به وسیله  $(1, 2)$  تولید شوند.

(۸) سه بردار در  $\mathbb{R}^4$  ارائه دهید که به وسیله  $(2, 1, -3, 4)$ ،  $(2, 1, 5, 1)$ ،  $(-3, 0, 1, 5)$  و  $(4, 1, 2, 0)$  تولید شوند.

۹) فرض كنيم  $U$  زيرفضايى از  $R^2$  باشد كه با  $(-۱, ۳)$  توليد شده در  $V$  زيرفضايى از  $R^3$  باشد كه با  $(-۲, ۶)$  توليد شده باشد. نشان دهيد كه  $U = V$ .

۱۰) فرض كنيم  $U$  زيرفضايى از  $R^3$  باشد كه به وسيله  $(۱, ۲, ۳)$  و  $(-۱, ۲, ۵)$  توليد مى شود و  $V$  زيرفضايى باشد كه به وسيله  $(۱, ۶, ۱۱)$  و  $(۲, ۰, -۲)$  توليد مى شود. نشان دهيد كه  $U = V$ .

۱۱) فرض كنيم  $U$  زيرفضايى از  $R^3$  باشد كه به وسيله بردارهاى  $(۳, -۱, ۲)$  و  $(۱, ۰, ۴)$  و همچنين  $V$  زيرفضايى از  $R^3$  باشد كه توسط  $(۴, -۱, ۶)$  و  $(۱, -۱, -۶)$  توليد شده باشند. ثابت كنيد كه  $U = V$ .

۱۲) فرض كنيم  $u \in R^2, u \neq 0$ . نشان دهيد زيرفضاى توليد شده به وسيله  $u$  مشتمل بر بردارهايى است كه بر خطى واقع اند كه از مبدا مى گذرد.

۱۳) در هر مورد، تعيين كنيد كه آيا ماتريس نخست تركيبى خطى از بقيه ماتريس ها است يا خير؟

$$\begin{aligned} \text{الف)} & \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & -۴ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۵ & ۷ \\ ۵ & -۱۰ \end{bmatrix} \\ \text{ب)} & \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۷ & ۶ \\ -۵ & -۳ \end{bmatrix} \\ \text{ج)} & \begin{bmatrix} -۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۷ & ۱۰ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

۱۴) در هر مورد، تعيين كنيد كه آيا تابع نخست تركيبى خطى از بقيه توابع است يا خير؟

الف)  $f(x) = 3x^2 + 2x + 9$  ،  $g(x) = x^2 + 1$  ،  $h(x) = x + 3$   
 ب)  $f(x) = 2x^2 + x - 3$  ،  $g(x) = x^2 - x + 1$  ،  $h(x) = x^2 + 2x - 2$   
 ج)  $f(x) = x^2 + 4x + 5$  ،  $g(x) = x^2 + x - 1$  ،  $h(x) = x^2 + 2x + 1$   
 ۱۵) آيا تابع  $f(x) = x + 5$  در فضاى توليد شده به وسيله  $g(x) = x + 1$  و  $h(x) = x + 3$  قرار دارد؟

۱۶) آيا تابع  $f(x) = 3x^2 + 5x + 1$  در فضى توليد شده به وسيله  $g(x) = 2x^2 + 3$  و  $h(x) = x^2 + 3x - 1$  قرار دارد؟ سه تابع ديگر ارائه دهيد كه در فضاى توليد شده به وسيله  $g$  و  $h$  واقع باشند.

۱۷) فرض كنيم  $v, v_1, v_2$  بردارهايى در فضاى بردارى  $V$  بوده باشند. همچنين فرض مى كنيم  $v$  تركيبى خطى از  $v_1$  و  $v_2$  بوده باشد. ثابت كنيد براى هر دو اسكالر غيرصفر  $c_1$  و  $c_2$ ،  $v$  تركيبى



خطی از  $c_1v_1$  و  $c_2v_2$  است.

۱۸) فرض کنیم  $v, v_1$  و  $v_2$  بردارهایی در فضای برداری  $V$  و  $c_1$  و  $c_2$  اسکالرهای غیرصفری باشند. نشان دهید هرگاه  $v$  ترکیبی خطی از  $v_1$  و  $v_2$  نباشد، ترکیبی خطی از  $c_1v_1$  و  $c_2v_2$  نیز نخواهد بود.

۱۹) فرض کنیم  $v_1$  و  $v_2$  بردارهایی در فضای برداری  $V$  و  $c_1$  و  $c_2$  اسکالرهای غیرصفر باشند. ثابت کنید هرگاه  $v_1$  و  $v_2$  را تولید نکنند،  $c_1v_1$  و  $c_2v_2$  نیز  $V$  را تولید نخواهند کرد.

۲۰) فرض کنیم  $v_1$  و  $v_2$  فضای برداری  $V$  را تولید کنند و  $v_3$  بردار دلخواه دیگری در  $V$  بوده باشد. نشان دهید که  $v_1, v_2$  و  $v_3$  نیز  $V$  را تولید می‌کنند.

## ۷-۵ استقلال و وابستگی خطی

در این بخش به توسعه ساختاری فضاهای برداری ادامه می‌دهیم. در این رابطه مفهوم‌های استقلال و وابستگی بردارها را معرفی می‌کنیم. این مفهوم‌ها در ساختار مجموعه‌های مولد «کارا» برای فضاهای برداری مفید خواهند بود، مجموعه‌هایی که هیچ بردار مازادی باقی نخواهند ماند.

ابتدا ایده وابستگی بردارها را واکاوی می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که بردار  $(4, -1, 0)$  ترکیبی خطی از بردارهای  $(2, 1, 3)$  و  $(0, 1, 2)$  است زیرا می‌توانیم بنویسیم

$$(4, -1, 0) = 2(2, 1, 3) - 3(0, 1, 2)$$

این تساوی را می‌توانیم به چندین راه دیگر نیز بنویسیم. هر یک از بردارهای آن را می‌توانیم برحسب سایر بردارها بنویسیم:

$$(2, 1, 3) = \left(\frac{1}{2}\right)(4, -1, 0) + \left(\frac{3}{2}\right)(0, 1, 2)$$

$$(0, 1, 2) = \left(\frac{2}{3}\right)(2, 1, 3) - \left(\frac{1}{3}\right)(4, -1, 0)$$

هر یک از این سه بردار، در واقع، وابسته به دو بردار دیگر است. این ایده را با نوشتن تساوی زیر می‌توانیم بیان کنیم

$$(4, -1, 0) - 2(2, 1, 3) + 3(0, 1, 2) = (0, 0, 0)$$

این مفهوم وابستگی بردارها را به طور رسمى با ارائه تعريف زیر دقیقتر بیان مى‌کنیم.

تعريف. الف) مجموعه بردارهای  $\{v_1, \dots, v_m\}$  در یک فضای بردارى  $V$  را وابسته‌ی خطى نامیم هرگاه اسکالرهایی چون  $c_1, \dots, c_m$ ، که همگی صفر نیستند، وجود داشته باشد به قسمی که

$$c_1 v_1 + \dots + c_m v_m = 0$$

ب) مجموعه بردارهای  $\{v_1, \dots, v_m\}$  را مستقل خطى گوئیم، هرگاه از  $c_1 v_1 + \dots + c_m v_m = 0$  لازم آید که  $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$ .

مثال ۱: نشان دهید که مجموعه بردارهای  $\{(1, 2, 3), (-2, 1, 1), (8, 6, 10)\}$  در  $\mathbb{R}^3$  وابسته‌ی خطى اند.

حل: تساوى زیر را مورد بررسی قرار مى‌دهیم

$$c_1(1, 2, 3) + c_2(-2, 1, 1) + c_3(8, 6, 10) = 0$$

مى‌خواهیم نشان دهیم که حداقل یکی از  $c_i$ ها غیر صفر است. داریم

$$(c_1, 2c_1, 3c_1) + (-2c_2, c_2, c_2) + (8c_3, 6c_3, 10c_3) = 0$$

$$(c_1 - 2c_2 + 8c_3, 2c_1 + c_2 + 6c_3, 3c_1 + c_2 + 10c_3) = 0$$

با مساوى قرار دادن مؤلفه‌های این بردار با صفر دستگاه معادلات زیر حاصل مى‌شود

$$c_1 - 2c_2 + 8c_3 = 0$$

$$2c_1 + c_2 + 6c_3 = 0$$

$$3c_1 + c_2 + 10c_3 = 0$$

این دستگاه دارای جواب  $c_1 = 4$ ،  $c_2 = -2$  و  $c_3 = -1$  است. چون حداقل یکی از  $c_i$ ها غیر صفر است. پس بردارها وابسته‌ی خطى هستند. این وابستگی خطى به وسیله تساوى زیر بیان شده است

$$4(1, 2, 3) - 2(-2, 1, 1) - (8, 6, 10) = 0$$

مثال ۲: نشان دهید که بردارهای  $(3, -2, 2)$ ،  $(3, -1, 4)$  و  $(1, 0, 5)$  در  $\mathbb{R}^3$  مستقل خطى هستند.

حل: تساوی زیر را بررسی می‌کنیم

$$c_1(3, -2, 2) + c_2(3, -1, 4) + c_3(1, 0, 5) = 0$$

باید نشان دهیم که این تساوی فقط وقتی برقرار است که  $c_1, c_2$  و  $c_3$  همگی صفر باشند. داریم

$$(3c_1, -2c_1, 2c_1) + (3c_2, -c_2, 4c_2) + (c_3, 0, 5c_3) = 0$$

$$(3c_1 + 3c_2 + c_3, 2c_1 - c_2, 2c_1 + 4c_2 + 5c_3) = 0$$

با صفر قرار دادن هر مؤلفه به دست می‌آوریم

$$3c_1 + 3c_2 + c_3 = 0$$

$$-2c_1 - c_2 = 0$$

$$2c_1 + 4c_2 + 5c_3 = 0$$

این دستگاه دارای جواب منحصر به فرد  $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$  می‌باشد. بنابراین مجموعه مورد بحث مستقل خطی است. مثال بعدی نشانگر آن است که چگونه وابستگی و استقلال خطی به فضای برداری تابعی اعمال می‌شوند.

مثال ۳: تابع‌های  $f(x) = x^2 + 1, g(x) = 3x - 1$  و  $h(x) = 4x + 1$  از فضای برداری  $P_2$  متشکل از چندجمله‌ای با درجه حداکثر ۲ را در نظر می‌گیریم. نشان دهید مجموعه تابع‌های  $\{f, g, h\}$  مستقل خطی است.

حل: تساوی زیر را بررسی می‌کنیم

$$c_1 f + c_2 g + c_3 h = 0$$

$\{f, g, h\}$  در صورتی مستقل خطی است که از این تساوی بتوان نتیجه گرفت که  $c_1 = 0, c_2 = 0$  و  $c_3 = 0$ . تساوی را به این صورت می‌نویسیم

$$c_1(x^2 + 1) + c_2(3x - 1) + c_3(-4x + 1) = 0$$

که در آن  $x$  عدد حقیقی دلخواهی است. سه مقدار مناسب برای  $x$  در نظر می‌گیریم. داریم

$$x = 0; \quad c_1 - c_2 + c_3 = 0$$

$$x = 1 \quad ; \quad 2c_1 + 2c_2 - 3c_3 = 0$$

$$x = -1 \quad ; \quad 2c_1 - 4c_2 + 5c_3 = 0$$

می‌توان نشان داد که این دستگاه معادلات دارای جواب منحصر به فرد

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0$$

است. در این صورت  $c_1 f + c_2 g + c_3 h = 0$  مستلزم  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 0$  و  $c_3 = 0$  است. مجموعه  $\{f, g, h\}$  مستقل خطی است.

اکنون به بیان نتیجه مهمی می‌پردازیم که مفهوم‌های وابستگی خطی را به هم مرتبط می‌سازد.

**۵-۷-۱ قضیه.** مجموعه‌ای شامل حداقل دو بردار در یک فضای برداری وابسته‌ی خطی است

اگر و فقط اگر بتوان یک بردار آن را برحسب دیگر بردارهای این مجموعه نوشت.

برهان. فرض کنیم مجموعه  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  وابسته خطی باشد. بنابراین اسکالرهایی مانند

$c_1, c_2, \dots, c_m$  که حداقل یکی از آن‌ها غیرصفر است. وجود دارند، به قسمی که

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_m v_m = 0$$

فرض کنیم که  $c_1 \neq 0$ ، تساوی فوق را می‌توانیم چنین بازنویسی کنیم

$$v_1 = \left(\frac{-c_2}{c_1}\right)v_2 + \dots + \left(\frac{-c_m}{c_1}\right)v_m$$

بنابراین  $v_1$  ترکیبی خطی از  $v_2, \dots, v_m$  است.

برعکس، فرض کنیم  $v_1$  ترکیبی خطی از  $v_2, \dots, v_m$  باشد. بنابراین اسکالرهایی چون  $d_2, \dots, d_m$

هست که

$$v_1 = d_2 v_2 + \dots + d_m v_m$$

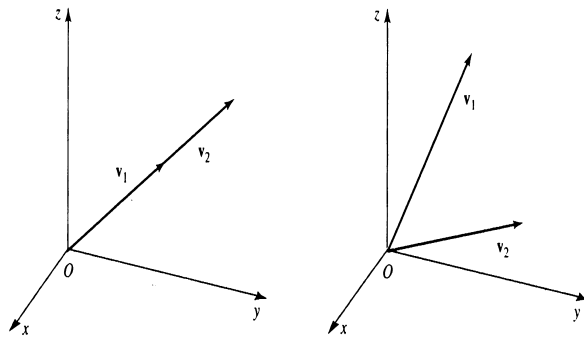
این تساوی را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$1v_1 + (-d_2)v_2 + \dots + (-d_m)v_m = 0$$

لذا مجموعه  $\{v_1, \dots, v_m\}$  وابسته‌ی خطی بوده و این برهان را کامل می‌کند. این قضیه به ما کمک

می‌کند تا معنی وابستگی خطی را برای دو یا سه بردار از  $\mathbb{R}^3$  مشاهده کنیم.

وابستگی خطی  $\{v_1, v_2\}$  مجموعه  $\{v_1, v_2\}$  وابسته خطی است اگر و فقط اگر بتوان یک بردار را برحسب مضربی از بردار دیگر نوشت. فرض کنیم  $v_2 = cv_1$ . این به معنی آن است که  $v_1$  و  $v_2$  هم‌راستا هستند. شکل ۶-۵ ملاحظه شود.



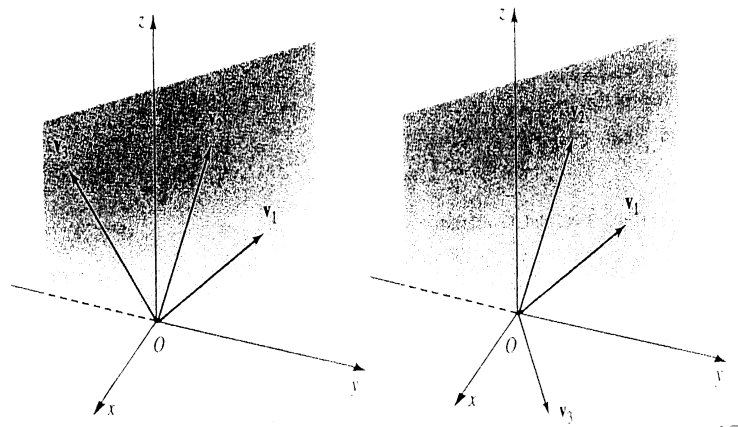
شکل ۶-۵

$\{v_1, v_2\}$  وابسته خطی اند  
بردارها در یک خط قرار دارند

$\{v_1, v_2\}$  مستقل خطی اند  
بردارها در یک خط نیستند

استقلال و وابستگی خطی  $\{v_1, v_2\}$  در  $\mathbb{R}^3$

وابستگی خطی  $\{v_1, v_2, v_3\}$  مجموعه  $\{v_1, v_2, v_3\}$  وابسته خطی است اگر و فقط اگر بتوان یک بردار آن را برحسب ترکیبی خطی از دیگر دو بردار نوشت. فرض کنیم مثلاً  $v_3$  ترکیبی خطی از  $v_1$  و  $v_2$  باشد. پس  $v_3 = c_1v_1 + c_2v_2$ . در حالت کلی، وقتی که این بردارها مستقل خطی باشند  $v_3$  در صفحه  $v_1$  و  $v_2$  قرار دارد. شکل ۷-۵ برای  $\mathbb{R}^3$  ملاحظه شود. هرگاه  $v_1$  و  $v_2$  وابسته خطی باشند. آنگاه  $v_3$  روی خطی گذرا از  $v_1$  و  $v_2$  قرار دارد.



شکل ۷-۵

$\{v_1, v_2, v_3\}$  وابسته خطی اند  
بردارها در یک صفحه قرار دارند

$\{v_1, v_2, v_3\}$  مستقل خطی اند  
بردارها در یک صفحه نیستند

ما این بخش را با دو نتیجه دیگر در باب فضاهای برداری به پایان می‌رسانیم.

**۲-۷-۵ قضیه.** فرض کنیم  $V$  یک فضای برداری باشد. هر مجموعه بردار  $V$  که شامل بردار صفر باشد وابسته خطی است.

برهان. به عهده دانشجو است.

نتیجه. اگر بردارهای  $\{v_1, \dots, v_m\}$  مستقل خطی باشند، آنگاه  $v_i \neq 0 (1 \leq i \leq m)$ .

**۳-۷-۵ قضیه.** فرض کنیم مجموعه  $\{v_1, \dots, v_m\}$  در فضای برداری  $V$  وابسته خطی باشد. در این صورت هر مجموعه از بردارها در  $V$  که شامل این مجموعه باشد نیز وابسته خطی است.

برهان. چون  $\{v_1, \dots, v_m\}$  وابسته خطی است، اسکالرهایی چون  $c_1, \dots, c_m$  هست که

$$c_1 v_1 + c_m v_m = 0$$

و برای حداقل یک  $i$ ،  $c_i \neq 0$ . مجموعه بردارهای  $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$  را که شامل مجموعه بردار مفروض وابسته است در نظر می‌گیریم. اسکالرهایی  $0, \dots, 0, c_1, \dots, c_m$  را در نظر می‌گیریم.

داریم

$$c_1 v_1 + \dots + c_m v_m + 0 v_{m+1} + \dots + 0 v_n = 0$$

و می‌دانیم برای حداقل یک  $i$ ،  $c_i \neq 0$ . بنابراین مجموعه  $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$  وابسته خطی است.

مثال ۴: فرض کنیم مجموعه  $\{v_1, v_2\}$  مستقل خطی باشد. ثابت کنید  $\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$  نیز مستقل خطی است.

حل: تساوی زیر را بررسی می‌کنیم

$$\mathbf{a}(v_1 + v_2) + \mathbf{b}(v_1 - v_2) = 0$$

باید نشان دهیم که از این تساوی می‌توان نتیجه گرفت که  $a = 0$  و  $b = 0$ . داریم

$$av_1 + av_2 + bv_1 - bv_2 = 0$$

$$(a + b)v_1 + (a - b)v_2 = 0$$

چون  $\{v_1, v_2\}$  مستقل خطی است:

$$a + b = 0$$

$$a - b = 0$$

این دستگاه دارای جواب منحصر به فرد  $a = 0$ ،  $b = 0$  می‌باشد. در این صورت  $\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$  مستقل خطی است.

#### ۴-۷-۵ تمرین

۱) ثابت کنید مجموعه‌های زیر از بردارهای  $\mathbb{R}^2$  وابسته خطی‌اند.

الف)  $\{(-1, 2), (2, -4)\}$

ب)  $\{(3, 1), (9, 3)\}$

ج)  $\{(1, 5), (0, 0)\}$

۲) ثابت کنید مجموعه‌های زیر از بردارهای  $\mathbb{R}^2$  مستقل خطی‌اند.

الف)  $\{(1, 0), (0, 1)\}$

ب)  $\{(1, 2), (3, 2)\}$

$$\text{ج) } \{(2, -4), (5, 3)\}$$

۳) ثابت کنید مجموعه‌های زیر از بردارهای  $\mathbb{R}^3$  وابسته خطی‌اند. در هر مجموعه یک بردار را به صورت ترکیبی خطی از دیگر بردارها بنویسید.

$$\text{الف) } \{(1, -2, 3), (-2, 4, 1), (-4, 8, 9)\}$$

$$\text{ب) } \{(3, 4, 1), (2, 1, 0), (9, 7, 1)\}$$

۴) ثابت کنید هر مجموعه از بردارها مستقل خطی است.

$$\text{الف) } \{(1, 2, 5), (1, -2, 1), (2, 1, 4)\}$$

$$\text{ب) } \{(1, 1, 1), (-4, 3, 2), (4, 1, 2)\}$$

$$\text{ج) } \{(1, 3, -4), (3, -1, 4), (1, 0, -2)\}$$

$$\text{د) } \{(3, 4, 7), (2, -1, 1), (4, 1, 3)\}$$

۵) با استفاده از قضیه ۳-۹-۵ ثابت کنید که هر مجموعه از بردارها وابسته‌ی خطی است.

$$\text{الف) } \{(2, -1, 3), (-4, 2, -6), (8, 0, 1)\}$$

$$\text{ب) } \{(5, 2, -3), (3, 0, 4), (-3, 0, -4)\}$$

۶) تعیین کنید که کدامیک از مجموعه‌ها مستقل خطی و کدامیک وابسته‌ی خطی است.

$$\text{الف) } \{(1, 2), (-1, 4), (-1, 16)\}$$

$$\text{ب) } \{(1, 3), (-2, 1)\}$$

$$\text{ج) } \{(1, 2, 8), (1, -1, -1), (1, 0, 3)\}$$

$$\text{د) } \{(1, 2, 8), (1, -1, -1), (1, 0, 3)\}$$

۷) به‌ازای چه مقدار  $t$  هر مجموعه از بردارهای داده شده وابسته‌ی خطی است.

$$\text{الف) } \{-1, 2, (t, -4)\}$$

$$\text{ب) } \{(3, t), (6, t-1)\}$$

$$\text{ج) } \{2, -t, (2t+6, 4t)\}$$

۸) ثابت کنید



الف) مجموعه  $\{(1, 2), (0, 2)\}$  در  $\mathbb{R}^2$  مستقل خطی است.

ب) مجموعه  $\{(1, 1, 2), (0, -1, 3), (0, 0, 5)\}$  در  $\mathbb{R}^3$  مستقل خطی است.

ج) مجموعه  $\{(3, -2, 4, 5), (0, 2, 3, -4), (0, 0, 2, 7), (0, 0, 0, 4)\}$  در  $\mathbb{R}^4$  مستقل خطی است.

۹) ماتریس زیر را که به فرم پلکانی تحویل یافته است در نظر بگیرید

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

نشان دهید که بردارهای سطری آن تشکیل یک مجموعه مستقل خطی می‌دهند. آیا برای هر ماتریس پلکانی تحویل یافته می‌توان چنین نتیجه‌ای را ثابت کرد؟

۱۰) تعیین کنید کدامیک از مجموعه‌های زیر وابسته‌ی خطی هستند. تابع‌های پرسش‌های الف)، ب) و ج) تابع‌هایی در فضای برداری  $P_2$  و ماتریس‌های (د)، (ه) و (و) در فضای برداری  $M_{2 \times 2}$  هستند.

الف)  $\{f, g, h\}$  که  $f(x) = 2x^2 + 1$ ,  $g(x) = x^2 + 4x$ ,  $h(x) = x^2 - 4x + 1$

ب)  $\{f, g, h\}$  که  $f(x) = x^2 + 3$ ,  $g(x) = x + 1$ ,  $h(x) = 2x^2 - 3x + 3$

ج)  $\{f, g, h\}$  که  $f(x) = x^2 + 3x - 1$ ,  $g(x) = x + 3$ ,  $h(x) = 2x^2 - x + 1$

د)  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right\}$

ه)  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \right\}$

و)  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \right\}$

۱۱) فرض کنیم مجموعه‌ی  $\{v_1, v_2\}$  در فضای برداری  $V$  وابسته‌ی خطی باشد. ثابت کنید که  $\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$  نیز وابسته‌ی خطی است.

۱۲) فرض کنیم مجموعه‌ی  $\{v_1, v_2, v_3\}$  وابسته‌ی خطی باشد. همچنین  $c$  یک اسکالر غیرصفر است. ثابت کنید که مجموعه‌های زیر نیز وابسته‌ی خطی اند

الف)  $\{v_1, v_1 + v_2, v_3\}$

$$\{v_1, cv_2, v_3\} \text{ (ب)}$$

$$\{v_1, v_1 + cv_2, v_3\} \text{ (ج)}$$

۱۳) فرض کنیم مجموعه  $\{v_1, v_2, v_3\}$  در فضای برداری  $V$  مستقل خطی باشد. همچنین  $c$  اسکالاری غیرصفر باشد. ثابت کنید مجموعه‌های زیر نیز مستقل خطی هستند

$$\{v_1, v_1 + v_2, v_3\} \text{ (الف)}$$

$$\{v_1, cv_2, v_3\} \text{ (ب)}$$

$$\{v_1, v_1 + cv_2, v_3\} \text{ (ج)}$$

۱۴) فرض کنیم مجموعه  $S$  در فضای برداری  $V$  مستقل خطی باشد. ثابت کنید هر زیر مجموعه  $S'$  نیز مستقل خطی است. آیا چنین حکم در مورد «وابسته‌ی خطی» به جای «مستقل خطی» نیز صادق است؟

۱۵) فرض کنیم  $\{v_1, v_2\}$  مستقل خطی باشد. نشان دهید که هرگاه بردار  $v_3$  به فرم  $cv_1 + bv_2$  نباشد آنگاه  $\{v_1, v_2, v_3\}$  نیز مستقل خطی است.

۱۶) ثابت کنید که در هر فضای برداری مجموعه‌ای مشتمل دو یا چند بردار مستقل خطی است «اگر و فقط اگر» هیچ یک از بردارهای آن ترکیبی خطی از دیگر بردارها نباشد.

۱۷) دو بردار در  $\mathbb{R}^3$  به صورت تصادفی انتخاب کنید. آنکه این دو بردار وابسته‌ی خطی یا مستقل خطی نباشند احتمال کدامیک بیشتر است؟ اگر سه بردار به صورت تصادفی انتخاب کنیم چگونه؟

۱۸) سه بردار به صورت تصادفی در  $\mathbb{R}^3$  بنویسید. احتمال کدامیک بیشتر است. اینکه این بردارها وابسته خطی باشند یا مستقل خطی باشند؟

## ۸-۵ پایه و بعد

معمولاً از خط به عنوان یک فضای یک بعدی و از صفحه به عنوان یک شی دو بعدی یاد می‌کنیم. در این بخش، ما به تعریف ریاضی مفهوم بعد می‌پردازیم. این مفهوم با درک شهودی ما از بعد مطابقت خواهد داشت. ابتدا مفهوم‌های مجموعه گسترش و استقلال خطی را با هم تلفیق می‌کنیم.

**تعریف.** مجموعه‌ای متناهی از بردارها همانند  $\{v_1, \dots, v_m\}$  را یک پایه فضای برداری  $V$  نامیم هرگاه این مجموعه مولد  $V$  و مستقل خطی باشد.

از نظر شهودی، یک پایه یک مجموعه کاراً برای مشخص کردن یک فضای برداری است، بدین معنی که هر بردار فضا را می‌توان به صورت ترکیبی از بردارهای پایه بیان کرده، و بردارهای پایه مستقل از یکدیگر هستند.

مفهوم پایه استاندارد را قبلاً برای  $\mathbb{R}^n$  در بخش ۴-۴ در رابطه با تبدیلات ماتریسی معرفی کردیم. اکنون ملاحظه می‌کنیم که چنین پایه‌ای در واقع در شرایط پایه تعریف شده فوق صدق می‌کند.

**تعریف.** مجموعه بردارهای

$$\{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 1)\}$$

یک پایه برای  $\mathbb{R}^n$  است. این پایه را پایه استاندارد  $\mathbb{R}^n$  می‌نامیم.

درستی این نتیجه را محقق می‌سازیم. باید نشان دهیم که این مجموعه  $\mathbb{R}^n$  مولد مستقل خطی نیز می‌باشد. فرض کنیم  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  عنصری دلخواه از  $\mathbb{R}^n$  باشد. می‌توانیم بنویسیم

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n(0, \dots, 1)$$

از این رو مجموعه فوق  $\mathbb{R}^n$  را تولید می‌کند.

وانگهی، وقتی به بررسی استقلال خطی این مجموعه می‌پردازیم، به دست می‌آوریم

$$c_1(1, 0, \dots, 0) + c_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + c_n(0, \dots, 1) = (0, 0, \dots, 0)$$

$$(c_1, 0, \dots, 0) + (0, c_2, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, c_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

$$(c_1, c_2, \dots, c_n) = (0, 0, \dots, 0)$$

در نتیجه  $c_1 = 0$ ،  $c_2 = 0$ ،  $\dots$  و  $c_n = 0$ . پس مجموعه مستقل خطی است.

بنابراین مجموعه

$$\{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\}$$

یک پایه  $\mathbb{R}^n$  است. پایه‌های بسیاری برای  $\mathbb{R}^n$  وجود دارد. لکن پایه استاندارد مهم‌ترین آنها است.

مثال ۱: نشان دهید که مجموعه  $\{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (1, 2, 4)\}$  یک پایه  $\mathbb{R}^3$  است.

حل: ابتدا نشان می‌دهیم که این مجموعه  $\mathbb{R}^n$  را گسترش می‌دهد. فرض کنیم  $(x_1, x_2, x_3)$  بردارى دلخواه در  $\mathbb{R}^3$  باشد. اسکالرهایی چون  $c_1, c_2, c_3$  پیدا می‌کنیم به قسمی که

$$c_1(1, 0, -1) + c_2(1, 1, 1) + c_3(1, 2, 4) = (x_1, x_2, x_3)$$

در می‌یابیم که این تساوی منجر به دستگاه معادلات ذیل می‌شود:

$$c_1 + c_2 + c_3 = x_1$$

$$c_2 + 2c_3 = x_2$$

$$-c_1 + c_2 + 4c_3 = x_3$$

این دستگاه دارای جواب زیر است

$$c_1 = 2x_1 - 3x_2 + x_3, \quad c_2 = -2x_1 + 5x_2 - 2x_3, \quad c_3 = x_1 - 2x_2 + x_3$$

اکنون نشان می‌دهیم که این مجموعه، مستقل خطی است. تساوی زیر را بررسی می‌کنیم

$$b_1(1, 0, -1) + b_2(1, 1, 1) + b_3(1, 2, 4) = (0, 0, 0)$$

این تساوی منجر به دستگاه معادلات زیر می‌شود:

$$b_1 + b_2 + b_3 = 0$$

$$b_2 + 2b_3 = 0$$

$$-b_1 + b_2 + 4b_3 = 0$$

این دستگاه دارای جواب منحصر به فرد  $b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 0$  است. بنابراین مجموعه مورد بحث مستقل خطی است.

در نتیجه نشان داده‌ایم که مجموعه  $\{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (1, 2, 4)\}$  مولد  $\mathbb{R}^3$  و مستقل خطی است. لذا تشکیل یک پایه ی  $\mathbb{R}^3$  می‌دهد.

مثال ۲: نشان دهید  $\{f, g, h\}$ ، که در آن  $f(x) = x^2 + 1, g(x) = 3x - 1, h(x) = 4x + 1$  یک پایه برای  $P_2$  است.

حل:  $\{f, g, h\}$  وقتی یک پایه  $P_2$  است که این فضا را گسترش داده و مستقل خطی باشد. در مثال ۳ بخش قبل ملاحظه کردیم که این مجموعه مستقل خطی است. حال ثابت می‌کنیم این مجموعه مولد  $P_2$  است. فرض کنیم  $p$  تابعی دلخواه در  $P_2$  باشد.  $p$  یک چندجمله‌ای به فرم ذیل خواهد بود

$$p(x) = bx^2 + cx + d$$

تابع‌های  $f, g, h$  وقتی  $P_2$  را گسترش می‌دهند که اسکالرهایی مانند  $a_1, a_2, a_3$  یافت شود به قسمی که

$$p(x) = a_1 f(x) + a_2 g(x) + a_3 h(x)$$

از این به دست می‌آید

$$\begin{aligned} bx^2 + cx + d &= a_1(x^2 + 1) + a_2(3x - 1) + a_3(-4x + 1) \\ &= a_1 x^2 + (3a_2 - 4a_3)x + (a_1 - a_2 + a_3) \end{aligned}$$

که با مقایسه ضرایب متناظر منجر به دستگاه معادلات ذیل می‌شود

$$a_1 = b$$

$$3a_2 - 4a_3 = c$$

$$a_1 - a_2 + a_3 = d$$

می‌توان نشان داد که این دستگاه معادلات دارای جواب  $a_1 = b, a_2 = 4b - 4d - c, a_3 = 3b - 3d - c$  می‌باشد. در این صورت چندجمله‌ای  $p$  را می‌توان به شکل زیر بیان کرد.

$$p(x) = a_1 f(x) + a_2 g(x) + a_3 h(x)$$

یعنی تابع‌های  $f, g, h$  مولد  $P_2$  هستند.

این تابع‌ها که  $P_2$  را گسترش داده مستقل خطی می‌باشند تشکیل یک پایه  $P_2$  می‌دهند.

قضیه ذیل منجر به این نتیجه کلیه می‌شود که همه پایه‌ها دارای یک تعداد بردار هستند.

**۱-۸-۵ قضیه.** فرض کنیم  $\{v_1, \dots, v_n\}$  یک پایه برای فضای برداری  $V$  باشد. هرگاه

$\{w_1, \dots, w_m\}$  مجموعه‌ای با بیش از  $n$  بردار  $V$  باشد، آنگاه این مجموعه وابسته خطی است.

برهان. تساوى زير را بررسى مى‌کنيم

$$c_1 w_1 + \dots + c_m w_m = 0 \quad (۱)$$

نشان مى‌دهيم که مقادير  $c_1, \dots, c_m$  راى برقرارى اين تساوى وجود داشته و حداقل يکى از آنها غيرصفر است. اين امر نشانگر اين خواهد بود که بردارهاى مورد بحث وابسته خطى هستند.

بردارهاى  $\{v_1, \dots, v_n\}$  يک پايه  $V$  است. از اين رو هر يک از بردارهاى  $w_1, w_2, \dots, w_n$  را مى‌توان به شکل ترکيبى خطى از  $v_1, \dots, v_n$  نوشت. فرض کنيم

$$w_1 = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \dots + a_{1n}v_n$$

$$w_2 = a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{2n}v_n$$

$$\vdots$$

$$w_m = a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \dots + a_{mn}v_n$$

با جاىگزينى اين مقادير در تساوى (۱) به دست مى‌آوريم

$$c_1(a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n) + c_2(a_{21}v_1 + \dots + a_{2n}v_n) + \dots + c_m(a_{m1}v_1 + \dots + a_{mn}v_n) = 0$$

با جابه‌جايى ترتيب داريم

$$(c_1 a_{11} + c_2 a_{21} + \dots + c_m a_{m1})v_1 + \dots + (c_1 a_{1n} + \dots + c_m a_{mn})v_n = 0$$

چون  $v_1, \dots, v_n$  مستقل خطى‌اند از اين تساوى نتيجه مى‌گيريم که همه ضرايب آن برابر صفر باشند، در اين صورت

$$a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \dots + a_{m1}c_m = 0$$

$$a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{m2}c_m = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{1n}c_1 + a_{2n}c_2 + \dots + a_{mn}c_m = 0$$

بنابراين يافتن  $c$ هاىي که در معادله (۱) صدق کنند به يافتن جواب‌هاى دستگاه معادلات اخير با  $n$  معادله  $m$  مجهول تحويل مى‌گردد. چون  $m > n$ ، تعداد مجهولات بيشتر از تعداد معادلات است. که جواب‌هاى بيشمارى راى چنين دستگاه همگنى وجود دارد. بنابراين جواب‌هاى غيرصفرى از  $c_i$ ها وجود دارد که در معادله (۱) صدق مى‌کند. از اين رو مجموعه  $\{w_1, \dots, w_m\}$  وابسته خطى است.

### ۲-۸-۵ قضیه. هر دو پایه فضای برداری $V$ دارای یک تعداد بردار هستند

برهان. فرض کنیم  $\{v_1, \dots, v_n\}$  و  $\{w_1, \dots, w_m\}$  دو پایه  $V$  باشند. چنانچه  $\{v_1, \dots, v_n\}$  را به عنوان یک پایه  $V$  و  $\{w_1, \dots, w_m\}$  را به عنوان یک مجموعه مستقل خطی بینگیریم از قضیه قبل نتیجه می‌گیریم که  $m \leq n$ . بالعکس، هرگاه  $\{w_1, \dots, w_m\}$  را یک پایه تلقی کرده و  $\{v_1, \dots, v_n\}$  را به عنوان مجموعه‌ای مستقل خطی در نظر بگیریم نتیجه می‌گیریم که  $n \leq m$ . از این رو  $m = n$  و این نشان می‌دهد که هر دو پایه مورد بحث مشتمل بر یک تعداد بردار هستند.

اکنون به جایی رسیده‌ایم که می‌توانیم به قولی که وعده داده بودیم وفا کرده و تعریفی برای بعد یک فضای

برداری ارائه دهیم.

**تعریف.** هرگاه فضای برداری  $V$  دارای پایه‌ای مشتمل بر  $n$  بردار باشد. بعد  $V$  را برابر  $n$  می‌نامیم. بعد  $V$  را به  $\dim V$  نشان می‌دهیم.

$n$  بردار  $\{(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\}$  یک پایه (پایه استاندارد)  $\mathbb{R}^n$  اند. در نتیجه بعد فضای  $\mathbb{R}^n$  برابر  $n$  است.

تبصره. متذکر می‌شویم که پایه را به عنوان مجموعه‌ای متناهی از بردارهای فضا تعریف کردیم که مستقل خطی بوده و فضا را گسترش دهند. چنین نیست که هر فضای برداری دارای چنین مجموعه‌ای (پایه متناهی) است. وقتی که چنین مجموعه‌ای وجود داشته باشد می‌گوییم فضا از بعد متناهی است، در غیراین صورت می‌گوییم فضا از بعد نامتناهی است.

در فصل بعدی به فضاهای برداری تابعی برخورد خواهیم کرد که از بعد نامتناهی هستند، با این وجود در این درس ما اساساً علاقمند به مطالعه فضاهای برداری با بعد متناهی هستیم.

مثال ۳: مجموعه بردارهای  $\{(1, 2, 3), (-2, 4, 1)\}$  را در  $\mathbb{R}^3$  در نظر می‌گیریم. این بردارها یک زیرفضای  $\mathbb{R}^3$  مانند  $V$  تولید می‌کنند که همه بردارهای آن به صورت زیر می‌باشند:

$$v = c_1(1, 2, 3) + c_2(-2, 4, 1)$$

پس بردارهای  $(1, 2, 3)$  و  $(-2, 4, 1)$  این زیرفضا را تولید می‌کنند.

وانگهی از آنجا که بردار دوم مضرب اسکالری از بردار او نمی‌باشد، این بردارها مستقل خطی هستند.

بنابراین  $\{(1, 2, 3), (-2, 4, 1)\}$  یک پایه برداری  $V$  است. در نتیجه  $\dim(V) = 2$ . در واقع

می‌دانیم که  $V$  یک صفحه است که از مبدأ می‌گذرد.

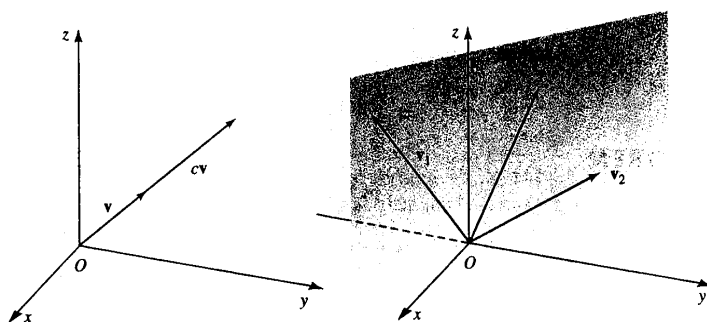
تبصره. در مثال اخير ملاحظه کردیم که یک صفحه خاصى که از مبدا مى‌گذشت یک زیرفضای دو بعدی  $\mathbb{R}^3$  بود. قضیه بعدی اطلاعات بیشتری در باب زیرفضای  $\mathbb{R}^3$  و بعد آنها به دست مى‌دهد.

**۳-۸-۵ قضیه.** الف) مبدا یک زیرفضای  $\mathbb{R}^3$  است. بعد این زیرفضا را برابر صفر تعريف مى‌کنیم.

ب) زیرفضاهای یک بعدی  $\mathbb{R}^3$  خط‌هایی هستند که از مبدا مى‌گذرند.

ج) زیرفضاهای دو بعدی  $\mathbb{R}^3$  صفحه‌هایی هستند که از مبدا مى‌گذرند.

شکل ۸-۵ ملاحظه شود.



زیرفضای دو بعدی  $\mathbb{R}^3$  صفحه‌ای است یک زیرفضای یک بعدی  $\mathbb{R}^3$  با پایه  $\{v_1, v_2\}$  که از مبدا مى‌گذرد.  $\{v_1\}$  خطی است که از مبدا مى‌گذرد. شکل ۸-۵

برهان. الف) فرض کنیم  $V$  مجموعه یکانی  $\{(0, 0, 0)\}$  متشکل از بردار صفر  $\mathbb{R}^3$  باشد. همچنین فرض کنیم  $c$  یک اسکالر دلخواه باشد. چون

$$c(0, 0, 0) = (0, 0, 0) \quad , \quad (0, 0, 0) + (0, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

$V$  تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است. زیرا یک زیرفضای  $\mathbb{R}^3$  است.

ب) فرض کنیم  $v$  یک پایه برای زیرفضای یک بعدی  $V$  از  $\mathbb{R}^3$  باشد. بنابراین هر بردار  $V$  به فرم  $cv$

به‌ازای اسکالری چون  $c$  است. می‌دانیم این بردارها تشکیل یک خط مى‌دهند که از مبدا مى‌گذرد.

ج) فرض کنیم  $\{v_1, v_2\}$  یک پایه برای زیرفضای دو بعدی  $V$  از  $\mathbb{R}^3$  باشد. هر بردار  $V$  به فرم

$$c_1v_1 + c_2v_2$$

است. از این رو  $V$  یک صفحه گذرا از مبدا مى‌باشد.

تبصره. گفتیم که یک مجموعه بردار که مولد یک فضای برداری است به یک معنی آن فضا را مشخص مى‌سازد، بدین قرار که هر بردار فضا ترکیبی خطی از بردارهای این مجموعه مى‌باشد. در حالت کلی، ممکن



است بیش از یک ترکیب خطی برای بیان یک بردار مفروض وجود داشته باشد. فضای مولد یافته به وسیله مجموعه  $\{(1, 2, 3), (-1, 1, 4), (3, 3, 2)\}$  را در نظر می‌گیریم. بردار  $(4, 5, 5)$  را می‌توان چنین بیان کرد:

$$(4, 5, 5) = -(1, 2, 3) + (-1, 1, 4) + 2(3, 3, 2)$$

همچنین

$$(4, 5, 5) = 5(1, 2, 3) - 2(-1, 1, 4) - (3, 3, 2)$$

قضیه آتی بیان می‌دارد که هرگاه مجموعه گسترش یک پایه باشد چنین ترکیبی منحصر به فرد خواهد بود. از این رو یک پایه بسیار بیشتر از یک مجموعه مولد یک فضای برداری را مشخص می‌کند.

**۴-۸-۵ قضیه.** فرض کنیم  $\{v_1, \dots, v_2, \dots, v_n\}$  یک پایه برداری  $V$  باشد. در این صورت هر بردار  $V$  به طریقی منحصر به فرد به صورت ترکیبی خطی از این بردارها نوشته می‌شود.

برهان. فرض کنیم  $v$  برداری در  $V$  باشد. چون  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  یک پایه است، می‌توانیم  $v$  را به صورت ترکیبی خطی از این بردارها بنویسیم. فرض کنیم داشته باشیم:

$$v = av_1 + \dots + a_nv_n, \quad v = b_1v_1 + \dots + b_nv_n$$

در این صورت

$$a_1v_1 + \dots + a_nv_n = b_1v_1 + \dots + b_nv_n$$

که به نوبه خود منجر به تساوی زیر می‌شود.

$$(a_1 - b_1)v_1 + \dots + (a_n - b_n)v_n = 0$$

چون  $\{v_1, \dots, v_n\}$  یک پایه است، این بردارها مستقل خطی هستند. از این رو  $(a_1 - b_1) = 0, \dots, (a_n - b_n) = 0$  و در نتیجه  $a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$ . بنابراین فقط به یک طریق می‌توان  $v$  را به عنوان ترکیبی خطی از بردارهای پایه نوشت.

در اینجا به ذکر مسأله‌ای می‌پردازیم که به ما می‌گوید چه وقت یک مجموعه تشکیل یک پایه می‌دهد بدون آنکه نیاز داشته باشیم که استقلال خطی بردارها و یا ویژگی مولد آنها را نشان دهیم.

- ۵-۸-۵ مسأله.** فرض کنیم  $V$  یک فضای برداری با بعد  $n$  باشد. در این صورت ثابت کنید
- الف) هرگاه  $S = \{v_1, \dots, v_n\}$  یک مجموعه مستقل خطی از  $n$  بردار باشد، آنگاه  $S$  یک پایه  $V$  است.
- ب) هرگاه  $S = \{v_1, \dots, v_n\}$  یک مجموعه شامل  $n$  بردار بوده که  $V$  را گسترش می‌دهد، آنگاه  $S$  یک پایه  $V$  است.
- ج) نتیجه بگیرید که مجموعه

$$\{(1, 3, -1), (2, 1, 0), (4, 2, 1)\}$$

یک پایه  $\mathbb{R}^3$  است. (راهنمایی: نشان دهید که این مجموعه مستقل خطی است).

## ۹-۵ بُعد برخی فضاها

اکنون قادریم بعد فضاهایی را که در مثال‌های قبلی بررسی کرده‌ایم محاسبه کنیم همچنانکه برای فضای برداری  $\mathbb{R}^n$  عمل کردیم.

الف) برای فضای برداری  $M_{2 \times 2}$  از ماتریس‌های  $2 \times 2$  چنین استدلال می‌کنیم. ماتریس‌های

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

فضای  $M_{2 \times 2}$  را گسترش داده و مستقل خطی هستند. این بردارها یک پایه  $M_{2 \times 2}$  هستند. بنابراین بعد فضای برداری  $M_{2 \times 2}$  برابر ۴ است. مشابهاً می‌توان نشان داد که بعد فضای برداری  $M_{m \times n}$  برابر  $mn$  است.

ب) اکنون بعد  $P_2$ ، فضای برداری چندجمله‌ای با درجه حداکثر ۲ را محاسبه می‌کنیم. چندجمله‌ای

$x^2$ ،  $x$  و ۱ این فضا را گسترش می‌دهند، زیرا هر چندجمله‌ای  $ax^2 + bx + c$  را می‌توانیم به شکل

$$ax^2 + bx + c = a(x^2) + b(x) + c(1)$$

بنویسیم.  $x^2$ ،  $x$  و ۱ مستقل خطی نیز می‌باشند، زیرا اگر

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{برای هر } x)$$

نتیجه می‌گیریم که  $a = 0$ ،  $b = 0$  و  $c = 0$ . از این رو  $\{x^2, x, 1\}$  یک پایه  $P_2$  است. پس بعد فضای برداری  $P_2$  برابر ۳ است. مشابهاً، مجموعه  $\{x^n, x^{n-1}, \dots, x, 1\}$  یک پایه  $P_n$  است و بعد  $P_n$  برابر  $n + 1$  است. این پایه را پایه استاندارد  $P_n$  می‌نامیم.

ج) فضای برداری  $\mathbb{C}^2$  را در نظر می‌گیریم. بردارهای  $(1, 0)$  و  $(0, 1)$  فضای  $\mathbb{C}^2$  را گسترش می‌دهند زیرا یک بردار دلخواه  $(a + bi, c + di)$  را می‌توانیم چنین بنویسیم

$$(a + bi, c + di) = (a + bi)(1, 0) + (c + di)(0, 1)$$

وانگهی  $(1, 0)$  و  $(0, 1)$  در  $\mathbb{C}^2$  مستقل خطی هستند. لذا این بردارها یک پایه برای  $\mathbb{C}^2$  بوده و در نتیجه بعد  $\mathbb{C}^2$  برابر ۲ است. مشابهاً  $\{(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$  یک پایه  $\mathbb{C}^n$  بوده و بعد این فضا برابر  $n$  است. این پایه استاندارد  $\mathbb{C}^n$  است.

مثال بعدی کلیه مفاهیم کلیدی را که در بخش‌های قبلی مطرح کردیم همه را یکجا در خود دارد.

مثال ۵: از احکام زیر کدامیک درست و کدامیک نادرست‌اند. توضیح دهید

الف) بردارهای  $(1, 2)$ ،  $(-1, 3)$  و  $(5, 2)$  در  $\mathbb{R}^2$  وابسته‌ی خطی هستند.

ب) بردارهای  $(1, 0, 0)$ ،  $(0, 2, 0)$  و  $(1, 2, 0)$  در  $\mathbb{R}^3$  را گسترش می‌دهند.

ج)  $\{(1, 0, 2)$ ،  $(0, 1, -3)\}$  یک پایه زیرفضای  $\mathbb{R}^3$  است، زیرفضایی که متشکل از بردارهایی به فرم  $(a, b, 2a - 3b)$  می‌باشد.

د) از هر مجموعه شامل دو بردار می‌توان یک زیرفضای با بعد دو از  $\mathbb{R}^3$  گسترش داد.

حل: الف) درست است. بعد  $\mathbb{R}^2$  برابر ۲ است. در نتیجه هر مجموعه شامل سه بردار وابسته‌ی خطی هستند.

ب) نادرست است. سه بردار داده شده وابسته‌ی خطی هستند. از این رو بردارها نمی‌توانند یک فضای سه‌بعدی گسترش دهند.

ج) درست است. بردارها یک فضای دوبعدی گسترش می‌دهند.

$$(a, b, 2a - 3b) = a(1, 0, 2) + b(1, 1, -3)$$

این بردارها مستقل خطی نیز هستند زیرا هم‌راستا نمی‌باشند.

د) نادرست است. دو بردار باید مستقل خطی باشند. پس حکم در حالت کلی درست نیست.

## ۵-۱۰ رتبه ماتریس‌ها

در این بخش دانشجویان با رتبه یک ماتریس آشنا می‌شوند. مفهوم رتبه ما را قادر می‌سازد تا ماتریس‌ها را با بردارها مرتبط سازیم. رتبه یک ابزار وحدت بخش است که به ما این امکان را می‌دهد تا همه‌ی مفهومی‌هایی را که در این درس مطرح کردیم با هم مرتبط سازیم. جواب دستگاه معادلات خطی، منفرد بودن یک ماتریس، معکوس‌پذیری یک ماتریس، همگی تحت تأثیر رتبه قرار می‌گیرند.

**تعریف.** فرض کنیم  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  باشد. سطرهای  $A$  را می‌توانیم به مثابه بردارهای سطری  $r_1, r_2, \dots, r_m$  و ستون‌های آن را به مثابه بردارهای ستونی  $c_1, c_2, \dots, c_n$  بینگاریم. هر برداری سطری شامل  $n$  مؤلفه هر بردار ستونی شامل  $m$  مؤلفه می‌باشد. بردارهای سطری زیرفضایی از  $\mathbb{R}^n$  را گسترش می‌دهند که فضای سطری  $A$  و بردارهای ستونی زیرفضای از  $\mathbb{R}^m$  را گسترش می‌دهند که فضای ستونی  $A$  نامیده می‌شود.

**مثال ۱:** ماتریس زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

بردارهای سطری  $A$  عبارتند از:

$$r_1 = (1 \ 1 \ -1 \ 2) \quad r_2 = (3 \ 4 \ 1 \ 6) \quad r_3 = (5 \ 4 \ 1 \ 0)$$

این بردارها زیرفضای از  $\mathbb{R}^4$  تولید می‌کنند که فضای سطری  $A$  نامیده می‌شود. بردارهای ستونی  $A$  عبارتند از:

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad c_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \quad c_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

این بردارها زیرفضایی از  $\mathbb{R}^3$  تولید می‌کنند که فضای ستونی  $A$  نامیده می‌شود.

**۵-۱۰-۱ قضیه.** فضای سطری و فضای ستونی ماتریس  $A$  دارای یک بعد هستند.

**برهان.** فرض کنیم  $u_1, \dots, u_m$  بردارهای سطری  $A$  باشند. بردار  $i$ ام چنین است

$$u_i = (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{im})$$

فرض کنیم بعد فضای سطری برابر  $s$  باشد. و همین‌طور  $v_1, \dots, v_s$  و یک پایه فضای سطری باشند. به علاوه فرض کنیم زامین بردار این مجموعه چنین باشد

$$v_j = (b_{j1} \ b_{j2} \ \dots \ b_{jm})$$

هر بردار سطری  $A$  ترکیبی خطی از  $v_1, \dots, v_s$  است.

$$u_1 = c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + \dots + c_{1s}v_s$$

$$u_2 = c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + \dots + c_{2s}v_s$$

$$\vdots$$

$$u_m = c_{m1}v_1 + c_{m2}v_2 + \dots + c_{ms}v_s$$

با مساوی قرار دادن زامین مؤلفه‌های بردارها در سمت چپ و راست این تساوی‌ها به دست می‌آوریم

$$a_{1i} = c_{11}b_{1i} + c_{12}b_{2i} + \dots + c_{1s}b_{si}$$

$$\vdots$$

$$a_{mi} = c_{m1}b_{1i} + c_{m2}b_{2i} + \dots + c_{ms}b_{si}$$

و این تساوی را می‌توانیم چنین بنویسیم

$$\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} = b_{1i} \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix} + b_{2i} \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{m2} \end{bmatrix} + \dots + b_{si} \begin{bmatrix} c_{1s} \\ c_{2s} \\ \vdots \\ c_{ms} \end{bmatrix}$$

این نشان می‌دهد که هر بردار ستونی  $A$  در فضای گسترش یافته به وسیله مجموعه‌ای از بردارها قرار دارد. چون  $s$  بعد فضای سطری  $A$  است، داریم

$$\dim(\text{فضای ستونی } A) \leq \dim(\text{فضای سطری } A)$$

با استدلالی مشابه، می‌توانیم نشان دهیم که

$$\dim(\text{فضای سطری } A) \leq \dim(\text{فضای ستونی } A)$$

بنابراین

$$\dim(\text{فضای ستونی } A) = \dim(\text{فضای سطری } A)$$

و این برهان قضیه را اثبات می‌نماید.

**تعریف.** بعد فضای سطری (ستونی) ماتریس  $A$  را رتبه  $A$  می‌نامیم. رتبه  $A$  را با نماد  $\text{rank}(A)$  نشان می‌دهیم.

خواهیم دید که رتبه یک ماتریس یک ابزار محاسباتی و هندسی مفید می‌باشد.

**مثال ۲:** رتبه ماتریس زیر را پیدا کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

**حل:** با بررسی در می‌یابیم که سطر سوم این ماتریس ترکیبی خطی از دو سطر آن است:

$$(2, 5, 8) = 2(1, 2, 3) + (0, 1, 2)$$

در این صورت سه سطر این ماتریس وابسته‌ی خطی هستند. در نتیجه رتبه این ماتریس کوچک‌تر از ۳ است. چون  $(1, 2, 3)$  مضرب اسکالری از  $(0, 1, 2)$  نیست، این دو بردار مستقل خطی هستند. این دو بردار تشکیل یک پایه برای فضای سطری  $A$  می‌دهند. از این رو  $\text{rank}(A) = 2$ .

این روش، که بر پایه تعریف استوار است، برای محاسبه رتبه ماتریس‌های بزرگ عملی نمی‌باشد. در آینده یک روش سیستماتیک‌تری برای یافتن رتبه یک ماتریس ارائه خواهیم داد. قضیه بعدی، که راه را برای این هدف هموار می‌کند، بیان می‌دارد که تعیین رتبه ماتریسی که به فرم پلکانی تحویل یافته است به فوریت قابل تشخیص است.

**۵-۱۰-۲ قضیه.** سطرهای غیرصفر ماتریس  $A$  که به فرم پلکانی تحویل یافته باشد تشکیل یک

پایه برای فضای سطری  $A$  می‌دهند. رتبه  $A$  برابر تعداد بردارهای سطری غیرصفر آن است.

برهان. فرض کنیم  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  با سطرهای غیرصفر  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_s$  باشد. فرض کنیم

$$k_1 \mathbf{r}_1 + k_2 \mathbf{r}_2 + \dots + k_s \mathbf{r}_s = \mathbf{0}$$

که در آن  $k_1, \dots, k_s$  اسکالرهایی هستند.

اولین درایه غیرصفر  $r_1$  برابر ۱ است؛  $r_1$  اولین برداری سطری است که درایه ۱ در این مؤلفه دارد. در نتیجه وقتی بردارهای  $k_1 r_1, k_2 r_2, \dots, k_s r_s$  را جمع می‌کنیم برداری به دست می‌آوریم که اولین مؤلفه‌های آن  $k_1$  است. با تساوی قرار دادن این بردار با بردار صفر به دست می‌آوریم که  $k_1 = 0$ . از این رو تساوی فوق به شکل تساوی ذیل در می‌آید

$$k_2 r_2 + \dots + k_s r_s = 0$$

اولین درایه غیرصفر  $r_2$  برابر ۱ است و  $r_2$  تنها برداری در بین بردارهای باقی مانده است که عده ۱ را در این مؤلفه دارا است. در نتیجه  $k_2 = 0$ .

مشابهاً،  $k_3, \dots, k_s$  همگی برابر صفرند. بنابراین بردارهای  $r_1, r_2, \dots, r_s$  مستقل خطی هستند. این بردارها، طبق تعریف فضای سطری  $A$  را گسترش می‌دهند و همین‌طور تشکیل یک پایه برای این فضا می‌دهند. بعد فضای سطری برابر  $s$  است. در نتیجه رتبه‌ی  $A$  برابر  $s$ ، یعنی تعداد بردارهای غیرصفر  $A$  است.

**مثال ۳:** رتبه ماتریس زیر را پیدا کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

این ماتریس به فرم پلکانی تحویل یافته است. دارای سه بردار سطری غیرصفر (سه سطر اول) است. بنابر قضیه پیش، این سه بردار یک پایه فضای سطری هستند. از این رو  $\text{rank}(A) = 3$ .  
قضیه بعدی فضاهای سطری را با ماتریس‌های سطری معادل مرتبط می‌سازد.

**۵-۱۰-۳ قضیه.** فرض کنیم  $A$  و  $B$  دو ماتریس سطری معادل باشند. در این صورت  $A$  و  $B$

دارای یک فضای سطری هستند و  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ .

برهان. چون  $A$  و  $B$  سطری معادل هستند. سطرهاى  $B$  با اعمال عملیات سطری مقدماتی از سطرهاى  $A$  حاصل می‌شوند. بنابراین هر سطر  $B$  ترکیبی خطی از سطرهاى  $A$  است. و همین‌طور فضای سطری  $B$  جزء فضای سطری  $A$  است.

به طریق مشابه، فضای سطری  $A$  را با اعمال عملیات سطری مقدماتی می‌توان از سطرهاى  $B$  به دست آورد. در نتیجه فضای سطری  $A$  نیز جزء فضای سطری  $B$  است.

بنابراین نتیجه می‌گیریم که فضاهای سطری  $A$  و  $B$  یکی هستند. چون  $A$  و  $B$  دارای فضاهای سطری مساوی هستند، رتبه‌ی آنها برابر است.

نتیجه‌ی بعدی دو نتیجه قبلی را بهم آمیخته و روشی برای یافتن یک پایه برای فضای سطری یک ماتریس و در نتیجه رتبه‌ی آن ارائه می‌دهد.

**۴-۱۰-۵ قضیه.** فرض کنیم  $E$  فرم سطری پلکانی تحویل یافته ماتریس  $A$  باشد. بردارهای سطری غیرصفر  $E$  تشکیل یک پایه برای فضای سطری  $A$  می‌دهد. رتبه‌ی  $A$  برابر تعداد بردارهای سطری غیرصفر  $E$  است.

**مثال ۴:** پایه‌ای برای فضای سطری ماتریس مفروض زیر یافته و رتبه آن را تعیین کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

**حل:** از عملگرهای سطری مقدماتی استفاده کرده و یک فرم پلکانی تحویل یافته برای  $A$  به دست می‌آوریم.

داریم

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بردارهای  $(1, 0, 7)$ ،  $(0, 1, -2)$  یک پایه برای فضای سطری  $A$  تشکیل می‌دهند،  $\text{rank}(A) = 2$ .

بردارهای ستونی ماتریس  $A$  همان بردارهای سطری ماتریس  $A^t$  هستند. در این صورت فضای ستونی

$A$  همان فضای سطری  $A^t$  است. بدین‌گونه می‌توانیم یک پایه برای فضای ستونی ماتریس  $A$  با به دست آوردن یک پایه برای فضای سطری  $A^t$  به دست آوریم.

**مثال ۵:** یک پایه برای فضای ستونی ماتریس مفروض زیر به دست آورید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

**حل:** ترانزاده  $A$  عبارت است از:

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$



فضای ستونی  $A$  تبدیل به فضای سطری  $A^t$  می‌شود. اینک پایه‌ای برای فضای سطری  $A^t$  می‌یابیم. یک فرم سطری پلکانی تحویل یافته برای  $A^t$  به دست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & +6 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بردارهای غیرصفر سطری این ماتریس، یعنی  $(1, 0, 5)$ ،  $(0, 1, -3)$  یک پایه برای فضای سطری  $A^t$  هستند. این بردارها را به صورت ستونی نوشته تا یک پایه برای فضای ستونی  $A$  به دست آید. بردارهای زیر یک پایه برای فضای ستونی  $A$  هستند.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

قضیه اخیر را برای تعیین یک پایه برای زیرفضای  $V$  که توسط یک مجموعه بردار تولید شده است نیز می‌توان بکار گرفت. بردارها را به صورت بردارهای سطری یک یک ماتریس نوشته، و فرم پلکانی تحویل یافته آن را محاسبه می‌کنیم. بردارهای غیرصفر این فرم پلکانی تحویل یافته یک پایه برای  $V$  به دست می‌دهد. مثال بعدی روش کار را روشن می‌کند.

مثال ۶: پایه‌ای برای زیرفضای  $V$  از  $\mathbb{R}^n$  که توسط بردارهای زیر تولید می‌شود به دست آورید

$$(1, 2, 3, 4), (-1, -1, -4, -2), (3, 4, 11, 8)$$

حل: ماتریس  $A$  را چنان می‌سازیم که بردارهای فوق بردارهای سطری آن باشند.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 11 & 8 \end{bmatrix}$$

یک فرم پلکانی تحویل یافته برای  $A$  به دست می‌آوریم. داریم

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 11 & 8 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بردارهای غیرصفر این فرم پلکانی تحویل یافته، یعنی  $(1, 0, 5, 0)$  و  $(0, 1, -1, 2)$  پایه‌ای برای زیرفضای  $V$  هستند.

قضیه بعدی نتایج و مفاهیم جبری را که در این درس در مناسبت‌هایی آمده‌اند یکجا ارائه می‌کنند.

**۵-۱۰-۵ قضيه** فرض كنيم  $A$  يك ماتريس  $n \times n$  باشد. گزاره‌هاى زير معادلند.

(الف)  $A$  وارون پذير است.

(ب)  $|A| \neq 0$  ( $A$  نامنفرد است).

(ج) دستگاه معادلات  $AX = B$  داراى جواب منحصر به فرد است.

(د)  $A$  با  $I_n$  هم‌ارز سطرى است.

(ه)  $\text{rank}(A) = n$ .

برهان. قبلاً ديده‌ايم كه (الف)، (ب)، (ج) و (د) معادلند. در تمرين‌ها از شما خواسته شده است تا ثابت كنيد كه (د) و (ه) نيز معادلند. اين نشان مى‌دهد كه همه احكام معادلند.

قضيه قبلى به ما مى‌گويد كه چگونه رتبه‌ى يك ماتريس اطلاعاتى در خصوص يكتايى جواب يك دستگاه  $n$  معادله خطى در  $n$  مجهول به دست مى‌دهد. مفهوم رتبه نقش مهمى در شناخت رفتار دستگاه‌هاى معادلات خطى از هر اندازه‌اى به دست مى‌دهد. تاكنون ملاحظه کرده‌ايم كه چگونه دستگاه‌هاى معادلات خطى مى‌توانند داراى جواب منحصر به فرد، جواب‌هاى بيشمار، و يا فاقد جواب باشند. چنين اوضاعى را مى‌توان برحسب رتبه‌هاى ماتريس افزوده و ماتريس ضرايب دسته‌بندي كرد.

**۶-۱۰-۵ قضيه.** يك دستگاه  $m$  معادله با  $n$  مجهول را در نظر مى‌گيريم.

(۱) هرگاه ماتريس افزوده و ماتريس ضرايب داراى رتبه برابر  $r$  بوده و  $r = n$ ، جواب منحصر به فرد است.

(۲) هرگاه ماتريس افزوده و ماتريس ضرايب داراى رتبه برابر  $r$  بوده و  $r < n$ ، جواب‌هاى زيادى وجود دارد.

(۳) هرگاه ماتريس افزوده و ماتريس ضرايب داراى رتبه‌هاى مخالف باشند. جوابى وجود ندارد.

برهان. فرض كنيم دستگاه موردنظر به صورت زير بوده باشد

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

این دستگاه را می‌توان چنین نوشت:

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

و یا

$$x_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b} \quad (۱)$$

اکنون به سه حالت ممکنه توجه می‌کنیم

(۱) چون رتبه‌ی ماتریس ضرایب و ماتریس افزوده یکی است، باید  $\mathbf{b}$  ترکیبی خطی از  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  باشد. به علاوه، چون این رتبه برابر  $n$  است، بردارهای  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  مستقل خطی بوده از این رو پایه‌ای برای فضای ستونی ماتریس افزوده تشکیل می‌دهند. بنابراین معادله (۱) دارای جواب منحصر به فرد بوده و جواب دستگاه یکتا است.

(۲) چون رتبه ماتریس‌های ضرایب و افزوده یکسان است،  $\mathbf{b}$  باید وابسته‌ی خطی از بردارهای  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  با این حال چون این رتبه کوچکتر از  $n$  است، بردارهای  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  وابسته‌ی خطی اند. بنابراین  $\mathbf{b}$  را می‌توان به بیش از یک طریق به صورت ترکیبی خطی از  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  نوشت. در این صورت معادله (۱) دارای جواب‌های زیادی است؛ جواب دستگاه وجود داشته اما منحصر به فرد نمی‌باشد.

(۳) چون رتبه ماتریس افزوده برابر رتبه ماتریس ضرایب نمی‌باشد،  $\mathbf{b}$  مستقل خطی از بردارهای  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  می‌باشد. در این صورت معادله (۱) جواب ندارد؛ و جوابی برای دستگاه وجود ندارد.

۷-۱۰-۵ تمرین (صفحه ۲۵۶ و ۲۵۷)

## ۱۱-۵ بردارهای متعامد و تصاویر

اکنون توجه خود را به مجموعه بردارهای متعامد که یک‌ه نیز می‌باشند معطوف می‌داریم. روشی برای ساختن اینگونه بردارها در  $\mathbb{R}^n$  معرفی می‌کنیم. ویژگی‌های خاص این مجموعه بردارها نیز مورد بحث قرار می‌گیرد. تعریف. مجموعه برداری را در فضای برداری  $V$  یک مجموعه متعامد نامیم هرگاه هر زوج بردار این مجموعه متعامد باشند چنین مجموعه را یگه متعامد نامیم هرگاه متعامد بوده و هر بردار آن برداری یگه باشد.

مثال ۱: نشان دهید مجموعه  $\{(1, 0, 0), (0, \frac{2}{\delta}, \frac{4}{\delta}), (0, \frac{4}{\delta}, -\frac{2}{\delta})\}$  یک مجموعه یگه متعامد است.

حل: ابتدا نشان می‌دهیم که هر زوج بردار این مجموعه متعامد است.

$$(1, 0, 0) \cdot (0, \frac{2}{\delta}, \frac{4}{\delta}) = 0; (1, 0, 0) \cdot (0, \frac{4}{\delta}, -\frac{2}{\delta}) = 0; (0, \frac{2}{\delta}, \frac{4}{\delta}) \cdot (0, \frac{4}{\delta}, -\frac{2}{\delta}) = 0$$

در این صورت این بردارها دوبه‌دو متعامدند. حال نشان می‌دهیم که هر بردار، یک بردار یگه است. داریم:

$$\begin{aligned}\|(1, 0, 0)\| &= \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1 \\ \|(0, \frac{2}{\delta}, \frac{4}{\delta})\| &= \sqrt{0^2 + (\frac{2}{\delta})^2 + (\frac{4}{\delta})^2} = 1 \\ \|(0, \frac{4}{\delta}, -\frac{2}{\delta})\| &= \sqrt{0^2 + (\frac{4}{\delta})^2 + (-\frac{2}{\delta})^2} = 1\end{aligned}$$

بردارها بردارهای یگه بوده و متعامدند. از این رو مجموعه موردنظر یک مجموعه یگه متعامد است.

**۱-۱۱-۵ قضیه** یک مجموعه یگه متعامد (از بردارهای غیرصفر) در یک فضای برداری مستقل خطی است.

برهان. فرض کنیم  $\{v_1, \dots, v_m\}$  یک مجموعه یگه متعامد از بردارهای غیرصفر در فضای برداری  $V$  باشد. تساوی زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_m v_m = 0$$

نشان می‌دهیم که  $c_1 = 0, \dots, c_m = 0$  که ثابت می‌کند این بردارها مستقل خطی‌اند. فرض کنیم  $v_i$  نهمین بردار این مجموعه یگه متعامد باشد. حاصل ضرب نقطه‌ای این بردار را در دو طرف تساوی گرفته و از خواص حاصل ضرب نقطه‌ای استفاده می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned}(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_m v_m) \cdot v_i &= 0 \cdot v_i \\ c_1 v_1 \cdot v_i + c_2 v_2 \cdot v_i + \dots + c_m v_m \cdot v_i &= 0\end{aligned}$$

چون این بردارها دوبه‌دو متعامدند،  $v_j \cdot v_i = 0$  مگر آنکه  $j = i$  بنابراین

$$c_i v_i \cdot v_i = 0$$

چون  $v_i$  برداری غیرصفر است،  $v_i \cdot v_i \neq 0$ . بنابراین  $c_i = 0$ . با قرار دادن  $i = 1, 2, \dots, m$ ، حاصل می‌شود که

$$c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_m = 0$$

و این ثابت می‌کند که بردارها مستقل خطی هستند.

برای یک فضای برداری ممکن است پایه‌های چیزی وجود داشته باشد. اینکه از چه پایه‌ای استفاده کنیم بستگی به مسأله مورد بحث دارد. پایه‌ای انتخاب می‌شود که به بهترین وجهی به موقعیت مربوطه بکار می‌آید.

غالباً مناسب‌ترین پایه یک پایه متعامد و یا یک مجموعه یک‌تعامد می‌باشد.

**تعریف.** یک پایه را که یک مجموعه متعامد باشد یک پایه متعامد می‌نامیم. پایه‌ای را که یک مجموعه یک‌تعامد باشد یک پایه یک‌تعامد می‌نامیم.

متذکر می‌شویم که پایه‌های استاندارد پایه‌هایی یک‌تعامد هستند. پایه‌های استاندارد

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R}^2 &: \{(1, 0), (0, 1)\} \\ \mathbf{R}^3 &: \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \\ \mathbf{R}^n &: \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)\} \end{aligned} \right\} \text{پایه‌های یک‌تعامد}$$

می‌دانیم که هر یک بردار فضای برداری را می‌توان به گونه‌ای منحصر به فرد به شکل ترکیبی خطی از بردارهای پایه نوشت. قضیه‌ی بعدی می‌بیند آن است که یک پایه یک‌تعامد در بحث و بررسی یک فضای برداری از ویژگی مفیدتری برخوردار است زیرا ترکیبات خطی را ساده‌تر می‌توان یافت.

**۲-۱۱-۵ قضیه.** فرض کنیم  $\{u_1, \dots, u_n\}$  یک پایه یک‌تعامد برای فضای برداری  $\mathbf{V}$  باشد. همچنین فرض کنیم  $v$  یک بردار در  $\mathbf{V}$  باشد.  $v$  را به صورت زیر به شکل ترکیبی خطی از این بردارهای پایه می‌توان نوشت

$$v = (v \cdot u_1)u_1 + (v \cdot u_2)u_2 + \dots + (v \cdot u_n)u_n$$

برهان. چون  $\{u_1, \dots, u_n\}$  یک پایه است، اسکالرهایی مانند  $c_1, \dots, c_n$  هست به قسمی که

$$v = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n$$

نشان می‌دهیم که  $c_1 = v \cdot u_1$  و  $c_n = v \cdot u_n$ .

فرض کنیم  $u_i$ ،  $i$ امین بردار پایه باشد. حاصل ضرب نقطه‌ای دو طرف این تساوی را با  $u_i$  گرفته و از خواص حاصل ضرب نقطه‌ای استفاده می‌کنیم به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} v \cdot u_i &= (c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n) \cdot u_i \\ &= c_1 u_1 \cdot u_i + (c_2 u_2) \cdot u_i + \cdots + (c_n u_n) \cdot u_i \end{aligned}$$

چون بردارهای  $u_1, u_2, \dots, u_n$  دو به دو متعامدند، مگر آنکه  $j = i$  بنابراین

$$v \cdot u_i = c_i u_i \cdot u_i$$

به علاوه، چون پایه مورد بحث یک متعامد است،  $u_i \cdot u_i = 1$ ، بنابراین

$$v \cdot u_i = c_i$$

بدین ترتیب، با قرار دادن  $i = 1, 2, \dots, n$  به دست می‌آوریم  $c_1 = v \cdot u_1$  و  $c_n = v \cdot u_n$ . در نتیجه می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{v} = (v \cdot u_1) \mathbf{u}_1 + (v \cdot u_2) \mathbf{u}_2 + \cdots + (v \cdot u_n) \mathbf{u}_n$$

**مثال ۲:** بردارهای  $u_1, u_2, u_3$  ارائه شده در زیر یک پایه یک متعامد  $\mathbb{R}^3$  هستند. بردار  $\mathbf{v} = (7, -5, 1^0)$  را به صورت ترکیبی از این بردارها بنویسید.

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{u}_2 = \left(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \quad \mathbf{u}_3 = \left(0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

حل: داریم

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1 = (7, -5, 1^0) \cdot (1, 0, 0) = 7$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2 = (7, -5, 1^0) \cdot \left(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 5$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_3 = (7, -5, 1^0) \cdot \left(0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) = -1^0$$

بنابراین

$$(7, -5, 1^0) = 7(1, 0, 0) + 5\left(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) - 1^0\left(0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

اکنون مفهوم تصویر یک بردار را روی بردار دیگر معرفی می‌کنیم. از نظر شهودی، مفهوم تصویر ممین است که «چه مقدار» از یک بردار همسو در راستای بردار دیگری است. این مفهوم به ویژه در بررسی و تحلیل نیروها مفید می‌باشد، و آن وقتی است که بخواهیم اثر فیزیکی یک نیرو را در جهت خاصی بدانیم. ما از تصاویر به منظور ساختن بردارهای یک متعامد استفاده می‌بریم.

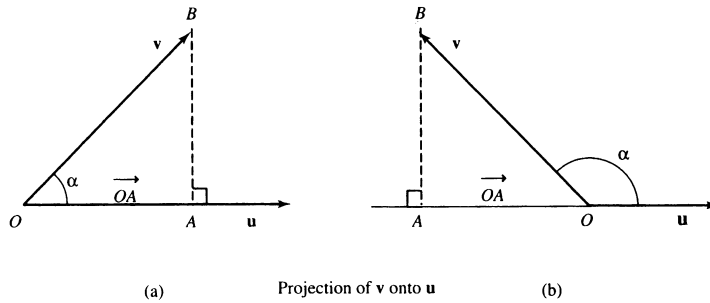
## ۱۲-۵ تصویر یک بردار روی بردار دیگر

فرض کنیم  $v$  و  $u$  بردارهایی در  $\mathbb{R}^n$  با زاویه بین  $\alpha$  باشند. شکل ۹-۵ ملاحظه شود. بردار  $\vec{OA}$  مبین آن است که «چه مقدار» از  $v$  همسو در راستای  $u$  است.  $\vec{OA}$  را تصویر  $v$  روی  $u$  می‌نامیم. اینک عبارتی برای  $\vec{OA}$  می‌یابیم. ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} OA &= OB \cos \alpha \\ &= \|v\| \cos \alpha \\ &= \|v\| \left( \frac{v}{\|v\|} \cdot \frac{u}{\|u\|} \right) \\ &= v \cdot \frac{u}{\|u\|} \end{aligned}$$

جهت بردار  $\vec{OA}$  را برابر بردار واحد  $\frac{u}{\|u\|}$  تعریف می‌کنیم. بنابراین

$$\vec{OA} = \left( v \cdot \frac{u}{\|u\|} \right) \frac{u}{\|u\|} = \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u$$



Projection of  $v$  onto  $u$

$$\vec{OA} = \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u$$

تصویر  $v$  روی  $u$

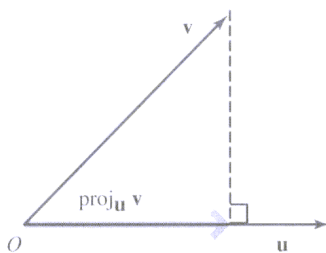
$$\vec{OA} = \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u$$

شکل ۹-۵

تعريف. تصوير بردار  $v$  روى بردار غيرصفر  $u$  در  $v$ ، كه به  $\text{proj}_u^v$  نشان داده مى‌شود، چنين تعريف مى‌گردد:

$$\text{proj}_u^v = \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u$$

شكل ۱۰-۵ ملاحظه شود. اصطلاح مؤلفه  $v$  در جهت  $u$  نيز براى  $\text{proj}_u^v$  به‌كار مى‌رود



$$\text{proj}_u^v = \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u$$

شكل ۱۰-۵

مثال ۳: تصوير بردار  $v = (6, 7)$  را روى بردار  $u = (1, 4)$  پيدا كنيد

حل: براى اين بردارها داريم

$$v \cdot u = (6, 7) \cdot (1, 4) = 6 + 28 = 34$$

$$u \cdot u = (1, 4) \cdot (1, 4) = 1 + 16 = 17$$

لذا

$$\text{proj}_u^v = \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u = \frac{34}{17} (1, 4) = (2, 8)$$

پس تصوير بردار  $v$  روى  $u$  برابر  $(2, 8)$  است.

فرض كنيم بردار  $v = (6, 7)$  نمايشگر نيروى باشد كه بر يك جسم واقع در مبدا اثر مى‌كند. در اين صورت  $\text{proj}_u^v = (2, 8)$  مؤلفه‌اى از نيرو است كه در جهت بردار  $u = (1, 4)$  مى‌باشد. از نظر فيزيكى  $(2, 8)$  اثر اين نيرو در جهت بردار  $u$  مى‌باشد.

اينك روشى براى ساختن يك پايه يگه متعامد براساس يك پايه مفروض ارائه مى‌كنيم در اين روش از بردارهاى تصوير استفاده مى‌شود.

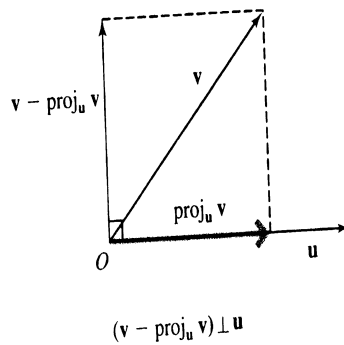


### ۱۳-۵ قضیه فرآیند گرام-اشمیت یکه متعامدسازی

فرض کنیم  $\{v_1, \dots, v_n\}$  پایه‌ای برای فضای برداری  $V$  باشد. مجموعه بردارهای  $\{u_1, \dots, u_n\}$  که به طریق ذیل تعریف می‌شوند متعامدند. برای به دست آوردن یک پایه یکه متعامد  $V$ ، هر یک از بردارهای  $u_1, \dots, u_n$  را یکه‌سازی می‌کنیم.

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= v_2 - \text{proj}_{u_1}^{v_2} \\ u_3 &= v_3 - \text{proj}_{u_1}^{v_3} - \text{proj}_{u_2}^{v_3} \\ &\vdots \\ u_n &= v_n - \text{proj}_{u_1}^{v_n} - \dots - \text{proj}_{u_{n-1}}^{v_n} \end{aligned}$$

برهان. اگر  $u$  و  $v$  بردارهایی در  $V$  باشند، آنگاه بنا بر جمع برداری  $v - \text{proj}_u^v$  بر  $u$  عمود است. شکل ۱۱-۵ ملاحظه شود. از این نتیجه برای اثبات قضیه استفاده می‌کنیم. ساختار بردار  $u_i$  را در نظر می‌گیریم. با تفریق  $\text{proj}_{u_1}^{v_i}$  از  $v_i$  برداری به دست می‌آید که  $u_1$  عمود است یا تفریق  $\text{proj}_{u_2}^{v_i}$  از بردار حاصله برداری به دست می‌دهد که بر  $u_2$  عمود است، در حالی که هنوز عمودیت بر  $u_1$  محفوظ می‌ماند و با ادامه این منجر به برداری مانند  $u_j$  می‌شود که بر هر یک از بردارهای قبلی  $u_1, u_2, \dots, u_{j-1}$  عمود است.



شکل ۱۱-۵

مثال ۴: مجموعه  $\{(1, 2, 0, 3), (4, 0, 5, 8), (8, 1, 5, 6)\}$  در  $\mathbb{R}^4$  مستقل خطی است. از این رو بردارها یک پایه برای یک زیرفضای سه-بعدی مانند  $V$  از  $\mathbb{R}^4$  تشکیل می‌دهند. یک پایه یکه متعامد برای  $V$  بسازید.

حل: فرض کنیم  $v_1 = (1, 2, 0, 3)$ ,  $v_2 = (4, 0, 5, 8)$  و  $v_3 = (8, 1, 5, 6)$ . اینک از فرایند گرام-اشمیت استفاده می‌کنیم و یک مجموعه‌ی یگانه متعامد  $\{u_1, u_2, u_3\}$  از این بردارها می‌سازیم.

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 = (1, 2, 0, 3) \\ u_2 &= v_2 - \text{proj}_{u_1}^{v_2} = v_2 - \frac{(v_2 \cdot u_1)}{u_1 \cdot u_1} u_1 \\ &= (4, 0, 5, 8) - \frac{(4, 0, 5, 8) \cdot (1, 2, 0, 3)}{(1, 2, 0, 3) \cdot (1, 2, 0, 3)} (1, 2, 0, 3) \\ &= (4, 0, 5, 8) - 2(1, 2, 0, 3) \\ &= (2, -4, 5, 2) \\ u_3 &= v_3 - \text{proj}_{u_1}^{v_3} - \text{proj}_{u_2}^{v_3} = v_3 - \frac{v_3 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 - \frac{v_3 \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 \\ &= (8, 1, 5, 6) - \frac{(8, 1, 5, 6) \cdot (1, 2, 0, 3)}{(1, 2, 0, 3) \cdot (1, 2, 0, 3)} (1, 2, 0, 3) \\ &\quad - \frac{(8, 1, 5, 6) \cdot (2, -4, 5, 2)}{(2, -4, 5, 2) \cdot (2, -4, 5, 2)} (2, -4, 5, 2) \\ &= (8, 1, 5, 6) - 2(1, 2, 0, 3) - 1(2, -4, 5, 2) \\ &= (4, 1, 0, -2) \end{aligned}$$

مجموعه  $\{(1, 2, 0, 3), (2, -4, 5, 2), (4, 1, 0, -2)\}$  یک مجموعه‌ی متعامد برای  $V$  است.

این واقعیت را که حاصل ضرب نقطه‌ای هر زوج از این بردارها برابر صفر است می‌توانید چک کنید.

اکنون نرم هر یک از این بردارها را محاسبه کرده و از آنجا بردارها را یگانه‌سازی کرده تا یک پایه متعامد

به‌دست آوریم. داریم:

$$\begin{aligned} \|(1, 2, 0, 3)\| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{14} \\ \|(2, -4, 5, 2)\| &= \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 5^2 + 2^2} = 7 \\ \|(4, 1, 0, -2)\| &= \sqrt{4^2 + 1^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{21} \end{aligned}$$

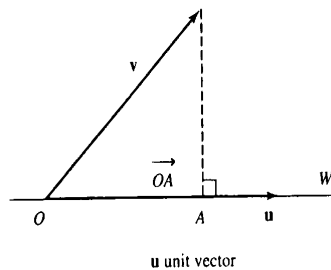
از این مقدارها استفاده کرده و بردارها را یگانه می‌کنیم، در نهایت به پایه یگانه متعامدی برای  $V$  دست می‌یابیم:

$$\left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, 0, \frac{3}{\sqrt{14}} \right), \left( \frac{2}{7}, -\frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{2}{7} \right), \left( \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{21}} \right) \right\}$$

## ۱۴-۵ تصویر یک بردار روی یک زیرفضا

تاکنون تصویر یک بردار را بر روی بردار دیگر تعریف کرده‌ایم. اینک این مفهوم را به تصویر یک بردار بر روی یک زیرفضا تعمیم می‌دهیم. از نظر شهودی، تصویر یک بردار روی یک زیرفضا مابین آن است که «چه مقدار» از یک بردار در آن زیرفضا واقع است.

فرض کنیم  $\vec{OA}$  تصویر بردار  $v$  روی بردار  $u$  در  $\mathbb{R}^n$  باشد. شکل ۱۲-۵ ملاحظه شود. فرض کنیم  $W$  زیرفضای یک بعدی  $\mathbb{R}^n$  باشد که متشکل از همه بردارهایی است که بر خط تعریف شده به وسیله  $u$  واقع‌اند. یادآوری می‌شود که تصویر  $v$  روی هر بردار دیگر  $u$  که در این زیرفضا واقع باشد همان  $\vec{OA}$  است. بنابراین می‌توانیم تصویر برداری بردار  $v$  روی زیرفضای  $W$  را، که با نماد  $\text{proj}_W^v$  نشان داده می‌شود، برابر  $\vec{OA}$  تعریف کنیم. ساده‌ترین بیان  $\vec{OA}$  وقتی به دست می‌آید که  $u$  را بردار



$$\text{proj}_W v = \vec{OA} = (v \cdot u)u$$

$u$  بردار واحد است.

$$\text{proj}_W^v = \vec{OA} = (v \cdot u)u$$

شکل ۱۲-۵

یکه اختیار کنیم. در این صورت به دست می‌آوریم

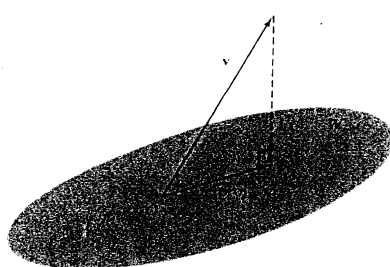
$$\text{proj}_W^v = \vec{OA} = (v \cdot u)u \quad (u \text{ یک بردار یکه})$$

هرگاه  $W$  زیرفضایی از بعد  $n$  بوده باشد، آنگاه این مفهوم تصویر را می‌توانیم به شکلی طبیعی تعمیم دهیم. تصویر  $v$  روی  $W$  ترکیبی خطی از بردارهایی یکه متعامد از  $W$  می‌باشد که در ذیل تعریف می‌گردد.

تعريف. فرض كنيم  $W$  زیرفضایی از  $\mathbb{R}^n$  (و یا فضای کلی  $V$ ) باشد. همچنین فرض کنیم  $\{u_1, \dots, u_n\}$  یک پایه یگه متعامد  $W$  باشد. هرگاه  $v$  برداری در  $\mathbb{R}^n$  ( $V$ ) باشد، تصویر  $v$  روی  $W$ ، که با  $\text{proj}_W^v$  نشان داده می‌شود، چنین تعريف می‌گردد.

$$\text{proj}_W^v = (v \cdot u_1)u_1 + (v \cdot u_2)u_2 + \dots + (v \cdot u_n)u_n$$

شکل ۱۳-۵ ملاحظه شود



$$\{u_1, \dots, u_m\} \text{ orthonormal basis for } W$$

$$\text{proj}_W v = (v \cdot u_1)u_1 + \dots + (v \cdot u_m)u_m$$

$\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  یک پایه یگه متعامد  $W$  است و

$$\text{proj}_W^v = (v \cdot u_1)u_1 + (v \cdot u_2)u_2 + \dots + (v \cdot u_n)u_n$$

شکل ۱۳-۵

گوییم بردار  $v$  بر زیرفضای  $W$  عمود است هرگاه  $v$  بر هر بردار  $W$  عمود باشد. قضیه بعدی مبین آن است که هرگاه  $v$  برداری در  $\mathbb{R}^n$  ( $V$ ) و  $W$  زیرفضایی از  $\mathbb{R}^n$  باشد، آنگاه می‌توانیم  $v$  را به صورت برداری واقع در  $W$  و برداری عمود بر  $W$  تجزیه کنیم و این حقیقی است که از نظر شهودی برای وقتی که  $V$  فضاهاى ملموس  $\mathbb{R}^n$  ( $n \leq 3$ ) است قابل ملموس می‌باشد.

**۱-۱۴-۵ قضیه.** فرض کنیم  $W$  زیرفضایی از  $\mathbb{R}^n$  باشد. هر بردار  $v$  در  $\mathbb{R}^n$  را می‌توان به صورتی

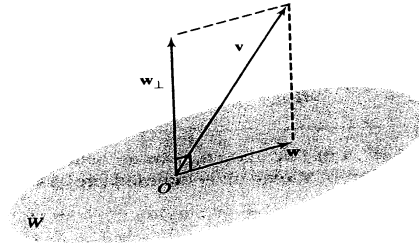
منحصر به فرد به شکل

$$v = w_1 + w_2$$

نوشت که در آن  $w_1 \in W$  و  $w_2$  بر  $W$  عمود است. بردارهای  $w_1$  و  $w_2$  عبارتند از:

$$w_1 = \text{proj}_W^v, \quad w_2 = v - \text{proj}_W^v$$

شکل ۱۴-۵ ملاحظه شود.



$$v = w + w_{\perp}, \text{ where} \\ w = \text{proj}_W v \text{ and } w_{\perp} = v - \text{proj}_W v$$

$$v = w_1 + w_2$$

$$w_1 = \text{proj}_W^v, \quad w_2 = v - \text{proj}_W^v$$

شکل ۱۴-۵

برهان. ملاحظه می‌کنیم که

$$w_1 + w_2 = \text{proj}_W^v + (v - \text{proj}_W^v)$$

به‌علاوه  $w_1$  در  $W$  است (چرا؟) باقی می‌ماند اثبات اینکه  $v - \text{proj}_W^v$  بر  $W$  عمود است. ابتدا نشان می‌دهیم که  $\text{proj}_W^v$  بر هر بردار پایه  $W$  عمود است. سپس به آسانی می‌توانیم نتیجه بگیریم که  $\text{proj}_W^v$  بر هر بردار دلخواه  $W$  عمود است، داریم:

$$\begin{aligned} u_j \cdot (v - \text{proj}_W^v) &= u_j \cdot (v - (v \cdot u_1)u_1 - \cdots - (v \cdot u_n)u_n) \\ &= u_j \cdot v - u_j \cdot (v \cdot u_1)u_1 - \cdots - u_j \cdot (v \cdot u_n)u_n \\ &= u_j \cdot v - (v \cdot u_1)u_j \cdot u_1 - \cdots - (v \cdot u_n)u_j \cdot u_n \\ &= u_j \cdot v - v \cdot u_j \quad \text{زیرا } u_j \cdot u_i = \delta_{ij} \\ &= 0 \end{aligned}$$

اکنون فرض کنیم  $w^\lambda = c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n$  برداری دلخواه از  $W$  باشد. داریم

$$w^\lambda \cdot (v - \text{proj}_W^v) = (c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n) \cdot (v - \text{proj}_W^v)$$

$$\begin{aligned}
 &= c_1 u_1 \cdot (v - \text{proj}_W^v) + \cdots + c_n u_n \cdot (v - \text{proj}_W^v) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

از اين رو  $v - \text{proj}_W^v$  بر  $W$  عمود است.

اثبات يكتايى تجزيه آسان بوده و به دانشجو واگذار مى شود.

**مثال ۵:** بردار  $v = (3, 2, 6)$  را در  $\mathbb{R}^3$  در نظر مى گيريم. فرض كنيم  $W$  زيرفضايى از  $\mathbb{R}^3$  متشكل از همه بردارهايى به صورت  $(a, b, b)$  باشد. بردار  $v$  را به صورت حاصل جمع بردارى در  $W$  و بردارى عمود بر  $W$  تجزيه كنيد.

**حل:** ابتدا محتاج يك پايه يگه متعامد از  $W$  هستيم. هر بردار دلخواه  $W$  را به صورت زير مى توانيم بنويسيم

$$(a, b, b) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 1)$$

مجموعه  $\{(1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$  زيرفضاى  $W$  را توليد کرده و مستقل خطى نيز مى باشد.

اين بردارها متعامدند. بردارها را نرمال کرده و به يك پايه يگه متعامد  $\{u_1, u_2\}$  براى  $W$  مى رسيم:

$$u_1 = (1, 0, 0), u_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

داريم

$$\begin{aligned}
 w_1 = \text{proj}_W^v &= (v \cdot u_1)u_1 + (v \cdot u_2)u_2 \\
 &= ((3, 2, 6) \cdot (1, 0, 0))(1, 0, 0) + ((3, 2, 6) \cdot \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right))\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
 &= (3, 0, 0) + (0, 4, 4) = (3, 4, 4)
 \end{aligned}$$

همچنين

$$w_2 = v - w_1 = (3, 2, 6) - (3, 4, 4) = (0, -2, 2)$$

در اين صورت تجزيه مطلوب  $v$  عبارت است از:

$$(3, 2, 6) = (3, 4, 4) + (0, -2, 2)$$

در اين تجزيه بردار  $(3, 4, 4)$  در  $W$  واقع بوده و بردار  $(0, -2, 2)$  بر  $W$  عمود است.

## ۱۵-۵ فاصله یک نقطه از یک زیرفضا

فاصله یک نقطه از نقطه‌ای دیگر را در  $\mathbb{R}^n$  مورد بررسی قرار داده‌ایم. اکنون قادریم تا فاصله یک نقطه از یک زیرفضا را در  $\mathbb{R}^n$  مورد بحث و بررسی قرار دهیم. فرض کنیم  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  نقطه‌ای در  $\mathbb{R}^n$  و  $W$  زیرفضایی از  $\mathbb{R}^n$  باشد. همچنین فرض کنیم  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  نقطه‌ای در  $W$  باشد. طبیعی‌ترین راه برای تعریف فاصله  $x$  از  $W$ ، که به  $d(\mathbf{x}, W)$  نشان داده می‌شود، آن است که آن را به‌عنوان مینیمم فاصله‌های  $\mathbf{x}$  از نقاط  $W$  بینگاریم.

$$d(\mathbf{x}, W) = \min\{d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \in W\}$$

اکنون سعی می‌کنیم فرمولی برای  $d(\mathbf{x}, W)$  بیابیم. می‌توانیم بنویسیم

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = (x \text{proj}_W^{\mathbf{x}}) + (\text{proj}_W^{\mathbf{x}} - \mathbf{y})$$

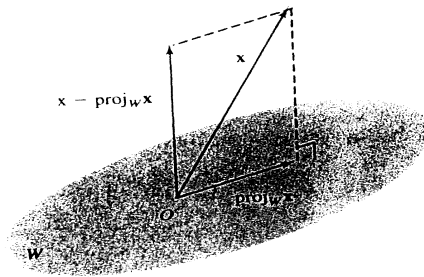
این عبارت تجزیه‌ای از بردار  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  به حاصل جمع بردار  $(x \text{proj}_W^{\mathbf{x}})$  که عمود بر  $W$  و بردار  $(\text{proj}_W^{\mathbf{x}} - \mathbf{y})$  که واقع در  $W$  است می‌باشد. از این رو بنابر قضیه فیثاغورس داریم

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|x \text{proj}_W^{\mathbf{x}}\|^2 + \|\text{proj}_W^{\mathbf{x}} - \mathbf{y}\|^2$$

بنابراین  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ ، که برابر  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  است، وقتی دارای مینیممی برابر  $\|x \text{proj}_W^{\mathbf{x}}\|$  است که  $\text{proj}_W^{\mathbf{x}} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$ ، یعنی، وقتی که  $\mathbf{y} = \text{proj}_W^{\mathbf{x}}$ ، لذا

$$d(\mathbf{x}, W) = \|x \text{proj}_W^{\mathbf{x}}\|$$

و این عبارت برای هر فضای برداری کلی‌تری مانند  $V$  نیز قابل تعریف است. به عبارت دیگر فاصله یک نقطه از یک زیرفضا همان فاصله آن نقطه از تصویر (بردار نقطه) در این زیرفضا است. شکل ۱۵-۵ ملاحظه شود.



Distance of  $\mathbf{x}$  from  $W$   
 $d(\mathbf{x}, W) = \|\mathbf{x} - \text{proj}_W \mathbf{x}\|$

فاصله  $\mathbf{x}$  از  $W$

$$d(\mathbf{x}, W) = \|\mathbf{x} - \text{proj}_W \mathbf{x}\|$$

شکل ۱۵-۵

مثال ۶: فاصله نقطه  $\mathbf{x} = (4, 1, -7)$  در  $\mathbb{R}^3$  را از زیرفضای  $W$  متشکل از بردارهای به فرم  $(a, b, b)$  پیدا کنید.

حل: از مثال قبلی می‌دانیم که مجموعه  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  که در آن

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0) \quad , \quad \mathbf{u}_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

یک پایه یگه متعامد برای  $W$  است. اکنون  $\text{proj}_W \mathbf{x}$  را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} \text{proj}_W \mathbf{x} &= (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 \\ &= ((4, 1, -7) \cdot (1, 0, 0))(1, 0, 0) + ((4, 1, -7) \cdot (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}))(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ &= (4, 0, 0) + (0, -3, -3) = (4, -3, -3) \end{aligned}$$

بنابراین

$$\|\mathbf{x} - \text{proj}_W \mathbf{x}\| = \|(4, 1, -7) - (4, -3, -3)\| = \|(0, 4, -4)\| = \sqrt{32}$$

در نتیجه فاصله  $\mathbf{x}$  از  $W$  برابر  $\sqrt{32}$  است.

قبل از این ملاحظه کردیم که وقتی نگاهمان را به ماتریس‌ها به شکلی از ستون‌ها و یا سطرها تشکیل شده‌اند تعبیر می‌کنیم به مفهوم مهم رتبه ماتریس دست یازیدیم. اکنون رده مهمی از ماتریس‌ها را معرفی



می‌کنیم که ستون‌ها و سطرهای آنها تشکیل مجموعه‌های یگه متعامد می‌دهند. خواهیم دید که این‌گونه ماتریس‌ها نقش محاسباتی مهمی ایفا می‌کنند. در فصل بعدی ملاحظه خواهیم کرد که این‌گونه ماتریس‌ها خواص هندسی ویژه‌ای داشته و برای تعریف توابع بر یک فضای برداری به‌کار می‌آیند.

## ۱۶-۵ ماتریس‌های متعامد

تعریف. یک ماتریس مربعی را که ستون‌های آن تشکیل یک مجموعه یگه متعامد می‌دهند یک ماتریس متعامد می‌نامیم.

مثال ۷: نشان دهید که ماتریس  $A$  یک ماتریس متعامد است

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

حل: بردارهای ستونی  $A$  عبارتند از:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

ملاحظه می‌کنیم که

$$\|\mathbf{u}_1\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

$$\|\mathbf{u}_2\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

بنابراین بردارهای ستونی  $A$  بردارهایی یگه بوده و متعامد هستند. در نتیجه  $A$  یک ماتریس متعامد است. اینک چهار ویژگی مهم ماتریس‌های متعامد را شرح می‌دهیم.

### ۱-۱۶-۵ قضیه. فرض کنیم $A$ یک ماتریس متعامد باشد. در این صورت

(۱) بردارهای سطری  $A$  تشکیل یک مجموعه یگه متعامد می‌دهند.

(۲)  $A^{-1} = A^t$  وارون پذیر است که در آن

(۳)  $A^{-1}$  نیز یک ماتریس متعامد است.

(۴)  $|A| = \pm 1$

برهان. ابتدا قسمت (۲) را ثابت مى‌کنیم. قسمت‌هاى ديگر از آن حاصل مى‌شود.

(۲) حاصل ضرب  $P = A^t A$  را در نظر مى‌گیریم. محاسبه این حاصل ضرب مستلزم محاسبه ضرب نقطه‌اى هر سطر  $A^t$  در ستون‌هاى ماتریس  $A$  مى‌باشد. چون سطرهاى  $A^t$  همان ستون‌هاى  $A$  هستند، و این سطرهاى یک مجموعه یگه متعامدند، نتیجه مى‌گیریم که  $p_{ij} = 1$  هرگاه  $i = j$  و  $p_{ij} = 0$  هرگاه  $i \neq j$ . لذا  $A^t A = I$ ، که  $I$  ماتریس همانى است.

فرض کنیم  $A$  یک ماتریس  $n \times n$  باشد، چون ستون‌هاى  $A$  یک مجموعه یگه متعامدند، این ستون‌ها مستقل خطى بوده و از این رو رتبه  $A$  برابر  $n$  است. در نتیجه  $A^{-1}$  وجود دارد. حاصل ضرب دو طرف  $A^t A = I$  را در  $A^{-1}$  ضرب مى‌کنیم و  $A^t = A^{-1}$  به دست مى‌آید.

(۱) چون  $AA^{-1} = I$  و  $A^{-1} = A^t$ ، پس  $AA^t = I$ . از این نتیجه مى‌شود که بردارهاى سطرى  $A$  تشکیل یک مجموعه متعامد مى‌دهند.

(۳) چون بردارهاى سطرى  $A$  تشکیل یک مجموعه یگه متعامد مى‌دهند. ستون‌هاى  $A^t$  نیز یک مجموعه یگه متعامد هستند. بنابراین  $A^t$  یک ماتریس متعامد است، يعنى  $A^{-1}$  یگه متعامد است.

(۴) چون  $AA^t = I$ ، از ویژگی‌هاى دترمینان‌ها به دست مى‌آید که

$$|AA^t| = 1, \quad |A||A^t| = 1, \quad |A||A| = 1, \quad |A|^2 = 1$$

در نتیجه  $|A| = \pm 1$ .

### ۲-۱۶-۵ تمرین

(۱) کدامیک از دسته بردارهاى زیر یک مجموعه متعامد است؟

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} \{(1, 2), (2, -1)\} & \text{ب)} \{(3, -1), (0, 5)\} \\ \text{ج)} \{(0, -2), (3, 0)\} & \text{د)} \{(4, 1), (2, -3)\} \end{array}$$

(۲) کدامیک از دسته بردارهاى زیر یک مجموعه متعامد است؟

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} \{(1, 2, 1), (4, -2, 0), (2, 4, -1, 0)\} & \\ \text{ب)} \{(3, -1, 1), (2, 0, 1), (1, 1, -2)\} & \\ \text{ج)} \{(1, 4, 2), (-2, -1, 3), (6, -1, -1)\} & \\ \text{د)} \{(1, 2, -1, 1), (3, 1, 4, -1), (0, 1, -1, -3)\} & \end{array}$$

۳) کدامیک از مجموعه‌های زیر یک مجموعه یگانه متعامد است؟

الف)  $\left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$

ب)  $\left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}} \right), \left( \frac{-2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}} \right) \right\}$

ج)  $\left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{4}}, 0, \frac{1}{\sqrt{4}} \right), \left( \frac{1}{\sqrt{4}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{4}} \right), (0, 1, 0) \right\}$

د)  $\left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right), (0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}), \left( \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}} \right) \right\}$

۴) بردارهای  $u_1, u_2, u_3$  و  $v$  مشروح در ذیل یک پایه یگانه متعامد  $\mathbb{R}^3$  می‌باشند. بردار  $v = (2, -3, 1)$  را به صورت ترکیبی خطی از این بردارها بنویسید.

$$u_1 = (0, -1, 0), \quad u_2 = \left( \frac{2}{5}, 0, -\frac{4}{5} \right), \quad u_3 = \left( \frac{4}{5}, 0, \frac{2}{5} \right)$$

۵) بردارهای  $u_1, u_2, u_3$  و  $v$  ذیل یک پایه یگانه متعامد  $\mathbb{R}^3$  هستند. بردار  $v = (7, 5, -1)$  را به صورت ترکیبی از بردارها بنویسید.

$$u_1 = (1, 0, 0), \quad u_2 = \left( 0, \frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{4}} \right), \quad u_3 = \left( 0, \frac{1}{\sqrt{4}}, -\frac{1}{\sqrt{4}} \right)$$

۶) تصویر بردار  $v$  را روی بردار  $u$  در هر مورد پیدا کنید.

الف)  $u = (1, 2)$  و  $v = (7, 4)$

ب)  $u = (3, -2)$  و  $v = (-1, 5)$

ج)  $u = (1, 2, 3)$  و  $v = (4, 6, 4)$

د)  $u = (-1, 3, 0)$  و  $v = (6, -8, 7)$

۷) تصویر بردار  $v$  را روی بردار  $u$  در هر مورد پیدا کنید.

الف)  $u = (2, 5)$  و  $v = (1, 2)$

ب)  $u = (2, 4)$  و  $v = (-1, 3)$

ج)  $u = (-1, 3, 2)$  و  $v = (1, 2, 3)$

۸) بردارهای زیر یک پایه  $\mathbb{R}^2$  هستند. با استفاده از فرایند گرام-اشمیت از این بردارها یک مجموعه یگانه متعامد برای  $\mathbb{R}^2$  بسازید.

الف)  $(-1, 3)$  و  $(1, 2)$       ب)  $(6, 2)$  و  $(1, 1)$   
 ج)  $(4, -2)$  و  $(1, -1)$

۹) بردارهای زیر یک پایه  $\mathbb{R}^3$  هستند. با استفاده از فرایند گرام-اشمیت از این بردارها یک مجموعه یگانه متعامد بسازید.

الف)  $(1, 1, 1), (2, 0, 1), (2, 4, 5)$

ب)  $(3, 2, 0), (1, 5, -1), (5, -1, 2)$

۱۰) یک پایه یگانه متعامد برای زیرفضای  $\mathbb{R}^3$  که با بردارهای زیر تولید می‌شود بسازید.

الف)  $(1, 0, 2), (-1, 0, 1)$

ب)  $(1, 2, -1), (1, -1, 1)$

۱۱) یک پایه یگانه متعامد برای زیرفضایی از  $\mathbb{R}^3$  که توسط بردارهای زیر تولید می‌شود، بسازید.

الف)  $(1, 2, 3, 4)$  و  $(-1, 1, 0, 1)$

ب)  $(0, -1, 3, 2)$  و  $(0, 1, 2, 1), (3, 0, 0, 0)$

۱۲) برداری در  $\mathbb{R}^4$  ارائه دهید که بر بردار  $(1, 2, -1, 1)$  عمود باشد.

۱۳) برداری در  $\mathbb{R}^4$  ارائه دهید که بر بردار  $(2, 0, 1, 1)$  عمود باشد.

۱۴) فرض کنیم  $W$  زیرفضایی از  $\mathbb{R}^3$  باشد که دارای پایه  $(1, 1, 2)$  و  $(0, -1, 3)$  می‌باشد. تصویر بردارهای زیر را بر  $W$  بیابید.

الف)  $(3, -1, 2)$       ب)  $(1, 1, 1)$       ج)  $(4, 2, 1)$

۱۵) فرض کنیم  $W$  زیرفضایی از  $\mathbb{R}^4$  باشد که دارای پایه  $(-1, 0, 2, 1)$  و  $(1, -1, 0, 3)$  می‌باشد.

تصویر بردارهای زیر را بر  $W$  بیابید. الف)  $(1, -1, 1, -1)$       ب)  $(2, 0, 1, -1)$       ج)

$(3, 2, 1, 0)$

۱۶) بردار  $v = (1, z, -1)$  را در  $\mathbb{R}^3$  در نظر می‌گیریم. فرض کنیم  $V$  زیرفضایی از  $\mathbb{R}^3$  باشد که از

بردارهایی به فرم  $(a, a, b)$  تشکیل می‌شود.  $v$  را به صورت حاصل جمع برداری در  $V$  و برداری عمود

بر  $V$  بنویسید (تجزیه کنید).

(۱۷) بردار  $v = (4, 1, -2)$  را در  $\mathbb{R}^3$  در نظر می‌گیریم. فرض کنیم  $V$  زیرفضایی از  $\mathbb{R}^3$  باشد که متشکل از بردارهایی به فرم  $(a, 2a, b)$  است.  $v$  را به صورت حاصل جمع برداری در  $V$  و برداری عمودی بر  $V$  بنویسید.

(۱۸) فاصله نقطه  $x = (1, 3, -2)$  در  $\mathbb{R}^3$  را از زیرفضای  $W$  مشتمل بر همه بردارهایی به فرم  $(a, a, b)$  پیدا کنید.

(۱۹) فاصله نقطه  $x = (2, 4, -1)$  از  $\mathbb{R}^3$  را از زیرفضای  $W$  مشتمل بر همه بردارهایی به فرم  $(a, -2a, b)$  پیدا کنید.

(۲۰) فاصله نقطه  $x = (1, 3, -2)$  از  $\mathbb{R}^3$  را از زیرفضای مشتمل بر همه بردارهایی به فرم  $(a, 2a, 3a)$  پیدا کنید (فاصله یک نقطه از یک خط).

(۲۱) یک پایه متعامد برای  $\mathbb{R}^3$  پیدا کنید که مشتمل بر بردارهای  $(1, 2, -2)$  و  $(6, 1, 4)$  باشد.

(۲۲) فرض کنیم  $\{u_1, \dots, u_n\}$  یک پایه یک متعامد برای فضای برداری  $V$  باشد. همچنین فرض کنیم  $v \in V$ . نشان دهید که  $\|v\|$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\|v\| = \sqrt{(v \cdot u_1)^2 + (v \cdot u_2)^2 + \dots + (v \cdot u_n)^2}$$

(۲۳) فرض کنیم  $\{u_1, \dots, u_n\}$  یک مجموعه یک متعامد  $V$  باشد. ثابت کنید که این مجموعه یک پایه  $V$  است.

(۲۴) فرض کنیم  $u$  و  $v$  بردارهایی در  $\mathbb{R}^n$  ( $V$ ) باشند. در برهان قضیه گرام-اشمیت گفته شد که  $v - \text{proj}_u^v$  بر  $u$  عمود است. با نشان دادن اینکه

$$(v - \text{proj}_u^v) \cdot u = 0$$

و استفاده از تعریف  $\text{proj}_u^v$  این حقیقت را رسماً ثابت کنید.

(۲۵) ثابت کنید ماتریس‌های زیر ماتریس‌های متعامد هستند:

$$\begin{array}{l} \text{الف)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{ب)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{ج)} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \\ \text{د)} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \end{array}$$

۲۶) ماتریس‌های زیر متعامد هستند. ثابت کنید این ماتریس‌ها همه ویژگی‌های مندرج در قضیه ص ۲۷ را دارا هستند؛

$$\begin{array}{l} \text{الف)} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ \text{ب)} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

۲۷) فرض کنیم  $A$  و  $B$  ماتریس‌های متعامد و از یک اندازه باشند. ثابت کنید ماتریس  $AB$  نیز متعامد است.

۲۸) فرض کنیم  $\mathbf{u}$  یک ماتریس یکه باشد.  $\mathbf{u}$  را به صورت یک ماتریس ستونی در نظر می‌گیریم. نشان دهید  $A = I - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^t$  متعامد است.

۲۹) ثابت کنید ماتریس  $A$  متعامد است اگر و فقط اگر  $A^{-1} = A^t$ .

۳۰) ماتریس مختلط  $A$  را یک ماتریس یکانی<sup>۱)</sup> نامیم هرگاه

$$A^{-1} = \bar{A}^t$$

این تعریف تعمیم مفهوم ماتریس متعامد در فضای مختلط می‌باشد (چرا؟).

ثابت کنید هرگاه  $A$  یکانی باشد،  $A^{-1}$  نیز یکانی است.

۳۱) ثابت کنید ماتریس  $A$  یکانی است اگر و فقط اگر ستون‌های آن مجموعه‌ای از بردارهای یکه بوده که دوجه دو متعامدند.

### ۳-۱۶-۵ تمرین‌های دوره‌ای فصل ۵

۱) مجموعه بردارهایی به فرم دبل را (در هر مورد) در نظر می‌گیریم. تعیین کنید که کدام مجموعه زیرفضای

$\mathbb{R}^2$  است.

1) unitary matrix

(الف)  $(a, b, a - 2)$  (ب)  $(a, -2a, 3a)$   
 (ج)  $(a, b, 2a - 3b)$

۲) کدامیک از زیرمجموعه‌های زیر از  $\mathbb{R}^3$  زیرفضا هستند؟ مجموعه همه‌ی بردارهایی به فرم  $p(1, 2, 3)$  که در آن  $p$  عبارت است از:

(الف) یک عدد حقیقی (ب) یک عدد صحیح  
 (ج) یک عدد حقیقی نامنفی (د) یک عدد گویا

۳) کدامیک از زیرمجموعه‌های زیر از  $M_{2 \times 2}$  تشکیل زیرفضا می‌دهند؟

(الف) زیرمجموعه‌ای که شامل قطر اصلی با درایه‌های غیرصفر است.

(ب) زیرمجموعه‌ای مشتمل بر ماتریس‌هایی که حاصل جمع درایه‌های آن صفر است.

(برای مثال  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$  چنین ماتریسی می‌باشد).

(ج) زیرمجموعه‌ای مشتمل بر ماتریس‌هایی به فرم  $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & c \end{bmatrix}$ .

(د) زیرمجموعه‌ای از ماتریس‌های به فرم  $\begin{bmatrix} a & 3 \\ b & c \end{bmatrix}$ .

(ه) زیرمجموعه‌ای از ماتریس‌های  $2 \times 2$  که درترمینان آن‌ها برابر صفر است.

۴) فرض کنیم  $S$  مجموعه همه تابع‌هایی به فرم  $f(x) = 3x^2 + ax - b$  باشد، که در آن  $a$  و  $b$  اعدادی حقیقی‌اند. آیا  $S$  یک زیرفضای  $P_2$  است؟

۵) آیا شرط آنکه یک زیرمجموعه از یک فضای برداری شامل بردار صفر باشد یک شرط لازم و کافی برای زیرفضا بودن آن زیرمجموعه است؟

۶) در هر مورد از مجموعه بردارهای زیر، تعیین کنید که آیا بردار نخست ترکیبی خطی از مابقی بردارها است.

(الف)  $(1, 2, 3)$ ،  $(-2, 4, 1)$  و  $(0, 6, 4)$

(ب)  $(-2, 1, 0)$ ،  $(1, 2, -1)$  و  $(-1, 8, -3)$

۷) نشان دهید که  $f(x) = 13x^2 + 8x - 2$  ترکیبی خطی از  $g(x) = 2x^2 + x - 3$  و  $h(x) = -3x^2 - 2x + 5$  است.

۸) در هر مورد تعيين كنيد كه مجموعه بردارهاى داده شده وابسته خطى يا مستقل خطى اند.

$$\text{الف) } \{(2, 0, 12), (0, 1, 3), (1, -2, 0)\}$$

$$\text{ب) } \{(-1, 18, 7), (-1, 4, 1), (1, 3, 2)\}$$

$$\text{ج) } \{(5, -1, 3), (2, 1, 0), (3, -2, 2)\}$$

۹) ثابت كنيد كه مجموعه بردارهاى يك پايه براى  $\mathbb{R}^2$  يا  $\mathbb{R}^3$  است.

$$\text{الف) } \{(-1, 2), (3, 1)\}$$

$$\text{ب) } \{(4, 2), (1, -1)\}$$

$$\text{ج) } \{(1, 2, 3), (-1, 0, 5), (0, 2, 7)\}$$

$$\text{د) } \{(8, 1, 0), (4, -1, 3), (5, 2, -3)\}$$

۱۰) نشان دهيد كه بردار  $(10, 9, 8)$  در فضاى بردارى توليد شده به وسيله  $\{(0, 1, 3, 1), (4, 1, 2)\}$  قرار دارد.

۱۱) نشان دهيد كه توابع  $f(x) = 2$ ,  $g(x) = -3x$  و  $h(x) = -x^2$  توليدكننده  $P_2$  هستند.

۱۲) يك پايه براى  $\mathbb{R}^3$  پيدا كنيد كه شامل بردارهاى  $(1, -2, 3)$  و  $(4, 1, -1)$  باشد.

۱۳) پايه اى براى زیرفضايى از  $\mathbb{R}^4$  پيدا كنيد كه شامل بردارهايى به فرم  $(a, b, c, a - 2b + 3c)$  باشد.

۱۴) يك پايه براى فضاى بردارى ماتريس هاى بالا مثلثى  $3 \times 3$  پيدا كنيد.

۱۵) نشان دهيد  $\{x^2 + 2x - 3, 3x^2 + 2 - 1, 4x^2 + 3x - 3\}$  يك پايه  $P_2$  است.

۱۶) رتبه ماتريس هاى زير را پيدا كنيد.

$$\text{ب) } \begin{bmatrix} -2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 \\ 4 & -8 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\text{الف) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{ج) } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$



- ۱۷) فرض کنیم  $v$  ترکیبی خطی از  $v_1$  و  $v_2$  باشد. همچنین فرض کنیم  $v_3$  برداری دیگر در همان فضای  $v_1$  و  $v_2$  باشد. نشان دهید که  $v$  ترکیبی خطی از  $v_1, v_2, v_3$  نیز می‌باشد.
- ۱۸) فرض کنیم  $\{v_1, v_2, v_3\}$  در  $V$  مستقل خطی باشد. ثابت کنید که هر یک از زیرمجموعه‌های زیر نیز مستقل خطی است.

$$\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}$$

این مسأله را تعمیم دهید.

- ۱۹) فرض کنیم  $\{v_1, v_2\}$  وابسته خطی باشد. ثابت کنید  $\{v_1 - v_2, 2v_2, 3v_1 + v_2\}$  نیز وابسته خطی است.

۲۰) با توضیحی مختصر تعیین کنید که احکام ذیل درست یا نادرست‌اند.

- الف)  $\{(1, 0, 1), (2, 1, 5)\}$  یک پایه برای زیرفضایی از  $\mathbb{R}^3$  متشکل از بردارهایی به فرم  $(a, b, a + 3b)$  است.

ب) سه بردار مستقل خطی در  $\mathbb{R}^3$  وجود دارد.

ج) هر مجموعه از سه بردار  $\mathbb{R}^3$  که مستقل خطی باشند این فضا را تولید می‌کنند.

د) هر دو بردار غیرصفر  $\mathbb{R}^2$  که پایه تشکیل ندهند هم خطی هستند.

- ه) فرض کنیم  $v_1, v_2, v_3$  سه بردار در  $\mathbb{R}^3$  باشند که به صورت تصادفی انتخاب می‌شوند. این بردارها احتمالاً وابسته خطی هستند.

- ۲۱) فرض کنیم  $V$  فضای برداری از بعد  $n$  باشد. تعیین کنید که کدام حکم درست و کدامیک نادرست است.

الف)  $n$  بزرگترین عددی از تعداد بردارهای وابسته خطی است.

ب)  $n$  برابر بزرگترین عددی از تعداد بردارهای مستقل خطی است.

ج) هیچ تعداد کمتری از  $n$  بردار مولد  $V$  نمی‌باشد.

د) هر مجموعه متشکل از بیش از  $n$  بردار باید وابسته خطی باشد.

ه) هر مجموعه با بیش از  $n$  بردار می‌تواند  $V$  را تولید کند اما وابسته خطی نمی‌باشد.

(۲۲) ثابت کنید ماتریس  $n \times n$   $A$  هم‌ارز سطری  $I_n$  است اگر و فقط اگر  $\text{rank}(A) = n$ .

(۲۳) تصویر بردار  $v$  را بر بردار  $u$  در هر مورد پیدا کنید.

الف)  $\mathbf{v} = (1, 3)$  و  $\mathbf{u} = (2, 4)$

ب)  $\mathbf{v} = (-1, 3, 4)$  و  $\mathbf{u} = (-1, 2, 4)$

(۲۴) یک پایه یگه متعامد برای زیرفضای  $\mathbb{R}^4$  که به وسیله  $(-1, 2, 3, -1)$ ،  $(2, 0, -1, 1)$  و  $(3, 2, 0, 1)$  تولید می‌شود بسازید.

(۲۵) یک پایه یگه متعامد برای زیرفضایی از  $\mathbb{R}^3$  متشکل از بردارهایی به فرم  $(x, y, x + 2y)$  بسازید.

(۲۶) فرض کنیم  $W$  زیرفضایی از  $\mathbb{R}^3$  باشد که دارای پایه  $\{(1, -1, 3), (2, 1, 1)\}$  است. تصویر بردار  $(3, 1, -2)$  را روی  $W$  بیابید.

(۲۷) فاصله نقطه  $(1, 2, -4)$  را از زیرفضای بردارهایی به فرم  $(a, 3a, b)$  پیدا کنید.

(۲۸) ثابت کنید یک ماتریس مربعی  $A$  متعامد است اگر و فقط اگر  $A^t$  متعامد باشد.

(۲۹) بردار  $v = (1, 3, -1)$  را در  $\mathbb{R}^3$  در نظر می‌گیریم. فرض کنیم  $W$  زیرفضای  $\mathbb{R}^3$  متشکل از بردارهای  $(a, b, a - 2b)$  باشد.  $v$  را به صورت حاصل جمع برداری در  $W$  و برداری عمود بر  $W$  بنویسید.

(۳۰) ثابت کنید که هرگاه دو بردار  $u$  و  $v$  متعامد باشند، مستقل خطی هستند.

(۳۱) ثابت کنید هرگاه  $u$  بر دو بردار  $v$  و  $w$  عمود باشند، بر بردار واقع در زیرفضای تولید شده به وسیله  $v$  و  $w$  نیز عمود است.

## ۱۷-۵ مسأله‌های مختلفه فصل پنج

(۱) فرض کنیم  $V$  یک فضای برداری و  $U_1$  و  $U_2$  دو زیرفضای  $V$  باشند. حاصل جمع  $U_1$  و  $U_2$ ، که با نماد  $U_1 + U_2$  نشان داده می‌شود، چنین تعریف می‌گردد

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$$

ثابت کنید  $U_1 + U_2$  نیز یک زیرفضای  $V$  است و  $U_i \subset U_1 + U_2$ ،  $(i = 1, 2)$ .

(۲) تعریف گفته شده در مسئله (۱) را برای وقتی که  $n$  زیرفضای  $V$ ، یعنی  $U_1, U_2, \dots, U_n$  در دست است تعمیم دهید. سپس ثابت کنید که  $U_1 + U_2 + \dots + U_n$  کوچکترین زیرفضایی از  $V$  است که همه  $U_i$ ها را در بردارد.

(۳) (تعریف) فرض کنیم  $U_1, U_2, \dots, U_n$  و  $n$  زیرفضای  $V$  باشند و

$$V = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

بنابراین هر عنصر  $V$  را می‌توان به فرم

$$u_1 + \dots + u_n$$

نوشت که  $u_j \in U_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ).

تعریف. هرگاه  $V = U_1 + \dots + U_n$

و هر بردار  $v$  مانند  $v$  را به شکل منحصر به فردی به صورت

$$v = u_1 + \dots + u_n$$

بتوان نوشت که در آن  $u_j \in U_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) می‌گوییم  $V$  حاصل جمع مستقیم زیرفضاهای  $U_1, \dots, U_n$  است و می‌نویسیم

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n$$

(۴) فرض کنیم

$$U = \{(x, y, 0) | x, y \in \mathbb{R}\}, \quad V = \{(0, 0, z) | z \in \mathbb{R}\}$$

ثابت کنید که

$$\mathbb{R}^3 = U \oplus V$$

(۵) فرض کنیم  $U$  و  $W$  دو زیرفضای  $V$  باشند. ثابت کنید  $V = U \oplus W$  اگر و فقط اگر  $V = U + W$  و  $U \cap W = \{0\}$ .

(۶) از احکام ذیل آنهایی را که فکر می‌کنید درست‌اند ثابت کنید و آنهایی را که فکر می‌کنید نادرست‌اند با مثال نقض رد کنید.

الف) فرض کنیم  $W$ ،  $U_1$  و  $U_2$  زیرفضاهای  $V$  باشند به قسمی که

$$U_1 + W = U_2 + W$$

در این صورت  $U_1 = U_2$ .

ب) فرض کنیم  $U$  زیرفضایی از  $P(R)$  (فضای چندجمله‌ای‌ها روی  $\mathbb{R}$ ) متشکل از همه چندجمله‌ای‌هایی به فرم

$$p(z) = az^2 + bz^5$$

باشد که  $a, b \in R$ . زیرفضایی مانند  $W$  از  $P(R)$  هست به قسمی که

$$P(R) = U \oplus W$$

ج) فرض کنیم  $U_1, U_2$  و  $W$  زیرفضاهای  $V$  باشند به قسمی که

$$V = U_1 \oplus W \quad , \quad V = U_2 \oplus W$$

در این صورت  $U_1 = U_2$ .

۷) فرض کنیم  $U$  و  $W$  زیرفضاهایی از  $\mathbb{R}^8$  باشند به قسمی که  $\dim U = 3$ ،  $\dim W = 5$  و

$$U + W = \mathbb{R}^8 \quad . \quad U \cap W = \{0\}$$

۸) فرض کنیم  $U$  و  $W$  هر دو زیرفضای  $\mathbb{R}^9$  و از بعد ۵ باشند. ثابت کنید

$$U \cap W \neq \{0\}$$

۹) هرگاه  $U_1$  و  $U_2$  زیرفضاهایی از  $V$  با بعد متناهی باشند، آنگاه

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$

۱۰) مسأله ۸ را تعمیم دهید.

۱۱) مسأله ۸ را برای وقتی که  $+$  را با  $\oplus$  جایگزین کنیم، بیان و اثبات کنید.

## هدف‌های آموزشی-رفتاری

خواننده بعد از مطالعه‌ی این فصل باید بتواند:

- (۱) تعاریف را دانسته و چگونگی محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را بلد باشد.
- (۲) توصیفی هندسی از رابطه‌ی  $Ax = \lambda x$  را برای  $\lambda$  حقیقی و  $\lambda$  موهومی ارائه دهد.
- (۳) دلیل یکی بودن مقادیر ویژه نگاشت خطی نسبت به هر پایه دلخواه را تحلیل کند.
- (۴) صورت کلی معادله‌ی مفسر و دلیل درستی آن را بیان کند.
- (۵) زیرفضای ویژه‌ی هر مقدار ویژه را تحلیل و توصیف کند.
- (۶) نوع عمل ماتریس حقیقی  $2 \times 2$  با مقادیر ویژه مختلط را روی بردار ویژه شرح دهد.
- (۷) قضایای گرشگورین را به کار برده و آنها را ثابت کند.
- (۸) به سرعت مقادیر ویژه ماتریس‌های اسکالر، قطری، بالا مثلثی و پایین مثلثی را ارائه دهد.
- (۹) اثبات کند که شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیری مخالف صفر بودن همه‌ی مقادیر ویژه است.
- (۱۰) همراه با دلیل بیان کند که مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های  $A^{-1}$ ،  $A^t$ ،  $KA$ ،  $A^m$  و  $A + mI$  را از روی مقادیر ویژه‌ی  $A$  به دست می‌آیند و در هر حال فرمول مقدار ویژه مطلوب را ارائه کرده بردار ویژه را مشخص کند.
- (۱۱) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس  $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$  را ارائه دهد.
- (۱۲) با دلیل بیان کند که چرا هم علامت بودن  $b$  و  $c$  در ماتریس  $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$  وجود مقادیر ویژه حقیقی متمایز را نتیجه می‌دهد.
- (۱۳) فرمولی برای زاویه بین راستای بردارهای ویژه ماتریس  $2 \times 2$  ارائه دهد.
- (۱۴) وجود مقادیر ویژه حقیقی برای هر ماتریس متقارن و عمود بودن بردارهای ویژه را برای این ماتریس‌ها ثابت کند.
- (۱۵) بردارهای ویژه ماتریس‌های قطری و اسکالر را بشناسد.
- (۱۶) همراه با دلیل بیان کند که اگر مجموع درایه‌های هر سطر یا ستون ماتریس مساوی  $s$  باشد یکی از مقادیر ویژه برابر  $s$  است.

- (۱۷) مقادیر ویژه ماتریس‌های قطر فرعی از مرتبه‌ی فرد را به سرعت ارائه دهد.
- (۱۸) چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس‌های بلوکی مثلثی را به دست آورد.
- (۱۹) دلایل برابری مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های  $AB$  و  $BA$  را بیان کند.
- (۲۰) ارتباطی بین چندجمله‌ای‌های مشخصه‌ی  $AB$  و  $BA$  به دست آورد.
- (۲۱) ماتریس همراه هر چندجمله‌ای دلخواه را به دست آورد.
- (۲۲) چندگانگی هندسی و جبری مقادیر ویژه و نامساوی بین آنها را همراه با دلیل ارائه دهد.
- (۲۳) قضیه‌ی کیلی-هامیلتون را بیان و اثبات کرده و آن را در پیدا کردن وارون ماتریس‌ها مورد استفاده قرار دهد.
- (۲۴) روشی را برای محاسبه‌ی  $A^k X$  بیان کند.
- (۲۵) توضیح دهد چگونه از مفهوم مقدار ویژه و بردار ویژه در جمعیت‌شناسی و پیش‌بینی هوا استفاده می‌شود.
- (۲۶) از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه در حل معادلات تفاضلی مرتبه اول استفاده کند.
- (۲۷) ماتریس‌های متشابه را تعریف و طریقه قطری کردن ماتریس‌ها را همراه با شرایط لازم بیان کند.
- (۲۸) از قطری کردن ماتریس‌ها در توان رساندن ماتریس‌ها استفاده کند.
- (۲۹) قطری‌سازی متعامد را تشریح کند.
- (۳۰) کاربرد قطری کردن را در شناخت نوع مقاطع مخروطی شرح دهد.

## فصل ششم

# مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه از مفیدترین عناوین جبرخطی بوده، در بسیاری از سطوح ریاضیات مانند فیزیک، مکانیک، مهندسی الکترونیک، فیزیک اتمی، هیدرودینامیک و آئرودینامیک استفاده می‌شوند. در واقع بعید است بتوان شاخه‌ای کاربردی از علوم یافت که در آن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه هرگز مورد استفاده واقع نشوند. هر چند شاید عجیب به نظر آید مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌ها قبل از ماتریس‌ها مطرح شده است، زیرا به تعبیر کیلی<sup>۱</sup> بعید است که تئوری ماتریس‌ها (از خلال تئوری دترمینان‌ها) قبل از آنکه تعریف شده باشند توسعه یافته مقادیر ویژه تعریف شده باشند. بنا به نظریه‌ی موریس کلاین<sup>۲</sup> مقادیر ویژه اساساً در مفهوم فرم‌های درجه دوم و مکانیک عالی (حرکت سیارات) ارائه شده به‌عنوان ریشه‌های مشخصه‌ی معادله‌ی عام شناخته شده‌اند. قبل از آن در سال ۱۷۴۰ اوایلر<sup>۳</sup> به صراحت مقادیر ویژه را برای توصیف هندسی فرم‌های درجه دوم سه متغیره به‌کار برد. در سال ۱۷۶۰ لاگرانژ<sup>۴</sup> دستگاهی از شش معادله دیفرانسیل را برای حرکت شش سیاره مطالعه کرده از آن معادله‌ای چندجمله‌ای و از درجه‌ی شش به‌دست آورد که ریشه‌های آن مقادیر ویژه‌ی ماتریسی  $6 \times 6$  بودند. کوشی<sup>۵</sup> در سال ۱۸۲۰ به اهمیت مقادیر ویژه در تعیین محورهای اصلی و فرعی یک فرم  $n$ -متغیره درجه دوم پی برد. وی همچنین از کشفیات خود در تئوری حرکت سیارات استفاده کرد. اولین کسی که عبارات «مقادیر مشخصه» و «معادله‌ی مشخصه» را برای مقادیر ویژه و معادله اصلی که مقادیر ویژه در آن صدق می‌کنند، به‌کار برد، کوشی در سال ۱۸۴۰ بود.

در مطالعه‌ی نگاشت‌های خطی روی فضاهای برداری با بعد متناهی از پایه‌های مرتب برای نمایش ماتریسی این نوع نگاشت‌ها استفاده کردیم. بدیهی است که این نوع نمایش سهم مهمی در مورد شناخت

1) Cayley 2) Morris Kline 3) Euler 4) Lagranje 5) Cauchy

رفتار آنها به خصوص ترکیب‌های متوالی این نگاشت‌ها خواهد داشت. در آنچه که خواهد آمد هدف آن است که فقط یک نگاشت خطی روی فضای برداری با بعد متناهی  $V$  را انتخاب کرده و با جداکردن آن از بقیه بررسی کنیم که در درون آن چه می‌گذرد. ساده‌ترین راه، بیان این هدف به زبان ماتریس‌هاست:

می‌خواهیم برای نگاشت خطی مفروض  $T$  پایه مرتبی در  $V$  پیدا کنیم که نسبت به این پایه ماتریس  $T$  شکل ساده‌ی منتخبی داشته باشد.

شاید ساده‌ترین ماتریس‌ها از نظر انجام کار روی آنها به‌غیر از ماتریس همانی، ماتریس‌های قطری

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \circ & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \lambda_2 & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \circ & \lambda_3 & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

هستند. اگر  $T$  نگاشتی خطی روی فضای  $n$  بعدی  $V$  باشد و بتوانیم پایه‌ی مرتبی مانند:

$$B = \{x_1, \dots, x_n\}$$

در  $V$  بیابیم که در آن  $T$  توسط ماتریس قطری بالا نمایش داده شود مسلماً اطلاعات مهمی در مورد  $T$  مانند رتبه‌ی آن یا دترمینان  $T$  را با یک نگاه به ماتریس  $D$  به‌دست می‌آوریم. در ضمن برد  $\ker T$  نیز به‌آسانی به‌دست می‌آید، زیرا ماتریس  $T$  نسبت به پایه‌ی مرتب  $B$ ،  $D$  است اگر و تنها اگر

$$T(x_k) = \lambda_k x_k \quad k = 1, \dots, n$$

و برد مساوی زیرفضای تولید شده توسط  $x_k$ ‌هایی است که به‌ازای آنها  $\lambda = \circ$  و  $\ker T$  زیرفضای تولید شده به‌وسیله‌ی بقیه‌ی  $x_k$ ‌هاست.

از آنچه گذشت در می‌یابیم که اگر پایه‌ی مرتب چون  $B$  و ماتریسی قطری چون  $D$  می‌شناختیم که ماتریس  $T$  نسبت به پایه‌ی  $B$  ماتریس  $D$  می‌شد می‌توانیم به سؤالات احتمالی در مورد  $T$  به‌آسانی پاسخ بدهیم.

برخی سؤالاتی که در پی پاسخ آنها هستیم عبارت‌اند از:

آیا هر نگاشت خطی  $T$  می‌تواند توسط ماتریسی قطری در پایه‌ی مرتب نمایش داده شود؟ اگر چنین نیست برای کدام عملگرهای  $T$  چنین پایه‌ی وجود دارد؟ در صورت وجود چطور می‌توانیم چنین پایه‌ی



را پیدا کنیم؟ اگر چنین پایه‌ای وجود نداشته باشد ساده‌ترین نوع ماتریسی که به وسیله‌ی آن می‌توانیم  $T$  را نمایش دهیم کدام است؟

مقدمات فوق پیشنهاد می‌کند بردارهایی را در  $V$  مطالعه کنیم که توسط  $T$  به مضرب‌های اسکالر خودشان نگاشته می‌شوند.

**تعریف.** فرض کنیم  $V$  فضایی برداری روی میدان  $\mathbb{F}$  و  $T$  نگاشتی خطی روی  $V$  باشد. یک مقدار ویژه‌ی  $T$  اسکالری مانند  $\lambda$  در  $\mathbb{F}$  است که برای آن بردار غیرصفری مانند  $X$  در  $V$  با خاصیت  $T(X) = \lambda X$  وجود داشته باشد.

اگر  $\lambda$  یک مقدار ویژه‌ی  $T$  باشد آنگاه هر  $X$  با خاصیت  $T(X) = \lambda X$  یک بردار ویژه‌ی  $T$  وابسته‌ی به مقدار ویژه‌ی  $\lambda$  نامیده می‌شود.

مقادیر ویژه، مقادیر سرشت‌نما، ریشه‌های سرشت‌نما، ریشه‌های راکد، مقادیر سره یا مقادیر طیفی هم نامیده می‌شوند.

اگر  $T$  نگاشتی خطی و  $\lambda$  اسکالری دلخواه باشد به آسانی می‌توان نشان داد که مجموعه‌ی بردارهای  $X$  به طوری که  $T(X) = \lambda X$  همراه اجتماع با  $\{0\}$  زیرفضایی از  $V$  است. از طرفی این زیرفضا، فضای بوج نگاشت خطی  $(T - \lambda I)$  است.  $\lambda$  را یک مقدار ویژه‌ی  $T$  می‌نامیم هرگاه این زیرفضا، زیرفضای صفر نباشد یعنی هرگاه  $(T - \lambda I)$  یک به یک نباشد. اگر فضای زمینه‌ی  $V$  با بعد متناهی باشد  $(T - \lambda I)$  دقیقاً زمانی یک به یک نیست که دترمینان آن صفر باشد. خلاصه‌ی این مطلب قضیه‌ی زیر را نتیجه می‌دهد.

**۶-۵-۱ قضیه.** فرض کنیم  $T$  نگاشتی خطی روی فضای با بعد متناهی  $V$  و  $\lambda$  اسکالری دلخواه است. احکام زیر هم‌ارزند:

(۱)  $\lambda$  یک مقدار ویژه‌ی  $T$  است.

(۲) نگاشت  $(T - \lambda I)$  معکوس پذیر نیست.

$$(۳) \det(T - \lambda I) = 0$$

معیار دترمینانی (۳) نشان می‌دهد که مقادیر ویژه چگونه جستجو شوند. اگر  $B$  پایه‌ی مرتبی برای  $V$  بوده  $A$  ماتریس  $T$  نسبت به این پایه‌ی مرتب باشد آنگاه  $(T - \lambda I)$  معکوس پذیر است اگر و تنها اگر ماتریس  $(A - \lambda I)$  معکوس پذیر باشد در نتیجه تعریف زیر طبیعی می‌نماید:

تعریف. اگر  $A$  ماتریسی  $n \times n$  روی میدان  $\mathbb{F}$  باشد یک مقدار ویژه  $A$  در میدان  $\mathbb{F}$ ، اسکالری مانند  $\lambda$  از  $\mathbb{F}$  است که ماتریس  $(A - \lambda I)$  معکوس ناپذیر باشد.

چون  $\lambda$  یک مقدار ویژه  $A$  است اگر و تنها اگر  $\det(A - \lambda I) = 0$  یا به طور هم‌ارز اگر و تنها اگر  $\det(\lambda I - A) = 0$ ، پس ماتریس  $(xI - A)$  را تشکیل داده چندجمله‌ای

$$f(x) = \det(xI - A)$$

را در نظر می‌گیریم. به‌وضوح مقادیر ویژه  $A$  در  $\mathbb{F}$  دقیقاً اسکالرهایی چون  $\lambda$  در  $\mathbb{F}$  هستند که  $f(\lambda) = 0$  باشد.

با استفاده از بسط دترمینان‌ها به کمک مفهوم جایگشت‌ها به آسانی ملاحظه می‌کنیم که  $f(x)$  چندجمله‌ای تکین است که دقیقاً از درجه  $n$  است. این چندجمله‌ای را چندجمله‌ای مفسر یا سرشت‌نمای  $A$  می‌نامیم.

لم بعدی ما را قادر می‌سازد که چندجمله‌ای سرشت‌نمای  $T$  را به‌عنوان چندجمله‌ای سرشت‌نمای هر ماتریس  $n \times n$  دلخواهی که  $T$  را در پایه‌ی مرتبی از  $V$  نمایش می‌دهد تعریف کنیم، در واقع ماتریس  $T$  نسبت به هر پایه‌ی دلخواهی که به‌دست آید مقادیر ویژه‌ی یکسان نتیجه خواهد داد. این مطالب نشان می‌دهد که  $T$  نمی‌تواند بیش از  $n$  مقدار ویژه متمایز داشته باشد. البته ممکن است  $T$  هیچ مقدار ویژه حقیقی نداشته باشد.

لم. ماتریس متشابه، چندجمله‌ای سرشت‌نمای مساوی دارند.

برهان. اگر  $B = P^{-1}AP$  باشد آنگاه

$$\begin{aligned} \det(xI - B) &= \det(xI - P^{-1}AP) = \det(xIP^{-1}P - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(xI - A)P) \\ &= \det P^{-1} \times \det(xI - A) \times \det P = \det(xI - A). \quad \square \end{aligned}$$

## ۱-۶ بررسی مقادیر ویژه حقیقی و بردارهای ویژه ماتریس‌های

$$2 \times 2$$

فرض کنیم  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  و درایه‌ها حقیقی‌اند، با تشکیل معادله‌ی سرشت‌نمای  $\det(\lambda I - A) = 0$  داریم:

$$\begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} = 0 \implies (\lambda - a)(\lambda - d) - bc = 0 \implies \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0 \\ \implies \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det A = 0$$

اگر این معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  باشد داریم:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(A) \\ \lambda_1 \lambda_2 = \det A \end{cases}$$

در صورتی که از معادله‌ی سرشت‌نمایی بتوان  $\lambda$  ای حقیقی به‌دست آورد با توجه به تساوی  $Ax = \lambda x$  برای بردار ناصفر  $x$ ، می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \begin{cases} (\lambda - a)x - by = 0 \\ -cx + (\lambda - d)y = 0 \end{cases}$$

حال  $\lambda$  به‌دست آمده را در یکی از معادلات دستگاه همگن بالا قرار داده به‌ازای مقادیر دلخواه  $x, y$  را محاسبه کرده  $X$  ای غیرصفر برمی‌گزینیم. در این صورت یکی از بردارهای ویژه متناظر با  $\lambda$  به‌دست می‌آید. هر مضرب اسکالر این بردار ویژه، برداری ویژه خواهد بود زیرا در حالت کلی اگر  $k \neq 0$  و  $Ax = \lambda x$  آنگاه داریم

$$A(kx) = kAx = k(\lambda x) = \lambda(kx)$$

مثال: مقادیر ویژه و بردارهای ویژه  $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  را به‌دست آورید.

حل:

$$\lambda^2 - (\text{tr} A)\lambda + \det A = 0 \implies \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \implies \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda - 2)x - y = 0 \quad \lambda_1 = 2 \implies 2x + y = 0 \xrightarrow{x=y} y = -2 \\ \implies \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \implies m \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ -2x + (\lambda - 3)y = 0 \quad \lambda_2 = 5 \implies -x + y = 0 \xrightarrow{x=y} y = 1 \\ \implies \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

مثال: فرض کنیم  $T$  نگاشتی خطی روی  $\mathbb{R}^2$  باشد که در پایه مرتب متعارف با ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  نمایش داده می‌شود. مقادیر ویژه  $T$  را مشخص کنید.

حل:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

چون معادله‌ی مفسر دارای ریشه‌ی حقیقی نیست،  $T$  هیچ مقدار ویژه‌ی دقیق ندارد. اگر  $U$  نگاشتی خطی روی  $\mathbb{C}^2$  باشد که در پایه‌ی مرتب متعارف به‌وسیله‌ی  $A$  نمایش داده شود، آنگاه  $U$  دارای دو مقدار ویژه‌ی  $i$  و  $-i$  است.

پس در بحث مربوط به مقادیر ویژه‌ی نگاشت خطی  $T$  (یا ماتریس  $A$  از آن) تصریح میدان مورد نظر الزامی است. مثلاً در مثال بالا  $A$  هیچ مقدار ویژه در  $\mathbb{R}$  ندارد اما دو مقدار ویژه  $i$  و  $-i$  در  $\mathbb{C}$  دارد.

تذکره: با توجه به آنکه ماتریس هر تبدیل  $T$  در صفحه ماتریسی دودردو است تساوی  $T(X) = \lambda X$  یا به‌طور معادل  $AX = \lambda X$  با  $\lambda \in \mathbb{R}$  در صفحه به این معنی است که  $T$  راستای (بردار ویژه)  $X$  را تغییر نمی‌دهد. پس اگر ماتریسی با درایه‌های حقیقی راستای همه‌ی بردارهای صفحه را تغییر دهد فاقد مقدار ویژه حقیقی و بردار ویژه است و بالعکس. این بحث در حالت کلی نیز صحیح است، در حالت کلی راستای  $AX$  و  $X$  متفاوت است اما اگر  $AX$  و  $X$  بردارهایی موازی باشند عدد حقیقی  $\lambda$  وجود دارد به طوری که  $AX = \lambda X$ .

نتیجه. در بین ماتریس‌های دوران، فقط ماتریس دوران به اندازه‌ی  $K\pi$  دارای مقدار ویژه‌ی حقیقی و بردار ویژه است.

مثال: حدود  $m$  را به قسمی تعیین کنید که ماتریس زیر راستای همه ی بردارهای صفحه را تغییر دهد.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ m & 3 \end{bmatrix}$$

حل: ماتریس  $A$  باید فاقد مقدار ویژه ی حقیقی باشد

$$\lambda^2 - (trA)\lambda + |A| = 0 \implies \lambda^2 - 2\lambda - 3 + 2m = 0$$

$$\Delta' < 0 \implies 1 + 3 - 2m < 0 \implies m > 2$$

ایده ی نگاشتی که برداری مفروض را به برداری موازی با آن می نگارد در حل دستگاه های معادلات دیفرانسیل، در مورد مدل های فیزیکی مانند انرژی اتم سهم مهمی دارد.

## ۲-۶ بررسی مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ی ماتریس های $3 \times 3$

فرض کنیم  $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$  با تشکیل معادله سرشت نمای  $\det(\lambda I - A) = 0$  داریم:

$$\begin{vmatrix} \lambda - a & -b & -c \\ -d & \lambda - e & -f \\ -g & -h & \lambda - i \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies (\lambda - a) \begin{vmatrix} \lambda - e & -f \\ -h & \lambda - i \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} -d & -f \\ -g & \lambda - i \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} -d & \lambda - e \\ -g & -h \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - a)[\lambda^2 - (e + i)\lambda + ei - hf] + b(-d\lambda + di - gf) - c(dh + g\lambda - gc) = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 - (e + i)\lambda^2 + ei\lambda - hf\lambda - a\lambda^2 + ae\lambda + ai\lambda - aei + ahf \\ - bd\lambda + bdi - bgf - cdh - cg\lambda + cge = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda^2 - (a + e + i)\lambda^2 + (ei - hf + ae + ai - bd - cg)\lambda - |A| = 0$$

در نتیجه:

$$\lambda^3 - (|a| + |e| + |i|)\lambda^2 + \left( \begin{vmatrix} a & b \\ d & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} \right)\lambda - |A| = 0$$

که در آن منظور از  $|a|$  و  $|e|$  و  $|i|$  دترمینان ماتریس‌های یک‌دریک است. توجه داریم که ضریب  $\lambda$  مجموع دترمینان‌های ماتریس‌هایی  $2 \times 2$  است که قطر اصلی آنها تعدادی از عناصر قطر اصلی ماتریس  $A$  می‌باشد. (دو عنصر از میان سه عنصر قطر اصلی  $A$ ).

بنابراین معادله‌ی سرشت‌نمایی هر ماتریس  $3 \times 3$ ،  $A$  به صورت کلی زیر است:

$$\lambda^3 - (tr A)\lambda^2 + \left( \begin{vmatrix} a & b \\ d & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} \right)\lambda - |A| = 0$$

با توجه به آنکه هر معادله از درجه‌ی سه لااقل یک ریشه‌ی حقیقی دارد، در نتیجه هر ماتریس سه در سه با درایه‌های حقیقی در میدان  $\mathbb{R}$  لااقل یک مقدار ویژه حقیقی دارد. حالات دیگر سه مقدار ویژه حقیقی متمایز یا یک مقدار ویژه حقیقی مضاعف، یک مقدار ویژه حقیقی ساده می‌باشند.

در هر یک از حالت‌های ذکر شده مقدار ویژه حقیقی به دست آمده را در دستگاه همگن  $AX = \lambda X$

یعنی دستگاه مقابل قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} (\lambda - a)x - by - cz = 0 \\ -dx + (\lambda - c)y - fz = 0 \\ -gx - hy + (\lambda - i)z = 0 \end{cases}$$

حال کافی است جواب‌های غیرصفر این دستگاه همگن را در هر حالت جستجو کنیم تا بردارهای ویژه وابسته به مقدار ویژه متناظر به دست آیند.

مثال: مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$  را مشخص کنید.

حل:

$$tr A = 5, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad |A| = 0$$

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 0\lambda + 0 = 0 \quad \implies \lambda^2 - 5\lambda = 0$$

$$\implies \lambda^2(\lambda - 5) = 0 \implies \lambda = 0 \text{ یا } \lambda = 5$$

$$\begin{cases} (\lambda - 1)x + 2z = 0 \\ \lambda y = 0 \\ 2x + (\lambda - 4)z = 0 \end{cases}$$

صورت کلی بردار ویژه  $\lambda = 0 \implies x = 2z \implies (2k, m, k)$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{مستقل خطی})$$

$$\lambda = 5 \implies \begin{cases} -2x = z \\ y = 0 \end{cases} \implies (a, 0, -2a) \implies X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{بردار ویژه}$$

قضیه بعد با استفاده از حکم کلی  $\det(\lambda I - A) = 0$  برای به دست آوردن معادله‌ی مفسر، فرم آن را برای هر ماتریس دلخواه  $n \times n$ ،  $A$  نتیجه می‌دهد. فرض کنیم

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

با استفاده از بسط جایگشتی متناوب دترمینان‌ها (مجموع متناوب جملاتی که هر جمله حاصل ضرب درایه‌هایی است که از هر سطر و ستون انتخاب می‌شوند) جمله‌ای از  $f(\lambda)$  که بزرگترین درجه را برای  $\lambda$  دارد از عبارت

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \dots (\lambda - a_{nn})$$

به دست آمده مساوی  $\lambda^n$  است. جملات با درجه‌ی  $n-1$  نیز از همان عبارت بالا به دست می‌آیند. بنابراین ضریب  $\lambda^{n-1}$  برابر است با

$$-(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) = -tr(A)$$

جمله‌ی ثابت  $f(\lambda)$  نیز با قرار دادن  $\lambda = 0$  در  $f(x) = \det(\lambda I - A)$  به دست می‌آید که برابر  $(-1)^n |A|$  است و در نتیجه

$$f(\lambda) = \lambda^n - \text{tr}A \lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n |A|$$

توصیف بقیه ضرایب در چند جمله‌ای مشخصه آسان نیست، این ضرایب در واقع برحسب زیردترمینان‌های  $\det A$  قابل بیان هستند. به‌عنوان مثال جمله‌های شامل  $\lambda^{n-2}$  را در نظر می‌گیریم. این جمله‌ها به دو صورت پدید می‌آیند: از عبارت  $(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \dots (\lambda - a_{nn})$  و یا از حاصل ضرب‌هایی شبیه

$$-a_{12}a_{21}(\lambda - a_{33}) \dots (\lambda - a_{nn})$$

بنابراین ضرایب  $\lambda^{n-2}$  از نوع  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$   $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$  بوده در نتیجه این ضرایب، مجموع همه‌ی دترمینان‌های  $2 \times 2$  به فرم  $\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}$  با  $i < j$  می‌باشد.

**۱-۲-۶ قضیه.** اگر  $A$  ماتریسی  $n \times n$  باشد معادله‌ی مشخصه‌ی آن به فرم ذیل است

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + s_1 \lambda^{n-1} + s_2 \lambda^{n-2} + \dots + s_{n-1} \lambda + (-1)^n |A| = 0$$

کد در آن  $s_m$  (برای  $m = 1, 2, \dots, n-1$ ) برابر است با حاصل ضرب  $(-1)^m$  در مجموع همه‌ی کهادهای اصلی  $m \times m$  ماتریس  $A$  (کهاد اصلی کهادی است که درایه‌های روی قطر آن بخشی از عناصر روی قطر  $A$  هستند یعنی در کهادهای  $m \times m$  ماتریس  $A$ ،  $m$  عنصر از میان  $n$  عنصر روی قطر  $A$  انتخاب می‌شوند).

برهان.  $f(\lambda)$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & 0 - a_{12} & \dots & 0 - a_{1n} \\ 0 - a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & 0 - a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 - a_{n1} & 0 - a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}_{n \times n}$$

هر درایه یک دو جمله‌ای می‌شود. بنا به خواص دترمینان حاصل دترمینان بالا مجموع  $2^n$  دترمینان  $n \times n$  است. یکی از آنها  $\lambda$  را روی قطر اصلی داشته بقیه درایه‌هایش صفر هستند مقدار آن  $\lambda^n$  می‌باشد. یکی دیگر از این دترمینان‌ها مستقل از  $\lambda$  بوده مقدار آن  $(-1)^n |A|$  است. مابقی دترمینان‌ها شامل  $m$  ستون



$(m = 1, 2, \dots, n-1)$  از  $(-A)$  و  $n-m$  ستون دیگر است صورتی که هر یک از ستون‌ها شامل دقیقاً یک  $\lambda$  ناصفر می‌باشد. یکی از این دترمینان‌ها را در نظر گرفته ستون‌هایی از آن را که مساوی ستون‌های  $(-A)$  هستند با  $i_1, i_2, \dots, i_m$  شماره‌گذاری می‌کنیم. بعد از جابه‌جایی سطرهای مجاور و ستون‌های مجاور به دفعات زوج، دترمینان ذکر شده به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$(-1)^m \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \dots & a_{i_1 i_m} & \vdots & & & \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \dots & a_{i_2 i_m} & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \\ a_{i_m i_1} & a_{i_m i_2} & \dots & a_{i_m i_m} & \vdots & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \lambda & \circ & \dots & \circ \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \lambda & \circ & \dots & \circ \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_n i_1} & a_{i_n i_2} & \dots & a_{i_n i_m} & \vdots & \circ & \circ & \dots & \lambda \end{vmatrix} = (-1)^m \left| A_{i_1 i_2 \dots i_m}^{i_1 i_2 \dots i_m} \right| \lambda^{n-m}$$

که در آن  $\left| A_{i_1 i_2 \dots i_m}^{i_1 i_2 \dots i_m} \right|$  یک کهاد اصلی  $m \times m$  از  $A$  است. حال می‌توان نوشت

$$S_m = (-1)^m \sum_{\rho} \left| A_{i_1 i_2 \dots i_m}^{i_1 i_2 \dots i_m} \right| \lambda^{n-m}$$

در این تساوی  $(i_1, i_2, \dots, i_m)$  در  $C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \times 2 \times \dots \times m}$  ترکیب  $m$  حرف از میان  $n$  حرف تغییر می‌کند.

مثال: با استفاده از قضیه‌ی قبل  $\det(\lambda I - A)$  را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

حل: داریم:

$$s_1 = 1 + 0 - 2 + 6 = 5$$

$$s_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 8 - 3 + 2 - 5 + 16 - 9 = 9$$

$$s_2 = \text{تعداد کپادهای } C_2^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

$$s_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -3 + 16 - 8 + 2 = 7$$

$$s_2 = \text{تعداد کپادهای } C_2^2 = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

$$|A| = 2$$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^4 - 5\lambda^3 + 9\lambda^2 - 7\lambda + 2$$

مثال: فرض کنیم  $A$  ماتریسی  $3 \times 3$  و  $f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$  باشد. با استفاده از دستور مشتق

دترمینان  $f'(\lambda)$ ،  $f''(\lambda)$  و  $f'''(\lambda)$  را به دست آورده و نتایج را ساده کنید. در مورد مشتقات مراتب بالاتر

$f(\lambda)$  چه می توان گفت؟

$$\text{حل: چون } f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix}$$

$$f'(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{13} \\ -a_{31} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix}$$

= مجموع همه‌ی کپادهای  $2 \times 2$  اصلی ماتریس  $(\lambda I - A)$

$$f''(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a_{31} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{13} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2[(\lambda - a_{11}) + (\lambda - a_{22}) + (\lambda - a_{33})]$$

$$= 2! \times (\lambda I - A \text{ اصلی ماتریس } 1 \times 1 \text{ کهدهای } 1 \times 1)$$

$$f'''(\lambda) = 3! \implies f^{(4)}(\lambda) = f^{(5)}(\lambda) = \dots = 0$$

مثال: ثابت کنید اگر  $\lambda$  مقدار ویژه ی ناصفری از ماتریس نامفرد  $n \times n$ ،  $A$  باشد آنگاه  $\frac{\det}{\lambda}$  مقدار ویژه ی از  $\text{adj}A$  است.

حل: بنابر قضیه ی قبل

$$\lambda^n + \xi_1 \lambda^{n-1} + \dots + \xi_{n-1} \lambda + (-1)^n \det A = 0 \quad (*)$$

که در آن  $s_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) مساوی  $(-1)^i$  ضربدر مجموع همه ی کهدهای اصلی  $i \times i$  ماتریس  $A$  است و

$$(\mu I - \text{adj}A) = \mu^n + s_1 \mu^{n-1} + \dots + s_{n-1} \mu + (-1)^n |\text{adj}A|$$

که در آن  $s_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n-1$ ) مساوی  $(-1)^j$  ضربدر مجموع همه ی کهدهای اصلی  $j \times j$  ماتریس  $\text{adj}A$  است. می دانیم  $|\text{adj}A| = |A|^{n-1}$  و بنا به تعریف  $\xi_i$  و  $s_j$  داریم:

$$s_1 = (-1)^n \xi_{n-1}, s_2 = (-1)^n |A| \xi_{n-2}, \dots, s_{n-1} = (-1)^n |A|^{n-2} \xi_1$$

در نتیجه

$$|\mu I - \text{adj}A| = (-1)^n \left\{ (-1)^n \mu^n + \xi_{n-1} \mu^{n-1} + \xi_{n-2} |A| \mu^{n-2} + \dots \right. \\ \left. + \xi_2 |A|^{n-2} \mu^2 + \xi_1 |A|^{n-2} \mu + |A|^{n-1} \right\}$$

و

$$|A|^{1-n} |\mu I - \text{adj}A| = (-1)^n \left\{ 1 + \xi_1 \frac{\mu}{|A|} + \dots + \xi_{n-1} \left(\frac{\mu}{|A|}\right)^{n-1} + (-1)^n \left(\frac{\mu}{|A|}\right)^n |A| \right\}$$

$$= f(\mu)$$

حال می توان نوشت

$$f\left(\frac{|A|}{\lambda}\right) = (-1)^n \left\{ 1 + \xi_1 \frac{1}{\lambda} + \dots + \xi_{n-1} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-1} + (-1)^n \left(\frac{1}{\lambda}\right)^n |A| \right\}$$

$$\lambda^n f\left(\frac{|A|}{\lambda}\right) = (-1)^n \left\{ \lambda^n + \xi_1 \lambda^{n-1} + \dots + \xi_{n-1} \lambda + (-1)^n \det A \right\} \stackrel{*}{=} (-1)^n \times 0 = 0$$

بنابراین  $\frac{|A|}{\lambda}$  مقدار ویژه‌ای از  $\text{adj} A$  است.

مثال: ابتدا ثابت کنید معادله‌ی مفسر هر ماتریس متعامد معادله‌ای معکوسه است سپس با استفاده از آن نشان دهید مقدار ویژه ماتریس‌های متعامد قدرمطلقاً مساوی یک دارند.

حل: فرض کنیم  $p$  ماتریسی متعامد باشد در این صورت  $pp^t = I$  و  $|p| = \pm 1$  است و می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= |\lambda I - p| = |\lambda p I p^t - p| = |-p \lambda \left(\frac{1}{\lambda} I - p^t\right)| = \lambda^n | -p | \left| \frac{1}{\lambda} I - p^t \right| \\ &= \pm \lambda^n \left| \frac{1}{\lambda} I - p \right| = \pm \lambda^n f\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

پس معادله مفسر معادله‌ای معکوسه است و در نتیجه بنا به خواص معادلات معکوسه ریشه‌هایش قدرمطلقاً مساوی یک دارند.

**۲-۲-۶ قضیه.** فرض کنیم  $A$  ماتریسی  $n \times n$  و  $\lambda$  مقدار ویژه‌ای از  $A$  باشد. مجموعه‌ی همه‌ی بردارهای ویژه‌ی متناظر با  $\lambda$  همراه با بردار صفر، زیرفضایی از  $\mathbb{R}^n$  است. این زیرفضا را فضای ویژه‌ی  $\lambda$  می‌نامیم.

برهان. برای آنکه نشان دهیم فضای ویژه، زیرفضای برداری است باید ثابت کنیم نسبت به ضرب اسکالر و جمع بردارها بسته است.

فرض کنیم  $X_1$  و  $X_2$  بردارهایی از فضای ویژه‌ی  $\lambda$  و  $c$  یک اسکالر باشد. در این صورت

$$AX_1 = \lambda X_1, \quad AX_2 = \lambda X_2$$

در نتیجه:

$$AX_1 + AX_2 = \lambda X_1 + \lambda X_2 \implies A(x_1 + x_2) = \lambda(x_1 + x_2)$$

پس  $x_1 + x_2$  عنصری از فضای ویژه است.

$$Ax_1 = \lambda x_1 \implies cAx_1 = c\lambda x_1 \implies A(cx_1) = \lambda(cx_1)$$

□

یعنی فضای ویژه نسبت به ضرب اسکالر نیز بسته است.

مثال: پایه‌ای از فضاهای ویژه‌ی ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$  به دست آورید.

حل:

$$\begin{aligned} |A - \lambda I_3| &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{-r_2+r_1, -r_3+r_1} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1+\lambda & 0 \\ 4 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1+c_2} \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 4 & 9-\lambda & 2 \\ 2 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(9-\lambda)(2-\lambda) - 8] \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 11\lambda + 10) = (1-\lambda)(\lambda - 10)(\lambda - 1) \\ &= -(\lambda - 10)(\lambda - 1)^2 \end{aligned}$$

پس مقادیر ویژه‌ی  $A$  عبارتند از: ۱ یا  $\lambda = 10$ . با جایگذاری این مقادیر در معادله‌ی  $(A - \lambda I_3)x = 0$  داریم:

$$(A - 10I_3)x = 0 \implies \begin{bmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \implies x_1 = x_2 = 2r, \quad x_3 = 3$$

پس فضای ویژه‌ی  $\lambda = 10$  فضایی تک‌بعدی از بردارهایی به فرم  $r \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  است.

$$(A - 1I_3)x = 0 \implies \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \implies x_1 = -s - t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = 2t$$

$$\implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ 2t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

در نتیجه فضای ویژه‌ی  $\lambda = 1$  فضایی دو‌بعدی با پایه  $B = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$  است.

تذکر: اگر مقدار ویژه  $k$  بار به عنوان ریشه معادله مشخصه تکراری باشد می‌گوییم چندگانگی  $k$  دارد. در مثال قبل  $\lambda = 1$  و  $\lambda = 1$  به ترتیب چندگانگی یک و دو دارند.

### ۳-۶ مقادیر ویژه‌ی مختلط

چون معادله‌ی مشخصه‌ی ماتریس  $n \times n$  معادله‌ای درجه  $n$  است با محسوب کردن ریشه‌های احتمالی مختلط و شمارش ریشه‌های مکرر، دقیقاً  $n$  ریشه خواهد داشت. نشان می‌دهیم که اگر معادله‌ی مشخصه‌ی ماتریس  $A$  تعدادی ریشه‌ی مختلط داشته باشد این ریشه‌ها اطلاعاتی مهم در مورد  $A$  مطرح می‌سازند. فرض کنیم  $A$  روی فضای  $\mathbb{C}^n$  از  $n$ -تایی‌های مختلط عمل کند. منظور تعمیم نتایج قبلی نیست (هر چند از خواصی از قبیل  $A(cx + dy) = cAx + dAy$  برای ماتریس  $m \times n$  با داریه‌های مختلط و  $x, y \in \mathbb{C}^n$  و  $c, d \in \mathbb{C}$  استفاده خواهیم کرد). مطالعه مقادیر ویژه‌ی مختلط از این نقطه نظر اساسی است که اطلاعات پنهان و غیرآشکار در مورد ماتریس‌های با درایه‌های حقیقی پوشش داده نمی‌شوند. این مطالعات در بررسی سیستم‌های دینامیکی حقیقی و بعضی دوران‌ها در فضا مورد استفاده قرار می‌گیرند. مشابه تعاریف حالت حقیقی، اسکالر مختلط  $\lambda$  در  $\det(A - \lambda I) = 0$  صدق می‌کند اگر و تنها اگر بردار ناصفر  $X$  در  $\mathbb{C}^n$  وجود داشته باشد به طوری که  $AX = \lambda X$ .  $\lambda$  را مقادیر ویژه‌ی مختلط و  $X$  را بردار ویژه‌ی مختلط متناظر با  $\lambda$  می‌نامیم.

مثال: اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  آنگاه معادله‌ی مشخصه‌ی  $A$ ،  $\lambda^2 + 1 = 0$  است که ریشه‌های حقیقی ندارد. تنها ریشه‌های مختلط  $\lambda = i$  و  $\lambda = -i$  هستند و اگر  $A$  روی  $\mathbb{C}^2$  عمل کند آنگاه

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

پس  $i$  و  $-i$  مقادیر ویژه و  $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$  بردارهای ویژه هستند.

مثال: فرض کنیم  $A = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix}$  مقادیر ویژه‌ی  $A$  را به دست آورده پایه‌ای برای هر فضای ویژه مشخص کنید.

حل: معادله‌ی مشخصه‌ی عبارت است از  $\lambda^2 - ۱٫۶\lambda + ۱ = ۰$  و در نتیجه

$$\lambda = \frac{1}{2} [1.6 \pm \sqrt{(-1.6)^2 - 4}] = 0.8 \pm 0.6i$$

برای  $\lambda = 0.8 - 0.6i$  داریم:

$$A - (0.8 - 0.6i)I = \begin{bmatrix} -0.3 + 0.6i & -0.6 \\ 0.75 & 0.3 + 0.6i \end{bmatrix}$$

این ماتریس معکوس‌پذیر نیست بنابراین سطرها به‌عنوان بردارهایی در  $\mathbb{C}^2$  وابسته خطی‌اند و در نتیجه یک سطر مضربی (مختلط) از دیگری است:

$$\begin{cases} (-0.3 + 0.6i)x - 0.6y = 0 \\ 0.75x + (0.3 + 0.6i)y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 0.75x = (-0.3 - 0.6i)y \\ x = (-0.4 - 0.8i)y \end{cases}$$

فرض کنیم:  $y = 5$  در این صورت  $x = -2 - 4i$  و از آنجا پایه‌ای برای فضای بردار ویژه‌ی وابسته به

$\lambda = 0.8 - 0.6i$  عبارت است از  $v_1 = \begin{bmatrix} -2 - 4i \\ 5 \end{bmatrix}$ . محاسبه‌ای مشابه برای  $\lambda = 0.8 + 0.6i$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -2 + 4i \\ 5 \end{bmatrix} \text{ نتیجه می‌دهد}$$

به‌عنوان یک بررسی ساده داریم:

$$Av_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 + 4i \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 + 2i \\ 4 + 3i \end{bmatrix} = (0.8 + 0.6i)v_2$$

با اندکی توجه، ماتریس  $A$  در مثال بالا نگاشت  $X \mapsto AX$  را ارائه می‌دهد که اساساً یک دوران است.

این واقعیت هنگامی که نقاط مقتضی رسم شوند بدیهی به‌نظر می‌آید.

مثال: یک راه مشاهده‌ی تأثیر چگونگی ضرب  $A$  در مثال قبل، در نظر گرفتن نقطه اولیه‌ی دلخواه مانند

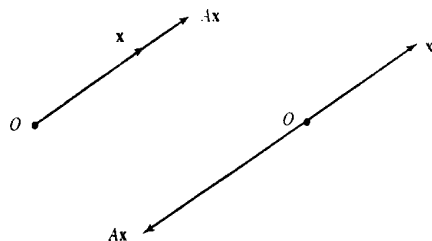
$X_0 = (2, 0)$  و رسم نقاط حاصل از اثر کردن پی‌درپی  $A$  روی هر نقطه حاصل از تأثیر است. یعنی:

$$X_1 = AX_0 = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = AX_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 \\ 2.4 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = AX_2 = \dots$$

با رسم این نقاط مداری بیضی شکل به‌دست می‌آید:



شکل ۶-۱

البته این شکل دلیل دوران را نشان نمی‌دهد. راز دوران در قسمت‌های حقیقی و آموهومی مقدار ویژه‌ای مختلط نهفته است.

## ۴-۶ قسمت‌های حقیقی و موهومی بردارها

مزدوج مختلط بردار مختلط  $X$  در  $\mathbb{C}^n$  بردار  $\bar{X}$  در  $\mathbb{C}^n$  است که مؤلفه‌های آن مزدوج مختلط درایه‌های  $X$  هستند. قسمت‌های حقیقی و موهومی بردار مختلط  $X$  بردارهای  $\text{Re} X$  و  $\text{Im} X$  هستند که از قسمت‌های حقیقی و موهومی مؤلفه‌های  $X$  ساخته می‌شوند.

$$\text{مثال: اگر } X = \begin{bmatrix} 3-i \\ i \\ 2+5i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{Re} X = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{Im} X = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+i \\ -i \\ 2-5i \end{bmatrix}$$

اگر  $B$  ماتریسی  $m \times n$  با درایه‌های مختلط احتمالی باشد آنگاه  $\bar{B}$  نشان دهنده‌ی ماتریسی است که درایه‌های مزدوج مختلط درایه‌های  $B$  هستند. خواص مزدوج اعداد مختلط به مزدوج ماتریس‌ها القا می‌شود و داریم:

$$\overline{\bar{X}} = X, \quad \overline{BX} = \bar{B}\bar{X}, \quad \overline{BC} = \bar{B}\bar{C}, \quad \overline{rB} = \bar{r}\bar{B}$$

$$(\bar{B})' = \overline{(B')}$$



## ۵-۶ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ی ماتریسی حقیقی که روی

 $\mathbb{C}^n$  عمل می‌کند

فرض کنیم  $A$  ماتریسی  $n \times n$  است که درایه‌هایش حقیقی می‌باشند، داریم  $\overline{A\bar{X}} = \overline{A}\bar{X} = A\bar{X}$ . اگر  $\lambda$  مقدار ویژه‌ای از  $A$  و  $X$  بردار ویژه ی متناظرش در  $\mathbb{C}^n$  باشد آنگاه

$$A\bar{X} = \overline{A\bar{X}} = \overline{\lambda X} = \bar{\lambda}\bar{X}$$

در نتیجه  $\bar{\lambda}$  نیز مقدار ویژه‌ای از  $A$  بوده  $\bar{X}$  بردار ویژه ی متناظرش است. بنابراین وقتی  $A$  حقیقی است مقادیر ویژه ی مختلط آن در جفت‌های مزدوج ظاهر می‌شود.

مثال: همان‌طور که دیدیم مقادیر ویژه ی ماتریس حقیقی  $A = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix}$  اعداد  $0.18 - 0.6i$  و  $0.18 + 0.6i$  بوده مزدوج یکدیگرند. بردارهای ویژه متناظر به دست آمده نیز،

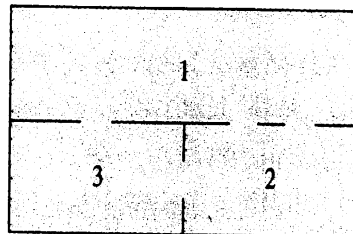
$$v_1 = \begin{bmatrix} -2 - 4i \\ 5 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -2 + 4i \\ 5 \end{bmatrix} = \bar{v}_1$$

هستند که بازهم مزدوج می‌باشند.

مثال: اگر  $c = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ ،  $a$  و  $b$  حقیقی و هر دو صفر نباشد آنگاه مقادیر ویژه ی  $c$ ،  $\lambda = a \pm bi$  هستند. همچنین اگر  $r = |\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$  باشد آنگاه

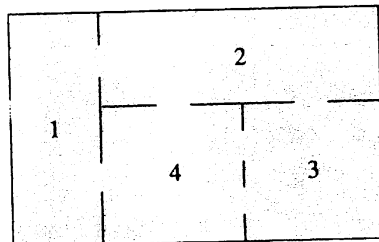
$$C = r \begin{bmatrix} \frac{a}{r} & \frac{-b}{r} \\ \frac{b}{r} & \frac{a}{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

است که در آن  $\varphi$  زاویه بین جهت مثبت محور  $x$ ها و شعاع وصل شده از  $(0, 0)$  به  $(a, b)$  می‌باشد.



شکل ۲-۶

زاویه‌ی  $\varphi$  شناسه‌ی  $\lambda = a + ib$  نامیده می‌شود. بنابراین تبدیل  $X \mapsto CX$  می‌تواند ترکیب یک دوران به اندازه‌ی زاویه‌ی  $\varphi$  و سپس ضرب در  $|\lambda|$  فرض شود.



شکل ۳-۶

مثال: فرض کنیم  $A = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,6 \\ 0,75 & 1,1 \end{bmatrix}$  و  $\lambda = 0,8 - 0,6i$  و  $v_1 = \begin{bmatrix} -2 - 4i \\ 5 \end{bmatrix}$  در ضمن  $P$  ماتریس  $2 \times 2$  حقیقی  $P = [\text{Re } v_1 \quad \text{Im } v_1] = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$  و

$$C = P^{-1}AP = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 & -0,6 \\ 0,75 & 1,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{bmatrix}$$

باشد. بنابر مثال قبل  $C$  یک دوران است زیرا  $|\lambda|^2 = (0,8)^2 + (0,6)^2 = 1$  از  $C = P^{-1}AP$  داریم:

$$A = PCP^{-1} = P \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{bmatrix} P^{-1}$$

اینجا دورانی درون  $A$  است! ماتریس  $P$  تعویض متغیری مانند  $X = Pu$  می‌باشد. عمل  $A$  را می‌توان یک تعویض متغیر از  $X$  به  $u$  و سپس یک دوران و در نهایت برگشت به متغیر اولیه به حساب آورد.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{A} & AX \\ \downarrow P^{-1} \text{ تعویض پذیر} & & \uparrow P \text{ تعویض متغیر} \\ u & \xrightarrow[C \text{ دوران}]{} & Cu \end{array}$$

قضیه بعدی نشان می‌دهد که محاسبات مثال قبل را می‌توان به هر ماتریس حقیقی  $2 \times 2$ ،  $A$  که دارای مقدار ویژه‌ای مختلط مانند  $\lambda$  است تعمیم داد. از جزئیات اثبات صرف‌نظر کرده خاطر نشان می‌سازیم که در برهان قضیه از این واقعیت که اگر  $A$  درایه‌هایی حقیقی داشته باشد آنگاه

$$A(\text{Re } X) = \text{Re } AX$$

$$A(\operatorname{Im} X) = \operatorname{Im} AX$$

است، استفاده می‌شود. ضمناً اگر  $X$  برداری ویژه برای مقدار ویژه ای مختلط باشد آنگاه  $\operatorname{Re} X$  و  $\operatorname{Im} X$  در  $\mathbb{R}^2$  مستقل خطی اند.

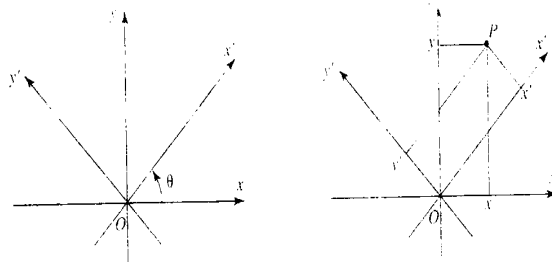
**۱-۵-۶ قضیه.** فرض کنیم  $A$  ماتریسی حقیقی  $2 \times 2$  با مقدار ویژه مختلط  $\lambda = a - ib$  ( $b \neq 0$ ) و بردار ویژه متناظر  $v \in \mathbb{C}^2$  باشد. در این صورت  $A = PCP^{-1}$  است که در آن  $P = [\operatorname{Re} \operatorname{Im} v]$  و

$$C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

آنچه که در مثال قبل وقوع یافت در بعدهای بزرگتر نیز صحیح است. برای مثال اگر  $A$  ماتریسی  $3 \times 3$  با مقدار ویژه ای مختلط باشد آنگاه صفحه ای در  $\mathbb{R}^3$  وجود دارد که در آن  $A$  به عنوان یک دوران (احتمالاً با ضرب در یک اسکالر) عمل می‌کند. هر بردار در این صفحه به نقطه ای دیگر روی همین صفحه دوران می‌یابد. می‌گوییم صفحه تحت  $A$  پایدار است.

مثال: ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1.07 \end{bmatrix}$  دارای مقادیر ویژه  $0.8 \pm 0.6i$  و  $1.07$  است. هر

بردار در صفحه  $xOy$  (با سومین مؤلفه ی صفر) به وسیله ی  $A$  به نقطه ای دیگر در این صفحه دوران می‌یابد. هر بردار غیر واقع در این صفحه با مؤلفه ی سوم  $\approx 0.07$  ضرب می‌شود. نقاط حاصل از تأثیر  $A$  روی نقاط  $w_0 = (2, 0, 0)$  و  $X_0 = (2, 0, 1)$  در شکل زیر نشان داده شده اند:



شکل ۴-۶

تذکر: اگر  $A$  ماتریسی با درایه های حقیقی و بردارهای ویژه ی متمایز باشد ممکن است مقادیر ویژه ی  $A$  موهومی باشند.

هم چنان که تاکنون دیده‌ایم یافتن مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس معادل پیدا کردن ریشه‌های معادله‌ای از درجه  $n$  است، در حالت  $n \geq 3$  ممکن است به دست آوردن این ریشه‌ها مشکل باشد. به خاطر اهمیت مقادیر ویژه در بسیاری از مباحث ریاضیات، روش‌های عددی و برنامه‌های کامپیوتری زیادی برای تقریب آنها وجود دارد. معمولاً این روش‌ها کوششی برای حل معادله‌ی مشخصه نیست؛ بلکه به جای آن ماتریس را به صورتی تبدیل می‌کند که مقادیر ویژه به راحتی قابل محاسبه باشند. قضیه‌ی بعد ما را قادر می‌سازد که به سرعت تقریب‌های سطری مقادیر ویژه را به دست آوریم. مقادیر ویژه را نقاط صفحه در نظر خواهیم گرفت. یادآوری می‌کنیم که عدد مختلط  $a + bi$  می‌تواند نقطه‌ی  $(a, b)$  فرض شود.

## ۶-۶ قضیه گرشگورین<sup>۱</sup>

فرض کنیم  $A$  ماتریسی  $n \times n$  با درایه‌های حقیقی یا مختلط باشد. برای  $k = 1, 2, \dots, n$  می‌گیریم

$$r_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}|$$

فرض کنیم  $C_k$  دایره‌ی به شعاع  $r_k$  و به مرکز  $(\alpha_k, \beta_k)$  است که در آن  $a_{kk} = \alpha_k + \beta_k i$  می‌باشد. در این صورت هر مقدار ویژه‌ی  $A$  وقتی به عنوان نقطه‌ای از صفحه در نظر گرفته شود روی مرز یا داخل یکی از دایره‌های  $C_1, \dots, C_n$  قرار می‌گیرد.

توضیح دایره‌های  $C_1, \dots, C_n$  دایره‌های گرشگورین  $A$  نامیده می‌شوند. شعاع  $k$ امین دایره مجموع قدرمطلق‌های درایه‌های سطر  $k$ ام از  $A$  به جز  $a_{kk}$  است. یعنی

$$r_k = |a_{k1}| + \dots + |a_{k,k-1}| + |a_{k,k+1}| + \dots + |a_{kn}|$$

مرکز  $k$ امین دایره عدد مختلط  $a_{kk}$  است که به عنوان نقطه‌ای در صفحه فرض می‌شود. (اگر  $a_{kk}$  حقیقی باشد مرکز این دایره روی محور طول‌هاست). اگر دایره‌های گرشگورین رسم شده درون آنها هاشور زده شود، مقادیر ویژه‌ی  $A$  به عنوان نقاط صفحه باید در ناحیه سایه‌خورده یا روی مرز یکی از دایره‌ها قرار گیرد.

برهان: فرض کنیم  $\lambda$  مقدار ویژه‌ای از  $A$  و  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  بردار ویژه‌ی متناظر است. گیریم مؤلفه‌ای از

$X$  که دارای بزرگترین مقدار قدرمطلق است  $X_k$  باشد. (اگر دو یا تعداد بیشتری از مؤلفه‌ها این بزرگترین

<sup>1</sup>) Gerschgorin

قدرمطلق را داشته باشند، یکی را انتخاب می‌کنیم). چون  $AX = \lambda X$  داریم:

$$(\lambda - a_{kk})x_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kj}x_j$$

و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$|(\lambda - a_{kk})x_k| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| |x_j| \leq |x_k| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| \implies$$

$$|\lambda - a_{kk}| |x_k| \leq |x_k| r_k \implies |\lambda - a_{kk}| \leq r_k$$

□

یعنی  $\lambda$  درون یا روی دایره‌های گرشگورین قرار دارد.

مثال: فرض کنیم  $A = \begin{bmatrix} 12i & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -6 & 2+i & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2i \\ 0 & -3 & 1 & 4-7i \end{bmatrix}$  پیدا کردن مقادیر ویژه‌ی این ماتریس دشوار

است. دایره‌های گرشگورین عبارتند از:

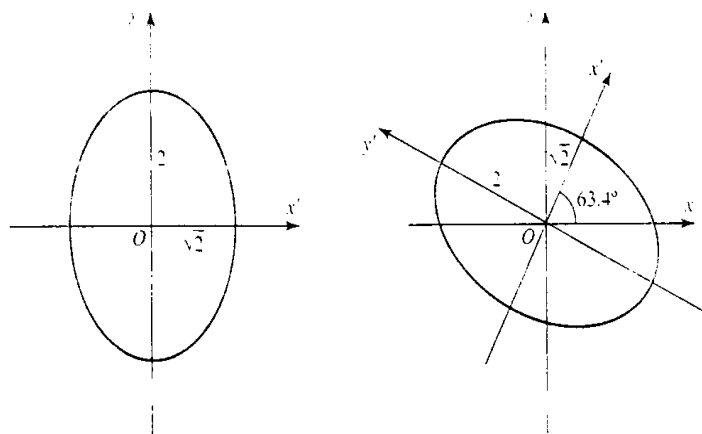
$$C_1: \text{مرکز } (0, 12) \text{ و شعاع } 3 \implies r_1 = 1 + |-2| = 3$$

$$C_2: \text{مرکز } (-6, 0) \text{ و شعاع } 1 + \sqrt{5} \implies r_2 = 1 + |2+i| = 1 + \sqrt{5}$$

$$C_3: \text{مرکز } (-1, 0) \text{ و شعاع } 5 \implies r_3 = 2 + 1 + |2i| = 5$$

$$C_4: \text{مرکز } (4, -7) \text{ و شعاع } 4 \implies r_4 = |-3| + 1 = 4$$

با توجه به شکل زیر، مقادیر ویژه درون یا روی این دایره‌ها قرار دارند:



## شکل ۵-۶

با تشکیل معادله‌ی مشخصه‌ی  $A$  داریم

$$\lambda^4 + (3 - 5i)\lambda^3 + (59 + 10i)\lambda^2 + (534 + 311i)\lambda + 41 + 143i = 0$$

مقدار ریشه‌ها به کمک رایانه تقریباً برابر هستند با

$$0.70065 + 11.9071i, -0.7355 + 0.1753i, -6.1892 - 0.2772i, 3.9182 - 6.8053i$$

می‌توان بررسی نمود که ریشه‌ها درون دایره‌های گرشگورین ماتریس  $A$  قرار می‌گیرند.

**۱-۶-۶ قضیه.** اگر  $s$  دایره گرشگورین حوزه‌ای یکپارچه تشکیل دهند به طوری که این حوزه از بقیه‌ی دایره‌ها مجزا می‌باشد آنگاه دقیقاً  $s$  مقدار ویژه‌ی  $A$  در این حوزه‌ی یکپارچه قرار می‌گیرند. **برهان:** اثبات به پیوستگی بستگی دارد. قرار می‌دهیم  $C = D + C = \text{diag}(a_{ii}) + C$  که در آن  $C$  ماتریس متشکل از درایه‌های خارج قطر اصلی  $A$  است و  $r_i$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

ماتریس‌های  $D + \varepsilon C$  را با خاصیت  $1 \leq \varepsilon \leq 0$  در نظر می‌گیریم. برای  $\varepsilon = 0$  ماتریس  $D$  و برای  $\varepsilon = 1$  ماتریس  $A$  به دست خواهد آمد. ضریب‌های چندجمله‌ای مشخصه‌ی  $D + \varepsilon C$  چندجمله‌ای‌هایی برحسب  $\varepsilon$  هستند و بنا به تئوری توابع جبری ریشه‌های معادله‌ی مفسر توابع پیوسته‌ای از  $\varepsilon$  می‌باشند. بنا بر قضیه‌ی قبل برای هر مقدار  $\varepsilon$ ، مقادیر ویژه همه درون دایره‌های به مرکز  $a_{ii}$  و شعاع  $\varepsilon r_i$  قرار می‌گیرند و اگر  $\varepsilon$  را به طور یکنواخت از صفر تا یک تغییر دهیم مقادیر ویژه همگی از مسیره‌ای پیوسته عبور می‌کنند.

بدون آنکه خللی به کلیت استلال وارد شود، می‌توانیم فرض کنیم اولین  $s$  دایره تشکیل حوزه‌ای یکپارچه می‌دهند. در این صورت چون  $n - s$  دایره با شعاع‌های  $r_{s+1}, r_{s+2}, \dots, r_n$  از بقیه دایره‌های با شعاع  $r_1, r_2, \dots, r_s$  مجزا هستند همان برای دایره‌های با شعاع  $\varepsilon r_i$  برای هر  $1 \leq \varepsilon \leq 0$  نیز صحیح است. حال اگر  $\varepsilon = 0$  مقادیر ویژه  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  هستند و از این‌ها اولین  $s$  تا در حوزه‌ی متناظر با اولین  $s$  دایره و  $n - s$  تای بقیه در بیرون حوزه قرار می‌گیرند. این مطلب برای هر  $\varepsilon$  بیشتر و  $\varepsilon = 1$  نیز صحیح است.

به خصوص اگر یکی از دایره‌های گرشگورین مجزا باشد دقیقاً شامل یک مقدار ویژه خواهد بود. توجه می‌کنیم که نتایج متناظر برای ترانواده  $A$  به جای  $A$  نیز قابل بررسی هستند.

## ۷-۶ نکاتی در مورد مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

(۱) با توجه به آنکه دترمینان هر ماتریس اسکالر، قطری، بالا مثلثی یا پایین مثلثی مساوی حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی است، اگر  $A$  ماتریسی اسکالر یا قطری یا بالا مثلثی یا پایین مثلثی باشد درایه‌های واقع بر قطر اصلی مقادیر ویژه  $A$  خواهند بود.

مثال: مقادیر ویژه ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$  کدامند؟

حل: چون ماتریس بالا مثلثی است مقادیر ویژه آن درایه‌های روی قطر اصلی یعنی  $1$  و  $\frac{2}{4}$  و  $\frac{1}{4}$  هستند.

مثال: فرض کنیم  $V$  فضای برداری  $n$  بعدی روی میدان  $\mathbb{F}$  باشد. معادله‌ی مفسر نگاشت همانی روی  $V$  و ریشه‌های آن چیست؟ معادله‌ی مفسر نگاشت صفر و ریشه‌های آن چیست؟

حل: ماتریس نگاشت همانی روی  $V$  ماتریس همانی و ماتریس نگاشت صفر ماتریس صفر است بنابراین داریم:

$$\det(I - \lambda I) = 0 \implies \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\implies (\lambda - 1)^n = 0 \implies \lambda = 1 \text{ مکرر از مرتبه‌ی } n$$

$$\det(Z - \lambda I) = 0 \implies \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\implies \lambda^n = 0 \implies \lambda = 0 \text{ مکرر از مرتبه‌ی } n$$

(۲) برای آنکه ماتریس  $n \times n$ ،  $A$  مقدار ویژه‌ای مساوی صفر داشته باشد لازم و کافی است که معادله‌ی  $AX = 0$  جوابی نابديهی داشته باشد ولی تساوی قبل معادل  $AX = 0$  است و جوابی نابديهی دارد اگر و تنها اگر  $A$  معکوس ناپذیر باشد. بنابراین عدد صفر مقدار ویژه‌ای از  $A$  است اگر و تنها اگر  $A$  معکوس پذیر نباشد.

(۳) اگر مقادیر ویژه  $A$  را  $\lambda_i$  فرض کنیم و  $A$  وارون پذیر باشد (در نتیجه  $\lambda_i \neq 0$ ) مقادیر ویژه ماتریس  $A^{-1}$  برابر  $\frac{1}{\lambda_i}$  هستند اما بردارهای ویژه  $A$  و  $A^{-1}$  یکسان هستند زیرا:

$$AX = \lambda_i X \implies A^{-1}AX = A^{-1}\lambda_i X \implies X = \lambda_i A^{-1}X \implies \frac{1}{\lambda_i}X = A^{-1}X$$

(۴) با توجه به تساوی های زیر

$$0 = \det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A)' = \det(\lambda I - A')$$

نتیجه می گیریم  $A$  و ترانپوز آن یعنی  $A'$  معادله ی مفسر یکسان و در نتیجه مقادیر ویژه ای برابر دارند. (اما بردارهای ویژه لزوماً برابر نیستند).

(۵) اگر ماتریس  $A$  در اسکالر  $k$  ضرب شود مقادیر ویژه آن نیز در  $k$  ضرب می شوند اما بردارهای ویژه تغییر نمی کنند زیرا بنا به خواص ماتریس ها داریم:

$$AX = \lambda X \implies k(AX) = k(\lambda X) \implies (kA)X = (k\lambda)X$$

(۶) اگر ماتریس  $A$  به توان  $m$  برسد مقادیر ویژه آن نیز به توان  $m$  می رسند اما بردارهای ویژه تغییر نمی کنند زیرا می توان نوشت:

$$AX = \lambda X \implies A(AX) = A(\lambda X) \implies A^2 X = \lambda(A X) = \lambda(\lambda X) = \lambda^2 X$$

و حکم با استقرا روی  $m$  به دست می آید.

(۷) در ماتریس  $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$  مقادیر ویژه  $a+b$  و  $a-b$  بوده و راستای بردارهای ویژه  $y \pm x$  است. زیرا

$$\begin{aligned} \lambda^2 - (a+a)\lambda + a^2 - b^2 = 0 &\implies \lambda^2 - (a+b+a-b)\lambda + (a+b)(a-b) = 0 \\ &\implies (\lambda - (a+b))(\lambda - (a-b)) = 0 \\ &\implies \lambda_1 = a+b, \lambda_2 = a-b \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (\lambda - a)x - by = 0 & \lambda_1 = a+b \implies (a+b-a)x - by = 0 \implies x = y \\ -bx + (\lambda - a)y = 0 & \lambda_2 = a-b \implies (a-b-a)x - by = 0 \implies -x = y \end{cases}$$



مثال: بردار ویژه‌ی نظیر کوچکترین مقدار ویژه‌ی ماتریس  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  کدام است؟  
الف)  $(1, 1)$  ب)  $(1, -1)$  ج)  $(1, 2)$  د)  $(2, 1)$

حل:

$$\lambda_1 = a + b = 3, \lambda_2 = a - b = 1$$

$$(\lambda - 2)x - y = 0 \xrightarrow{\lambda=1} -x - y = 0 \implies \text{گزینه ی (ب) صحیح است}$$

۸) اگر مقدار ویژه‌ی ماتریس  $A$  برابر  $\lambda$  باشد مقدار ویژه‌ی ماتریس  $A + mI$  برابر  $\lambda + m$  است زیرا

$$AX = \lambda X \implies AX + mIX = \lambda X + mIX \xrightarrow{IX=X} (A + mI)X = (\lambda + m)X$$

اما بردارهای ویژه یکسان هستند.

مثال: هرگاه  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ ، مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های  $3A^2$ ،  $(A^{-1})^2$  و  $A^2 + 3I$  را به دست

آورید.

حل: ماتریس پایین مثلثی است بنابراین؛ مقادیر روی قطر مقادیر ویژه هستند.

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$$

$$\lambda_{A^2} = 9, 4, 4 \implies \lambda_{3A^2} = 27, 12, 12$$

$$\lambda_{A^{-1}} = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2} \implies \lambda_{(A^{-1})^2} = \frac{1}{27}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{4}$$

$$\lambda_{A^2+3I} = \lambda_{A^2} + 3 = 12, 7, 7$$

۹) اگر در ماتریس با درایه‌های حقیقی  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  درایه‌های  $b$  و  $c$  هم علامت باشند ماتریس دارای دو مقادیر ویژه حقیقی متمایز است (عکس مطلب همیشه درست نیست) زیرا مبین معادله‌ی مفسر اکیداً مثبت می‌شود:

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

$$\Delta = (a + d)^2 - 4ad + 4bc = \underbrace{(a - d)^2}_{\geq 0} + \underbrace{4bc}_{> 0} > 0$$

۱۰) اگر  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ،  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  مقادیر ویژه حقیقی ماتریس و  $\alpha$  زاویه بین بردارهای ماتریس باشد آنگاه  $\tan \alpha = \left| \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{b - c} \right|$  ( $b \neq 0$ ).

برهان. معادله‌ی مفسر را تشکیل داده مقادیر ویژه حاصل را در یکی از معادلات دستگاه همگن  $(\lambda I - A)X = 0$  قرار می‌دهیم تا بردارهای ویژه به دست آیند. ضریب زاویه این دو بردار را  $m_1$  و  $m_2$  نامیده تا نژانت زاویه‌ی بین آنها را به دست می‌آوریم:

$$\lambda^2 = (a+d)\lambda + ad - bc = 0 \implies \lambda = \frac{1}{2}(a+d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc})$$

$$\begin{cases} (\lambda - a)x - by = 0 \implies y = \frac{\lambda - a}{b}x \\ -cx + (\lambda - d)y = 0 \end{cases}$$

$$m_1 = \frac{-a + d + \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2b}$$

$$m_2 = \frac{-a + d - \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2b}$$

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \left| \frac{\frac{2\sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2b}}{1 + \frac{(-a+d)^2 - (a-d)^2 - 4bc}{4b^2}} \right| = \left| \frac{\frac{\sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{b}}{1 - \frac{c}{b}} \right| \\ &= \left| \frac{\sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{b - c} \right| = \left| \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{b - c} \right| \end{aligned}$$

نتیجه. اگر مقادیر ویژه‌ی ماتریس دودردو  $A$  متمایز بوده و ماتریس متقارن باشد بردارهای ویژه برهم عمودند.

مثال: کدامیک از دسته بردارهای زیر می‌توانند بردارهای ویژه یک ماتریس متقارن  $2 \times 2$  با مقادیر ویژه غیرمساوی باشند؟

$$\begin{aligned} \text{الف)} & m_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, m_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{ب)} m_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, m_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \text{ج)} & m_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, m_2 \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{د)} m_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}, m_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

حل: فقط درگزینه‌ی (ب) بردارهای ویژه برهم عمودند زیرا ضرب اسکالر آنها برابر صفر است.

تذکره: مقادیر ویژه هر ماتریس متقارن حقیقی اعدادی حقیقی هستند.

برهان. فرض کنیم  $A$  ماتریسی  $n \times n$  متقارن حقیقی و  $\lambda$  مقدار ویژه‌ای دلخواه از آن باشد. می‌خواهیم نشان دهیم  $\lambda$  حقیقی است.

فرض کنیم  $E = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$  بردار ویژه‌ای متناظر با  $\lambda$  باشد، در این صورت  $AE = \lambda E$ . طرفین این

رابطه را از چپ در ماتریس  $1 \times n$ ،  $\bar{E}' = [\bar{e}_1 \bar{e}_2 \dots \bar{e}_n]$  ضرب می‌کنیم، داریم؛

$$\bar{E}' AE = \bar{E}' \lambda E = \lambda \bar{E}' E = \lambda [\bar{e}_1 \bar{e}_2 \dots \bar{e}_n] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \lambda [\bar{e}_1 e_1 + \bar{e}_2 e_2 + \dots + \bar{e}_n e_n] \quad (1)$$

ملاحظه می‌کنیم آخرین مقدار داخل ماتریس  $1 \times 1$  عددی حقیقی است. چون  $A$  ماتریسی حقیقی است می‌توان نوشت:

$$\overline{\bar{E}' AE} = \overline{\bar{E}' A E} = \bar{E}' \bar{A} \bar{E} = E' A \bar{E} \quad (2)$$

$E' A \bar{E}$  ماتریسی  $1 \times 1$  بوده ترانهاده آن نیز  $1 \times 1$  خواهد بود و داریم:

$$E' A \bar{E} = (E' A \bar{E})' = \bar{E}' A' E = \bar{E}' A E \quad (3)$$

$$(2), (3) \implies \overline{\bar{E}' A E} = \bar{E}' A E$$

یعنی ماتریس  $1 \times 1$ ،  $\bar{E}' A E$  حقیقی است. حال به رابطه‌ی (۱) برمی‌گردیم. نشان داده‌ایم که سمت چپ این رابطه عددی حقیقی است و می‌دانیم سمت راست نیز حاصل ضرب  $\lambda$  در عددی حقیقی است پس  $\lambda$  باید حقیقی بوده اثبات تمام است.

تذکر: اگر  $A$  ماتریسی حقیقی و متقارن  $n \times n$  باشد بردارهای ویژه‌ی متناظر با مقادیر ویژه‌ی متمایز برهم عمودند.

برهان. فرض کنیم  $\lambda$  و  $\mu$  دو مقدار ویژه متمایز و  $E = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$  و  $G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$  بردارهای ویژه

متناظر با آنها باشند. نشان می‌دهیم این بردارها برهم عمودند یعنی  $e_1 g_1 + e_2 g_2 + \dots + e_n g_n = 0$  است. داریم:

$$E'G = [e_1 e_2 \dots e_n] \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} = [e_1 g_1 + e_2 g_2 + \dots + e_n g_n]$$

چون  $AE = \lambda E$  و  $AG = \mu G$  می‌توان نوشت:

$$\lambda E'G = (\lambda E)'G = (AE)'G = E'A'G = E'(AG) = E'(\mu G) = \mu E'G$$

در نتیجه  $(\lambda - \mu)E'G = 0$  ولی  $\lambda - \mu \neq 0$  است پس ماتریس  $1 \times 1$ ،  $E'G$  دارای عضو صفر است.

(۱۱) اگر  $A$  ماتریسی  $2 \times 2$  یا  $3 \times 3$  قطری با درایه‌های روی قطر متمایز باشد راستای بردارهای ویژه محورهای مختصات است.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \implies \lambda_1 = a_{11}, \lambda_2 = a_{22}, \lambda_3 = a_{33}$$

$$\begin{cases} (\lambda - a_{11})x = 0 \\ (\lambda - a_{22})y = 0 \\ (\lambda - a_{33})z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda = a_{11} \implies \text{دلخواه } x, y = 0, z = 0 \implies \text{محور } x \text{ ها} \\ \lambda = a_{22} \implies \text{دلخواه } y, x = 0, z = 0 \implies \text{محور } y \text{ ها} \\ \lambda = a_{33} \implies \text{دلخواه } z, x = 0, y = 0 \implies \text{محور } z \text{ ها} \end{cases}$$

(۱۲) اگر  $A$  ماتریسی  $n \times n$  اسکالر باشد هر بردار دلخواه بردار ویژه این ماتریس است.

$$A = \begin{bmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & k & \\ & & & \ddots \\ & & & & k \end{bmatrix} \implies \begin{vmatrix} \lambda - k & & & \\ & \lambda - k & & \\ & & \lambda - k & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda - k \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies (\lambda - k)^n = 0 \implies \lambda = k$$

$$\begin{cases} (\lambda - k)x_1 = 0 \\ (\lambda - k)x_2 = 0 \\ (\lambda - k)x_3 = 0 \\ \vdots \\ (\lambda - k)x_n = 0 \end{cases} \xrightarrow{\lambda=k} 0 \cdot x_1 = 0, 0 \cdot x_2 = 0, 0 \cdot x_3 = 0, \dots, 0 \cdot x_n = 0 \implies \text{ها } x_i \text{ دلخواه}$$

$$\implies X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

(۱۳) اگر در ماتریس  $n \times n$ ،  $A$  مجموع درایه‌های هر سطر (و یا مجموع درایه‌های هر ستون) دلخواه

برابر عددی مانند  $s$  باشد آنگاه یکی از مقادیر ویژه‌ی ماتریس برابر  $s$  است:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \sum_{j=1}^n a_{1j} = \sum_{j=1}^n a_{2j} = \dots = \sum_{j=1}^n a_{nj} = s$$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \implies \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

مجموع ستون‌های دوم به بعد را به ستون اول دترمینان اضافه می‌کنیم (مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند):

$$A = \begin{vmatrix} \lambda - \sum_{j=1}^n a_{1j} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ \lambda - \sum_{j=1}^n a_{2j} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda - \sum_{j=1}^n a_{nj} & -a_{n2} & \dots & -a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow A = \begin{vmatrix} \lambda - S & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ \lambda - S & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda - S & -a_{n2} & \dots & -a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - S) \begin{vmatrix} 1 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 1 & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -a_{n2} & \dots & -a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = S \text{ یکی از مقادیر ویژه است}$$

۱۴) در ماتریس‌های قطر فرعی از مرتبه‌ی فرد همواره درایه‌ی وسط یکی از مقادیر ویژه‌ی ماتریس

است. به‌طور مثال در ماتریس  $A = \begin{bmatrix} \circ & \circ & a \\ \circ & b & \circ \\ c & \circ & \circ \end{bmatrix}$  یکی از مقادیر ویژه برابر  $b$  (و با تجزیه معادله مفسر و یا تقسیم آن بر  $\lambda - b$ ) دو مقدار ویژه دیگر آن  $\pm\sqrt{ac}$  هستند.

مثال: ریشه‌های مشخصه‌ی ماتریس  $\begin{bmatrix} \circ & \circ & \sqrt{2} \\ \circ & 3 & \circ \\ 2\sqrt{2} & \circ & \circ \end{bmatrix}$  کدامند؟

حل:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2, \lambda_3 = \pm\sqrt{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \pm 2 \end{cases}$$

۱۵) اگر  $M = \begin{bmatrix} A_1 & B \\ \circ & A_2 \end{bmatrix}$ ،  $A_1$  و  $A_2$  ماتریس‌های مربع باشند چندجمله‌ای مشخصه‌ی  $M$

مساوی حاصل ضرب چندجمله‌ای مشخصه‌ی  $A_1$  و  $A_2$  است. زیرا

$$\lambda I - M = \begin{bmatrix} \lambda I - A_1 & -B \\ \circ & \lambda I - A_2 \end{bmatrix}$$

چون دترمینان ماتریس بلوکی مثلثی حاصل ضرب دترمینان‌های بلوک‌های قطری است در نتیجه

$$|\lambda I - M| = \begin{vmatrix} \lambda I - A_1 & -B \\ \circ & \lambda I - A_2 \end{vmatrix} = |\lambda I - A_1| |\lambda I - A_2|$$

با تعمیم مطلب بالا می‌توان نتیجه گرفت چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس بلوکی مثلثی

$$M = \begin{bmatrix} A_1 & B & \cdots & C \\ \circ & A_2 & \cdots & D \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \circ & \circ & \cdots & A_n \end{bmatrix}$$

حاصل ضرب چندجمله‌ای‌های مشخصه‌ی  $A_1, A_2, \dots, A_n$  و  $A_n$  است.

مثال: چندجمله‌ای مشخصه‌ی  $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & -9 \\ 1 & 4 & -6 & 4 \\ \circ & \circ & 6 & -5 \\ \circ & \circ & 2 & 3 \end{bmatrix}$  را به دست آورید.

حل: چون  $A$  بلوکی مثلثی با بلوک‌های قطری  $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$  و  $A_2 = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  است، داریم:

$$|\lambda I - A| = |\lambda I_2 - A_1| |\lambda I_2 - A_2| = (\lambda^2 - 6\lambda + 3)(\lambda^2 - 9\lambda + 28)$$

(۱۶) اگر  $A$  و  $B$  ماتریس‌های  $n \times n$  باشند مقادیر ویژه‌ی  $AB$  و  $BA$  مساویند.

حل: می‌دانیم حاصل ضرب ماتریس‌های نامنفرد ماتریسی نامنفرد است. ابتدا ثابت می‌کنیم که احکام زیر هم‌ارزند:

(i) عدد صفر مقدار ویژه  $AB$  است.

(ii)  $AB$  منفرد است.

(iii)  $A$  یا  $B$  منفرد است.

(iv)  $BA$  منفرد است.

(v) عدد صفر مقدار ویژه‌ی  $BA$  است.

حال فرض می‌کنیم  $\lambda$  مقدار ویژه‌ی ناصفری است، در این صورت بردار ناصفر  $v$  وجود دارد به طوری که  $ABv = \lambda v$ . قرار می‌دهیم  $w = Bv$ ، چون  $\lambda \neq 0$  و  $v \neq 0$  در نتیجه  $Aw = ABv = \lambda v \neq 0$  و بنابراین  $w \neq 0$  است. ولی  $w$  بردار ویژه‌ی  $BA$  متناظر با  $\lambda$  است زیرا

$$BAw = BABv = B\lambda v = \lambda Bv = \lambda w$$

در نتیجه  $\lambda$  مقدار ویژه‌ی  $BA$  است. به طور مشابه هر مقدار ویژه‌ی ناصفر  $BA$  مقدار ویژه‌ی  $AB$  است.

(۱۷) اگر  $A$  و  $B$  ماتریس‌های  $m \times n$  و  $n \times m$  باشند چندجمله‌ای مشخصه‌ی  $AB$  و  $BA$  در تساوی زیر صدق می‌کنند:

$$\lambda^n |\lambda I_m - AB| = \lambda^m |\lambda I_n - BA|$$

به خصوص اگر  $m = n$  باشد  $A$  و  $B$ ،  $n \times n$  شده مقادیر ویژه  $AB$  و  $BA$  به دلیل یکی شدن چندجمله‌ای مشخصه برابر می‌شوند.

حل: می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} I_m & \vdots & \circ \\ \dots & \dots & \dots \\ -B & \vdots & \mu I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu I_m & \vdots & A \\ \dots & \dots & \dots \\ B & \vdots & \mu I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu I_m & \vdots & A \\ \dots & \dots & \dots \\ \circ & \vdots & \mu^\vee I_n - BA \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mu I_m & \vdots & -A \\ \dots & \dots & \dots \\ \circ & \vdots & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu I_m & \vdots & A \\ \dots & \dots & \dots \\ B & \vdots & \mu I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu^\vee I_m - AB & \vdots & \circ \\ \dots & \dots & \dots \\ B & \vdots & \mu I_n \end{bmatrix}$$

از طرفین تساوی‌های بالا درمیان می‌گیریم. با فرض  $X = \begin{bmatrix} \mu I_m & \vdots & A \\ \dots & \dots & \dots \\ B & \vdots & \mu I_n \end{bmatrix}$  داریم:

$$\begin{cases} \mu^n \det X = \mu^m \det(\mu^\vee I_n - BA) \xrightarrow{\text{در } \mu^m \text{ ضرب}} \mu^{m+n} \det X = \mu^{\vee m} |\mu^\vee I_n - BA| \\ \mu^n \det X = \mu^n \det(\mu^\vee I_m - AB) \xrightarrow{\text{در } \mu^n \text{ ضرب}} \mu^{m+n} \det X = \mu^{\vee n} |\mu^\vee I_m - AB| \end{cases}$$

طرف چپ تساوی‌های اخیر مساویند پس طرف راست آنها برابر است و اگر قرار دهیم  $\mu^\vee = \lambda$  داریم:

$$\lambda^n |\lambda I_m - AB| = \lambda^m |\lambda I_n - BA|$$

حال اگر  $m = n$  و  $\lambda \neq \circ$  آنگاه  $|\lambda I_m - AB| = |\lambda I_n - BA|$  یعنی چندجمله‌ای‌های مشخصه‌ی  $AB$  و  $BA$  یکی هستند و در نتیجه مقادیر ویژه  $AB$  و  $BA$  مساوی است.

(۱۸) برای یک ماتریس مفروض  $n \times n$  همان‌طور که دیدیم همواره می‌توان چندجمله‌ای مشخصه تشکیل داد، برعکس آیا برای یک چندجمله‌ای مانند

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0$$



می‌توان ماتریسی یافت که  $p(x)$  چندجمله‌ای مشخصه‌ی آن باشد؟ پاسخ به این سؤال مثبت است در واقع هر یک از ماتریس‌های زیر یا ترانهاده‌ی آنها جواب مسأله هستند و کافی است چندجمله‌ای مشخصه‌ی آنها را به دست آورده ملاحظه نمود که همان  $p(x)$  می‌شود:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

این ماتریس‌ها را ماتریس همراه چندجمله‌ای  $p(x)$  (یا ماتریس فروبنیوس) می‌نامند.

**تعریف.** فرض کنیم  $\lambda$  مقدار ویژه‌ای از ماتریس  $A$ ,  $n \times n$  باشد. چندگانگی جبری  $\lambda$  همان چندگانگی  $\lambda$  به عنوان ریشه‌ای از معادله‌ی مفسر تعریف می‌شود. چندگانگی هندسی  $\lambda$  بعد زیرفضای ویژه تولید شده به وسیله‌ی بردارهای ویژه متناظر به  $\lambda$  در نظر گرفته می‌شود.

**۱-۷-۶ قضیه.** فرض کنیم  $\lambda$  مقدار ویژه‌ای از نگاشت خطی  $T: v \rightarrow v$  و فضای  $n$  بعدی  $v$  باشد. در این صورت چندگانگی هندسی  $\lambda$  از چندگانگی جبری آن تجاوز نمی‌کند.

**برهان.** فرض کنیم چندگانگی هندسی  $\lambda$  برابر  $r$  باشد. در این صورت  $\lambda$  شامل  $r$  بردار ویژه مستقل خطی  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  است. مجموعه‌ی  $\{v_1, \dots, v_r\}$  را به پایه‌ی شامل  $n$  بردار  $\{v_1, v_2, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s\}$  از فضای  $v$  توسعه می‌دهیم. داریم:

$$T(v_1) = \lambda v_1$$

$$T(v_2) = \lambda v_2$$

.....

$$T(v_r) = \lambda v_r$$

$$T(w_1) = a_{11}v_1 + \dots + a_{1r}v_r + b_{11}w_1 + \dots + b_{1s}w_s$$

$$T(w_r) = a_{r1}v_1 + \dots + a_{rr}v_r + b_{r1}w_1 + \dots + b_{rs}w_s$$

.....

$$T(w_s) = a_{s1}v_1 + \cdots + a_{sr}v_r + b_{s1}w_1 + \cdots + b_{ss}w_s$$

ماتریس  $T$  نسبت به پایه‌ی فوق‌الذکر عبارت است از:

$$M = \begin{bmatrix} \lambda & \circ & \cdots & \circ & \vdots & a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{s1} \\ \circ & \lambda & \cdots & \circ & \vdots & a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{s2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \circ & \circ & \cdots & \lambda & \vdots & a_{1r} & a_{2r} & \cdots & a_{sr} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \circ & \circ & \cdots & \circ & \vdots & b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{r1} \\ \circ & \circ & \cdots & \circ & \vdots & b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{r2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \circ & \circ & \cdots & \circ & \vdots & b_{1s} & b_{2s} & \cdots & b_{rs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda I_r & \vdots & A \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \circ & \vdots & B \end{bmatrix}$$

که در آن  $A = [a_{ij}]'$  و  $B = [b_{ij}]'$  است. چون  $M$  ماتریس بلوکی مثلثی است، چندجمله‌ای مفسر  $\lambda I_r$  که  $(t - \lambda)^r$  است باید چند جمله‌ای مفسر  $M$  و در نتیجه  $T$  را عاقد کند. بنابراین چندگانگی جبری  $\lambda$  برای نگاشت  $T$  حداقل  $r$  است.

## ۸-۶ قضیه کیلی<sup>۱</sup> - هامیلتون<sup>۲</sup>

هر ماتریس مربع در معادله‌ی مشخصه‌اش صدق می‌کند. (یعنی اگر  $A$  ماتریسی  $n \times n$  و معادله‌ی مشخصه‌اش  $\circ = \circ + c_0 + \cdots + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$  باشد آنگاه  $A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_0I = \circ$  می‌شود).

برهان. اگر  $\Delta(\lambda)$  چندجمله‌ای مشخصه‌ی  $A$  باشد داریم؛

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0.$$

فرض کنیم  $B(\lambda)$  الحاقی کلاسیک ماتریس  $\lambda I - A$  باشد، عناصر  $B(\lambda)$  همسازهای ماتریس  $\lambda I - A$  هستند و لذا چندجمله‌ای‌هایی برحسب  $\lambda$  و با درجه نایبتر از  $n - 1$  می‌باشند، بنابراین

$$B(\lambda) = B_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + B_1\lambda + B_0.$$

2) Cayley

2) Hamilton

که در آن  $B_i$  ها ماتریس هایی  $n \times n$  روی  $\mathbb{R}$  هستند که مستقل از  $\lambda$  می باشند. می توان نوشت:

$$(\lambda I - A)B(\lambda) = |\lambda I - A|I$$

و از آنجا

$$(\lambda I - A)(B_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + B_1\lambda + B_0) = (\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0)I$$

با متحد گرفتن ضرایب توان های نظیر  $\lambda$  خواهیم داشت:

$$B_{n-1} = I$$

$$B_{n-2} - AB_{n-1} = c_{n-1}I$$

$$B_{n-3} - AB_{n-2} = c_{n-2}I$$

$$\dots$$

$$B_0 - AB_1 = c_1I$$

$$- AB_0 = c_0I$$

از ضرب معادلات ماتریسی بالا به ترتیب در  $I$  و  $A$ ،  $\dots$ ،  $A^{n-1}$  و  $A^n$  به دست می آوریم

$$A^n B_{n-1} = A^n$$

$$A^{n-1} B_{n-2} - A^n B_{n-1} = c_{n-1} A^{n-1}$$

$$A^{n-2} B_{n-3} - A^{n-1} B_{n-2} = c_{n-2} A^{n-2}$$

$$\dots$$

$$AB_0 - A^n B_1 = c_1 A$$

$$- AB_0 = c_0 I$$

مجموع روابط بالا نتیجه می دهد

$$0 = A^n + c_{n-1} A^{n-1} + c_{n-2} A^{n-2} + \dots + c_1 A + c_0 I$$

□ یعنی  $\Delta(A) = 0$ ، یعنی  $A$  در معادله ی مشخصه اش صدق می کند.

یکی از کاربردهای قضیه کیلی-هامیلتون پیدا کردن وارون ماتریس ها است.

مثال: نشان دهید ماتریس زیر در معادله‌ی مشخصه‌اش صدق می‌کند

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

حل:

$$\lambda^2 - (tr A)\lambda + |A| = 0 \implies A^2 - (0 + 3)A + (0 + 2)I \stackrel{?}{=} 0$$

$$A^2 - 3A + 2I \stackrel{?}{=} 0 \quad (*)$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(*) \implies \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+2 & 6-6 \\ -3+3 & 7-9+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مثال: ماتریس  $B$  را وارون  $A$  می‌نامیم هرگاه  $AB = I$  با استفاده از قضیه‌ی کیلی-هامیلتون وارون ماتریس مثال قبل را به دست آورید.

حل:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \implies \dots \implies A^2 - 3A + 2I = 0$$

$$\implies A(A - 3I) = -2I \implies A\left(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I\right) = I$$

$$\implies A \text{ وارون} = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

حال کاربردی بسیار جالب را ارائه می‌دهیم که در بسیاری از شاخه‌های ریاضیات، فیزیک و مسائل مهندسی، معادلات دیفرانسیل و سیستم‌های دینامیکی دارای محمل است.

## ۹-۶ محاسبه‌ی $A^k X$

می‌خواهیم  $A^k X$  را برای ماتریس  $n \times n$ ،  $A$  و بردار  $n$  مؤلفه‌ای  $X$  به دست آوریم. بدیهی است این محاسبه برای مقادیر بزرگ  $k$  یا  $n$  مشکل خواهد بود. فرض کنیم  $X$  بتواند ترکیب خطی بردارهای ویژه‌ی

$v_1, v_2, \dots, v_m$  از  $A$  نوشته شود مثلاً  $X = c_1 v_1 + \dots + c_m v_m$ . اگر  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  مقادیر ویژه‌ی متناظر باشند آنگاه

$$AX = A(c_1 v_1 + \dots + c_m v_m) = c_1 A v_1 + \dots + c_m A v_m = c_1 \lambda_1 v_1 + \dots + c_m \lambda_m v_m$$

این عمل را با به‌کار بردن  $Ax$  به‌جای  $X$ ،  $k-1$  دفعه تکرار کرده به‌دست می‌آوریم؛

$$A^k X = c_1 \lambda_1^k v_1 + \dots + c_m \lambda_m^k v_m$$

دقت می‌کنیم که با شناخت مقادیر  $c_i$  ها و  $\lambda_i$  ها و سپس دانستن  $v_i$  ها محاسبه‌ی  $A^k X$  بسیار ساده می‌شود، زیرا سمت راست رابطه‌ی بالا شامل ضربی ماتریسی نیست.

$$\text{مثال: مطلوب است محاسبه‌ی } \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^4 \begin{bmatrix} -6 \\ -8 \end{bmatrix}$$

حل:  $(2, 1)$  و  $(1, -2)$  بردارهای ویژه‌ی ماتریس و  $-2$  و  $3$  مقادیر ویژه هستند. داریم

$$\begin{bmatrix} -6 \\ -8 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$\text{مطلوب عبارت} = 2 \times (-2)^4 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} - 4 \times 3^4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -51976 \\ -27268 \end{bmatrix}$$

تذکره: روش فوق وقتی قابل استفاده است که  $X$  بتواند ترکیبی خطی از بردارهای ویژه‌ی  $A$  نوشته شود.

## ۱۰-۶ جمعیت شناسی

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه در بررسی و پیش‌بینی رفتار زنجیره‌های مارکوف در جمله‌های دور مورد استفاده قرار می‌گیرند این کاربرد در جمعیت‌شناسی ارائه خواهد شد.

در بخش ۲.۶ جابجایی‌های جمعیت مورد مطالعه قرار گرفت. ملاحظه کردیم که توزیع جمعیت سالانه می‌تواند با دنباله‌ای از بردارهای  $x_0, x_1 (= P x_0), x_2 (= P x_1), x_3 (= P x_2), \dots$  تشریح شود.  $P$  ماتریس احتمال‌های تغییر وضعیت است که ما را از برداری در دنباله به بردار دیگر می‌برد. این نوع دنباله‌ها یا زنجیره‌های متشکل از بردارها، زنجیره مارکوف نامیده می‌شوند. زنجیره‌های مارکوف‌ای بیشتر مورد توجه‌اند که

دنباله‌ی  $x_0, x_1, x_2, \dots$  به بردار ثابت  $x$  همگراست و در آن  $Px = x$ . پس از آن کوچ جمعیت «حالت پایا» به خود گرفته و جمعیت کل شهرها و حومه آنها ثابت باقی می‌ماند و می‌توانیم بنویسیم

$$x_0, x_1, x_2, \dots \rightarrow x$$

از آنجا که هر بردار  $x$  در  $Px = x$  صدق می‌کند، باید بردار ویژه‌ای از  $P$  متناظر با مقدار ویژه‌ی ۱ باشد. اگر بدانیم که چنین برداری وجود دارد اطلاعات مفیدی در مورد توزیع جمعیت بعد از گذشت سال‌های طولانی خواهیم داشت.

رده‌ی خاصی از زنجیرهای مارکوف دارای این خواص ذکر شده می‌باشد. این رده را تعریف کرده خواص آنها را بررسی می‌کنیم و نتایج حاصل را در مدل کوچ جمعیت به منظور پیش‌بینی وضعیت سال‌های دورآینده به‌کار می‌بریم.

تعریف. ماتریس تغییر وضعیت  $P$  از یک زنجیر مارکوف، منتظم نامیده می‌شود هرگاه توانی از  $P$  وجود داشته باشد که در آن همه‌ی درایه‌ها اکیداً مثبت باشند. در این حالت، زنجیر را یک زنجیر مارکوف منتظم می‌نامیم.

مثال: کدامیک از ماتریس‌های زیر منتظم هستند؟

$$C = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0.6 & 1 \end{bmatrix} \text{ (ج) } \quad B = \begin{bmatrix} 0.7 & 1 \\ 0.3 & 0 \end{bmatrix} \text{ (ب) } \quad A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0.7 & 0.4 \end{bmatrix} \text{ (الف)}$$

حل: همه‌ی درایه‌های  $A$  مثبت هستند پس  $A$  منتظم است.

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0.79 & 0.7 \\ 0.21 & 0.3 \end{bmatrix} \Rightarrow B \text{ منتظم است}$$

$$C^2 = \begin{bmatrix} 0.16 & 0 \\ 0.84 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C^3 = \begin{bmatrix} 0.064 & 0 \\ 0.936 & 1 \end{bmatrix}, \dots$$

عنصر واقع در سطر اول ستون دوم همیشه صفر باقی می‌ماند، پس نتیجه می‌گیریم،  $C$  منتظم نیست. قضیه‌ی زیر، که آن را بدون اثبات می‌پذیریم اطلاعاتی در مورد رفتار زنجیرهای مارکوف منتظم در جمله‌های دور ارائه می‌دهد.

**۶-۱۰-۱ قضیه.** زنجیر مارکوفی با بردار اولیه  $x_0$  و ماتریس تغییر وضعیت  $P$  را در نظر

می‌گیریم. در این صورت

$$x(1) \rightarrow x_0, x_1, x_2, \dots \text{ که در آن } x \text{ در } Px = x \text{ صدق می‌کند.}$$

(۲)  $Q \rightarrow P, P^2, P^3, \dots$  که در آن  $Q$  ماتریسی تصادفی است.

ستون‌های  $Q$  با هم برابرند و همه بردارهای ویژه  $P$  متناظر با  $\lambda = 1$  هستند. این قضیه را برای تحلیل کوچ جمعیت به کار می‌بریم.

مثال: پیشرفت‌های کوچ جمعیت بین شهرها و حومه‌های آمریکا را بعد از گذشت سال‌های متمادی مشخص کنید.

حل: مدلی را که قبلاً بررسی کردیم یادآوری می‌کنیم. جمعیت شهرها و حومه‌های آمریکا در سال ۲۰۰۰ با بردار  $x_0$  به صورت زیر (برحسب واحد یک میلیون) و جمعیت در سال‌های بعدی با زنجیر مارکوف با ماتریس تغییر وضعیت  $P$  به شکل زیر داده می‌شود

$$x_0 = \begin{bmatrix} 58 \\ 14244 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{جمعیت‌های اولیه} \\ \text{شهر} \\ \text{حومه} \end{matrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0.96 & 0.01 \\ 0.04 & 0.99 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{(از)} \\ \text{شهر} \\ \text{حومه} \end{matrix}$$

تمام درایه‌های  $P$  اکیداً مثبت هستند، زنجیر منتظم است و قضیه‌ی قبل را می‌توانیم برای پیشرفت در سال‌های طولانی بعدی مورد استفاده قرار دهیم. مطابق این قضیه  $P$  مقدار ویژه‌ی برابر ۱ داشته و بردار «حالت پایا» بردار ویژه‌ی متناظر است. بنابراین

$$Px = x \implies (P - I)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0.96 - 1 & 0.01 \\ 0.04 & 0.99 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \implies \begin{cases} -0.04x_1 + 0.01x_2 = 0 \\ 0.04x_1 - 0.01x_2 = 0 \end{cases}$$

داریم  $x_2 = 4x_1$ . جواب‌های این دستگاه معادلات عبارتند از:  $x_1 = r$  و  $x_2 = 4r$  که در آن  $r \in \mathbb{R}$

است. بنابراین بردارهای ویژه‌ی  $P$  متناظر با  $\lambda = 1$  بردارهای غیرصفر به فرم  $r \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$  هستند.

بردار حالت پایای  $x$  به صورت ذکر شده است. فرض کنیم کل جمعیت سالیانه طی سال‌ها تغییر نکند.

در نتیجه مجموع اعضای  $x$  و  $x_0$  مساویند.

$$r + 4r = 58 + 142 \implies r = 40 \implies x = \begin{bmatrix} 40 \\ 160 \end{bmatrix}$$

و بنابراین پیش‌بینی‌ها عبارتند از:

میلیون ۴۰  $\rightarrow$  جمعیت شهرهای آمریکا

میلیون ۱۶۰  $\rightarrow$  جمعیت حومه‌ها

قضیه‌ی ذکر شده در مورد پیشرفت‌های سال‌های بعدی اطلاعات مفیدی نتیجه می‌دهد. هر ستون از ماتریس  $Q$  بردار ویژه‌ی متناظر با مقدار ویژه‌ی ۱ است. فرض کنیم  $Q = \begin{bmatrix} S & S \\ 4S & 4S \end{bmatrix}$ ، چون  $Q$  ماتریسی تصادفی است مجموع درایه‌های هر ستون مساوی یک است، پس

$$S + 4S = 1 \implies S = 0.2$$

و در نتیجه

$$\begin{matrix} P & P^T & P^T & Q \\ \begin{bmatrix} 0.96 & 0.1 \\ 0.04 & 0.99 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 0.92 & 0.2 \\ 0.08 & 0.98 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 0.89 & 0.3 \\ 0.11 & 0.97 \end{bmatrix} \dots \rightarrow & \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.8 & 0.8 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

اگر روی درایه‌ی واقع در سطر دوم و ستون اول دقت کنیم (به‌طور مثال)، دنباله‌ی زیر به دست می‌آید

$$0.04, 0.08, 0.11, \dots \rightarrow 0.8$$

این‌ها احتمال‌های کوچ از شهر به حومه در یکسال، دو سال، سه سال و ... هستند.

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{شهر} & \text{حومه} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{شهر} \\ \text{حومه} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.8 & 0.8 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

این احتمال‌ها مستقل از وضعیت ابتدایی هستند و این خود مشخصه‌ای از زنجیرهای مارکوف منتظم است.

## ۱۱-۶ معادلات تفاضلی

فرض کنیم  $a_1, a_2, a_3, \dots$  دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. این دنباله می‌تواند با جمله‌ی  $n$ ام خود ارائه شود.

به‌طور مثال:  $a_n = n^2 + 1$  که با قرار دادن  $n = 1, 2, 3, \dots$  جملات دنباله را به صورت  $2, 5, 10, 17, \dots$

خواهیم داشت، به‌علاوه هر جمله‌ی خاص نیز به‌آسانی به دست می‌آید.

به‌طور مثال: اگر  $a_{20}$  را بخواهیم داریم:

$$n = 20 \implies a_{20} = (20)^2 + 1 = 401$$



عموماً در بحث دنباله‌ها جمله‌هایی از ابتدا همراه با ارتباطی بین چند جمله دنباله داده می‌شوند. به طور مثال

$$\begin{cases} a_1 = 0, a_2 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}; n = 3, 4, 5, \dots \end{cases}$$

چنین معادله‌ای را معادله‌ی تفاضلی (یا رابطه‌ای بازگشتی) نامیده و جملات داده شده را شرط‌های آغازی می‌گویند. بقیه جملات را می‌توان از روی شرط‌های آغازی و معادله‌ی تفاضلی به دست آورد. به طور مثال:

$$n = 3 \implies a_3 = 2a_2 + 3a_1 = 2(1) + 3(0) = 2$$

$$n = 4 \implies a_4 = 2a_3 + 3a_2 = 2(2) + 3(1) = 7$$

$$n = 5 \implies a_5 = 2a_4 + 3a_3 = 2(7) + 3(2) = 20$$

ولی نمی‌توان با روش بالا به آسانی و به سرعت جمله‌ی خاصی مانند  $a_{20}$  را به دست آورد و باید جمله‌ی عمومی یا  $n$ ام را به دست آورد. جمله‌ی  $n$ ام را جواب معادله تفاضلی می‌نامیم.

معادله‌ی تفاضلی  $a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2}$  را با  $n = 3, 4, 5, \dots$  و  $p, q \in \mathbb{R}$  در نظر می‌گیریم. جملات  $a_1$  و  $a_2$  را نیز معلوم فرض می‌کنیم (جملات آغازی). این معادله را خطی می‌نامیم زیرا  $a_i$ ها با توان یک ظاهر شده‌اند. مرتبه معادله‌ی نیز دو است زیرا  $a_n$  برحسب دو جمله‌ی  $a_{n-1}$  و  $a_{n-2}$  بیان شده است. رابطه‌ی دومی ایجاد می‌کنیم  $b_n = a_{n-1}$  و در نتیجه روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} a_n = pa_{n-1} + qb_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} \end{cases} \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

در فرم ماتریسی

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

اگر فرض کنیم  $X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$  و  $A = \begin{bmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  داریم  $X_n = AX_{n-1}$  در نتیجه

$$X_n = AX_{n-1} = A^2 X_{n-2} = A^3 X_{n-3} = \dots = A^{n-2} X_2, \quad X_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

در بسیاری از کاربردها  $A$  مقادیر ویژه متمایز  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  دارد و در نتیجه دو بردار ویژه مستقل خطی خواهد داشت. لذا می‌تواند قطری شود. فرض کنیم  $C$  ماتریسی است که ستون‌هایش بردارهای ویژه مستقل خطی  $A$  هستند و

$$D = C^{-1}AC = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{n-2} = (CDC^{-1})^{n-2} = (CDC^{-1})(CDC^{-1}) \dots (CDC^{-1})$$

$$\Rightarrow A^{n-2} = CD^{n-2}C^{-1} = C \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}^{n-2} C^{-1} = C \begin{bmatrix} \lambda_1^{n-2} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-2} \end{bmatrix} C^{-1}$$

و در نتیجه

$$X_n = C \begin{bmatrix} \lambda_1^{n-2} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-2} \end{bmatrix} C^{-1} X_2$$

مثال: معادله‌ی تفاضلی  $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$  را برای  $n = 3, 4, 5, \dots$  با شرط‌های اولیه  $a_1 = 0$  و  $a_2 = 1$  حل کنید. در نهایت  $a_{15}$  را مشخص کنید.

حل: فرض کنیم

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \\ b_n = a_{n-1} \end{cases} \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

در نتیجه

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \quad ; \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -1, v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \lambda_2 = 3, v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} &= C \begin{bmatrix} \lambda_1^{n-2} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-2} \end{bmatrix} C^{-1} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^{n-2} & 0 \\ 0 & 3^{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

زیرا  $b_2 = a_1 = 0$  پس

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (-1)^{n-2} + 3(3)^{n-2} \\ (-1)(-1)^{n-2} + 3^{n-2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (-1)^{n-2} + 3^{n-1} \\ (-1)^{n-1} + 3^{n-2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{4} [(-1)^{n-2} + 3^{n-1}] \quad ; \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

$$n = 15 \Rightarrow a_{15} = \frac{1}{4} [(-1)^{13} + 3^{14}]$$

مثال: دنباله‌ی فیبوناچی<sup>۱</sup> تعریف شده به‌طور بازگشتی به‌وسیله  $a_0 = 0$  و  $a_1 = 1$  و برای  $n \geq 0$ ،  
 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$  را در نظر می‌گیریم. جمله‌ی عمومی این دنباله را به‌دست آورید.

حل: فرض می‌کنیم

$$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} \\ b_{n+2} = a_{n+1} \end{cases}$$

در این صورت با فرض  $X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$  و  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  داریم  $X_{n+2} = AX_{n+1}$ . مقادیر ویژه‌ی  $A$  جواب‌های  $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$  یعنی  $\lambda_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$  و  $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$  هستند. بردارهای ویژه  $\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \end{bmatrix}$  می‌باشند. در نتیجه

$$\begin{aligned} X_n = \lambda^n X_0 &\Rightarrow \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\right)^n \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\right)^n \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow a_n = \alpha \frac{1}{2^n} (1 + \sqrt{5})^n + \beta \frac{1}{2^n} (1 - \sqrt{5})^n \end{aligned}$$

$$\begin{cases} n = 0 \Rightarrow 0 = a_0 = \alpha + \beta \\ n = 1 \Rightarrow 1 = a_1 = \frac{\alpha}{2}(1 + \sqrt{5}) + \frac{\beta}{2}(1 - \sqrt{5}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \alpha\sqrt{5} + \beta - \beta\sqrt{5} = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \beta = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

1) Fibonacci

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}) \right]^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \frac{1}{2} (1 - \sqrt{5}) \right]^n$$

مثال: دنباله‌ای از کسرهای به فرم

$$2, 2 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}, \dots$$

را در نظر می‌گیریم. جمله‌ی عمومی این دنباله را به دست آورید.

حل: جمله‌ی عمومی دنباله را با  $\frac{a_n}{b_n}$  نشان می‌دهیم در این صورت داریم

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = 2 + \frac{1}{\frac{a_n}{b_n}} = \frac{2a_n + b_n}{a_n}$$

و از آنجا

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases} \quad X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow X_{n+1} = AX_n$$

مقادیر ویژه  $A$  جواب‌های معادله‌ی  $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$  یعنی  $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$  و  $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$  و

بردارهای ویژه  $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 + \sqrt{2} \end{bmatrix}$  و  $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 - \sqrt{2} \end{bmatrix}$  هستند. در نتیجه

$$X_n = \lambda^n X_0 \Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = (1 + \sqrt{2})^n \begin{bmatrix} 1 \\ -1 + \sqrt{2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = (1 - \sqrt{2})^n \begin{bmatrix} 1 \\ -1 - \sqrt{2} \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$a_n = \alpha(1 + \sqrt{2})^n + \beta(1 - \sqrt{2})^n = b_{n+1}$$

$$\begin{cases} n = 1 \Rightarrow 2 = a_1 = \alpha + \alpha\sqrt{2} + \beta - \beta\sqrt{2} \\ n = 2 \Rightarrow \frac{5}{2} = a_2 = \alpha + 2\alpha + 2\alpha\sqrt{2} + \beta + 2\beta - 2\beta\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{7\sqrt{2} - 6}{8}, \quad \beta = \frac{-7\sqrt{2} - 6}{8}$$

از آنجا  $a_n$ ، در نتیجه  $b_n = a_{n-1}$  به دست آمده و  $\frac{a_n}{b_n}$  مشخص می‌شود.

تذکر: اگر در مطالب بالا به طور مثال،  $X_n = AX_{n-1}$ ، چون  $X_n = AX_{n-2} = AX_{n-1}$  و ... می توان نتیجه گرفت:

$$X_n = A^{n-2} X_2$$

تذکر: پس از تشکیل معادله‌ی مشخصه‌ی  $A$  اگر ریشه‌ها متمایز نباشند از تذکر قبل استفاده کرده  $X_n$  را به دست می آوریم. این خود مستلزم به دست آوردن توان‌های بالای  $A$  است. برای آنکه بتوانیم توان‌های بالای  $A$  را به دست آوریم فرض کنیم  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  در این صورت چند جمله‌ای مشخصه‌ی  $A$  عبارت است از:

$$f(X) = X^2 - (a+b)X + ad - bc$$

از طرفی

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{bmatrix} = (a+b) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - (ad - bc) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= (a+d)A - (ad - bc)I_2 \end{aligned}$$

یعنی  $f(A) = 0$ . برای  $n \geq 2$  عبارت تقسیم  $X^n$  را بر  $f(X)$  در نظر می گیریم. چون  $f$  از درجه‌ی دو است داریم  $X^n = f(X)q(X) + \alpha_1 X + \alpha_2$  با قرار دادن  $A$  در این رابطه و توجه به آنکه  $f(A) = 0$  داریم:

$$A^n = \alpha_1 A + \alpha_2 I_2$$

$\alpha_1$  و  $\alpha_2$  را به روش زیر محاسبه می کنیم. اگر از طرفین رابطه  $X^n = f(X)q(X) + \alpha_1 X + \alpha_2$  مشتق گرفته و  $\lambda$  یعنی تنها مقدار ویژه‌ی  $A$  را جایگزین  $X$  نماییم چون  $f(\lambda) = 0$  است می توان نوشت

$$n\lambda^{n-1} = \alpha_1$$

حال  $\lambda$  را به جای  $X$  در  $X^n = f(X)q(X) + \alpha_1 X + \alpha_2$  قرار داده با توجه به  $f(\lambda) = 0$  داریم:

$$\lambda^n = \alpha_1 \lambda + \alpha_2 = n\lambda^n + \alpha_2 \implies \alpha_2 = (1 - n)\lambda^n$$

و در نهایت نتیجه می شود

$$A^n = n\lambda^{n-1} A + (1 - n)\lambda^n I_2$$

مثال: دترمینان ماتریس  $n \times n$  زیر را به دست آورید:

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

حل: فرض کنیم  $a_n = \det A_n$  و نسبت به سطر اول بسط می‌دهیم

$$a_n = 2a_{n-1} - \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix} = 2a_{n-1} - a_{n-2}$$

حال می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - b_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} \end{cases}, X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies X_n = AX_{n-1}$$

معادله‌ی مفسر  $A$  به صورت  $(\lambda - 1)^2 = 0$  بوده فقط یک مقدار ویژه‌ی مساوی با یک دارد. حال می‌توان نوشت:

$$A^n = n\lambda^{n-1}A + (\lambda - n)\lambda^n I_r \xrightarrow{\lambda=1} A^n = nA + (\lambda - n)I_r = \begin{bmatrix} n+1 & -n \\ n & \lambda - n \end{bmatrix}$$

$$X_n = A^{n-2}X_2 \implies \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 & -n+2 \\ n-2 & 3-n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix}$$

( $X_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$  است) در نتیجه مشاهده می‌شود

$$\det A_n = a_n = n + 1$$

## ۱۲-۶ قطری کردن ماتریس‌ها

فرض کنیم  $A$  و  $B$  ماتریس‌های مربع هم اندازه باشند. می‌گوییم  $B$  متشابه با  $A$  است هرگاه ماتریس وارون‌پذیر  $C$  وجود داشته باشد به طوری که  $B = C^{-1}AC$ .

مثال: ماتریس‌های  $A$  و  $C$  زیر را در نظر می‌گیریم.  $C$  وارون‌پذیر است. تبدیل تشابه  $C^{-1}AC$  را برای تبدیل  $A$  به  $B$  به کار ببرید.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

حل:

$$\begin{aligned} B = C^{-1}AC &= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & -10 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

تعریف. ماتریس مربع  $A$  قطری شدنی نامیده می‌شود هرگاه ماتریس  $C$  وجود داشته باشد به طوری که  $D = C^{-1}AC$  ماتریسی قطری باشد.

۱-۱۲-۶ قضیه. فرض کنیم  $A$  ماتریسی  $n \times n$  باشد.

الف) اگر  $A$  دارای  $n$  بردار ویژه مستقل خطی باشد، قطری شدنی است. ماتریس  $C$  که ستون‌هایش  $n$  بردار مستقل خطی ویژه هستند در  $C^{-1}AC$  به کار رفته، ماتریس قطری  $D$  را نتیجه می‌دهد. درایه‌های قطری  $D$  همان مقادیر ویژه  $A$  هستند.

ب) اگر  $A$  قطری شدنی باشد آنگاه  $n$  بردار ویژه مستقل خطی خواهد داشت.

برهان. فرض کنیم  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  مقادیر ویژه‌ی نه لزوماً متمایز  $A$  باشند که متناظر با آنها بردارهای ویژه مستقل خطی  $v_1, \dots, v_n$  هستند. اگر  $C$  ماتریسی باشد که  $v_i$ ها ستون‌هایش هستند. چون

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \text{ و } \dots \text{ و } Av_n = \lambda_n v_n \text{ با فرض } C = [v_1 \dots v_n] \text{ می‌توان نوشت}$$

$$AC = A[v_1 \dots v_n] = [Av_1 \dots Av_n] = [\lambda_1 v_1 \dots \lambda_n v_n]$$

$$= [v_1 \dots v_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

چون ستون‌های  $C$ ، بردارهای مستقل خطی هستند پس  $C$  وارون‌پذیر است و در نتیجه

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

بنابراین اگر ماتریس  $n \times n$ ،  $A$  دارای  $n$  بردار ویژه مستقل خطی باشد این بردارها می‌توانند ستون‌های ماتریسی مانند  $C$  قرار بگیرند تا  $A$  را قطری کند. در ماتریسی که قطری است درایه‌های روی قطر اصلی، مقادیر ویژه  $A$  هستند.

(ب) عکس مطالب نیز صحیح است. فرض کنیم  $C = [v_1 \dots v_n]$  ماتریسی باشد که  $A$  را قطری می‌کند پس اسکالرهای  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  وجود دارند به طوری که

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} \gamma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_n \end{bmatrix}$$

با استدلالی، در طی عکس مراحل حالت قبل داریم:

$$Av_1 = \gamma_1 v_1, \dots, Av_n = \gamma_n v_n$$

$v_1, \dots, v_n$  بردارهای ویژه  $A$  هستند. چون  $C$  وارون‌پذیر است این بردارها (یعنی ستون‌های  $C$ ) مستقل خطی‌اند. در نتیجه ماتریس  $A$  قطری شدنی است و دارای  $n$  بردار ویژه مستقل خطی است.  $\square$

مثال: نشان دهید ماتریس  $A = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$  قطری شدنی است.

ماتریس قطری  $D$  متشابه با  $A$  را پیدا کنید. تبدیلی را که  $A$  را قطری می‌سازد به دست آورید.

حل:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \implies \lambda_1 = 2, v_1 = r \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda_2 = -1, v_2 = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



چون ماتریس  $A$  دو بردار ویژه‌ی مستقل خطی دارد پس قطری شدنی است.

$A$  با ماتریس  $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  متشابه است.

$$\begin{aligned} C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} &\Rightarrow C^{-1}AC = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = D \end{aligned}$$

### ۱۳-۶ کاربرد قطری کردن ماتریس‌ها

از قطری کردن ماتریس‌ها می‌توان در محاسبه‌ی توان‌های ماتریس‌ها استفاده کرد. اگر  $A$  متشابه با ماتریس قطری تجت تبدیل  $C^{-1}AC$  باشد داریم؛

$$\begin{aligned} D = C^{-1}AC &\Rightarrow D^k = (C^{-1}AC)^k = \underbrace{C^{-1}ACC^{-1}AC \dots C^{-1}AC}_{k \text{ بار}} = C^{-1}A^kC \\ &\Rightarrow D^k = C^{-1}A^kC \Rightarrow A^k = CD^kC^{-1} \end{aligned}$$

یادآور می‌شویم محاسبه توان‌های قطری  $D$  آسان است و فقط کافی است درایه‌های روی قطرش را به آن توان برسانیم.

مثال: فرض کنیم  $A = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$  است مطلوب است  $A^9$ .

حل: در این مثال کافیهست  $C$  و  $D$  را به دست آوریم. از مثال‌های قبل

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^9 = CD^9C^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 512 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -514 & -1026 \\ 513 & 1025 \end{bmatrix}$$

مثال: ثابت کنید ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$  قطری پذیر نیست.

حل:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \implies (\lambda - 2)^2 = 0 \implies \lambda = 2$$

$$(A - 2I_2)x = 0 \implies \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies 3x_1 - 3x_2 = 0 \implies x_1 = x_2 = r \implies r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

فضای ویژه یک فضای تک بعدی است در حالی که  $A$  ماتریسی  $2 \times 2$  است و دو بردار ویژه مستقل خطی ندارد، در نتیجه  $A$  قطری شدنی نیست.

## ۱۴-۶ قطری سازی متعامد

در حالتی که  $C$  ماتریسی متعامد است می دانیم  $C^{-1} = C^t$  پس اگر چنین ماتریسی در تبدیل تشابه‌ای مورد استفاده قرار گرفت به صورت  $D = C^t A C$  خواهد بود. محاسبه با این نوع از تبدیل‌های تشابه به صورت طبیعی آسان‌تر از محاسبه‌ی  $D = C^{-1} A C$  است.

تبدیل‌های تشابه متعامد در تبدیل سیستمی از مختصات به سیستم دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرند.

تعریف. ماتریس مربع  $A$  را قطری شدنی متعامد می‌نامیم، هرگاه ماتریس متعامد  $C$  وجود داشته باشد به طوری که  $D = C^t A C$  ماتریسی قطری شود.

**۱-۱۴-۶ قضیه.** فرض کنیم  $A$  ماتریسی مربع است،  $A$  قطری شدنی متعامد است، اگر و تنها اگر ماتریسی متقارن باشد.

برهان. فرض کنیم  $A$  متقارن باشد. مراحل ساخت ماتریس متعامد  $C$  به قسمی که  $D = C^t A C$  قطری باشد به شرح ذیل است:

- (۱) پایه‌ای برای فضای ویژه‌ی  $A$  به دست می‌آوریم.
- (۲) پایه‌ای متعامد برای هر فضای ویژه به دست می‌آوریم (در صورت لزوم با استفاده از فرآیند گرام-اشمیت).
- (۳) فرض کنیم  $C$  ماتریسی است که این بردارهای متعامد ستون‌هایش هستند.
- (۴) ماتریس  $D = C^t A C$  ماتریسی قطری خواهد بود.

برعکس اگر  $A$  قطری‌شدنی متعامد باشد آنگاه ماتریسی متعامد مانند  $C$  وجود دارد به قسمی که  $D = C^t A C$  و  $A = C D C^t$  بنا بر این از آنجا

$$A^t = (C D C^t)^t = (C^t)^t (C D)^t = C D C^t = A$$

پس  $A$  متقارن است.

مثال: ماتریس متقارن  $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$  را به‌طور متعامد قطری کنید.

حل: مشاهده می‌کنیم که

$$\lambda_1 = -۱, v_1 = s \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = ۳, v_2 = r \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

چون  $A$  متقارن است قطری‌پذیر بوده و  $D = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$  می‌شود. فضای ویژه  $v_1$  و  $v_2$  متعامد است. با یک‌ای کردن و قرار دادن آنها در ستون‌های  $C$  داریم:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \implies C^t A C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

## ۱۵-۶ فرم‌های درجه دوم

در این بخش چگونگی کاربرد قطری کردن را در هندسه خواهیم دید. ابتدا ایده‌ی تبدیل مختصات را بیان خواهیم کرد.

### دوران محورهای مختصات

فرض کنیم سیستم محورهای متعامد مختصات  $xy$  داده شده و سیستم متعامد  $x'y'$  از روی آن با دوران به میزان زاویه‌ی  $\theta$  حول مبدا به‌دست آمده باشد. می‌دانیم ارتباط بین  $x$  و  $y$ ،  $x'$  و  $y'$  به‌صورت زیر است

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

در فرم ماتریسی نیز داریم

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

به طور مثال، در دوران به اندازه  $45^\circ$  حول مبدا محورهای مختصات، نقطه‌ی  $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$  به صورت زیر تبدیل می‌گردد

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

## ۱۶-۶ تعریف فرم‌های درجه دوم

عبارت جبری  $ax^2 + bxy + cy^2$  که در آن  $a, b, c$  مقادیر ثابت هستند و فرم درجه دوم نامیده می‌شود. این عبارت جبری را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نوشت

$$ax^2 + bxy + cy^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = X^t AX$$

مثال: عبارت درجه دوم  $5x^2 + 6xy - 4y^2$  را به فرم ماتریسی بنویسید.

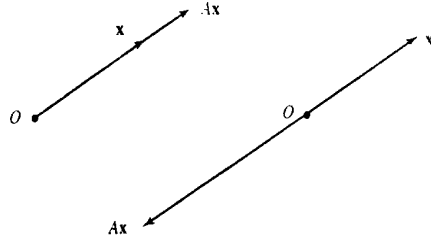
حل:

$$5x^2 + 6xy - 4y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & +3 \\ +3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = X^t AX$$

## ۱۷-۶ شناخت مقاطع مخروطی

می‌خواهیم تحلیلی از نمودار معادلات به فرم  $ax^2 + bxy + cy^2 + d = 0$  داشته باشیم. این معادله شامل فرم درجه دوم  $ax^2 + bxy + cy^2$  است. به فرم ماتریسی می‌توان نوشت

$$X^t AX + d = 0$$



شکل ۶-۶

چون  $A$  ماتریسی متقارن است، ماتریس متعامد  $C$  وجود دارد به طوری که  $C^t A C$  ماتریس قطری  $D$  است. به علاوه  $C$  متعامد است و  $C^{-1} = C^t$  و  $C^t C = I$  در نتیجه

$$X^T A X + d = 0 \implies X^t (C C^t) A (C C^t) X + d = 0$$

$$X^t C (C^t A C) C^t X + d = 0 \implies X^t C D C^t X + d = 0$$

ماتریس  $C^t$  ماتریسی متعامد است و دوران محورهای  $X^t = C^t X$  متعامد را به سیستم متعامد  $X' Y'$  تعریف می‌کند. در سیستم  $X' Y'$  داریم:

$$(X'^t)^t D X'^t + d = 0$$

اگر  $D = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}$  و  $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$  باشد آنگاه

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + d = 0 \implies p x'^2 + q y'^2 + d = 0$$

$$\stackrel{d \neq 0}{\implies} \frac{x'^2}{\frac{-d}{p}} + \frac{y'^2}{\frac{-d}{q}} = 1$$

و این خود معادله یک مقطع مخروطی است.

مثال: فرم زیر را بررسی و نمودار آن را مشخص کنید.

$$6x^2 + 4xy + 9y^2 - 20 = 0$$

حل:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 20 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 10, v_1 = r \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \lambda_2 = 5, v_2 = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 20 = 0$$

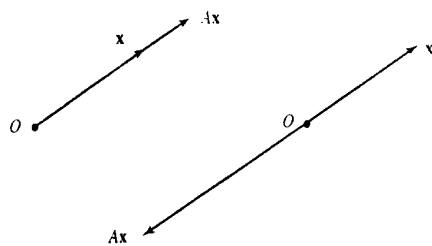
و با تبدیل مختصات

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{4} = 1 \quad a = 2, b = \sqrt{2}$$

و این یک بیضی در مختصات  $x'y'$  است.

برای تعیین میزان دوران می‌توان نوشت

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \theta \simeq 63,5^\circ$$



شکل ۶-۷

## تمرین ۶-۱۷-۱

(۱) ثابت کنید شرایط لازم و کافی برای آنکه همگی مقادیر ویژه‌ی ماتریس  $A$  صفر باشند آن است که

$A$  پوچ توان باشد.

(۲) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی نگاشت خطی مشتق را که روی فضای برداری چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه‌ی  $n$  عمل می‌کند به دست آورید.

(۳) مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی ماتریس‌های  $n \times n$  زیر را به دست آورید:

$$\begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

(۴) می‌دانیم که همواره مقادیر ویژه‌ی دو ماتریس متشابه مساویند، چه ارتباطی بین بردارهای ویژه‌ی آنها برقرار است؟

(۵) چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس‌های زیر را به دست آورده در صورت امکان مقادیر ویژه و بردارهای

ویژه را مشخص کنید:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} & a \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \cdots & x_2 y_n \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & \cdots & x_3 y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \cdots & x_n y_n \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

(۶) اگر  $A$  ماتریسی  $n \times n$  وارون‌پذیر بوده و چندجمله‌ای‌های مشخصه‌ی ماتریس‌های  $A$  و  $A^{-1}$  را  $f(\lambda)$  و  $g(\lambda)$  بنامیم ثابت کنید:

$$g(\lambda) = \frac{(-\lambda)^n}{\det A} \times f\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

(۷) اگر  $A$  ماتریسی  $n \times n$  و  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$  مقادیر ویژه‌ی آن باشند چگونه می‌توان مقدار ویژه  $\lambda_n$  از آن را به دست آورد؟

(۸) اگر  $a_1, \lambda_2, \lambda_3$  و  $\lambda_4$  ریشه‌های متمایز چندجمله‌ای (با ضریب بزرگترین درجه یک)  $f(\lambda)$  باشند، بردارهای ویژه‌ی ماتریس همراه این چندجمله‌ای را به دست آورید.

۹ فرض کنیم  $v$  بردار ویژه‌ای از نگاشت‌های خطی  $f$  و  $g$  باشد نشان دهید  $v$  بردار ویژه‌ی از  $f + g$  است.

۱۰ ثابت کنید اگر  $A$  و  $B$  ماتریس‌های متشابه باشند آنگاه

الف)  $|A| = |B|$

ب)  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$

ج)  $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$

د)  $A^t$  و  $B^t$  متشابه هستند

ه)  $A$  وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر  $B$  وارون‌پذیر باشد

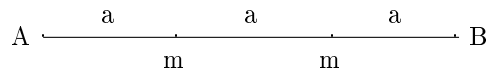
و) اگر  $A$  وارون‌پذیر باشد آنگاه  $A^{-1}$  و  $B^{-1}$  متشابه هستند

۱۱ اگر  $A$  ماتریسی متقارن باشد با ماتریسی قطری متشابه است. آیا این ماتریس قطری یکتا است؟ چرا؟

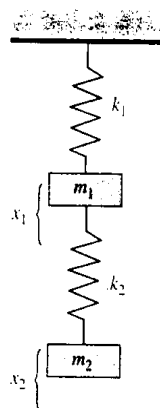
۱۲ نشان دهید اگر  $A$  ماتریسی متقارن باشد که فقط یک مقدار ویژه  $\lambda$  دارد آنگاه  $A = \lambda I$  است.

۱۳ نمودار  $x^2 - 16xy + 11y^2 - 30 = 0$  را بررسی کنید.

۱۴ معادله تفاضلی  $a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2}$  را با شرط‌های اولیه  $a_1 = 3, a_2 = 2$  حل کنید.

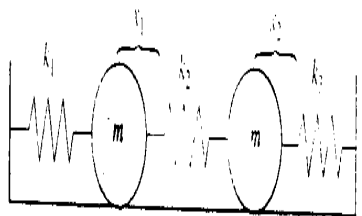


شکل ۸-۶





شکل ۹-۶



شکل ۱۰-۶

## هدف‌های رفتاری و آموزشی پس از مطالعه این فصل دانشجو باید بتواند:

- تبدیل خطی را تعریف و ویژگی‌های آن را بیان کند.
- هسته و برد تبدیل خطی و هسته را بیان و آنها را به دست آورد.
- قضیه بُعد را بیان و آن را ثابت کند.
- رابطه بین نگاشت‌ها و دستگاه معادلات خطی را بداند.
- رابطه بین نگاشت‌ها و دستگاه معادلات خطی را بداند.
- حل دستگاه معادلات خطی همگن و ناهمگن را بداند.
- بردار مختصات را بتواند به دست آورد.
- ماتریس نمایش نگاشت‌های خطی را تعیین کند.
- ماتریس تبدیل پایه‌ها به یکدیگر را به دست آورد.

## فصل هفتم

# نگاشت‌های خطی

در فصل ششم، مفهوم یک نگاشت خطی را معرفی کردیم. در آن جا نگاشت خطی تعریف شده روی  $\mathbb{R}^n$  را به عنوان یک ماتریس در نظر گرفتیم. اکنون این ایده را روی هر فضای برداری تعمیم می‌دهیم. برای مقایسه فضاهای برداری نگاشت‌های خطی را مورد استفاده قرار خواهیم داد. به نظر می‌رسد، در یک جمله ریاضی بتوان گفت، هر فضای برداری، با بعد متناهی برای  $n$ ، همان  $\mathbb{R}^n$  است. در نتیجه غالباً می‌توانیم یک فضای برداری کلی را با در نظر گرفتن  $\mathbb{R}^n$  مورد بحث قرار دهیم.

### ۱-۷ نگاشت‌های خطی، هسته و برد

یک فضای برداری دارای دو عمل تعریف شده روی آن است که آنها را جمع برداری و ضرب اسکالر می‌نامیم. نگاشت‌های خطی بین دو فضای برداری نگاشت‌هایی هستند که ساختار خطی را به معنی زیر حفظ می‌کنند.

تعریف. فرض کنیم  $U$  و  $V$  فضاهای برداری باشند، همچنین  $u_1$  و  $u_2$  بردارهایی در  $U$  و  $c$  یک اسکالر باشند. یک نگاشت  $T: U \rightarrow V$  خطی گفته می‌شود اگر:

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$$

$$T(cu) = cT(u)$$

شرط اول بدین معنی است که  $T$  مجموع دو بردار را به روی مجموع تصویرهای آن دو بردار می‌نگارد. شرط

دوم مستلزم آن است که  $T$  مضرب اسکالر یک بردار را به همان مضرب اسکالر تصویر بردار می‌نگارد. بنابراین اعمال جمع و ضرب اسکالر تحت نگاشت خطی حفظ می‌شوند.

مثال ۱: ثابت کنید نگاشت  $T: R^2 \rightarrow R^2$  یا ضابطه  $T(x, y) = (2x, x + y)$  یک نگاشت خطی است.

حل: اول نشان می‌دهیم  $T$  جمع را حفظ می‌کند فرض کنیم  $(x_1, y_1)$  و  $(x_2, y_2)$  اعضای  $R^2$  باشند، در این صورت

$$\begin{aligned} T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) && \text{(با توجه به جمع بردارها)} \\ &= T(2x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 + y_1 + y_2) && \text{(با توجه به تعریف } T) \\ &= (2x_1, x_1 + y_1) + (2x_2, x_2 + y_2) && \text{(جمع بردارها)} \\ &= T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) && \text{(با توجه به تعریف)} \end{aligned}$$

بنابراین  $T$  جمع برداری را حفظ می‌کند.

اکنون نشان می‌دهیم  $T$  ضرب اسکالر را حفظ می‌کند. فرض کنیم  $c$  یک اسکالر باشد:

$$\begin{aligned} T(c(x_1, y_1)) &= T(cx_1, cy_1) && \text{(با توجه به ضرب اسکالر در بردار)} \\ &= (2cx_1, cx_1 + cy_1) && \text{(با توجه به تعریف } T) \\ &= c(2x_1, x_1 + y_1) && \text{(ضرب اسکالر در بردار)} \\ &= cT(x_1, y_1) && \text{(با توجه به تعریف)} \end{aligned}$$

بنابراین  $T$  ضرب اسکالر را حفظ می‌کند. در نتیجه  $T$  خطی است. مثال بعدی تفاوت بین نگاشت‌های خطی فضاهای برداری و توابع را نشان می‌دهد.

مثال ۲: فرض کنید  $p_n$  فضای برداری متشکل از چندجمله‌ای‌های حقیقی از درجه نایبتر از  $n$  باشد نشان می‌دهیم تبدیل

$$T: P \rightarrow F$$

$$T(ax^2 + bx + c) = (a + b)x + c$$

یک نگاشت خطی است.

حل: فرض کنیم  $px^2 + qx + r$  و  $ax^2 + bx + c$  اعضای دلخواهی از  $P^2$  باشند.

$$\begin{aligned} T((ax^2 + bx + c) + (px^2 + qx + r)) \\ &= T((a+p)x^2 + (b+q)x + (c+r)) \quad (\text{با توجه به جمع برداری}) \\ &= ((a+p+b+q)x + (c+r)) = (a+b)x + c + (p+q)x + r \\ &= T(ax^2 + bx + c) + T(px^2 + qx + r) \end{aligned}$$

پس  $T$  جمع را حفظ می‌کند.

اکنون نشان می‌دهیم  $T$  ضرب اسکالر را حفظ می‌کند. فرض کنیم  $k$  یک اسکالر باشد، پس:

$$\begin{aligned} T(k(ax^2 + bx + c)) &= T(kax^2 + kbx + kc) \quad (\text{تعریف } T) \\ &= (ka + kb)x + kc \quad (\text{با توجه به ضرب اسکالر}) \\ &= k((a+b)x + c) \\ &= kT(ax^2 + bx + c) \quad (\text{تعریف } T) \end{aligned}$$

$T$  ضرب اسکالر را حفظ می‌کند، بنابراین  $T$  یک نگاشت خطی است اکنون با توجه به خواص مشتق که خواننده در درس حساب با آن آشناست نتیجه می‌گیریم مشتق یک نگاشت خطی می‌سازد.

مثال ۳: فرض کنیم  $D$  عملگر مشتق باشد،  $D$  همان  $\frac{d}{dx}$  است که این علامت بیشتر در این متن مورد استفاده قرار می‌گیرد) برای مثال

$$D(4x^3 - 3x^2 + 2x + 1) = 12x^2 - 6x + 2$$

$D$  عضو  $4x^3 - 3x^2 + 2x + 1$  از  $p_3$  را به‌روی عضو  $12x^2 - 6x + 2$  از  $p_2$  می‌نگارد. حال نشان می‌دهیم  $D$  یک عملگر خطی روی  $p_n$  است. (یک نگاشت خطی از یک فضای برداری به‌روی خودش است) فرض کنید  $g$  و  $f$  اعضای  $p_n$  و  $c$  یک اسکالر باشند، خواص مشتق به‌آسانی نتیجه می‌دهد که  $D$  عملگر خطی است:

$$D(f + g) = Df + Dg$$

$$D(cf) = cD(f)$$

می‌دانیم یک نگاشت خطی عبارت است از تابعی از یک فضای برداری (دامنه) به‌توی فضای برداری دیگر (هم دامنه بنامید) است. برای هر نگاشت خطی دو فضای برداری که هسته و تصویر نامیده می‌شوند وجود

دارد. که در این بخش معرفی می‌کنیم و خواص این فضاها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. قضیه زیر یک خاصیت مهم از تبدیلات خطی می‌دهد.

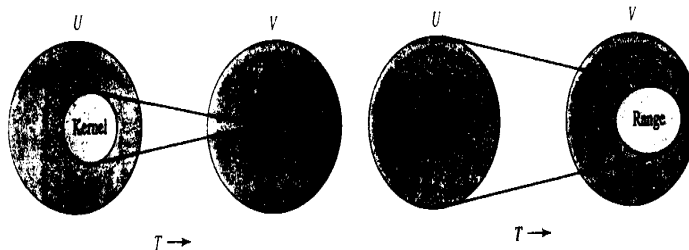
**۱-۱-۷ قضیه.** فرض کنیم  $T : U \rightarrow V$  یک نگاشت خطی باشد. همچنین فرض کنیم  $O_u$  و  $O_v$  بردارهای صفر  $U$  و  $V$  باشند در این صورت  $T(O_u) = O_v$  یعنی یک نگاشت خطی بردار صفر را به بردار صفر تصویر می‌کند.

**اثبات.** فرض کنیم  $u$  یک بردار در  $U$  و  $T(u) = v$  باشند، همچنین فرض کنیم  $o$  یک اسکالر صفر باشد. از آنجا که  $ou = O_v$  و  $oT(u) = Ov$  خطی است داریم:

$$T(o_u) = T(ou) = oT(u) = ov = O_v$$

**تعریف.** فرض کنید  $T : U \rightarrow V$  یک نگاشت خطی باشد.

مجموعه بردارهای  $U$  که به صفر فضای برداری  $V$  تصویر می‌شوند هسته  $T$  نامیده می‌شوند. هسته با  $\ker(T)$  نمایش داده می‌شود. مجموعه بردارهای در  $V$  که تصویر بردارهایی در  $U$  می‌باشند برد  $T$  نامیده می‌شود. برد  $T$  با  $\text{rang}(T)$  نمایش داده می‌شود. این مجموعه‌ها به طرز شهودی در شکل ۱-۷ نشان داده شده‌اند. وقتی یک مجموعه در جبر خطی معرفی می‌شود، بایستی قادر باشیم بدانیم که آنها فضای برداری هستند یا خیر، اکنون نشان می‌دهیم هسته و برد فضاهای برداری هستند.



شکل ۱-۷

**۲-۱-۷ قضیه.** فرض کنیم  $T : U \rightarrow V$  یک نگاشت خطی باشد:

(الف) هسته  $T$  زیرفضایی از  $U$  است.

(ب) برد  $T$  زیرفضایی از  $V$  است.

اثبات. الف) از قضیه قبلی ما می‌دانیم که هسته ناتهی است زیرا شامل بردار صفر  $U$  است، برای اثبات اینکه هسته زیرفضایی از  $U$  است. نشان می‌دهیم که تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است. ابتدا ثابت می‌کنیم تحت جمع بسته است. فرض کنیم  $u_1$  و  $u_2$  دو عضو از هسته  $T$  باشند بنابراین  $T(u_1) = 0$  و  $T(u_2) = 0$  با استفاده از خطی بودن  $T$  داریم:

$$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) = 0 + 0 = 0$$

بردار  $u_1 + u_2$  به روی  $0$  تصویر می‌شود. بنابراین  $u_1 + u_2$  در  $\ker(T)$  است حال نشان می‌دهیم  $\ker(T)$  تحت ضرب اسکالر همیشه بسته است، فرض کنیم  $c$  یک اسکالر باشد. دوباره با استفاده از خطی بودن  $T$  داریم:

$$T(cu_1) = cT(u_1) = c \cdot 0 = 0$$

بنابراین  $cu_1$  در  $\ker(T)$  است و هسته تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است، در نتیجه یک زیرفضایی از  $U$  است.

ب) بنا بر قضیه قبل برد ناتهی است، زیرا این برد شامل بردار صفر  $V$  است. برای اثبات اینکه برد یک زیرفضای  $V$  است، نشان می‌دهیم که تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است. فرض کنیم  $v_1$  و  $v_2$  اعضای  $\text{range}(T)$  باشند. بنابراین بردارهای  $w_1$  و  $w_2$  در قلمرو  $U$  وجود دارند که  $T(w_1) = v_1$  و  $T(w_2) = v_2$ ، با استفاده از خطی بودن  $T$ :

$$T(w_1 + w_2) = T(w_1) + T(w_2) = v_1 + v_2$$

بنابراین  $v_1 + v_2$  در برد است. فرض کنیم  $c$  یک اسکالر باشد. با استفاده از خطی بودن  $T$ :

$$T(cw_1) = cT(w_1) = cv_1$$

بردار  $cv_1$  تصویر  $cw_1$  است. بنابراین  $cv_1$  در برد قرار می‌گیرد. برد تحت جمع و ضرب اسکالر بسته است از آنجا که زیرفضایی از  $V$  است.

مثال ۴: هسته و برد عملگر خطی  $T(x, y, z) = (x, y, 0)$  را بیابید.

حل: از آنجا که عملگر خطی  $T$  فضای برداری  $R^3$  را به توی  $R^3$  تصویر می‌کند، هسته و برد هر دو زیرفضاهای برداری از  $R^3$  می‌باشند.

هسته:  $\ker(T)$  زیرمجموعه‌ای است که به روی بردار  $(0, 0, 0)$  نگاشته می‌شود. می‌دانیم که:

همه بردارهایی به شکل  $(x, y, 0)$  می‌باشد. این مجموعه را به این صورت بیان می‌کنیم:

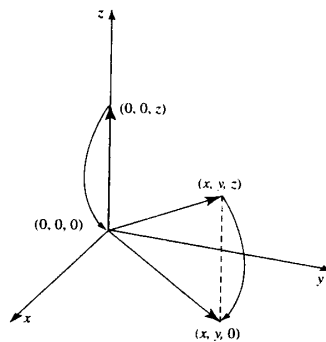
$$\ker(T) = \{(x, y, 0)\}$$

به‌طور هندسی  $\ker(T)$  مجموعه همه بردارهایی که روی محور  $z$  واقع هستند می‌باشد. برد  $T$  مجموعه‌ی همه‌ی بردارهایی به شکل  $(x, y, 0)$  می‌باشد. بنابراین

$$\text{range}(T) = \{(x, y, 0)\}$$

$\text{range}(T)$  مجموعه‌ی همه بردارهایی که در صفحه  $xy$  قرار دارند می‌باشد.

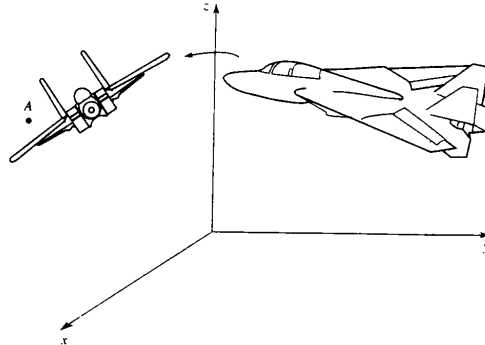
مشخصات این تبدیل خطی را در شکل ۷-۲ نشان داده‌ایم. مشاهده می‌کنیم  $T$  بردار  $(x, y, z)$  را به‌روی بردار  $(x, y, 0)$  در صفحه  $xy$  می‌نگارد.  $T$  همه بردارها را به‌روی صفحه  $xy$  می‌نگارد.  $T$  یک مثال از عملگر تصویری است.



شکل ۷-۲

تصاویر در کاربردها مهم هستند. در جهانی که ما زندگی می‌کنیم سه بعد دارد. وقتی که ما یک شیء را مشاهده می‌کنیم ما نقش دوبعدی از یک جسم را می‌گیریم، چشم‌انداز جابه‌جا تغییر می‌کند. تصویر می‌تواند آنچه اشیای سه‌بعدی از جابه‌جایی گوناگون آنها دیده می‌شود در معماری و به‌طور جدی در هر فضا مورد استفاده قرار می‌گیرد. خطوط خارجی یک شیء جالب در ارتباط با دستگاه مختصات مناسبی به یک کامپیوتر مرکزی ارتباط دارند. برنامه‌های کامپیوتر شامل یک تبدیل تصویری است که اشیاء را روی یک صفحه تصویر می‌کند. خروجی چشم‌انداز دوبعدی اجسام است، که توسط تصاویر به کامپیوتر رسیده است. در این روش از تبدیلات گوناگونی می‌تواند استفاده شود که منجر به پرسپکتیو گوناگون جسم شوند.





شکل ۳-۷

اکنون هسته و برد ماتریس تبدیلات را توصیف می‌کنیم. قضیه بعد اطلاعاتی در مورد برد یک تبدیل ماتریس به ما نشان می‌دهد.

**۳-۱-۷ قضیه.** برد  $T : R^n \rightarrow R^m$  تعریف شده با  $T(u) = Au$  توسط بردارهای ستونی  $A$  پدید می‌آید.

اثبات. فرض کنیم  $v$  یک بردار از برد  $T$  باشد، بردار  $u$  وجود دارد که  $T(u) = v$  را برحسب پایه استاندارد  $R^n$  بیان می‌کنیم.

$$u = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$$

بنابراین

$$v = T(a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n) = a_1 T(e_1) + \cdots + a_n T(e_n)$$

در نتیجه بردارهای ستونی  $A$  به صورت  $T(e_1), \dots, T(e_n)$  برد  $A$  را پدید می‌آورند.

مثال: هسته و برد تبدیل خطی توصیف شده توسط ماتریس زیر را تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

حل:  $A$  یک ماتریس  $3 \times 3$  است. بنابراین یک عملگر خطی  $T : R^3 \rightarrow R^3$  است  $T(x) = A(x)$  اعضای  $R^3$  به شکل ستونی نوشته می‌شوند که در ماتریس  $A$  ضرب می‌شوند.

هسته شامل همه بردارهای  $x = (x_1, x_2, x_3)$  در  $\mathbb{R}^3$  است به طوری که  $T(x) = 0$  بنابراین

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

این تساوی ماتریس‌ها متناظر با دستگاه معادلات خطی زیر است:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$-x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$$

برای حل این دستگاه مجموعه جواب‌ها را در نظر می‌گیریم،  $x_1 = -5r$ ،  $x_2 = r$  و  $x_3 = r$ . در نتیجه هسته بردارهایی به شکل  $(-5r, r, r)$  می‌باشد.

$$\ker(T) = \{(-5r, r, r)\}$$

$\ker(T)$  یک زیرفضای یک بعدی از  $\mathbb{R}^3$  با پایه  $(-5, 1, 1)$  می‌باشد.

برد: برد توسط بردارهای ستونی  $A$  تولید می‌شود. این بردارهای ستونی به عنوان سطرهای یک ماتریس نوشته می‌شوند و به شکل ماتریس تحویل یافته سطر تبدیل می‌شود. بردارهای سطر غیرصفر یک پایه برای برد تشکیل می‌دهند، داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بردارهای  $(1, 0, 1)$  و  $(0, 1, 1)$  برد  $T$  را پدید می‌آورند. یک بردار دلخواه در برد ترکیب خطی از این بردارهای پایه خواهد بود.

$$s(1, 0, 1) + r(0, 1, 1)$$

بنابراین برد  $T$  چنین است.

$$\text{range}(T) = \{(s, t, s+t)\}$$

$\text{range}(T)$  زیرفضای دوبعدی از  $\mathbb{R}^3$  با پایه  $(1, 0, 1)$  و  $(0, 1, 1)$  است. قضیه‌ی زیر ارتباط مهم بین بعد هسته و برد یک تبدیل خطی را بیان می‌کند.

**۴-۱-۷ قضیه.** فرض کنیم  $T : U \rightarrow V$  یک نگاشت خطی باشد، در این صورت

$$\dim \ker(T) + \dim \text{range}(T) = \dim U$$

مشاهده کنید این نتیجه برای نگاشت خطی  $T$  در مثال بالا برقرار است.

$$\dim \ker(T) = ۱, \dim \text{range}(T) = ۲, \dim U = ۳$$

اثبات. فرض کنیم هسته شامل بیش از بردار صفر باشد و بدین معنی که یک سوراخ از  $U$  نیست (شما در حالت خاصی در تمرینات بعد این را ثابت می‌کنید).

فرض کنید  $u_1, \dots, u_m$  و  $u_{m+1}, \dots, u_n$  یک پایه برای  $\ker(T)$  باشند با اضافه کردن بردارهای  $u_{m+1}, \dots, u_n$  به این مجموعه پایه  $U$  حاصل می‌شود. نشان می‌دهیم  $T(u_{m+1}), \dots, T(u_n)$  تشکیل یک پایه برد می‌دهد و در نتیجه قضیه اثبات می‌شود. فرض کنیم  $u$  برداری در  $U$  باشد،  $u$  می‌تواند به صورت ترکیب خطی از بردارهای پایه به صورت زیر بیان شود.

$$u = a_1 u_1 + \dots + a_m u_m + a_{m+1} u_{m+1} + \dots + a_n u_n$$

خطی بودن  $T$  نتیجه می‌دهد:

$$T(u) = a_1 T(u_1) + a_m T(u_m) + a_{m+1} T(u_{m+1}) + \dots + a_n T(u_n)$$

از آنجا که  $u_1, \dots, u_m$  در هسته می‌باشند، به دست می‌آوریم:

$$T(u) = a_{m+1} T(u_{m+1}) + \dots + a_n T(u_n)$$

$T(u)$  بردار دلخواهی از برد  $T$  است. بنابراین بردارهای  $T(u_{m+1}), \dots, T(u_n)$  برد را پدید می‌آورند.

اکنون ثابت می‌کنیم این بردارها مستقل خطی هستند، فرض کنیم

$$b_{m+1} T(u_{m+1}) + \dots + b_n T(u_n) = 0 \quad (۱)$$

که در آن اسکالرها جهت آسانی دارای اندیس‌های مناسب شده‌اند. خطی بودن  $T$  نتیجه می‌دهد که

$$T(b_{m+1} u_{m+1} + \dots + b_n u_n) = 0$$

این بدین معنی است که بردار  $b_{m+1} u_{m+1} + \dots + b_n u_n$  در هسته است. بنابراین به صورت یک ترکیب

خطی از اعضای پایه بیان می‌شود. فرض کنیم

$$b_{m+1} u_{m+1} + \dots + b_n u_n = c_1 u_1 + \dots + c_m u_m$$

بنابراین

$$c_1 u_1 + \dots + c_m u_m - b_{m+1} u_{m+1} - \dots - b_n u_n = 0$$

از آنجا که بردارهای  $u_1, \dots, u_m$  و  $u_{m+1}, \dots, u_n$  یک پایه می‌باشند پس مستقل خطی هستند. بنابراین ضرایب همگی صفر هستند.  $b_{m+1} = 0, \dots, b_n = 0$  و  $c_1 = 0, \dots, c_m = 0$ . با توجه به رابطه (۱) نتیجه می‌گیریم  $T(u_{m+1}), \dots, T(u_n)$  مستقل خطی هستند. مجموعه بردارهای  $T(u_{m+1}), \dots, T(u_n)$  پایه‌ای برای برد هستند. بنابراین قضیه اثبات شد.

به خواننده یادآوری می‌کنیم که فضای تولید شده توسط بردارهای ستونی ماتریس فضای ستونی ماتریس نامیده می‌شوند و بعد فضای ستونی را رتبه ماتریس می‌نامیم. در نتیجه می‌توانیم بگوییم: بعد برد یک ماتریس نگاشت خطی رتبه ماتریس است.

مثال ۶: بعد هسته و برد نگاشت خطی  $T$  تعریف شده توسط ماتریس زیر را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

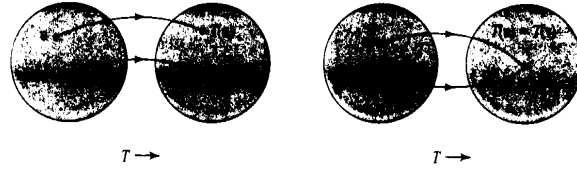
حل: مشاهده می‌کنیم که ماتریس  $A$  به شکل تحویل یافته است. بردارهای سطری مستقل خطی هستند بنابراین  $\text{rank}(A) = 2$  در نتیجه  $\dim \text{range}(T) = 2$ .

دامنه  $T$  برابر  $R^3$  است پس  $\dim \text{domain}(T) = 3$  بنابراین  $\dim \ker(T) = 1$  هسته یک نگاشت خطی  $T$  اغلب فضای پوچ نامیده می‌شود.  $\dim \ker(T) = 1$  بعد هسته و  $\dim \text{range}(T)$  رتبه نگاشت خطی نامیده می‌شود. از آنچه مشاهده شد چنین برمی‌آید که بعد یک ماتریس نگاشت رتبه ماتریس است. قضیه قبلی اغلب به عنوان قضیه رتبه/پوچی بیان می‌گردد و به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\text{rank}(T) + \text{nullity}(T) = \dim \text{domain}(T)$$

این بخش را با ارتباط دادن بین هسته و یک به یک بودن تبدیل خطی به پایان می‌بریم و کاربرد تئوری این ارتباط را ملاحظه خواهیم کرد.

تعریف. یک نگاشت  $T$  یک به یک نامیده می‌شود اگر هر عضو در برد  $T$  متناظر با تصویر دقیقاً یک عضو از دامنه  $T$  باشد. شکل ۷-۴ را ببینید. این بدین معنی است که  $T$  یک به یک است اگر  $T(u) = T(v)$  نتیجه می‌دهد  $u = v$ .



شکل ۴-۷

**۵-۱-۷ قضیه.** یک نگاشت خطی  $T$  یک به یک است اگر و تنها اگر هسته آن بردار صفر باشد. برهان. ابتدا فرض کنیم  $T$  یک به یک باشد. هسته شامل همه بردارهایی که به توی بردار صفر نگاشته می‌شوند، می‌باشد. از آنجا که  $T$  یک به یک است هسته باید شامل یک بردار باشد. اما می‌دانیم بردار صفر در هسته بایستی باشد بنابراین هسته بردار صفر است. برعکس فرض کنیم هسته بردار صفر باشد. فرض کنیم  $u$  و  $v$  بردارهایی باشند که  $T(u) = T(v)$ . عملگر خطی  $T$  را به کار برده، داریم:

$$T(u) - T(v) = \circ$$

$$T(u - v) = \circ$$

بنابراین  $u - v$  در هسته است. اما هسته بردار صفر است. بنابراین

$$u - v = \circ$$

$$u = v$$

در نتیجه نگاشت یک به یک است.

**۶-۱-۷ قضیه.** تبدیل  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  تعریف شده توسط  $T(x) = Ax$  یک به یک است اگر و تنها اگر  $A$  نامفرد باشد.

اثبات: فرض کنیم  $T$  یک به یک باشد بنابراین  $\ker(T) = \circ$  قضیه رتبه/بوجی نتیجه می‌دهد که  $\dim \text{range}(T) = n$  بنابراین  $n$  ستون بردار  $A$  مستقل خطی هستند. نتیجه می‌گیریم که رتبه برابر  $n$  است و  $|A| \neq \circ$ .

برعکس فرض کنیم که  $A$  نامنفرد باشد بنابراین رتبه  $A$  برابر  $n$  است و  $n$  بردار ستونی آن مستقل خطی هستند. از قضیه رتبه/بوجی این نتیجه لازم به دست می‌آید که  $\dim \text{range}(T) = n$  یعنی  $\ker(T) = \circ$  بنابراین  $T$  یک به یک است.

مثال ۷: تعیین کنید که نگاشت‌های خطی  $T_A$  و  $T_B$  تعریف شده با ماتریس‌های زیر یک به یک هستند.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & \circ & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ \circ & 7 & 5 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 7 \\ \circ & 1 & 9 & 8 \\ \circ & \circ & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

حل: الف) از آنجا که سطرهای  $A$  مستقل خطی هستند  $\text{rank}(A) = 3$  نتیجه می‌گیریم  $\dim \text{range}(T_A) = 3$  دامنه  $T$  در  $\mathbb{R}^4$  است بنابراین  $\dim \text{domain}(T_A) = 4$  با استفاده از قضیه رتبه/بوجی  $\dim \ker(T_A) = 1$  از آنجایی که  $\dim \ker(T_A) \neq \circ$  هسته بردار ناصفر است، نگاشت یک به یک نیست.

ب) می‌توان نشان داد که  $|B| \neq \circ$  ماتریس  $B$  نامنفرد است. بنابراین نگاشت  $T_B$  یک به یک است.

**۷-۱-۷ قضیه.** فرض کنیم  $T : U \rightarrow V$  یک نگاشت خطی یک به یک باشد. اگر مجموعه  $\{u_1, \dots, u_n\}$  در  $U$  مستقل خطی باشد،  $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$  در  $V$  مستقل خطی است. به عبارت دیگر که یک نگاشت خطی یک به یک، استقلال خطی را حفظ می‌کند.  
اثبات. فرض کنیم

$$a_1 T(u_1) + \dots + a_n T(u_n) = \circ \quad (2)$$

برای اسکالرهای  $a_1, \dots, a_n$  از آنجایی که  $T$  خطی است می‌توان نوشت  $T(a_1 u_1 + \dots + a_n u_n) = \circ$   $T$  یک به یک است، بنابراین هسته بردار صفر است. در نتیجه  $a_1 u_1 + \dots + a_n u_n = \circ$  اما مجموعه  $\{u_1, \dots, u_n\}$  مستقل خطی است بنابراین

$$a_1 = \circ, \dots, a_n = \circ$$

با توجه به معادله (۲)،  $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$  مستقل خطی است.

### ۸-۱-۷ تمرین

(۱) ثابت کنید که نگاشت  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  تعریف شده توسط  $T(x, y) = (3x, x + y)$  خطی است تصویر بردارهای  $(1, 3)$  و  $(-1, 2)$  تحت این عملگر را بیابید.

(۲) ثابت کنید  $T(x, y) = (x + 2y, 3y, x - y)$  یک نگاشت خطی  $T: R^2 \rightarrow R^2$  تعریف می‌کند. تصویر  $(1, 1)$  و  $(0, 4)$  را پیدا کنید.

(۳) ثابت کنید عملگرهای  $T: R^2 \rightarrow R$  زیر خطی نیستند.

$$T(x, y) = y - 2 \quad \text{(الف)}$$

$$T(x, y) = x - 3 \quad \text{(ب)}$$

(۴) نشان دهید عملگر  $T: P_2 \rightarrow P_2$  تعریف شده در زیر خطی است.  $T(ax^2 + bx + c) = cx^2 + a$ . تصویر  $2x^2 - x + 2$  را پیدا کنید. عضو دیگری از  $P_2$  را بیابید که همان تصویر را داشته باشد.

(۵) نشان دهید که عملگر  $T(ax^2 + bx + c) = bx + c$  از  $P_2 \rightarrow P_1$  خطی است. تصویر  $2x^2 - x + 2$  را بیابید. عضو دیگری از  $P_2$  که دارای همان تصویر است را تعیین کنید.

(۶) ثابت کنید عملگر  $T(ax + b) = x + a$  از  $P_1 \rightarrow P_1$  خطی نیست.

(۷) نگاشت‌های خطی  $T$  تعریف شده توسط ماتریس‌های زیر را در نظر گرفته، هسته و برد هر نگاشت خطی را تعیین کنید. نشان دهید برای هر نگاشت  $\dim \ker(T) + \dim \text{range}(T) = \dim \text{domain}(T)$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ (ا)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ (د)} \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \text{ (ج)} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ (ب)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ (الف)} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \text{ (ی)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ (ه)} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ (و)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ (ز)} \end{aligned}$$

(۸) هسته و برد هر کدام از نگاشت‌های زیر را تعیین کنید. نشان دهید برای هر نگاشت

$$\dim \ker(T) + \dim \text{range}(T) = \dim \text{domain}(T)$$

$$R^3 \rightarrow R^3 \text{ از } T(x, y, z) = (x, 0, 0) \quad \text{(الف)}$$

$$R^3 \rightarrow R^2 \text{ از } T(x, y, z) = (x + y, z) \quad \text{(ب)}$$

$$R^3 \rightarrow R \text{ از } T(x, y, z) = (x + y + z) \quad \text{(ج)}$$

$$R^3 \rightarrow R^3 \text{ از } T(x, y, z) = (3x, x - y, y) \quad \text{(د)}$$

(۹) فرض کنید  $T: U \rightarrow V$  و  $u$  بردار دلخواهی در  $U$  باشد،  $v$  بردار ثابت در  $U$  و  $0$  بردار صفر  $U$  باشند، ثابت کنید نگاشت‌های زیر خطی هستند. هسته و برد هر نگاشت خطی را بیابید.

$$T(u) = 5u \quad \text{الف}$$

$$T(u) = 2u + 3v \quad \text{ب}$$

$$T(u) = u \quad \text{ج (نگاشت همانی روی } u \text{ نامیده می‌شود)}$$

$$T(u) = 0 \quad \text{د (نگاشت صفر روی } u \text{ نامیده می‌شود)}$$

۱۰ قضیه رتبه/بوجی را به کار ببرید و بعد هسته و برد هر کدام از نگاشت‌های خطی تعریف شده توسط

ماتریس‌ها را تعیین کنید. کدام یک از نگاشت‌های یک به یک هستند؟

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{ج} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ب} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{الف}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ز} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 8 & 7 \\ 2 & -4 & 6 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{ر} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{د}$$

۱۱ با استفاده از دترمینان در مورد نگاشت خطی تعریف شده به توسط ماتریس‌های زیر تعیین کنید

یک به یک هستند یا خیر؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{ج} \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ب} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{الف}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & 8 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ز} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{ر} \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{د}$$

۱۲ فرض کنید  $T: U \rightarrow V$  یک بردار  $u$  نقطه ثابت از  $T$  است اگر  $T(u) = u$  نقاط ثابت (در

صورت وجود) هر کدام از نگاشت‌های زیر را بیابید.

$$T(x, y) = (x, 3y) \quad \text{الف}$$

$$T(x, y) = (x, 2) \quad \text{ب}$$

$$T(x, y) = (x, y + 1) \quad \text{ج}$$

$$T(x, y) = (x, y) \quad \text{د}$$



$$T(x, y) = (y, x) \quad \text{ه}$$

$$T(x, y) = (x + y, x - y) \quad \text{و}$$

ز) ثابت کنید اگر  $T$  خطی باشد مجموعه همه نقاط ثابت یک زیرفضا می‌باشد.

۱۳) فرض کنیم  $T : U \rightarrow V$  یک نگاشت خطی باشد ثابت کنید که

$$\dim \ker(T) + \dim \text{range}(T) = \dim \text{domain}(T)$$

الف) وقتی که  $\ker(T) = \circ$

ب) وقتی که  $\ker(T) = U$

(اینها دو حالت خاص در اثبات قضیه ۴-۷ می‌باشد).

۱۴) فرض کنید  $T : U \rightarrow V$  یک نگاشت خطی باشد

الف) ثابت کنید وقتی  $\dim(U) = \dim(V)$  آنگاه  $\text{range}(T) = V$  اگر و تنها اگر  $\ker(T) = \circ$ .

ب) ثابت کنید  $\ker(T) = U$  اگر و تنها اگر  $\text{range}(T) = \circ$ .

۱۵) فرض کنید  $T : U \rightarrow V$  یک نگاشت خطی باشد ثابت کنید بعد برد  $T$  هرگز نمی‌تواند از بعد دامنه بیشتر باشد.

۱۶) فرض کنید  $A$  ماتریس  $m \times n$  یک نگاشت  $T : R^n \rightarrow R^m$  تعریف می‌کند،  $A^t$  یک ماتریس  $m \times n$  باشد که یک نگاشت  $T^t : R^m \rightarrow R^n$  تعریف می‌کند. نشان دهید:

$$\dim \text{range}(T) = \dim \text{range}(T^t)$$

۱۷) نگاشت تصویری در  $T(x, y, z) = (x, y, \circ)$  از  $R^3 \rightarrow R^3$  را در نظر بگیرید مجموعه همه بردارهای در  $R^3$  که توسط  $T$  به روی بردار  $(1, 2, \circ)$  تصویر می‌شوند را بیابید این مجموعه را رسم کنید.

۱۸) عملگر خطی  $T(x, y) = (x - y, 2y - 2x)$  از  $R^2 \rightarrow R^2$  را در نظر بگیرید مجموعه همه بردارهای در  $R^2$  که توسط  $T$  به روی بردار  $(2, -4)$  تصویر می‌شوند را پیدا و رسم کنید.

۱۹) فرض کنیم عملگر خطی  $T : R^2 \rightarrow R^2$  تعریف شده توسط  $T(x, y) = (2x, 3x)$  باشد همه بردارهایی را که توسط  $T$  به روی بردار  $(4, 6)$  تصویر می‌شوند یافته و رسم کنید. آیا این مجموعه زیرفضایی از  $R^2$  است.

(۲۰) اگر نگاشت خطی  $T: R^3 \rightarrow R^2$  تعریف شده توسط  $T(x, y, z) = (x - y, x + z)$  باشد، مجموعه همه بردارهای را که توسط  $T$  به روی بردار  $(1, 4)$  تصویر می‌شود را پیدا و رسم کنید. آیا این مجموعه یک زیرفضا است؟

(۲۱) فرض کنید  $T: U \rightarrow V$  یک نگاشت خطی باشد، هم-نین فرض کنید  $v$  یک بردار ناصفر در  $V$  باشد همچنین  $W$  مجموعه بردارهایی در  $U$  باشد که  $T(W) = v$ . آیا  $W$  یک زیرفضایی از  $U$  است؟

(۲۲) ثابت کنید  $T: P_2 \rightarrow P_2$  تعریف شده در زیر خطی است هسته و برد  $T$  را بیابید.

$$T(a_2x^2 + a_1x + a_0) = (a_2 + a_1)x^2 + a_1x + 2a_0.$$

(۲۳) ثابت کنید  $T: P_3 \rightarrow P_3$  تعریف شده در زیر خطی است هسته و برد  $T$  و برای این زیرفضا پایه‌ای بیابید.

$$T(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = a_2x^3 + (-a_0)$$

(۲۴) ثابت کنید  $g: p_2 \rightarrow p_2$  تعریف شده در زیر خطی است، هسته و برد  $g$  را بیابید پایه‌ای برای این زیرفضا بیابید.

$$g(a_2x^2 + a_1x + a_0) = 2a_2x^2 + a_1x + 3a_0.$$

(۲۵) فرض کنید  $D$  عملگر مشتق باشد،  $D$  را به عنوان یک عملگر خطی روی  $p_n$  در نظر بگیرید. تصویر  $x^3 - 3x^2 + 2x + 1$  تحت  $D$  را بیابید هسته و برد  $D$  را بیابید.

(۲۶) فرض کنید  $D^2$  مشتق دوم باشد.

الف) تصویر  $2x^2 + 3x^2 - 5x + 4$  تحت  $D^2$  را به دست آورید. ثابت کنید  $D^2$  یک عملگر خطی روی  $p_n$  است، هسته و برد  $D^2$  را بیابید.

ب) نگاشت  $D^2 + D + 3$  از  $p_n$  به روی خودش را در نظر گرفته و تصویر  $x^3 - 2x^2 + 6x + 1$  تحت این عملگر را بیابید. ثابت کنید این نگاشت خطی است؛ هسته و برد این نگاشت را بیابید.

(۲۷) فرض کنید  $D$  عملگر مشتق‌گیری باشد  $D$  را به عنوان یک عملگر روی  $p_n$  در نظر بگیرید. مجموعه‌ی چندجمله‌ای‌هایی را که توسط  $D$  به روی  $3x^2 - 4x + 7$  نگاشته می‌شوند بیابید.

۲۸) فرض کنید  $D^2$  عملگر مشتق‌گیری مرتبه دوم باشد و عملگر  $D^2$  را روی  $p_n$  در نظر بگیرید مجموعه چندجمله‌ای‌هایی که توسط  $D^2$  به روی  $4x^3 - 6x^2 - 2x + 3$  نگاشته می‌شوند را بیابید.

۲۹) فرض کنید  $g$  عملگری باشد که یک انتگرال از  $\circ$  به  $\circ$  تعریف می‌کند،  $g$  می‌تواند یک نگاشت از  $P_n$  به روی  $R$  تعریف کند. برای مثال

$$g(4x^3 - 6x^2 + 2x + 3) = \int_0^1 (4x^3 - 6x^2 + 2x + 3) dx = [x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x]_0^1 = 3$$

$g$  عضو  $4x^3 - 6x^2 + 2x + 3$  از  $P_3$  را به روی عضو  $3$  از  $R$  می‌نگارد نشان دهید  $g$  یک نگاشت خطی  $P_n \rightarrow R$  است.

۳۰) فرض کنید  $p$  یک چندجمله‌ای در  $p_n$  و  $T(p) = \int_0^1 p(x) dx$  نگاشت خطی  $p_n$  به توی  $R$  باشد  $T(8x^3 + 6x^2 + 4x + 1)$  را بیابید. هسته و برد  $T$  را بدست آورید. مجموعه عضوهای  $p_n$  که به روی  $2$  تصویر می‌شوند را بیابید.

۳۱) فرض کنید  $U$  فضای برداری ماتریس‌های  $2 \times 2$  باشد و  $A$  و  $B$  ماتریس‌های  $2 \times 2$  باشند. تعیین کنید کدامیک از نگاشت‌های زیر خطی هستند هسته و برد هر کدام از نگاشت‌های خطی را بیابید.

$$\text{الف) } T(A) = A' \quad \text{ب) } T(A) = |A| \quad \text{ج) } T(A) = \text{trac}(A)$$

$$\text{د) } T(A) = A^2 \quad \text{ر) } T(A) = A + B \quad \text{ز) } T(A) = a_{11}$$

$$\text{و) } T(A) = 0 \quad \text{ه) } T(A) = I \quad \text{ی) } T(A) = A \text{ تحویل یافته}$$

۳۲) فرض کنید  $T : U \rightarrow V$  یک نگاشت خطی باشد ثابت کنید که  $\dim \text{range}(T) = \dim \text{domain}(T)$  اگر و تنها اگر  $T$  یک‌به‌یک باشد.

۳۳) نشان دهید که هیچ نگاشت خطی از  $R^3 \rightarrow R^2$  که یک‌به‌یک باشد وجود ندارد. به‌طور کلی نشان دهید هیچ نگاشت خطی یک‌به‌یک از  $U \rightarrow V$  وجود ندارد هرگاه بعد  $U$  بزرگتر از بعد  $V$  باشد.

۳۴) فرض کنید  $T : U \rightarrow V$  یک نگاشت خطی باشد ثابت کنید که  $T$  یک‌به‌یک است اگر و تنها اگر مستقل خطی بودن را حفظ کند.

۳۵) فرض کنید  $T$  یک تبدیل خطی با دامنه  $U$  باشد فرض کنید  $v_1, \dots, v_m$  بردارهایی در  $U$  و  $a_1, \dots, a_m$  اسکالر باشد ثابت کنید که

$$T(a_1 v_1 + \dots + a_m v_m) = a_1 T(v_1) + \dots + a_m T(v_m)$$

این نتیجه را می‌توانید توسط استقرا ثابت کنید.

(۳۶) فرض کنید  $X$  یک بردار دلخواه در  $R^n$  و  $Y$  یک بردار ثابت باشد ثابت کنید تبدیل  $T(X) = X \cdot Y$  یک نگاشت خطی از  $R^n \rightarrow R$  است. ( $X \cdot Y$  ضرب درونی  $X$  و  $Y$  نامیده می‌شود)

(۳۷) فرض کنید  $T_1$  و  $T_2$  دو تبدیل خطی  $U \rightarrow V$  و  $c$  یک اسکالر باشند تبدیل‌های  $T_1 + T_2$  و  $cT_1$  تعریف شده توسط  $(T_1 + T_2)(u) = T_1(u) + T_2(u)$  و  $(cT_1)(u) = cT_1(u)$  را در نظر بگیرید.

الف) ثابت کنید  $T_1 + T_2$  و  $cT_1$  هر دو نگاشت خطی هستند.

ب) ثابت کنید اگر  $T_1$  و  $T_2$  نگاشت‌های تعریف شده توسط ماتریس‌های  $A_1$  و  $A_2$  باشند، آنگاه  $T_1 + T_2$  توسط ماتریس  $A_1 + A_2$  و  $cT_1$  توسط ماتریس  $cA_1$  تعریف می‌شوند.

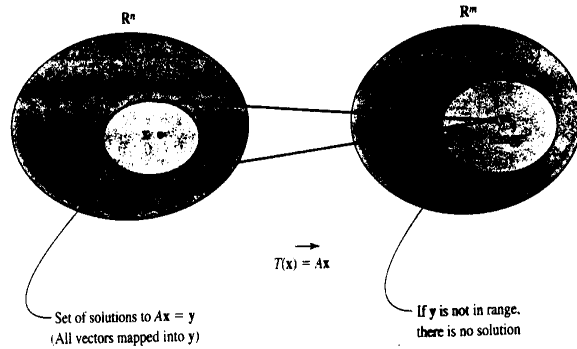
ج) ثابت کنید که مجموعه نگاشت‌های تحت این عملگرهای جمع و ضرب اسکالر یک فضای برداری است.

## ۲-۷ نگاشت‌ها و دستگاه معادلات خطی

نگاشت خطی و مفهوم هسته و برد نقش مهمی در تجزیه و تحلیل معادلات خطی بازی می‌کند خواهیم دید که اینها ابزاری هستند که به ما در پیدا کردن مجموعه جواب‌های معادلات کمک می‌کنند می‌دانیم که یک دستگاه  $m$  معادله خطی با  $n$  متغیر را به صورت ماتریسی  $AX = Y$  می‌توان نوشت.

$A$  یک ماتریس  $m \times n$  است که ماتریس ضرایب نامیده می‌شود مجموعه جواب‌ها مجموعه همه  $X$ ها است که در معادله صدق می‌کنند. اکنون یک راه برای این مجموعه جواب‌ها داریم. فرض کنیم  $T: R^n \rightarrow R^m$  یک نگاشت خطی تعریف شده توسط  $A$  باشد دستگاه معادلات می‌تواند به این صورت نوشته شود  $T(x) = y$ .

بنابراین مجموعه جواب مجموعه بردارهای  $x$  در  $R^n$  است که توسط  $T$  به روی بردار  $y$  تصویر می‌شوند. اگر  $y$  در برد  $T$  نباشد چنین جوابی وجود نخواهد داشت. شکل ۷-۵ را ملاحظه شود.



شکل ۵-۷

### ۳-۷ معادلات همگن

راه قبلی برای دستگاه معادلات خطی ما را برای نتیجه زیر راهنمایی می‌کند.

**۱-۳-۷ قضیه.** مجموعه جواب‌های یک دستگاه همگن از  $m$  معادله خطی با  $n$  متغیر  $AX = 0$ ، زیرفضایی از  $R^n$  است.

**اثبات.** فرض کنیم  $T$  نگاشت خطی از  $R^n$  به  $R^m$  تعریف شده توسط  $A$  باشد مجموعه جواب، مجموعه بردارهایی در  $R^n$  است که توسط  $T$  به روی بردار صفر نگاشته می‌شوند. مجموعه جواب هسته نگاشت است و بنابراین یک زیرفضا است.

**مثال ۱:** دستگاه همگن معادلات خطی زیر را حل کنید. مجموعه جواب را به صورت زیرفضا بیان کنید، شکل این زیرفضا را رسم کنید.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$-x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 0$$

حل: روش حذفی گوس-جردن را به کار می‌بریم داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$x_1 + 5x_3 = 0$$

$$x_2 - x_3 = 0$$

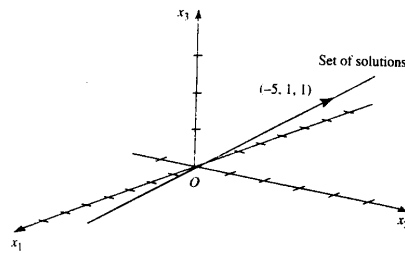
در نتیجه

$$x_2 = x_3, \quad x_1 = -5x_3$$

مقدار  $x_3$  را  $r$  فرض می‌کنیم بنابراین یک جواب دلخواه برابر است با:  $x_1 = -5r$ ,  $x_2 = r$  و  $x_3 = r$ . جواب بردارها به صورت  $(-5r, r, r)$  می‌باشند.

این بردارها تشکیل یک زیرفضای یک بعدی از  $\mathbb{R}^3$  با پایه  $(-5, 1, 1)$  می‌دهند. شکل ۶-۷ ملاحظه

کنید. این زیرفضا برابر هسته تعریف شده توسط ماتریس ضرایب دستگاه  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$  می‌باشد.



شکل ۶-۷

## ۴-۷ معادلات ناهمگن

اکنون مجموعه جواب‌های یک دستگاه معادلات خطی ناهمگن را پیدا می‌کنیم که تشکیل یک زیرفضا را نمی‌دهند.

فرض کنیم  $AX = Y$  یک دستگاه معادلات خطی ناهمگن باشد. همچنین فرض کنیم  $X_1$  و  $X_2$  جواب‌های آن باشند بنابراین  $AX_1 = Y$  و  $AX_2 = Y$  از جمع این معادلات نتیجه می‌شود

$$AX_1 + AX_2 = 2Y$$

$$A(X_1 + X_2) = 2Y$$

بنابراین  $X_1 + X_2$  در معادله  $AX = Y$  صدق نمی‌کنند. پس جوابی از آن نیست مجموعه جواب‌ها تحت جمع بسته نیست در نتیجه یک زیرفضا نخواهد بود. معذالک ما می‌خواهیم مجموعه جواب یک دستگاه ناهمگن که خود زیرفضا نیست را بیابیم. این مجموعه می‌تواند توسط یک زیرفضا تعیین شود. قضیه بعد ما را در پیدا کردن مجموعه جواب قادر می‌سازد.

**۱-۴-۷ قضیه.** فرض کنیم  $AX = Y$  یک دستگاه ناهمگن از  $m$  معادله خطی با  $n$  متغیر باشد همچنین فرض می‌کنیم  $X_1$  یک جواب خصوصی باشد هر جواب دیگر می‌تواند به شکل  $X = Z + X_1$  نوشته شود که در آن  $Z$  یک عضو از هسته نگاشت  $T$  تعریف شده توسط  $A$  است. چنین جوابی منحصر به فرد است هرگاه هسته شامل تنها بردار صفر باشد.

برهان.  $X_1$  یک جواب است بنابراین  $AX_1 = Y$  فرض کنیم  $X$  یک جواب دلخواه باشد بنابراین  $AX = Y$  تساوی  $AX_1 = AX$  داریم:

$$AX_1 = AX$$

$$AX - AX_1 = 0$$

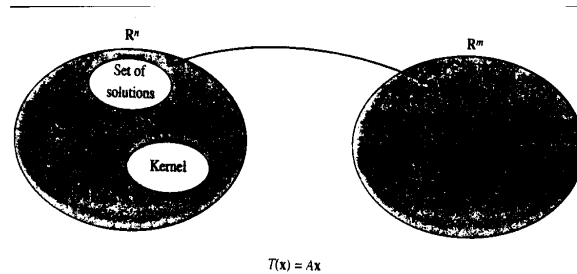
$$A(X - X_1) = 0$$

$$T(X - X_1) = 0$$

بنابراین  $X - X_1$  یک عضو از هسته  $T$  است آن را  $Z$  می‌نامیم:  $X - X_1 = Z$ . بنابراین می‌توانیم بنویسیم  $X = Z + X_1$ .

توجه کنید که جواب منحصر به فرد است اگر و تنها اگر ارزش  $Z$  برابر  $0$  باشد اگر هسته بردار صفر باشد این نتیجه حاصل می‌شود که مجموعه جواب یک دستگاه خطی ناهمگن  $AX = Y$  می‌تواند از هسته نگاشت خطی تعریف شده توسط ماتریس ضرایب و یک جواب خصوصی  $X_1$  تولید شود. اگر هر بردار  $Z$  در هسته را در نظر بگیریم و با  $X_1$  جمع کنیم جوابی از معادله به دست می‌آید. به طور هندسی چنین

معنی می‌دهد که مجموعه جواب به وسیله محاسبه هسته و در راستا و امتداد بردار  $X_1$  می‌تواند تعیین شود. شکل ۷-۷ را ببینید.



شکل ۷-۷ صفحه ۳۲

مثال ۲ دستگاه معادلات خطی زیر را حل کنید مجموعه جواب را رسم کنید.

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 11$$

$$-x_2 + x_3 = -2$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 9$$

حل: روش حذفی گوس-جردن را به کار می‌بریم. داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$x_1 + 5x_3 = 7$$

$$x_2 - x_3 = 2$$

در نتیجه

$$x_2 = x_3 + 2$$

$$x_1 = -5x_3 + 7$$

برای  $x_3$  مقدار  $r$  در نظر می‌گیریم. بنابراین یک جواب دلخواه چنین است:

$$x_1 = -5r + 7 \quad x_2 = r + 2 \quad x_3 = r$$



جواب‌ها بردارهایی به شکل

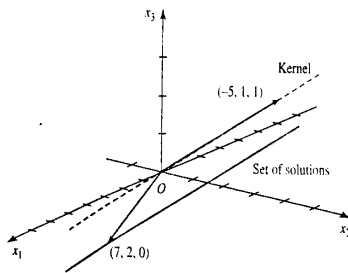
$$(-5r + 7, r + 2, r)$$

هستند. ما قسمت‌هایی که پارامتر  $r$  دارند از این قسمت ثابت جدا می‌کنیم. قسمت شامل  $r$  در هسته نگاشت تعریف شده توسط  $A$  است و قسمت ثابت جواب خصوصی  $X_1$  برای  $AX = Y$  می‌باشد.

$$(-5r + 7, r + 2, r) = r(-5, 1, 1) + (7, 2, 0)$$

در مثال بالا هسته نگاشت تعریف شده توسط ماتریس ضرایب را پیدا کردیم که مجموعه بردارهایی به شکل  $(-5, 1, 1)$  هستند خواننده می‌تواند با جایگذاری تحقیق کند که  $(7, 2, 0)$  در واقع یک جواب خصوصی دستگاه داده شده می‌باشد.

به‌طور هندسی مجموعه جواب می‌تواند به‌وسیله محاسبه هسته و خط تعریف شده توسط بردار  $(-5, 1, 1)$  در راستا و فاصله تعریف شده توسط بردار  $(7, 2, 0)$  نشان داده شود شکل ۸-۷ را ملاحظه کنید.



شکل ۸-۷

## ۵-۷ چند دستگاه

فرض کنیم یک تعداد از دستگاه خطی  $AX = Y_1, AX = Y_2, AX = Y_3$  و ... همه دارای ماتریس ضرایب  $A$  باشند. فرض کنیم  $T$  نگاشت خطی تعریف شده توسط  $A$  باشد. همچنین فرض کنیم  $X_1, X_2, \dots$  جواب‌های خصوصی این دستگاه‌ها باشند در این صورت مجموعه جواب برای این دستگاه‌ها چنین هستند.

$$\ker(T) + X_1, \ker(T) + X_2, \ker(T) + X_3, \dots$$

این مجموعه‌ها مجموعه‌های موازی هستند، هرکدام با انتقال  $\ker(T)$  توسط بردارهای  $X_1, X_2, X_3, \dots$  به‌وجود می‌آیند. برای مثال جواب دستگاه

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = a_1$$

$$-x_2 + x_3 = a_2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = a_3$$

خطی موازی با خط تعریف شده توسط بردار  $(-5, 1, 1)$  است.

مثال ۳: جواب‌های دستگاه معادلات زیر را حل و بحث کنید.

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1$$

$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 4$$

$$3x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 5$$

$$x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 3$$

حل: با اعمال روش حل حذفی گوس-جردن داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & -5 & 5 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$x_1 - 5x_3 - 5x_4 = 5$$

$$x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 2$$

متغیرهای پیشرو را برحسب متغیرهای باقی‌مانده بیان می‌کنیم:

$$x_1 = 5x_3 + 5x_4 + 5 \quad x_2 = 4x_3 + 3x_4 + 2$$

جواب دلخواه چنین است

$$(\delta r + \delta s + 5, 4r + 3s + 2, r, s)$$

قسمت‌های این بردار را به شکل زیر جدا می‌کنیم:

$$Ax = y \quad \text{یک جواب خصوصی } Ax = y \quad \text{هسته نگاشت تعریف شده به وسیله } A \quad \text{جواب دلخواه } Ax = y$$

$$(5r + 5s + 5, 4r + 3s + 2, r, s) = r(5, 4, 1, 0) + s(5, 3, 0, 1) + (5, 2, 0, 0)$$

مشاهده می‌کنیم که هسته زیرفضای دوبعدی از  $R^4$  با پایه  $(5, 4, 1, 0)$  و  $(5, 3, 0, 1)$  است و آن صفحه‌ای است که از مبدا می‌گذرد. مجموعه جواب برای دستگاه داده شده انتقال یافته این صفحه توسط بردار  $(5, 2, 0, 0)$  است.

برای دانشجویانی که تاکنون معادلات دیفرانسیل را گذرانده‌اند جالب خواهد بود که ملاحظه کنند این مفاهیم با حل معادلات دیفرانسیل و روش‌های آن در ارتباط هستند. مثال زیر این ایده‌ها را توضیح می‌دهد.

مثال ۴: معادله دیفرانسیل  $D^2y - 9y = 2x$  را حل کنید.

حل: فرض کنیم  $D$  عملگر مشتق باشد می‌توانیم معادله دیفرانسیل را به شکل

$$D^2y - 9y = 2x$$

و یا

$$(D^2 - 9)y = 2x$$

بنویسیم.

فرض کنیم  $V$  فضای توابعی باشد که مشتق دوم دارند باشد.  $D^2 - 9$  یک نگاشت خطی از  $V$  به  $V$  به توی خودش است جواب معادله دیفرانسیل تابعی است مانند  $y$  که تحت نگاشت  $D^2 - 9$  به توی  $2x$  نگاشته می‌شود. وضعیت شبیه حل یک دستگاه معادلات خطی ناهمگن است. در نتیجه داریم:

$$(D^2 - 9)y = 2x \quad \text{جواب خصوصی } (D^2 - 9)y = 2x + (\text{عضو دلخواهی از هسته } D^2 - 9) = \text{جواب دلخواه}$$

فرض می‌کنیم هسته  $D^2 - 9$  را پیدا کردیم قضیه عمومی به ما می‌گوید از آنجا که عملگر از مرتبه دوم است هسته بایستی دوبعدی باشد یا بردارهای پایه‌ای به شکل  $e^{mx}$ . از آنجا که بردارها در هسته هستند:

$$(D^2 - 9)e^{mx} = 0$$

$$(m^2 - 9)e^{mx} = 0$$

$$(m - 3)(m + 3)e^{mx} = 0$$

$$m = -3 \quad \text{یا} \quad m = 3$$

بنابراین بردارهای پایه هسته بردارهای  $e^{2x}$  و  $e^{-2x}$  می‌باشند بردار دلخواه در هسته می‌تواند به صورت  $re^{2x} + se^{-2x}$  باشد.

باقی می‌ماند اینکه یک جواب خصوصی برای  $D^2y - 9y = 2x$  را پیدا کنیم ساده‌ترین جواب جوابی است که مشتق دوم آن صفر باشد داریم  $2x - 9y = -2x/9$  و  $y = -2x/9$  بنابراین یک جواب دلخواه از معادله دیفرانسیل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y = re^{2x} + se^{-2x} - \frac{2x}{9}$$

**تمرین ۱-۵-۷** دستگاه‌های معادلات خطی زیر را در نظر گرفته برای جواب‌های داده شده جواب‌ها را به صورت جمع دو جواب به عنوان هسته نگاشت خطی تعریف شده توسط ماتریس ضرایب و جواب خصوصی تجزیه کنید.

(۱)

$$x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = -1$$

$$x_2 = r \quad x_3 = 2r \quad x_1 = r + 1 \quad \text{جواب‌ها}$$

(۲)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$$

$$x_2 = 2 \quad x_3 = 1 \quad x_1 = 0 \quad \text{جواب‌ها}$$

(۳)

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1$$

$$3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 3$$

$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2$$

$$x_2 = r \quad x_3 = 2r \quad x_1 = r + 1 \quad \text{جواب‌ها}$$

(۴)

$$x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

$$-2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 6$$

$$x_3 = s \quad x_2 = r \quad x_1 = r - s + 3 \quad \text{جواب‌ها}$$

(۵)

$$x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 4$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 2$$

$$x_3 = r \quad x_2 = -5r + 5s - 6 \quad x_1 = -4r + 3s - 2 \quad \text{جواب‌ها}$$

$$x_4 = s$$

(۶)

$$x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = 0$$

$$x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 2$$

$$x_3 + 5x_4 + 3x_5 = -3$$

$$x_3 = -5r - 3s - 3 \quad x_2 = 13r + 9s + 8 \quad x_1 = -32 - r - 23s - 19 \quad \text{جواب‌ها}$$

$$x_5 = s \quad x_4 = r$$

(۷) نگاشت خطی  $T: R^3 \rightarrow R^3$  تعریف شده توسط ماتریس  $A$  را در نظر بگیرید. برد این نگاشت خطی مجموعه بردارهای به شکل  $(x, y, x+y)$  که صفحه  $z = x+y$  را مشخص می‌کند، می‌باشد این نگاشت را به‌کار ببرید و تعیین کنید چه موقع جواب‌های دستگاه معادلات  $AX = Y$  وجود دارد  $Y$  روی متغیرهای خودش تغییر می‌کند (اگر جواب‌ها وجود دارند نیازی به تعیین آنها نیست)

$$y = (-1, 2, 3) \quad \text{ب) } y = (1, 1, 2) \quad \text{الف)}$$

$$y = (2, 4, 5) \quad \text{د) } y = (3, 2, 5) \quad \text{ج)}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

۸) در این بخش دستگاه معادلات ناهمگن را حل کردیم که جواب‌های دلخواه به دست آمده جواب به دو قسمت هسته نگاشت خطی تعریف شده براساس ماتریس ضرایب و یک جواب خصوصی دستگاه بود آیا جواب خصوصی  $X_1$  منحصر به فرد است؟ اگر  $X_1$  یکتا نیست، برداری غیر از  $(7, 2, 0)$  تعیین کنید که برای مسأله ۲ این بخش می‌تواند به‌کار رود.

۹) یک برداری به جزء  $(5, 2, 0, 0)$  تعیین کنید که می‌تواند به‌عنوان یک جواب خصوصی در تجزیه مجموعه جواب برای مثال ۳ این بخش به‌کار رود.

۱۰) یک دستگاه معادلات خطی ناهمگن  $AX = Y$  بسازید که ماتریس ضرایب  $A$  و جواب خصوصی  $X_1$  داشته باشد که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad x_1 = (1, -1, 4)$$

۱۱) یک دستگاه معادلات خطی ناهمگن  $Ax = y$  بسازید که ماتریس ضرایب  $A$  و جواب خصوصی  $x_1$  داشته باشد که

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x_1 = (2, 0, 3)$$

۱۲) ثابت کنید جواب یک دستگاه معادلات خطی ناهمگن یکتاست اگر و تنها اگر هسته نگاشت تعریف شده توسط ماتریس ضرایب بردار صفر باشد.

تمرینات ۱۳ و ۱۴ برای دانشجویانی که اطلاعاتی از معادلات دیفرانسیل دارند طرح شده است.

۱۳) یک پایه هسته هر کدام از عملگرهای زیر را پیدا کنید. یک تابع دلخواه در هسته بیاورید.

$$\text{الف) } D^2 + D - 2 \quad \text{ب) } D^2 + 4D + 3 \quad \text{ج) } D^2 + 2D - 8$$

۱۴) معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} \text{الف) } & \frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} + 6y = 8 \\ \text{ب) } & \frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} = 8 \\ \text{ج) } & \frac{d^2 y}{dx^2} - 7 \frac{dy}{dx} + 12y = 24 \\ \text{د) } & \frac{d^2 y}{dx^2} + 8 \frac{dy}{dx} = 3e^{2x} \end{aligned}$$

## ۶-۷ بردار مختصات

تاکنون در مورد انواع فضاهاى بردارى همانند فضاى بردارى  $R^n$  فضاى ماتریس‌ها و فضاى توابع، بحث کرده‌ایم در این بخش راهی پیدا می‌کنیم که چگونه می‌توانیم بردارها را در  $R^n$  به‌کار ببریم بردارها در هر فضاى بردارى با بعد متناهی مختصات بردارى نامیده می‌شوند این توضیح راهنمایی می‌کند برای این نتیجه‌گیری که، همه فضاهاى بردارى با بعد متناهی در یک جمله ریاضی همان  $R^n$  هستند.

تعریف. فرض کنیم  $U$  یک فضاى بردارى با پایه  $B = \{u_1, \dots, u_n\}$  باشد و  $u$  یک بردار در  $U$ ، می‌دانیم اسکالرهای یکتایی وجود دارد که

$$u = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$$

بردار ستونی  $u_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$  بردار مختصات  $u$  در رابطه با این پایه نامیده می‌شود. اسکالرهای  $a_1, \dots, a_n$  مختصات  $u$  در ارتباط با این پایه نامیده می‌شوند.

توجه کنید که شکل بردار ستونی برای بردار مختصات به‌کار برده‌ایم نه ماتریس سطری را.

مثال ۱: بردار مختصات  $u = (4, 5)$  در ارتباط با پایه‌های  $B$  و  $B'$  زیر را از  $R^2$  پیدا کنید.

$$B' = \{(2, 1), (-1, 1)\} \text{ و } B = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

الف) پایه استاندارد  $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$  را بنویسید که  $(4, 5) = 4(1, 0) + 5(0, 1)$  بنابراین  $u_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$  که نمایش داده شده  $u$  در ارتباط با پایه استاندارد است.

ب) اکنون بردار مختصات  $u$  در ارتباط با  $B'$  را پیدا می‌کنیم که یک پایه استاندارد نیست. فرض کنیم

$$(4, 5) = a_1(2, 1) + a_2(-1, 1)$$

بنابراین

$$(4, 5) = (2a_1, a_1) + (-a_2, a_2) \implies (4, 5) = (2a_1 - a_2, a_1 + a_2)$$

با مقایسه مؤلفه‌ها به دستگاه‌های زیر می‌رسیم

$$2a_1 - a_2 = 4$$

$$a_1 + a_2 = 5$$

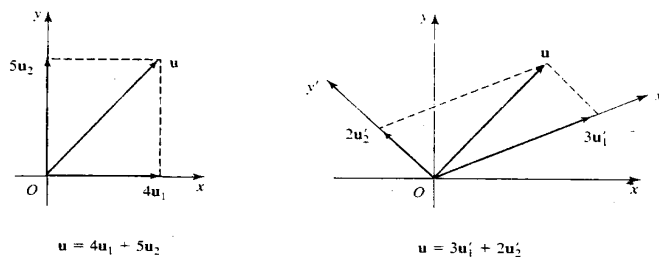
این دستگاه جواب‌های یکتای  $a_1 = 3$  و  $a_2 = 2$  دارد. بنابراین  $u'_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$  این بردار مختصات نمایش هندسی دارند. بردارهای پایه همانند زیر نشان داده شده‌اند.

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 0) & u'_1 &= (2, 1) \\ u_2 &= (0, 1) & u'_2 &= (-1, 1) \end{aligned}$$

می‌توانیم بنویسیم

$$u = 3u_1 + 5u_2, \quad u = 3u'_1 + 2u'_2$$

شکل ۹-۷ را ببینید.



شکل ۹-۷

مثال ۲: بردار مختصات  $u = 5x^2 + 5 - 3$  در ارتباط با پایه‌های  $B$  و  $B'$  از  $p_2$  را پیدا کنید.

$$B = \{x^2, x, 1\} \text{ پایه استاندارد}$$

$$B' = \{x^2 - x + 5, 3x^2 - 1, 2x^2 + 4x + 2\} \text{ ب}$$

حل الف): مشاهده می‌کنیم که  $5x^2 + x - 3 = 5(x^2) + (x) - 3(1)$  بنابراین

$$u_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

مختصات  $u$  در ارتباط با پایه استاندارد، ضرایب  $5x^2 + x - 3$  می‌باشند.

حل ب): اگر بخواهیم بردار مختصات  $u$  در ارتباط با پایه  $B'$  که پایه استاندارد نیست، پیدا کنیم، مشکل‌تر خواهد بود.

$$5(x^2 + x - 3) = (a_1 + 3a_2 + 2a_3)x^2 + (-a_1 + 4a_2)x + (-a_1 + 4a_2)x + (5a_1 - a_2 - 2a_3)$$

با مقایسه ضرایب به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم:

$$-a_1 + 2a_2 + 2a_3 = 5$$



$$\begin{aligned} -a_1 + 4a_2 &= 1 \\ 5a_1 - a_2 - 2a_3 &= -3 \end{aligned}$$

این دستگاه جواب‌های منحصر به فرد

$$a_1 = -\frac{1}{5}, \quad a_2 = \frac{8}{5}, \quad a_3 = \frac{1}{5}$$

$$. u_{B'} = \begin{bmatrix} -1/5 \\ 8/5 \\ 1/5 \end{bmatrix} \text{ دارد بنا بر این}$$

مثال‌های بالا نشان دهنده است که چگونه پایه‌ها که، اغلب پایه‌ها استاندارد هستند، برای بیان یک بردار استفاده می‌شوند. به طور کلی یک دستگاه معادلات خطی برای پیدا کردن مختصات در ارتباط با پایه‌ی دیگری حل می‌شوند. معذالک بردار مختصات می‌تواند به آسانی در ارتباط با یک پایه‌ی متعامد به دست آید. خواننده را به نتیجه‌ی قضیه ۵-۱۹ یادآوری می‌کنیم. اگر  $B = \{u_1, \dots, u_n\}$  یک پایه نرمال برای فضای برداری  $U$  باشد. آنگاه یک بردار دلخواه  $v$  در  $U$  می‌تواند به صورت

$$v = (v \cdot u_1)u_1 + (v \cdot u_2)u_2 + \dots + (v \cdot u_n)u_n$$

بیان شود. بنا بر این

$$V_B = \begin{bmatrix} v \cdot u_1 \\ \vdots \\ v \cdot u_n \end{bmatrix}$$

بردار مختصات  $v$  است.

مثال ۳: بردار مختصات  $v = (2, -5, 10)$  در ارتباط با پایه‌ی متعامد

$$B = \left\{ (1, 0, 0), \left(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \left(0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) \right\}$$

را پیدا کنید.

حل: داریم

$$(2, -5, 10) \cdot (1, 0, 0) = 2$$

$$(2, -5, 10) \cdot \left(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 5$$

$$(2, -5, 10) \cdot \left(0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) = -10$$

بنابراین

$$V_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -10 \end{bmatrix}$$

این مثال روشن می‌کند که چگونه پایه‌های متعامد بهتر از پایه‌های دیگر است. این که بدانیم چگونه بردار مختصات در ارتباط با پایه‌های مختلف ارتباط دارد امری ضروری است. موضوع مبحث بعدی است.

## ۷-۷ تغییر پایه

فرض کنیم  $B = \{u_1, \dots, u_n\}$  و  $B' = \{u'_1, \dots, u'_n\}$  پایه‌هایی برای فضای برداری  $U$  باشند. یک بردار  $u$  در  $U$  بردارهای مختصات  $u_B$  و  $u_{B'}$  در ارتباط با این پایه‌ها خواهد داشت. اکنون ما رابطه بین  $u_B$  و  $u_{B'}$  را توضیح می‌دهیم. فرض کنیم بردارهای مختصات  $u_1, \dots, u_n$  در ارتباط با پایه  $B = \{u'_1, \dots, u'_n\}$  برابر با  $(u_1)_B, \dots, (u_n)_B$  باشند ماتریس  $p$  که این بردارها را به‌عنوان ستون‌ها دارد، نقش اساسی در این بحث بازی می‌کند، چنین ماتریسی ماتریس تبدیلات از پایه  $B$  به پایه  $B'$  نامیده می‌شود.

$$p = [(u_1)_B, \dots, (u_n)_B]$$

**۱-۷-۷ قضیه.** فرض کنیم  $B = \{u_1, \dots, u_n\}$  و  $B' = \{u'_1, \dots, u'_n\}$  پایه‌هایی برای فضای برداری  $U$  باشد اگر  $u$  برداری در  $U$  باشد که بردارهای مختصات  $u_B$  و  $u_{B'}$  در ارتباط با این پایه‌ها داشته باشد، آنگاه  $u_{B'} = pu_B$  که در آن  $p$  ماتریس انتقال از  $B$  به  $B'$  است  $p = [(u_1)_{B'}, \dots, (u_n)_{B'}]$  اثبات. از آنجا که  $\{u_1, \dots, u_n\}$  پایه‌ای برای  $U$  است هرکدام از بردارهای  $u_1, \dots, u_n$  می‌تواند به‌صورت ترکیب خطی از این بردارها بیان شود. گیریم

$$u_1 = c_{11}u'_1 + \dots + c_{n1}u'_n$$

$$\vdots$$

$$u_n = c_{1n}u'_1 + \dots + c_{nn}u'_n$$

اگر  $u_1 = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$  داریم:

$$\begin{aligned} u &= a_1 u_1 + \dots + a_n u_n \\ &= a_1 (c_{11} u'_1 + \dots + c_{n1} u'_n) + \dots + a_n (c_{1n} u'_1 + \dots + c_{nn} u'_n) \\ &= (a_1 c_{11} + \dots + a_n c_{n1}) u'_1 + \dots + (a_1 c_{1n} + \dots + a_n c_{nn}) u'_n \end{aligned}$$

بردار مختصات در ارتباط با  $B'$  به صورت زیر می تواند نوشته شود:

$$u'_B = \begin{cases} a_1 c_{11} + \dots + a_n c_{n1} \\ \vdots \\ a_1 c_{1n} + \dots + a_n c_{nn} \end{cases}$$

یک تغییر پایه برای یک فضای برداری از یک پایه غیراستاندارد به پایه استاندارد واضح و سراسر است به دست می آید.

مثال بعدی مثالی است که با ماتریس تبدیل پیدا شده است. ستون های  $p$  در حقیقت بردارهای پایه اولی هستند.

مثال ۴: فرض کنیم پایه های  $B = \{(1, 2), (3, -1)\}$  و  $B' = \{(1, 0), (0, 1)\}$  از  $R^2$  باشند اگر  $u$  برداری باشد به طوری که  $u_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$  آنگاه  $u'_B$  را پیدا کنید.

حل: بردارهای  $B$  را برحسب  $B'$  بیان می کنیم با استفاده از ماتریس تبدیل داریم

$$(1, 2) = 1(1, 0) + 2(0, 1)$$

$$(3, -1) = 3(1, 0) - 1(0, 1)$$

بردارهای مختصات  $(1, 2)$  و  $(3, -1)$  برابر  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$  هستند بنابراین ماتریس تبدیل  $p$  عبارت است از:

$$p = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

و مشاهده می کنیم که ستون های  $p$  بردارهای پایه  $B$  هستند داریم:

$$u'_B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 2 \end{bmatrix}$$

فرض کنیم  $B$  و  $B'$  پایه‌هایی برای فضای برداری باشند. ملاحظه می‌کنیم که ماتریس‌های تبدیل از  $B$  به  $B'$  و از  $B'$  به  $B$  با هم مرتبط هستند.

**۲-۷-۷ قضیه.** فرض کنیم  $B$  و  $B'$  پایه‌هایی برای فضای برداری  $U$  باشند و  $p$  ماتریس تبدیل از  $B'$  به  $B$  باشد. در این صورت  $p$  وارون‌پذیر است و ماتریس تبدیل از  $B$  به  $B'$  برابر  $p^{-1}$  است. اثبات. فرض کنیم  $u$  برداری در  $U$  با بردارهای مختصات ستونی  $u_B$  و  $u_{B'}$  در رابطه با پایه‌های  $B$  و  $B'$  داده شده باشد و ماتریس تبدیل  $p$  از  $B$  به  $B'$  باشد. فرض کنیم  $Q$  ماتریس تبدیل از  $B'$  به  $B$  باشد، می‌دانیم که

$$u_{B'} = pu_B \quad , \quad u_B = Qu_{B'}$$

حال این دو معادله را به دو روش ترکیب می‌کنیم.  $u_B$  از معادله دوم را در اولی جانشین می‌کنیم. سپس به جای  $u_{B'}$  از اولی به توی دومی جانشین می‌کنیم داریم

$$u_{B'} = PQu_{B'} \quad , \quad u_B = QPu_B$$

از آنجا که این نتایج برای همه بردارهای  $u_B$  و  $u_{B'}$  برقرار است داریم:

$$PQ = QP = I$$

بنابراین

$$Q = P^{-1}$$

مثال بعدی روش مفیدی را برای پیدا کردن ماتریس تبدیل از یک پایه به پایه دیگری که هیچ‌کدام پایه استاندارد نیستند معرفی می‌کند. در اینجا به سبب ساده‌تر بودن هر کدام از تبدیلات به پایه استاندارد، پایه استاندارد را به عنوان یک پایه مبنای به کار می‌بریم.

**مثال ۵:** پایه‌های  $B = \{(1, 2), (3, -1)\}$  و  $B' = \{(3, 1), (5, 2)\}$  از  $R^2$  در نظر بگیرید ماتریس تبدیل از  $B$  به  $B'$  را پیدا کنید. اگر  $u$  یک برداری باشد که  $u_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  سپس  $u_{B'}$  را پیدا کنید.  
**حل:** فرض کنیم پایه استاندارد  $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$  به عنوان یک پایه میانی باشد ماتریس تبدیل  $p$  از  $B$  به  $S$  و ماتریس تبدیل  $p'$  از  $B'$  به  $S$  چنین هستند.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad P' = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ماتریس تبدیل خطی از  $S$  به  $B$  برابر  $(p')^{-1}$  خواهد بود. ماتریس از  $B'$  به  $B$  برابر  $(p')^{-1}p$  است بنابراین ماتریس تبدیل از  $B$  به  $B'$  چنین است

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 11 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$u_{B'} = \begin{bmatrix} -8 & 11 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

## ۸-۷ یک ریختی‌ها

فرض کنیم  $T: U \rightarrow V$  یک نگاشت خطی باشد.  $T$  یک به یک گفته می‌شود اگر برای هر عضو در برد دقیقاً یک عضو از دامنه  $T$  متناظر با آن باشد. اگر هر عضو  $V$  تصویر یک عضو از  $U$  باشد نگاشت  $T$  را یک نگاشت پوشا می‌نامیم.

تعریف بعد مفهوم یک به یک و پوشا به همراه خطی بودن یک نگاشت آورده می‌شود

**تعریف.** فرض کنیم  $T$  یک نگاشت خطی یک به یک و پوشا از  $U$  به  $W$  باشد در این صورت  $T$  یک ریختی نامیده می‌شود و  $U$  و  $W$  را فضاهای برداری یک ریخت می‌گویند. مفهوم فضاهای برداری یک ریخت این است که آنها از نقطه نظر ریاضی همانند هستند، از آنجا که یک ریختی یک به یک و پوشا است اعضای دو فضا با یکدیگر همانند می‌شوند. به علاوه یک ریختی یک نگاشت خطی است بنابراین چنین فضاهایی خواص جمع برداری و ضرب اسکالر مشابه دارند. ظاهر فیزیکی اعضای دو فضای برداری ممکن است متفاوت باشد اما به طور ریاضی آنها ممکن است از یک فضای برداری آمده باشند. عمل وابسته به بردار مختصات به هر بردار در یک فضای برداری حقیقی یک نگاشت از فضای برداری به  $R^n$  تعریف می‌کند. این نگاشت خطی است به علاوه ملاحظه می‌کنیم که یک به یک و پوشا است.

**۱-۸-۷ قضیه.** فرض کنیم  $U$  یک فضای برداری حقیقی یا پایه  $\{u_1, \dots, u_n\}$  باشد. فرض

کنیم  $u$  عضو دلخواهی از  $U$  یا بردار مختصات  $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$  در ارتباط با این پایه باشد در این صورت نگاشت

$T$  با ضابطه زیر یک یک‌ریختی از  $U$  به روی  $R^n$  است:

$$T(u) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

اثبات. نگاشت  $T$  یک‌به‌یک است یعنی اگر  $T(u) = T(v)$  آنگاه  $u = v$ . فرض کنیم

$$T(u) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad T(v) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$u = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n, \quad v = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n$$

در نتیجه  $u = v$  پس  $T$  یک‌به‌یک است.

اکنون با نشان دادن اینکه هر عضو از  $R^n$  تصویر عضوی از  $U$  است ثابت می‌کنیم  $T$  پوشا است.

فرض کنیم  $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$  عضوی از  $R^n$  باشد در این صورت

$$T(b_1 u_1 + \cdots + b_n u_n) = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

بنابراین تصویر بردار  $b_1 u_1 + \cdots + b_n u_n$  است در نتیجه  $T$  پوشا است. این را به عهده خواننده

واگذار می‌کنیم که نشان دهد  $T$  خطی است. یک نتیجه مهم که از قضیه قبل به دست می‌آید این است که هر فضای برداری با بعد متناهی مانند  $U$  یک‌ریخت با  $R^n$  برای بعضی  $n$ ها است. بنابراین هر فضای برداری با بعد متناهی از یک دید جبری با  $R^n$  یکسان است.

**۲-۸-۷ تمرین‌ها** در تمرینات ۱ تا ۴ بردار مختصات  $u$  را در رابطه یا پایه داده شده  $B$  در  $R^2$

بیابید.

$$B = \{(1, 0), (0, 1)\} \quad , \quad u = (2, 3) \quad (1)$$

$$B = \{(3, -1), (2, 1)\} \quad , \quad u = (8, -1) \quad (2)$$

$$B = \{(1, 1), (0, 1)\} \quad , \quad u = (5, 1) \quad (3)$$

$$B = \{(1, -1), (3, 1)\} \quad , \quad u = (-7, -5) \quad (4)$$

تمرینات ۵ تا ۸ بردار مختصات  $u$  در رابطه با پایه داده شده در  $R^2$  را بیابید.

$$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \quad , \quad u = (4, 0, -2) \quad (5)$$

$$B = \{(1, -1, 0), (2, 1, -1), (2, 0, 0)\} \quad , \quad u = (6, -3, 1) \quad (6)$$

$$B = \{(2, 0, 1), (0, 1, 3), (1, 1, 1)\} \quad , \quad u = (3, -1, 7) \quad (7)$$

$$B = \{(1, 2, 3), (1, -1, 0), (0, 1, -2)\} \quad , \quad u = (1, -6, -8) \quad (8)$$

در تمرین‌های ۹ تا ۱۲ بردار مختصات  $u$  در رابطه با پایه داده شده برای  $P_n$  را پیدا کنید.

$$B = \{X, 1\} \quad , \quad u = 7X - 3 \quad (9)$$

$$B = \{3X - 5, X - 1\} \quad , \quad u = 2X - 6 \quad (10)$$

$$B = \{X^2, X, 1\} \quad , \quad u = 4X^2 - 5X + 2 \quad (11)$$

$$B = \{X^2, X - 1, 2X\} \quad , \quad u = 3X^2 - 6X - 2 \quad (12)$$

در تمرین‌های ۱۳ تا ۱۵ بردار مختصات  $u$  در رابطه با پایه متعامد  $B$  داده شده را پیدا کنید.

$$B = \{(0, 1, 0), (\frac{2}{5}, 0, \frac{-4}{5}), (\frac{4}{5}, 0, \frac{2}{5})\} \quad , \quad u = (5, 0, -10) \quad (13)$$

$$B = \{(9\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}), (\frac{3}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{4}), (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{4})\} \quad , \quad u = (1, 2, 3) \quad (14)$$

$$B = \{(1, 0, 0), (0, \frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{4}}), (0, \frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{-1}{\sqrt{4}})\} \quad , \quad u = (2, 1, 4) \quad (15)$$

در تمرین‌های ۱۶ تا ۲۰ ماتریس تبدیل  $P$  از پایه داده شده  $B$  به پایه استاندارد  $B'$  از  $R^2$  پیدا

کنید. این ماتریس را برای پیدا کردن بردار مختصات  $u, v$  و  $w$  در رابطه با  $B'$  به کار ببرید.

$$B = \{(2, 3)(1, 2)\} \quad , \quad B' = \{(1, 0)(0, 1)\} \quad (16)$$

$$u_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , \quad v_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad , \quad w_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \{(4, 1)(3, -1)\} \quad , \quad B' = \{(1, 0)(0, 1)\} \quad (17)$$

$$u_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad v_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad w_B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \{(1, 1)(2, -3)\}, \quad B' = \{(1, 0)(0, 1)\} \quad (18)$$

$$u_B \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad w_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \{(3, 2)(2, 1)\}, \quad B' = \{(1, 0)(0, 1)\} \quad (19)$$

$$u_B \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \{(2, -3)(-3, 4)\}, \quad B' = \{(1, 0)(0, 1)\} \quad (20)$$

$$u_B \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(۲۱) پایه‌های  $B = \{(1, 0)(0, 1)\}$  و  $B' = \{(5, 2)(3, 2)\}$  از  $R^2$  را در نظر بگیرید اگر  $u$  یک بردار باشد به طوری که  $u_B = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$  سپس  $u_{B'}$  را پیدا کنید (راهنمایی: ماتریس تبدیل از  $B$  به  $B'$  وارون از  $B'$  به  $B$  است).

(۲۲) پایه‌های  $B = \{(1, 0)(0, 1)\}$  و  $B' = \{(1, 2)(-1, -1)\}$  از  $R^2$  را در نظر بگیرید اگر  $u$  برداری باشد به طوری که  $u_B = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$  سپس  $u_{B'}$  را پیدا کنید.

(۲۳) ماتریس تبدیل  $P$  از پایه  $B = \{(1, 2)(3, 0)\}$  از  $R^2$  به پایه  $B' = \{(2, 1)(3, 2)\}$  را پیدا کنید اگر  $u_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$  سپس  $u_{B'}$  را پیدا کنید.

(۲۴) فضای برداری  $P_2$  را در نظر بگیرید  $B = \{X^2, X, 1\}$  و  $B' = \{3X^2, X - 1, 4\}$  پایه‌هایی برای  $P_2$  هستند. ماتریس تبدیل از  $B$  به  $B'$  را پیدا کنید این ماتریس را به کار ببرید و بردارهای مختصات  $4 + 4x + 3x^2, 4 + 6x + 6x^2, 4 + 12x + 8x^2$  و  $4 + 4x + 3x^2$  را در رابطه با پایه  $B'$  پیدا کنید (راهنمایی: ماتریس تبدیل  $B$  به  $B'$  وارون ماتریس از  $B'$  به  $B$  است).

(۲۵) فضای برداری  $P_1$  را در نظر بگیرید  $B = \{X, 1\}$  و  $B' = \{X + 2, 3\}$  پایه‌هایی برای  $P_1$  هستند. ماتریس تبدیل از  $B$  به  $B'$  را بیابید. این ماتریس را برای پیدا کردن بردارهای مختصات  $3 - 12x, 6x + 9, 6x + 3$  و  $3x + 3$  در ارتباط با پایه  $B'$  به کار ببرید.

(۲۶) یک یک‌ریختی از فضای برداری ماتریس‌های قطری  $2 \times 2$  به روی  $R^2$  بسازید.

(۲۷) یک یک‌ریختی از فضای برداری ماتریس‌های متقارن  $2 \times 2$  به روی  $R^2$  بسازید.

(۲۸) فرض کنید  $T$  یک ماتریس تبدیل تعریف شده به وسیله یک ماتریس مربع  $A$  باشد. ثابت کنید  $T$  یک یک‌ریختی است اگر و تنها اگر  $A$  نامنفرد باشد.



(۲۹) فرض کنید  $A$  یک ماتریس نامنفرد باشد که یک یک‌ریختی از  $R^n$  به روی  $R^n$  تعریف می‌کند. (تمرین قبل را ببینید) ثابت کنید  $A^{-1}$  همچنین یک یک‌ریختی از  $R^n$  به روی خودش تعریف می‌کند.

## ۹-۷ نمایش ماتریسی نگاشت‌های خطی

دیدیم که یک نگاشت خطی  $T: R^n \rightarrow R^m$  توسط یک ماتریس  $A$  تعریف می‌شود. در این بخش ما یک روش نمایش‌گر یک نگاشت خطی بین دو فضای برداری کلی به وسیله یک ماتریس معرفی می‌کنیم. این بحث را با توجه به اطلاعاتی برای تعریف یک نگاشت خطی لازم است به سرانجام می‌رسانیم.

فرض کنیم  $f$  یک تابع دلخواه باشد، می‌دانیم  $f$  تعریف شده است هرگاه اثر آن روی هر عضو از دامنه‌اش مشخص باشد. معمولاً ضابطه توسط یک معادله معین می‌شود که اثر تابع روی هر عضو دلخواه در دامنه آن را به دست می‌دهد. برای مثال فرض کنید تابع  $f$  تعریف شده به وسیله ضابطه زیر تعریف شده باشد

$$f(x) = \sqrt{x-3}$$

دامنه  $f$ ، مجموعه  $x$ هایی است که  $x \geq 3$ . معادله بالا اثر  $f$  روی هر  $x$  در این بازه را می‌دهد. برای مثال  $f(7) = 2$  متشابهاً یک نگاشت خطی  $T$  تعریف می‌شود اگر ارزش آن برای هر بردار از دامنه مشخص شود. معذالک متفاوت با یک تابع کلی، خواهیم دید که اگر اثر تبدیل خطی را روی یک زیرمجموعه متناهی از دامنه (یک پایه) بدانیم اثر آن به طور خودکار روی همه اعضای دامنه تعریف می‌شود.

### ۱-۹-۷ قضیه. فرض کنیم $T: U \rightarrow V$ یک نگاشت خطی باشد. فرض کنیم $\{u_1, \dots, u_n\}$

یک پایه برای  $U$  باشد  $T$  توسط اثرش روی بردارهای پایه یعنی  $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$  تعریف می‌شود. برد  $T$  توسط  $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$  پدید می‌آید.

بنابراین با تعریف یک نگاشت خطی روی یک پایه روی همه دامنه آن تعریف می‌شود.

اثبات. فرض کنیم  $u$  یک عضو از  $U$  باشد از آنجا که  $\{u_1, \dots, u_n\}$  یک پایه برای  $U$  است. اسکالرهایی  $a_1, \dots, a_n$  وجود دارند به طوری که

$$u = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$$

با توجه به خطی بودن  $T$

$$T(u) = T(a_1u_1 + \dots + a_nu_n) = a_1T(u_1) + \dots + a_nT(u_n)$$

بنابراین  $T(u)$  شناخته شده است اگر  $T(u_1), \dots, T(u_n)$  و  $T(u_n)$  تعریف شده باشند به علاوه  $T(u)$  ممکن یک عضو دلخواهی از برد  $T$  باشد. البته می‌تواند به عنوان ترکیب خطی از  $T(u_1), \dots, T(u_n)$  بیان شود بنابراین  $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$  برد  $T$  را پدید می‌آورند.

مثال ۱: تبدیل خطی  $T: R^3 \rightarrow R^3$  تعریف شده به صورت زیر به روی بردارهای پایه از  $R^3$  را در نظر بگیرید،  $T(1, -2, 3)$  را پیدا کنید.

$$T(1, 0, 0) = (3, -1) \quad T(0, 1, 0) = (2, 1) \quad T(0, 0, 1) = (3, 0)$$

حل: از آنجا که  $T$  روی بردارهای پایه از  $R^3$  تعریف شده است روی تمام فضا تعریف می‌شود. برای پیدا کردن  $T(1, -2, 3)$  بردار  $(1, -2, 3)$  را به صورت ترکیب خطی از بردارهای پایه بیان می‌کنیم و خطی بودن  $T$  را به کار می‌بریم.

$$\begin{aligned} T(1, -2, 3) &= T(1(1, 0, 0) - 2(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1)) \\ &= 1T(1, 0, 0) - 2T(0, 1, 0) + 3T(0, 0, 1) \\ &= 1(3, -1) - 2(2, 1) + 3(3, 0) = (8, -3) \end{aligned}$$

دیدیم که تبدیل خطی  $T: R^n \rightarrow R^m$  توسط ماتریس  $A$  می‌تواند تعریف شود

$$T(u) = Au$$

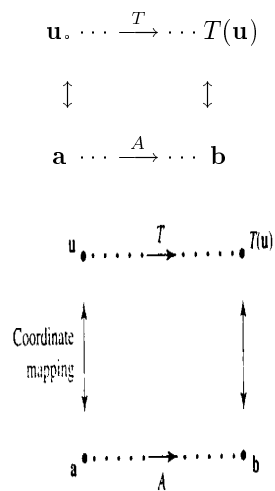
وقتی که  $A = [T(e_1) \dots T(e_n)]$ ، توجه کنید  $A$  به وسیله پیدا کردن اثر  $T$  روی هر بردار پایه استاندارد از  $R^n$  ساخته می‌شود. این ایده می‌تواند یک نگاشت خطی از  $T: U \rightarrow V$  بین دو فضای برداری کلی را تعریف کند. ما اعضای  $U$  و  $V$  را به وسیله بردار مختصات نمایش خواهیم داد و  $T$  را توسط ماتریس  $A$  که یک تبدیل از بردار مختصات تعریف می‌کند، مشخص می‌کنیم؛ هم‌چنانکه برای  $R^n$  ماتریس  $A$  به وسیله پیدا کردن اثر  $T$  روی بردارهای پایه ساخته می‌شود.

**۷-۹-۲ قضیه.** فرض کنیم  $U$  و  $V$  فضاهای برداری یا پایه‌های  $B = \{u_1, \dots, u_n\}$  و  $B' = \{v_1, \dots, v_n\}$  باشند و  $T: U \rightarrow V$  یک نگاشت خطی باشد. اگر  $u$  یک بردار در  $U$  با

تصویر  $T(\mathbf{u})$  باشد، که بردارهای مختصات  $\mathbf{a}$  و  $\mathbf{b}$  در ارتباط با این پایه‌ها داشته باشند آنگاه

$$\mathbf{b} = A\mathbf{a}$$

که در آن  $A = [T(\mathbf{u}_1)_{B'}, \dots, T(\mathbf{u}_n)_{B'}]$ ، در این صورت  $A$  ماتریس نمایش‌گر  $T$  با در نظر گرفتن پایه‌های  $B$  و  $B'$  نامیده می‌شود. شکل ۷-۱۰ را ببینید.



شکل ۷-۱۰

اثبات. فرض کنیم  $\mathbf{u} = a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_n\mathbf{u}_n$  خطی بودن  $T$  را به کار ببرید می‌توانیم بنویسیم

$$T(\mathbf{u}) = T(a_1\mathbf{u}_1 + \dots + a_n\mathbf{u}_n) = a_1T(\mathbf{u}_1) + \dots + a_nT(\mathbf{u}_n)$$

همچنین فرض کنیم اثر  $T$  روی بردارهای پایه  $U$  به این صورت باشد

$$T(\mathbf{u}_1) = c_{11}\mathbf{v}_1 + \dots + c_{1m}\mathbf{v}_m$$

$$\vdots$$

$$T(\mathbf{u}_n) = c_{n1}\mathbf{v}_1 + \dots + c_{nm}\mathbf{v}_m$$

بنابراین:

$$T(\mathbf{u}) = a_1(c_{11}\mathbf{v}_1 + \dots + c_{1m}\mathbf{v}_m) + \dots + a_n(c_{n1}\mathbf{v}_1 + \dots + c_{nm}\mathbf{v}_m)$$

$$= (a_1 c_{11} + \cdots + a_n c_{n1})v_1 + \cdots + (a_1 c_{1m} + \cdots + a_n c_{nm})v_m$$

بنابراین بردار مختصات  $T(\mathbf{u})$  چنین است

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} (a_1 c_{11} + \cdots + a_n c_{n1}) \\ \vdots \\ (a_1 c_{1m} + \cdots + a_n c_{nm}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{1m} & \cdots & c_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$= [T(u_1)_{B'} \quad \cdots \quad T(u_n)_{B'}]$$

پس قضیه ثابت شده است.

مثال ۲: فرض کنید  $T: U \rightarrow V$  یک نگاشت خطی باشد  $T$  در ارتباط با پایه‌های  $B = \{u_1, u_2, u_3\}$  و  $B' = \{v_1, v_2\}$  از  $U$  و  $V$  به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$T(\mathbf{u}_1) = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$$

$$T(\mathbf{u}_2) = 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$$

$$T(\mathbf{u}_3) = \mathbf{v}_1 - 4\mathbf{v}_2$$

نمایش ماتریس  $T$  را با در نظر گرفتن این پایه‌ها پیدا کنید و با استفاده از این ماتریس تصویر بردار  $\mathbf{u} = 3\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$  را بیابید.

حل: بردار مختصات  $T(u_1)$ ،  $T(u_2)$  و  $T(u_3)$  چنین هستند.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

این بردارها ستون‌های ماتریس  $T$  را تشکیل می‌دهند.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

اکنون تصویر  $\mathbf{u} = 3\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$  را با استفاده از این ماتریس پیدا می‌کنیم بردار مختصات  $\mathbf{u}$  برابر

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ است داریم:}$$

$$Aa = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$T(\mathbf{u})$  بردار مختصات  $\begin{bmatrix} 11 \\ 5 \end{bmatrix}$  دارد، بنابراین  $T(\mathbf{u}) = 11\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2$

مثال ۳: تبدیل خطی  $T: R^3 \rightarrow R^2$  تعریف شده توسط  $T(x, y, z) = (x + y, 2z)$  را در نظر می‌گیریم. ماتریس  $T$  با در نظر گرفتن پایه‌های  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  و  $\{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$  از  $R^3$  به  $R^2$  را پیدا کنید که در آن

$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0) \quad \mathbf{u}_2 = (0, 1, 4) \quad \mathbf{u}_3 = (1, 2, 3) \quad \mathbf{u}'_1 = (1, 0) \quad \mathbf{u}'_2 = (2, 0)$$

این ماتریس را به‌کار برده و تصویر بردار  $\mathbf{u} = (2, 3, 5)$  را بیابید.

حل: ما اثر  $T$  روی بردارهای پایه از  $R^3$  را پیدا می‌کنیم.

$$T(\mathbf{u}_1) = T(1, 1, 0) = (2, 0) = 2(1, 0) + 0(0, 2) = 2\mathbf{u}'_1 + 0\mathbf{u}'_2$$

$$T(\mathbf{u}_2) = T(0, 1, 4) = (1, 8) = 1(1, 0) + 4(0, 2) = 1\mathbf{u}'_1 + 4\mathbf{u}'_2$$

$$T(\mathbf{u}_3) = T(1, 2, 3) = (3, 6) = 3(1, 0) + 3(0, 2) = 3\mathbf{u}'_1 + 3\mathbf{u}'_2$$

بنابراین بردار مختصات  $T(\mathbf{u}_1)$ ،  $T(\mathbf{u}_2)$  و  $T(\mathbf{u}_3)$  برابر  $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ،  $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$  هستند. این بردارها ستون‌های ماتریس  $T$  را تشکیل می‌دهند.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

اکنون ماتریس  $A$  را برای پیدا کردن تصویر بردار  $\mathbf{u} = (2, 3, 5)$  به‌کار می‌بریم. بردار مختصات  $u$  را تعیین می‌کنیم که این بردار می‌تواند چنین نشان داده شود.

$$\mathbf{u} = (2, 3, 5) = 3(1, 1, 0) + 2(0, 1, 4) - (1, 2, 3) = 3\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + (-1)\mathbf{u}_3$$

بنابراین بردار مختصات  $u$ ،  $a = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$  است. بردار مختصات  $T(u)$  چنین است:

$$b = Aa = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$T(\mathbf{u}) = 5\mathbf{u}'_1 + 5\mathbf{u}'_2 = 5(1, 0) + 5(0, 2) = (5, 10)$$

می‌توانیم این نتیجه را با استفاده از تعریف  $T(x, y, z) = (x + y, 2z)$  امتحان کنیم. برای  $\mathbf{u} = (2, 3, 5)$  داریم:

$$T(\mathbf{u}) = T(2, 3, 5) = (2 + 3, 2 \times 5) = (5, 10)$$

مثال قبلی به ما کمک می‌کند ایده نمایش ماتریسی را بهتر بفهمیم. اهمیت مفهوم نمایش ماتریسی در استفاده از آن برای پیدا کردن  $T(\mathbf{u})$  است ما اکنون ارتباط آن را بحث می‌کنیم.

## ۷-۱۰ اهمیت نمایش ماتریسی

در بخش گذشته دیدیم هر فضای برداری متناهی حقیقی یک ریخت با  $R^n$  است. این بدان معنی است که هر چنین فضایی برداری را می‌توان برحسب  $R^n$  مناسبی مورد بحث قرار داد. در حقیقت هر نگاشت خطی می‌تواند توسط یک ماتریس نمایش داده شود. که بدین معنی است همه قضایای ریاضی از این فضاهای برداری و نگاشت‌های خطی آنها می‌تواند به صورت مناسبی از فضاهای برداری  $R^n$  و ماتریس‌ها پذیرفته شود.

نتیجه دوم کامپیوتری است. اعضای  $R^n$  و ماتریس‌ها را می‌توان در کامپیوترها محاسبه کرد. بنابراین فضاهای برداری کلی و نگاشت‌های خطی آنها می‌تواند براساس این نمایش‌ها و به کمک کامپیوترها مورد بحث قرار گیرند. تعدادی کاربردهای ویژه نمایش ماتریسی وجود دارد ما به طور مثال می‌بینیم که عمل‌های سطری مقدماتی نگاشت‌های خطی هستند که نمایش ماتریسی دارند که ماتریس مقدماتی نامیده می‌شود. خواهیم دید که چگونه این نمایش‌ها برای یک روش که تجزیه  $U$  نامیده می‌شود و برای حل دستگاه معادلات از طریق کامپیوتر به طور گسترده استفاده می‌شود.

مثال ۴: تبدیل خطی  $T: p_2 \rightarrow p_1$  تعریف شده توسط  $T(ax^2 + bx + c) = (a + b)x - c$  را در نظر می‌گیریم. ماتریس  $T$  با در نظر گرفتن پایه‌های  $\{u_1, u_2, u_3\}$  و  $\{u'_1, u'_2\}$  از  $p_2$  به  $p_1$  را پیدا کنید هرگاه:

$$u_1 = x^2 \quad u_2 = x \quad u_3 = 1, \quad u'_1 = x \quad u'_2 = 1$$

این ماتریس را به کار ببرید و تصویر  $u = 2x^2 + 2x - 1$  را بیابید.

حل: اثر  $T$  را روی هر بردار پایه  $p_2$  در نظر بگیرید.

$$T(u_1) = T(x^2) = x = 1x + 0(1) = 1u'_1 + 0u'_2$$

$$T(u_2) = T(x) = 1x + 0(1) = 1u'_1 + 0u'_2$$

$$T(u_2) = T(1) = -1 = 0x + -1(1) = 0u'_1 + (-1)u'_2$$

بردارهای مختصات  $T(1)$ ،  $T(x)$  و  $T(x^2)$  برابر  $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ،  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  هستند. بنابراین ماتریس  $T$  چنین است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

حال  $T$  را به کار می‌بریم و تصویر  $1 - x + 3x^2 = u$  را به دست می‌آوریم. بردار مختصات  $u$  در ارتباط

با پایه  $\{1, x, x^2\}$  برابر  $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$  است داریم:

$$b = Aa = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T(u) = 5u'_1 + 1u'_2 = 5x + 1$$

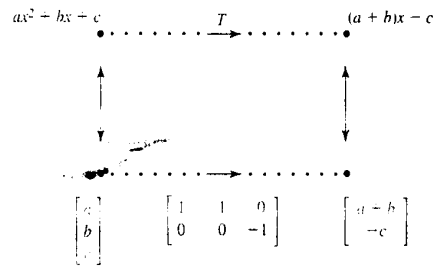
روش این نمایش ماتریسی را در شکل ۷-۱۱ تجسم کرده‌ایم. نیمه بالایی شکل نشان می‌دهد تبدیل خطی  $T$  از  $p_2$  به  $p_1$  است. نیمه پایینی که در ارتباط با نیمه بالایی است با  $A$  یک تبدیل از بردار مختصات از  $p_2$  به روی بردار مختصات از  $p_1$  تعریف می‌کند، با توجه به اینکه:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ -c \end{bmatrix}$$

نیمه پایینی نمایش مختصات نیمه بالایی است.

$$ax^2 + bx + c \cdots \xrightarrow{T} \cdots (a+b)x - c$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} & \cdots \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}} & \cdots \begin{bmatrix} a+b \\ -c \end{bmatrix} \end{array}$$



شکل ۷-۱۱

وقتی که یک نگاشت خطی از فضای برداری به‌توی خودش باشد نمایش ماتریسی معمولاً براساس یک پایه یکتا پیدا می‌شود. مثال بعدی نتیجه این ایده است.

مثال ۵: فرض کنیم  $D = \frac{d}{dx}$  عملگر مشتق‌گیری باشد.  $D$  یک عملگر خطی روی  $p_2$  است ماتریس  $D$  را با در نظر گرفتن پایه  $\{x^2, x, 1\}$  از  $p_2$  بیابید.

حل: ما اثر  $D$  روی بردارهای پایه را به‌دست می‌آوریم

$$D(x^2) = 2x = 0 \cdot x^2 + 2x + 0 \cdot (1)$$

$$D(x) = 1 = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 \cdot (1)$$

$$D(1) = 0 = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot (1)$$

بنابراین ماتریس  $D$  چنین است

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس  $A$  یک عملگر خطی روی  $R^3$  بوده که هم تراز با  $D$  روی  $p_2$  است. داریم:

$$D(ax^2 + bx + c) = 2ax + b, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 2a \\ b \end{bmatrix}$$

شکل ۷-۱۲ را ببینید.

$$\begin{array}{ccc} ax^2 + bx + c \cdots & \xrightarrow{D} & \cdots 2ax + b \\ \updownarrow & & \updownarrow \end{array}$$



$$\begin{array}{ccc}
 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} & \cdots \xrightarrow{\quad} & \cdots \begin{bmatrix} 0 \\ 2a \\ b \end{bmatrix} \\
 & & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 \\
 ax^2 + bx + c & \xrightarrow{D} & 2ax + b \\
 \updownarrow & & \updownarrow \\
 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 2a \\ b \end{bmatrix}
 \end{array}$$

شکل ۱۲-۷

## ۱۱-۷ ارتباط بین نمایش‌های ماتریسی

تاکنون ملاحظه کرده‌ایم که نمایش ماتریسی یک نگاشت خطی وابسته به پایه‌های انتخابی است. وقتی نگاشت خطی کاربردی می‌شود، هدف اصلی اغلب تعیین یک نمایش ماتریسی ساده است بعداً خواننده می‌بیند که به طور مثال چگونه پایه‌ها می‌توانند انتخاب شوند به گونه‌ای که نمایش نگاشت خطی قطری باشد. در اینجا این امر که چگونه نمایش‌های ماتریسی یک نگاشت خطی برحسب پایه‌های متفاوت در ارتباط با هم هستند مورد بحث قرار می‌گیرد.

برای خواننده یادآوری می‌شود که اگر  $A$  و  $B$  ماتریس‌های مربع از یک اندازه باشند آنگاه  $B$  مشابه با  $A$  گفته می‌شود اگر ماتریس وارون‌پذیر  $p$  موجود باشد به طوری که  $B = p^{-1}Ap$  تبدیل ماتریسی  $A$  به ماتریس  $B$  تبدیل تشابه‌ی نامیده می‌شود. اکنون نمایش ماتریسی یک عملگر خطی را در ارتباط با دو پایه ماتریس‌های متشابه پیدا می‌کنیم.

**۱۱-۱۱-۷ قضیه.** فرض کنیم  $U$  یک فضای برداری با پایه‌های  $B$  و  $B'$  باشد فرض کنیم  $p$  نمایش ماتریسی از  $B$  به  $B'$  باشد. اگر  $T$  یک عملگر خطی روی  $U$  باشد ماتریس داده شده  $A$  با در

نظر گرفتن پایه اول و  $A'$  با در نظر گرفتن پایه دوم باشند در این صورت

$$A' = p^{-1}Ap$$

اثبات. بردار  $u$  در  $U$  را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم بردارهای مختصات در رابطه با  $B$  و  $B'$  برابر  $a$  و  $a'$  باشند بردارهای مختصات  $Aa$ ،  $Aa'$  و  $T(u)$  هستند از آنجا  $p$  ماتریس نمایشی از  $B'$  به  $B$  است می‌دانیم که

$$a = pa' \quad , \quad Aa = p(A'a')$$

معادله دوم به صورت زیر می‌تواند نوشته شود:

$$p^{-1}Aa = A'a'$$

با جانشینی  $a = pa'$  در این معادله چنین به دست می‌آید:

$$p^{-1}Apa' = A'a'$$

اثر ماتریس‌های  $p^{-1}Ap$  و  $A'$  به عنوان نگاشت خطی روی هر بردار مختصات  $a'$  برابرند پس این ماتریس‌ها مساوی‌اند.

مثال ۶: عملگر خطی  $T(x, y) = (2x, x + y)$  روی  $R^2$  را در نظر بگیرید ماتریس  $T$  با در نظر گرفتن پایه  $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$  از  $R^2$  را بیابید. تبدیل  $A' = p^{-1}Ap$  را به کار ببرید و ماتریس  $A'$  با در نظر گرفتن پایه  $B' = \{(-2, 3), (1, -1)\}$  را تعیین کنید.

حل: اثر  $T$  روی بردارهای پایه استاندارد برابر است

$$T(1, 0) = (2, 1) = 2(1, 0) + 1(0, 1)$$

$$T(0, 1) = (0, 1) = 0(1, 0) + 1(0, 1)$$

ماتریس  $T$  در ارتباط با پایه استاندارد چنین است:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

اکنون  $P$  نمایش ماتریسی از  $B$  به  $B'$  را پیدا می‌کنیم بردارهای  $B'$  را برحسب بردارهای  $B$  می‌نویسیم.

$$(-2, 3) = -2(1, 0) + 3(0, 1)$$

$$(1, -1) = 1(1, 0) - (0, 1)$$

$$\text{ماتریس تبدیل برابر است با } P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ بنا براین}$$

$$\begin{aligned} A' &= P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### نمایش ماتریس قطری یک عملگر خطی

اکنون می‌بینیم چگونه نمایش یک ماتریس یک نگاشت خطی  $T$  را پیدا می‌کنیم، ماتریس قطری در صورت وجود معمولاً بیشتر از انواع دیگر کاربرد دارد.

فرض کنیم  $T$  یک عملگر خطی روی فضای برداری  $V$  از بعد  $n$  باشد. فرض کنیم  $B$  یک پایه برای  $V$  و  $A$  یک نمایش ماتریسی  $T$  متناظر با پایه  $B$  باشد نمایش ماتریسی  $T$  در رابطه با پایه دیگر  $B'$  می‌تواند به شکل تبدیل تشابهی  $A' = p^{-1}Ap$  مشاهده شود که در آن  $p$  نمایش ماتریسی از پایه  $B'$  به پایه  $B$  باشد، فرض می‌کنیم  $A$  مقادیر ویژه  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  با  $n$  بردار متناظر مستقل خطی  $v_1, \dots, v_n$  داشته باشد اگر  $p = \{v_1 \dots v_n\}$  آنگاه می‌دانیم (قضیه ۴-۶ بخش ۳-۶) که  $A'$  یک ماتریس قطری است.

$$A' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

بردار مختصات  $B'$  در رابطه با  $B$  بردارهای ویژه  $v_1, \dots, v_n$  هستند.

مثال: عملگر خطی  $T(x, y) = (3x + y, x + 3y)$  روی  $R^2$  را در نظر بگیرید یک نمایش ماتریسی قطری  $T$  را پیدا کنید. برای این نمایش برداری، پایه را تعیین کنید و یک نمایش هندسی ارائه دهید.

حل: با نمایش ماتریسی  $A$  در رابطه با پایه  $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$  از  $R^2$  شروع می‌کنیم. این نمایش برای پیدا کردن ساده‌تر است داریم:

$$T(1, 0) = (3, 1) = 3(1, 0) + 1(0, 1)$$

$$T(0, 1) = (1, 3) = 1(1, 0) + 3(0, 1)$$

بردارهای مختصات  $T(1, 0)$  و  $T(0, 1)$  در رابطه با  $B$ ،  $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$  هستند. بنابراین نمایش ماتریسی  $T$  در رابطه با پایه استاندارد  $B$  چنین است.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

خواننده می‌تواند تحقیق کند ماتریس  $A$  مقذارهای ویژه و بردارهای ویژه زیر را دارد.

$$\lambda_1 = 4 \quad v_1 = r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 2 \quad v_2 = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس  $A'$  زیر، نمایش ماتریسی قطری  $T$  است.

$$A' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

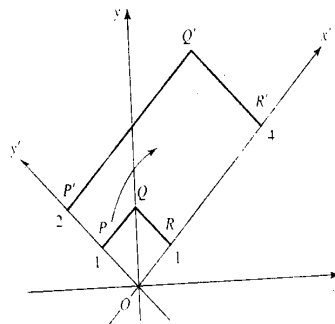
حال پایه  $B'$  را که نمایش  $A'$  را می‌دهد به دست می‌آوریم. ماتریس تغییر وضعیت از  $B$  به  $B'$  متعامد خواهد بود فرض کنیم:

$$B' = \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left( \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

توجه کنید که پایه  $B'$  از دوران پایه  $B$  به اندازه  $\frac{\pi}{4}$  به دست می‌آید.

اکنون به طور هندسی عملگر  $T$  را تغییر می‌دهیم پایه استاندارد  $B$  یک دستگاه مختصات  $xy$  را تعریف

می‌کند شکل ۱۳-۷ را ببینید.



شکل ۱۳-۷

این مثال‌ها وضعیتی است که اغلب در فیزیک و مهندسی با آن برخورد می‌شود یکی در دستگاه مختصات  $xy$  شرح ریاضی داده می‌شود سپس برای دستگاه مختصات  $x'y'$  دوم که وضعیت بهتر و مناسب برای تجزیه و تحلیل در آن دستگاه مختصات دارد بررسی می‌کند. تبدیل از یک دستگاه به دیگری معمولاً یک تبدیل تشابهی متعامد است.

### ۲-۱۱-۷ تمرین‌ها

(۱) فرض کنیم  $T: R^3 \rightarrow R^2$  یک نگاشت خطی تعریف شده به صورت زیر روی پایه استاندارد  $R^3$  باشد.  $T(0, 1, -1)$  را پیدا کنید.

$$T(1, 0, 0) = (2, 1) \quad T(0, 1, 0) = (0, 2) \quad T(0, 0, 1) = (-1, 1)$$

(۲) فرض کنیم  $T: R^3 \rightarrow R^2$  یک نگاشت خطی تعریف شده به صورت زیر روی پایه استاندارد  $R^3$  باشد.  $T(3, -2)$  را پیدا کنید

$$T(1, 0) = 4 \quad T(0, 1) = -3$$

(۳) فرض کنیم  $T$  یک عملگر خطی روی  $R^2$  تعریف شده به صورت زیر روی پایه استاندارد  $R^2$  باشد.  $T(2, 1)$  را پیدا کنید.

$$T(1, 0) = (2, 5) \quad T(0, 1) = (1, -3)$$

(۴) فرض کنیم  $T: p_2 \rightarrow p_1$  یک نگاشت خطی تعریف شده به صورت زیر روی پایه استاندارد  $\{x^2, x, 1\}$  از  $p_2$  باشد.  $T(3x^2 - 2x + 1)$  را پیدا کنید.

$$T(x^2) = 3x + 1 \quad T(x) = 2 \quad T(1) = 2x - 5$$

(۵) فرض کنیم  $T$  یک عملگر روی  $p_2$  تعریف شده به صورت زیر روی پایه استاندارد  $\{x^2, x, 1\}$  از  $p_2$  باشد.  $T(x^2 + 3x - 2)$  را پیدا کنید.

$$T(x^2) = x^2 + 3 \quad T(x) = 2x^2 + 4x - 1 \quad T(1) = 3x - 1$$

(۶) فرض کنیم  $T: U \rightarrow V$  یک نگاشت خطی باشد. همچنین فرض کنید  $T$  در ارتباط با پایه‌های  $\{u_1, u_2\}$  و  $\{v_1, v_2\}$  از  $U$  و  $V$  به صورت زیر باشد:

$$T(u) = 2v_1 + 3v_2 \quad T(u_2) = 4v_1 - v_2$$

ماتریس  $T$  را با در نظر گرفتن این پایه‌ها بیابید. این ماتریس را به کار ببرید و تصویر بردار  $u = 2u_1 + 5u_2$  را پیدا کنید.

(۷) فرض کنیم  $T: U \rightarrow V$  یک نگاشت خطی باشد، همچنین فرض کنید  $T$  تعریف شده در ارتباط با پایه‌های  $\{v_1, v_2, v_3\}$  و  $\{u_1, u_2\}$  از  $U$  و  $V$  به صورت زیر باشد:

$$T(u_1) = 2v_1 + v_2 - 3v_3 \quad T(u_2) = v_1 - 2v_2 + v_3$$

ماتریس  $T$  را با در نظر گرفتن این پایه‌ها بیابید. این ماتریس را به کار ببرید و تصویر بردار  $u = 4u_1 - 7u_2$  را پیدا کنید.

(۸) فرض کنیم  $T: U \rightarrow V$  یک نگاشت خطی باشد، همچنین فرض کنید  $T$  تعریف شده در ارتباط با پایه‌های  $\{v_1, v_2, v_3\}$  و  $\{u_1, u_2, u_3\}$  از  $U$  و  $V$  به صورت زیر باشد:

$$T(u_1) = v_1 + v_2 \quad T(u_2) = 3v_1 - 2v_2 \quad T(u_3) = v_1 + 2v_2 - v_3$$

ماتریس  $T$  را بیابید و تصویر بردار  $u = 3u_1 + 2u_2 - 5u_3$  را بیابید.

(۹) ماتریس نگاشت‌های خطی زیر از  $R^3 \rightarrow R^3$  با در نظر گرفتن پایه‌های استاندارد این فضاها را بیابید و تصویر بردار  $(1, 2, 3)$  را پیدا کنید.

$$T(y, z) = (x, z) \quad \text{الف)}$$

$$T(x, y, z) = (3x, y = z) \quad \text{ب)}$$

$$T(x, y, z) = (x + y, 2x - y) \quad \text{ج)}$$

(۱۰) ماتریس عملگرهای زیر را در فضای  $R^3$  به دست آورید. این ماتریس را برای پیدا کردن تصویر بردار  $(-1, 5, 2)$  بیابید.

$$T(x, y, z) = (x, 2y, 3z) \quad \text{الف)}$$

$$T(x, y, z) = (x, y, z) \quad \text{ب)}$$

$$T(x, y, z) = (x, 0, 0) \quad \text{ج)}$$

$$T(x, y, z) = (x + y, 3y, x + 2y - 4z) \quad \text{د)}$$

(۱۱) نگاشت خطی  $T: R^3 \rightarrow R^3$  تعریف شده توسط  $T(x, y, z) = (x - y, x + z)$  را در نظر بگیرید. ماتریس  $T$  را با در نظر گرفتن این پایه‌های  $\{u_1, u_2, u_3\}$  و  $\{u'_1, u'_2\}$  از  $R^3$  و  $R^2$  را پیدا

کنید.

$$u_1 = (1, -1, 0) \quad u_2 = (2, 0, 1) \quad u_3 = (1, 2, 1)$$

$$u'_1 = (-1, 0) \quad u'_2 = (0, 1)$$

این ماتریس را برای پیدا کردن تصویر  $u = (3, -4, 0)$  به کار ببرید.

۱۲) نگاشت خطی  $T: R^2 \rightarrow R^3$  تعریف شده توسط  $T(x, y) = (x, x + y, 2y)$  را در نظر بگیرید. ماتریس  $T$  با در نظر گرفتن پایه‌های  $\{u_1, u_2\}$  و  $\{u'_1, u'_2, u'_3\}$  از  $R^3$  و  $R^2$  را به دست آورید که در آن

$$u_1 = (1, 3) \quad u_2 = (4, -1)$$

$$u'_1 = (1, 0, 0) \quad u'_2 = (0, 2, 0) \quad u'_3 = (0, 0, -1)$$

این ماتریس را برای پیدا کردن تصویر بردار  $u = (9, 1)$  به کار ببرید.

۱۳) عملگر خطی  $T: R^2 \rightarrow R^2$  تعریف شده توسط  $T(x, y) = (2x, x + y)$  را در نظر بگیرید. ماتریس  $T$  با در نظر گرفتن پایه‌های  $\{u_1, u_2\}$  از  $R^2$  را پیدا کنید وقتی که

$$u_1 = (1, 2) \quad u_2 = (0, -1)$$

این ماتریس را برای پیدا کردن تصویر بردار  $u = (-1, 3)$  به کار ببرید.

۱۴) ماتریس عملگر مشتق  $D$  را با در نظر گرفتن پایه  $\{2x^2, x - 1\}$  از  $p_2$  را پیدا کنید این ماتریس را برای پیدا کردن تصویر  $3x^2 - 2x + 4$  به کار ببرید.

۱۵) فرض کنید  $V$  فضای برداری توابع با دامنه  $[0, \pi]$  تولید شده توسط توابع  $\sin$  و  $\cos$  باشد. همچنین فرض کنید  $D$  عملگر مشتق با در نظر گرفتن  $x$  و  $D^2$  عملگر گرفتن مشتق دوم باشد. ماتریس عملگر خطی  $1 + 2D + D^2$  از  $V$  با در نظر گرفتن پایه  $\{\sin x, \cos x\}$  از  $V$  را بیابید. تصویر  $3 \sin x + \cos x$  تحت این نگاشت را بیابید.

۱۶) ماتریس نگاشت‌های زیر را با در نظر گرفتن پایه  $\{x, 1\}$  از  $p_2$  و  $\{x^2, x, 1\}$  از  $p_3$  را بیابید.

$$T(ax^2 + bx + c) = (b + c)x^2 + (b - c)x \quad \text{الف)}$$

$$T(ax + b) = bx^2 + ax + b \quad \text{ب)}$$

$$T(ax^2 + bx + c) = 2cx + b - a \quad (\text{ج})$$

(۱۷) ماتریس تبدیل  $T$  از  $p_2$  به توی  $p_1$  را با در نظر گرفتن پایه  $\{x^2 + x, x, 1\}$  از  $p_2$  و پایه  $\{x, 1\}$  از  $p_1$  پیدا کنید که در آن

$$T(ax^2 + bx + c) = ax + c$$

تصویر  $3x^2 - 2x - 1$  را تعیین کنید.

(۱۸) ماتریس عملگر خطی  $T$  روی  $p_1$  با در نظر گرفتن پایه  $\{x+1, 2\}$  را پیدا کنید که  $T(ax+b) = bx - a$  تصویر  $4x - 3$  را تعیین کنید.

(۱۹) ماتریس عملگر خطی زیر روی  $p_1$  را با در نظر گرفتن پایه استاندارد  $\{x, 1\}$  از  $p_1$  بیابید که  $T(ax+b) = (a+b)x - b$  یک تبدیل تشابهی به کار ببرید و سپس ماتریس  $T$  را با در نظر گرفتن پایه  $\{x+1, x-1\}$  از  $p_1$  پیدا کنید.

(۲۰) عملگر خطی  $T(x, y) = (2x, x+y)$  را روی  $R^2$  در نظر بگیرید. ماتریس  $T$  را با در نظر گرفتن پایه استاندارد برای  $R^2$  پیدا کنید. یک تبدیل تشابهی به کار ببرید سپس ماتریس آن را با در نظر گرفتن پایه  $\{(1, 1), (2, 1)\}$  از  $R^2$  پیدا کنید.

(۲۱) عملگر خطی  $T(x, y) = (x-y, x+y)$  را روی  $R^2$  در نظر بگیرید. ماتریس  $T$  با در نظر گرفتن پایه استاندارد برای  $R^2$  پیدا کنید یک تبدیل تشابهی به کار ببرید سپس ماتریس را با در نظر گرفتن پایه  $\{(1, 2), (1, -2)\}$  از  $R^2$  بیابید.

(۲۲) فرض کنید

الف)  $V$  و  $W$  فضاهای برداری و  $U$  یک زیرفضای  $V$  باشد آیا همیشه ممکن است یک ساختار

نگاشت خطی از  $V$  به توی  $W$  که  $U$  را به عنوان هسته داشته باشد موجود باشد؟

ب) یک نگاشت خطی از  $R^2$  به توی  $R^2$  که زیرفضایی شامل همه بردارهای به شکل  $r(4, 1)$  به عنوان هسته داشته باشد بسازید.

ج) یک نگاشت خطی از  $R^3$  به توی  $R^2$  که زیرفضایی شامل همه بردارهایی به شکل  $(r+s, 2r-s)$  به عنوان هسته داشته باشد بسازید.

(۲۳) یک نگاشت خطی از  $R^2$  به  $R^2$  که زیرفضایی شامل همه بردارهایی به شکل  $r(2, -1)$  به عنوان هسته داشته باشد بسازید.



۲۴) یک نگاشت خطی از  $R^2$  به  $R^3$  که زیرفضایی شامل همه بردارهایی به شکل  $r(4, 1)$  به عنوان هسته داشته باشد بسازید.

۲۵) فرض کنید  $T : U \rightarrow V$  برای یک فضای برداری  $U$  تعریف شده توسط  $T(u) = u$  باشد، ثابت کنید  $T$  خطی است.  $T$  عملگر همانی  $U$  نامیده می‌شود. فرض کنید  $B$  یک پایه برای  $U$  باشد، نشان دهید ماتریس  $T$  با در نظر گرفتن  $B$  یک ماتریس همانی است.

۲۶) فرض کنید  $T : U \rightarrow V$  برای یک فضای برداری  $U$  تعریف شده توسط  $T(u) = 0$  باشد. ثابت کنید  $T$  خطی است.  $T$  عملگر صفر روی  $U$  نامیده می‌شود. فرض کنید  $B$  یک پایه برای  $U$  باشد نشان دهید ماتریس  $T$  با در نظر گرفتن  $B$  ماتریس صفر است.

۲۷) فرض کنید  $U, V$  و  $W$  فضاهای برداری با پایه‌های  $B = \{u_1, \dots, u_n\}$  و  $B' = \{v_1, \dots, v_n\}$  و  $L : V \rightarrow W$  و  $T : U \rightarrow V$  باشند همچنین فرض کنید  $B'' = \{w_1, \dots, w_n\}$  نگاشت‌های خطی باشند. فرض کنید  $P$  ماتریس  $T$  با در نظر گرفتن  $B$  و  $B'$  و  $Q$  ماتریس نمایش‌گر  $L$  با در نظر گرفتن  $B'$  و  $B''$  باشند. ثابت کنید ماتریس  $LOT$  با در نظر گرفتن  $B$  و  $B''$  برابر  $QP$  است.

۲۸) آیا امکان دارد برای دو نگاشت خطی متمایز  $T_1 : U \rightarrow V$  و  $T_2 : U \rightarrow V$  ماتریس‌های یکسان با در نظر گرفتن پایه‌های  $B$  از  $U$  و  $V$  داشته باشند؟

۲۹) یک نمایش ماتریسی قطری برای هر کدام از عملگرهای زیر پیدا کنید یک پایه برای هر کدام از نمایش قطری پیدا کنید و یک تعبیر هندسی از  $T$  ارائه دهید.

$$T(x, y) = (4x + 2y, 2x + 4y) \quad \text{الف)}$$

$$T(x, y) = (5x + 3y, 3x + 5y) \quad \text{ب)}$$

$$T(x, y) = (9x + 2y, 2x + 6y) \quad \text{ج)}$$

$$T(x, y) = (14x - 2y, 2x + 11y) \quad \text{د)}$$

۳۰) یک نمایش ماتریسی قطری برای هر کدام از عملگرهای زیر بیابید. پایه‌ای برای هر کدام از نمایش‌های قطری تعیین کنید. یک تعبیر هندسی از  $T$  بیاورید. (ممکن نیست یک تبدیل متعامد در این مثال‌ها پیدا کنید).

$$T(x, y) = (8x - 6y, 9x - 7y) \quad \text{الف)}$$

$$T(x, y) = (-2x + 2y, -1^{\circ}x + 7y) \quad (\text{ب})$$

$$T(x, y) = (3x - 4y, 2x - 3y) \quad (\text{ج})$$

$$T(x, y) = (7x + 5y, -1^{\circ}x - 8y) \quad (\text{د})$$

### ۳-۱۱-۷ تمرین‌های دوره‌ای فصل ۷

(۱) هسته و برد نگاشت تعریف شده توسط ماتریس  $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  را بیابید. نشان دهید که

$$\dim \ker(T) + \dim \text{range}(T) = \dim \text{domain}(T)$$

(۲) پایه‌ای برای هسته و برد نگاشت تعریف شده توسط ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

بیابید.

(۳) تعیین کنید کدامیک از نگاشت‌های خطی تعریف شده توسط ماتریس‌های زیر یک به یک و پوشا هستند.

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 7 & 2 & 8 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (\text{ب}) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

(۴) هسته و برد نگاشت خطی  $T(x, y, z) = (x, 2x, y - z)$  از  $R^3 \rightarrow R^3$  را تعیین کنید.

(۵) ثابت کنید  $g: p_2 \rightarrow p_2$  تعریف شده در زیر خطی است هسته و برد  $g$  را بیابید، پایه‌ای برای این زیرفضاها به دست آورید.

$$g(a_2x^2 + a_1x + a_0) = (a_2 - a_1)x^2 - a_1x^2 + a_0$$

(۶) فرض کنید  $D$  عملگر مشتق‌گیری باشد  $D$  را به عنوان یک عملگر روی  $p_n$  در نظر بگیرید ثابت کنید

$$D^2 - 2D + 1$$

به توی  $12x - 4$  نگاشته می‌شوند را بیابید.

۷) بردار مختصات  $(-1, 8)$  در ارتباط با پایه  $\{(1, 3), (-1, 4)\}$  را پیدا کنید.

۸) بردار مختصات  $3x^2 + 2x - 13$  را در رابطه با پایه  $\{x^2 + 1, x + 2, x - 3\}$  را پیدا کنید.

۹) بردار مختصات  $(0, 5, -15)$  را در رابطه با پایه متعامد  $(\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5})$ ،  $(0, 1, 0)$  و  $(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5})$  بیابید.

۱۰) ماتریس تبدیل  $p$  از پایه  $B$  زیر به پایه استاندارد  $B'$  از  $R^2$  را بیابید. این ماتریس را برای پیدا کردن بردار مختصات  $u, v$  و  $w$  در رابطه با  $B'$  به کار ببرید.

$$B = \{(1, 3), (5, 2)\} \quad B' = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

$$u_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_B = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} \quad w_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۱۱) ماتریس تبدیل  $P$  از پایه  $B = \{(-1, 2), (2, 1)\}$  از  $R^2$  به پایه  $B' = \{(4, 3), (-3, 2)\}$  را پیدا کنید اگر  $u_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$  آنگاه  $u_{B'}$  را پیدا کنید.

۱۲) فرض کنید  $T$  یک نگاشت خطی روی  $R^2$  تعریف شده به صورت زیر روی پایه استاندارد  $R^2$  باشد  $T(1, 0) = (3, 2)$  و  $T(0, 1) = (-1, 4)$  در این صورت  $T(2, 7)$  را پیدا کنید.

۱۳) فرض کنید  $T: U \rightarrow V$  یک نگاشت خطی باشد همچنین فرض کنید  $T$  در ارتباط با پایه‌های  $\{u_1, u_2\}$  و  $\{v_1, v_2, v_3\}$  از  $U$  و  $V$  به صورت زیر باشد  $T(u_1) = v_1 - 5v_2 - 2v_3$  و  $T(u_2) = 3v_1 - v_2 + 2v_3$ . این ماتریس را به کار ببرید و تصویر بردار  $a = 2u_1 - 3u_2$  را پیدا کنید.

۱۴) ماتریس  $T(x, y, z) = (2x, -3y)$  در ارتباط با پایه استاندارد را پیدا کنید این ماتریس را برای پیدا کردن تصویر  $(1, 2, 3)$  به کار ببرید.

۱۵) ماتریس  $T(ax^2 + bx + c) = (a - b)x^2 + 2cx$  با در نظر گرفتن پایه  $\{x^2, x, 1\}$  از  $P_2$  را پیدا کنید این ماتریس را برای پیدا کردن تصویر  $2x^2 - x + 3$  به کار ببرید.

۱۶) نگاشت خطی  $T(x, y) = (3x, x - y)$  را روی  $R^2$  در نظر بگیرید ماتریس  $T$  را با در نظر گرفتن پایه‌های استاندارد برای  $R^2$  پیدا کنید از یک ماتریس متشابه استفاده کنید سپس این ماتریس را با در نظر گرفتن پایه‌های  $\{(1, 2), (2, 3)\}$  از  $R^2$  بیابید.

## هدف‌های رفتاری فصل ۸

دانشجویی پس از مطالعه و کار روی این فصل باید بتواند

- مفاهیم ضرب نقطه‌ای دو بردار، نرم یک بردار، زاویه بین دو بردار و فاصله دو نقطه را در فضاهای برداری کلی تعریف کرده و مشابهت آنها را به صورت مفاهیم تعمیم یافته‌ای از فضاهای ملبوس  $\mathbb{R}^n$  که در فصل ۵ مطالعه کرده است، درک کند.
- حاصل ضرب نقطه‌ای دو تابع (یا دوچندجمله‌ای) را تعریف کرده و به کمک آن نرم یک تابع را تعریف کنید.
- بدانند که در چه صورتی دو بردار برهم عمودند (با استفاده از مفهوم حاصل ضرب نقطه‌ای)
- درکی از ارتباط حوزه‌ای مهمی چون تئوری نسبیت خاص و هندسه ناقلیدسی داشته باشد.
- تعریف دقیق تقریب به وسیله کمترین مربعات را ارائه دهد.
- مفهوم تقریب فوری را توضیح دهد.
- منحنی‌های کمترین مربعات را توضیح دهد.
- مفاهیم کدها، کد تصحیح خطا و فاصله دو کد را تعریف کند.
- و بالاخره از عهده‌ی حل تمرین‌های پایان فصل به خوبی برآید.

## فصل هشتم

# فضاهای ضرب داخلی

فضای برداری  $R^n$  در فصل ۵ به طور قابل ملاحظه‌ای تعمیم داده شده. در آنجا مجموعه‌ای از اصول موضوعه را برای تبیین خواص  $R^n$  ارائه دادیم. به طوری که هر مجموعه‌ای که در این اصول موضوعه صدق می‌کرد فضای برداری نامیده می‌شد. چنین فضاهایی خواص جبری مشابهی با  $R^n$  دارند. اینک یک قدم فراتر نهاده و مفاهیم فوق را به ضرب نقطه‌ای دو بردار، نرم یک بردار، زاویه بین بردارها و فاصله نقاط برای فضای برداری در حالت کلی تعمیم می‌دهیم.

### ۱-۸ فضاهای ضرب داخلی

ضرب نقطه‌ای یک مفهوم کلیدی در  $R^n$  برای تعیین نرم، زاویه و فاصله است. هدف ما تعمیم ضرب نقطه‌ای در  $R^n$  به فضاهای برداری با یک ساختار ریاضی موسوم به ضرب داخلی است. با این تعمیم می‌توانیم نرم، زاویه و فاصله را در فضاهای برداری دلخواه تعریف کنیم. ضرب داخلی زیر براساس خواص بیان شده برای ضرب نقطه‌ای در بخش ۲-۴ ارائه شده است.

تعریف. یک ضرب داخلی روی یک فضای برداری  $V$ ، تابعی است که به هر زوج از بردارهای  $u$  و  $v$  از  $V$  عددی را با نماد  $\langle u, v \rangle$  متناظر می‌کند. این تابع برای هر بردار  $u, v, w$  و هر اسکالر  $c$  در خواص زیر صدق می‌کند.

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad (۱) \text{ (اصل تقارنی)}$$

$$(۲) \quad \langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \quad (\text{اصل جمع})$$

$$(۳) \quad \langle cu, v \rangle = c \langle u, v \rangle \quad (\text{اصل همگنی})$$

$$(۴) \quad \langle u, u \rangle \geq 0, \quad \langle u, u \rangle = 0 \text{ اگر و فقط اگر } u = 0 \quad (\text{اصل مثبت معین})$$

فضای برداری  $v$  که در آن ضرب داخلی تعریف شده باشد، یک فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود. هر تابعی که در یک فضای برداری در اصول ضرب داخلی صدق کند، یک ضرب داخلی روی آن فضا تعریف می‌کند. البته روی یک فضای برداری ضرب‌های داخلی زیادی می‌توان تعریف کرد. ضرب نقطه‌ای در  $R^2$ ، یک ضرب داخلی در این فضا است. مثال‌های زیر ضرب‌های داخلی دیگری را در  $R^2$  ارائه می‌کنند.

مثال ۱: فرض کنید  $u = (x_1, x_2)$ ،  $v = (y_1, y_2)$  و  $w = (z_1, z_2)$  بردارهای دلخواهی در  $R^2$  باشند. ثابت کنید  $\langle u, v \rangle$  که به شکل زیر تعریف می‌شود، یک ضرب داخلی در  $R^2$  است.

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + 4x_2 y_2$$

ضرب داخلی بردارهای  $(5, -2)$  و  $(1, 3)$  را با این ضرب داخلی به دست آورید.

حل: اصول چهارگانه ضرب داخلی را می‌آزماییم. از خواص جبری اعداد حقیقی و بردارها استفاده کنید و تعریف فوق را در جاهای مناسب به کار ببرید.

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + 4x_2 y_2 \quad \text{اصل ۱:}$$

$$= y_1 x_1 + 4y_2 x_2$$

$$= \langle v, u \rangle$$

$$\langle u + v, w \rangle = \langle (x_1, x_2) + (y_1, y_2), (z_1, z_2) \rangle \quad \text{اصل ۲:}$$

$$= \langle (x_1 + y_1, x_2 + y_2), (z_1, z_2) \rangle$$

$$= (x_1 + y_1)z_1 + 4(x_2 + y_2)z_2$$

$$= x_1 z_1 + y_1 z_1 + 4x_2 z_2 + 4y_2 z_2$$

$$= x_1 z_1 + 4x_2 z_2 + y_1 z_1 + 4y_2 z_2$$

$$= \langle (x_1, x_2), (z_1, z_2) \rangle + \langle (y_1, y_2), (z_1, z_2) \rangle$$

$$= \langle u, v \rangle + \langle v, w \rangle$$

$$\langle cu, v \rangle = \langle c(x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = (cx_1, cx_2), (y_1, y_2) \quad \text{اصل ۳:}$$

$$= cx_1y_1 + \cancel{c}cx_2y_2 = c(x_1y_1 + \cancel{c}x_2y_2)$$

$$= c \langle u, v \rangle$$

$$\langle u, u \rangle = \langle (x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle \quad \text{اصل ۴:}$$

$$= x_1^2 + \cancel{c}x_2^2 \geq 0$$

به علاوه  $x_1^2 + \cancel{c}x_2^2 = 0$  اگر و فقط اگر  $x_1 = 0$  و  $x_2 = 0$  بنابراین  $u = 0$  در نتیجه  $\langle u, u \rangle \geq 0$  و  $\langle u, u \rangle = 0$  اگر و فقط اگر  $u = 0$ . ملاحظه می‌کنیم که اصول چهارگانه ضرب داخلی برقرارند، در این صورت  $\langle u, v \rangle = x_1y_1 + \cancel{c}x_2y_2$  یک ضرب داخلی در  $R^2$  است.

ضرب‌های داخلی دیگری نیز در  $R^2$  وجود دارند. با این حال ضرب نقطه‌ای در  $R^2$  از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است زیرا زاویه و فاصله را در هندسه اقلیدسی به دست می‌دهد. بزودی هندسه نااقلیدسی را براساس ضرب داخلی که در بخش بعدی ارائه خواهیم کرد، مطالعه خواهیم کرد.

اینک ضرب داخلی را در فضای برداری ماتریس‌ها و توابع نمایش می‌دهیم.

مثال ۲: فضای برداری  $M_{2 \times 2}$  متشکل از ماتریس‌های  $2 \times 2$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $u$  و  $v$  دو ماتریس  $2 \times 2$  به شکل زیر باشند.

$$u = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

ثابت کنید تابع زیر یک ضرب داخلی روی  $M_{2 \times 2}$  است

$$\langle u, v \rangle = ae + bf + cg + dh$$

(ضرب متناظر درایه‌ها و جمع آنها) ضرب داخلی ماتریس‌های زیر به دست آورید.

$$u = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$$

حل: اصول موضوع ۱ و ۳ را بررسى و اصول موضوع ۲ و ۴ را به عنوان تمرين به خوانندگان واگذار مى‌کنيم.

اصل موضوع ۱:

$$(u, v) = ae + bf + cg + dh = ea + fb + gc + hd = (v, u)$$

اصل موضوع ۳: فرض كنيم  $k$  يك اسكالر باشد

$$\begin{aligned} \langle ku, v \rangle &= kae + kbf + kcg + kdh \\ &= k(ae + bf + cg + dh) \\ &= k \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

و براى ضرب داخلى دو ماتريس داده شده داريم:

$$\left\langle \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = (2 \times 5) + (-3 \times 2) + (0 \times 9) + (1 \times 0) = 4$$

مثال زير يك ضرب داخلى روى فضاى چندجمله‌اى‌ها است.

مثال ۳:  $P_n$  را فضاى بردارى چندجمله‌اى‌هاى از درجه نايستتر از  $n$  فرض مى‌کنيم.  $f$  و  $g$  را دو عضو  $P_n$  در نظر مى‌گيريم. ثابت كنيد تابع تابع زير يك ضرب داخلى در  $P_n$  است.

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

ضرب داخلى تابع زير را محاسبه كنيد؟

$$f(x) = x^2 + 2x - 1, \quad g(x) = 4x + 1$$

حل: اصول موضوع ۱ و ۲ بررسى و دو اصل ديگر را به خواننده وامى‌گذاريم. خواص انتگرال را در بررسى اصول موضوع به‌كار مى‌بريم.

اصل موضوع ۱:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 g(x)f(x)dx = \langle g, f \rangle$$



اصل موضوع ۲:

$$\begin{aligned}
 \langle f + g, h \rangle &= \int_a^b [f(x) + g(x)]h(x)dx \\
 &= \int_a^b [f(x)h(x)] + [g(x)h(x)]dx \\
 &= \int_a^b f(x)h(x)dx + \int_a^b g(x)h(x)dx \\
 &= \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle
 \end{aligned}$$

و اینک ضرب داخلی توابع داده شده را می‌یابیم

$$\langle x^2 + 2x - 1, 4x + 1 \rangle = \int_0^1 (4x^2 + 9x^2 - 2x - 1)dx = 2$$

## ۲-۸ نرم یک بردار

نرم برداری در  $R^n$  براساس ضرب نقطه‌ای به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \|(x_1, \dots, x_n)\| &= \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} \\
 &= \sqrt{(x_1, \dots, x_n) \cdot (x_1, \dots, x_n)}
 \end{aligned}$$

این تعریف نرم، دقیقاً همان نرمی را که در فضاهای  $R^2$  و  $R^3$  انتظار داریم به دست می‌دهد. ما این تعریف را برای ضرب داخلی تعمیم خواهیم داد. نرمی که به این طریق به دست می‌آید لزوماً تعبیر هندسی ندارد ولی در محاسبات عددی اهمیت ویژه‌ای دارد.

تعریف. فرض کنیم  $V$  یک فضای ضرب داخلی باشد. نرم بردار  $v$  که با  $\|v\|$  مشخص می‌شود عبارت است از:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

مثال ۴: فضای برداری  $P_n$  را با ضرب داخلی

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x) \cdot dx$$

در نظر می‌گیریم. نرم تابع  $f$  تولید شده با این ضرب داخلی عبارت است از:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

نرم تابع  $f(x) = 5x^2 + 1$  را به دست آورید.

حل:

$$\begin{aligned}\|5x^2 + 1\| &= \sqrt{\int_0^1 (5x^2 + 1)^2 dx} \\ &= \sqrt{\frac{28}{3}}\end{aligned}$$

بنابراین نرم تابع  $f(x) = 5x^2 + 1$ ،  $\sqrt{\frac{28}{3}}$  است.

### ۳-۸ زوایه

ضرب نقطه‌ای در  $R^n$  برای تعیین زوایه بین بردارها به کار می‌رود و این زاویه  $\theta$  بین دو بردار  $u$  و  $v$  در  $R^n$  عبارت است از:

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

مثال ۵: فضای ضرب داخلی چندجمله‌ای‌ها،  $P_n$  را با ضرب داخلی

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

در نظر بگیرید. زاویه بین دو تابع ناصفر  $f$  و  $g$  از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\cos \theta = \frac{\langle f, g \rangle}{\|f\| \|g\|} = \frac{\int_0^1 f(x)g(x)dx}{\|f\| \|g\|}$$

کسینوس زاویه بین توابع  $g(x) = 3x$  و  $f(x) = x^2$  را به دست آورید.

حل: ابتدا  $\|f\|$  و  $\|g\|$  را به دست می‌آوریم

$$\|5x^2\| = \sqrt{\int_0^1 [5x^2]^2 dx} = \sqrt{5} \quad , \quad \|3x\| = \sqrt{\int_0^1 [3x]^2 dx} = \sqrt{3}$$

حال

$$\cos \theta = \frac{\int_0^1 f(x)g(x)dx}{\|f\| \|g\|} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

## ۴-۸ بردارهای متعامد

فرض کنید  $V$  یک فضای حاصل ضرب داخلی باشد. دو بردار ناصفر  $u$  و  $v$  در  $V$  متعامد نامیده می‌شود اگر

$$\langle u, v \rangle = 0$$

مثال ۶: نشان دهید توابع  $f(x) = 3x - 2$  و  $g(x) = x$  در  $P_n$  با ضرب داخلی  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$  متعامدند.

حل:

$$\langle 3x - 2, x \rangle = \int_0^1 (3x - 2)(x)dx = x^3 - x^2 \Big|_0^1 = 0$$

بنابراین توابع  $f$  و  $g$  متعامدند.

یادآوری. همان‌طور که قبلاً تذکر دادیم با این تعریف ضرب داخلی، تعامد دو بردار تعبیر هندسی ندارد. با رسم نمودار  $f$  و  $g$  این موضوع را بکاویید.

## ۵-۸ فاصله

هدف نهایی تعمیم مفهوم اقلیدسی به فضاهای برداری است. همانند نرم، در حالت کلی مفهوم فاصله دارای تعبیر هندسی نمی‌باشد، با این حال در محاسبات عددی ما را قادر می‌سازد فواصل توابع متفاوت را به دست آوریم.

تعریف.  $V$  را یک فضای ضرب داخلی با نرم

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

در نظر می‌گیریم. فاصله دو بردار (نقاط)  $u$  و  $v$  که با  $d(u, v)$  نشان داده می‌شود از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$d(u, v) = \|u - v\| \quad (= \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle})$$

مثال ۷:  $P_n$  را با ضرب داخلی بیان شده در نظر بگیرید. کدام یک از توابع  $g(x) = x^2 - 3x + 5$  و  $h(x) = x^2 + 4$  به تابع  $f(x) = x^2$  نزدیک است.

حل: فاصله  $f$  را از  $g$  و  $h$  به دست مى آوريم. براى سهولت از مربع فواصل شروع مى كنيم

$$\begin{aligned} [d(f, g)]^2 &= \langle f - g, f - g \rangle = \langle 3x - 5, 3x - 5 \rangle \\ &= \int_0^1 (3x - 5)^2 dx = 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [d(f, h)]^2 &= \langle f - h, f - h \rangle = \langle -4, -4 \rangle \\ &= \int_0^1 (-4)^2 dx = 16 \end{aligned}$$

بنابراين  $d(f, g) = \sqrt{13}$  و  $d(f, h) = 4$ . پس  $f$  به  $g$  نزديكتر از  $f$  به  $h$  است. در عمل فاصله نسبي توابع مهمتر از فاصله مطلق آنها است.

فضاى بردارى مختلط  $\mathbb{C}^n$  در بخش ۵-۱ تعريف شد، كه در بسيارى از شاخه هاى رياضى، فيزيك و مهندسى اهميت ويژه اى دارد. اينك ضرب داخلى متداول  $\mathbb{C}^n$  را تعريف مى كنيم؛

تعريف. ضرب داخلى  $\mathbb{C}^n$

براى فضاى بردارى مختلط اصل موضوع اول را بازنويسى کرده و به شكل

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$

در مى آوريم. اين ضرب داخلى براى تعريف نرم، تعامد و فاصله همانند فضاهاى بردارى حقيقي به كار مى رود.

فرض كنيم  $u = (x_1, \dots, x_n)$  و  $v = (y_1, \dots, y_n)$  دو عضو  $\mathbb{C}^n$  باشند. يك ضرب داخلى كارا براى  $\mathbb{C}^n$  عبارت است از

$$\langle u, v \rangle = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n$$

مى توان نشان داد اين تعريف در اصول موضوع ضرب داخلى فضاى بردارى مختلط صدق مى كند. (تمرين هاى زير را مرور كنيد). اين ضرب داخلى تعريف نرم، تعامد و فاصله را در  $\mathbb{C}^n$  به اشكال زير در مى آورد.

$$\langle u, v \rangle = 0 \quad \text{اگر} \quad u \perp v$$

$$\|u\| = \sqrt{x_1 \bar{x}_1 + \dots + x_n \bar{x}_n}$$

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

مثال ۸: بردارهای  $u = (۲ + ۳i, -۱ + ۵i)$  و  $v = (۱ + i, -i)$  را در  $C^2$  در نظر بگیرید. مطلوب است

الف)  $\langle u, v \rangle$  و نشان دهید  $u$  بر  $v$  عمود است

ب)  $\|u\|$  و  $\|v\|$

ج)  $d(u, v)$

حل: الف)  $\langle u, v \rangle = (۲ + ۳i)(۱ - i) + (-۱ + ۵i)(i) = ۰$  بنابراین  $u$  بر  $v$  متعامدند.

ب)  $\|u\| = \sqrt{۳۹}$  و  $\|v\| = \sqrt{۳}$

ج)  $d(u, v) = \|u - v\| = \|(۱ + ۲i, -۱ + ۶i)\| = \sqrt{۴۲}$

### ۱-۵-۸ تمرین

۱) فرض کنید  $u = (x_1, x_2)$  و  $v = (y_1, y_2)$  دو عضو  $R^2$  باشند. ثابت کنید تابع زیر یک ضرب داخلی در  $R^2$  است.

$$\langle u, v \rangle = ۴x_1y_1 + ۹x_2y_2$$

۲) فرض کنید  $u = (x_1, x_2, x_3)$  و  $v = (y_1, y_2, y_3)$  دو عضو  $R^3$  باشند. ثابت کنید تابع زیر یک ضرب داخلی در  $R^3$  است.

$$\langle u, v \rangle = x_1y_1 + ۲x_2y_2 + ۴x_3y_3$$

۳) فرض کنید  $u = (x_1, x_2)$  و  $v = (y_1, y_2)$  دو عضو  $R^2$  باشند. ثابت کنید تابع زیر یک ضرب داخلی در  $R^2$  نمی‌تواند باشد.

$$\langle u, v \rangle = ۲x_1y_1 - x_2y_2$$

۴) فضای برداری ماتریس‌های  $M_{2 \times 2}$  را در نظر بگیرید.  $u$  و  $v$  را دو ماتریس  $2 \times 2$  فرض کنید

$$u = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

ثابت کنید تابع زیر در اصول موضوع ۲ و ۴ ضرب داخلی صدق می‌کند.

$$\langle u, v \rangle = ae + bf + cg + dh$$

(این تمرین مثال ۲ این درس را تکمیل می‌کند.)

(۵) در تمرین ۴ ثابت کنید تابع

$$\langle u, v \rangle = ae + 2bf + 3cg + 4dh$$

یک ضرب داخلى در  $M_{22}$  است. ضرب داخلى ماتریس‌هاى زیر را به دست آورید.

$$v = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad u = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$v = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad u = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

(۶) در فضاى بردارى  $P_n$  با تابع

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

ثابت کنید این تابع در اصول موضوع ۳ و ۴ صدق می‌کند. (این تمرین مثال ۳ را تکمیل می‌کند)

(۷) فضاى بردارى  $P_n$  را با تابع

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

در نظر بگیرید ثابت کنید این تابع یک ضرب داخلى است اگر  $a$  و  $b$  اعداد حقیقى باشند و  $a < b$ .

ثابت کنید این تابع یک ضرب داخلى نیست هرگاه  $a \leq b$ .

در تمرین‌هاى ۸ تا ۱۵ تمام توابع در فضاى ضرب داخلى  $P_n$  با ضرب داخلى به شکل

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

می‌باشند.

(۸) حاصل ضرب نقطه‌ای را در هر مورد پیدا کنید.

$$g(x) = 3x - 2 \quad \text{و} \quad f(x) = 2x + 1 \quad (\text{الف})$$

$$g(x) = 3 \quad \text{و} \quad f(x) = x^2 + 2 \quad (\text{ب})$$

$$g(x) = x + 1 \quad \text{و} \quad f(x) = x^2 + 3x - 2 \quad (\text{ج})$$

$$g(x) = 3x^2 - 4x + 2 \quad \text{و} \quad f(x) = x^2 + 2x - 1 \quad (\text{د})$$

(۹) نرم توابع زیر را به دست آورید.

$$f(x) = 4x - 2 \quad (\text{الف})$$

$$f(x) = 7x^2 \quad (\text{ب})$$

$$f(x) = 3x^2 + 2 \quad (\text{ج})$$

$$g(x) = x^2 + x + 1 \quad (\text{د})$$

۱۰) ثابت کنید توابع  $f(x) = x^2$  و  $g(x) = 4x - 3$  متعامدند.

۱۱) ثابت کنید توابع  $f(x) = 1$  و  $g(x) = \frac{1}{4} - x$  متعامدند.

۱۲) کسینوس زاویه بین توابع  $f(x) = 5x^2$  و  $g(x) = 9x$  را محاسبه کنید.

۱۳) تابعی متعامد بر تابع  $f(x) = 6x + 12$  به دست آورید.

۱۴) فاصله بین توابع  $f(x) = x^2 + 3x + 1$  و  $g(x) = x^2 + x - 3$  را به دست آورید.

۱۵) کدامیک از توابع  $g(x) = x^2 + 2x - 3$  و  $h(x) = x^2 - 3x + 4$  به تابع  $f(x) = x^2$  نزدیکتر است.

در تمرین های ۱۶ تا ۲۰ همه ماتریس ها عضو فضای ضرب داخلی  $M_{22}$  با ضرب داخلی

$$\left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right\rangle = ae + bf + cg + dh$$

در نظر گرفته شده اند.

۱۶) ضرب داخلی ماتریس های زیر را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -7 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

۱۷) نرم ماتریس های زیر را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \quad (\text{د})$$

(۱۸) ثابت کنید زوج ماتریس‌های زیر متعامدند.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -7 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

(۱۹) ماتریس متعامد به ماتریس زیر را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(۲۰) فاصله بین زوج ماتریس‌های زیر را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

(۲۱) در فضای مختلط ضرب داخلی  $C^2$ ، بردارهای  $\mathbf{u}$  و  $\mathbf{v}$  زیر را در نظر بگیرید.  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ ،  $\|\mathbf{u}\|$

و  $\|\mathbf{v}\|$  و  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  را محاسبه کنید. تعیین کنید که آیا  $\mathbf{u}$  و  $\mathbf{v}$  متعامدند یا نه؟

$$\mathbf{v} = (3 - 2i, 2 + i) \text{ و } \mathbf{u} = (2 - i, 3 + 2i) \quad (\text{الف})$$

$$\mathbf{v} = (2 + i, 4 - 5i) \text{ و } \mathbf{u} = (4 + 3i, 1 - i) \quad (\text{ب})$$

$$\mathbf{v} = (-i, 3 + 2i) \text{ و } \mathbf{u} = (2 + 3i, -1) \quad (\text{ج})$$

$$\mathbf{v} = (1, 1) \text{ و } \mathbf{u} = (2 - 3i, -2 + 3i) \quad (\text{د})$$

(۲۲) در فضای مختلط ضرب داخلی  $C^2$ ، بردارهای  $\mathbf{u}$  و  $\mathbf{v}$  زیر را در نظر بگیرید.  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ ،  $\|\mathbf{u}\|$

و  $\|\mathbf{v}\|$  و  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  را محاسبه کنید و تعیین کنید آیا  $\mathbf{u}$  و  $\mathbf{v}$  متعامدند یا نه؟

$$\mathbf{v} = (1 + i, -4 - i) \text{ و } \mathbf{u} = (1 + 4i, 1 - i) \quad (\text{الف})$$

$$\mathbf{v} = (3 - 4i, 2 + 5i) \text{ و } \mathbf{u} = (2 + 7i, 1 + i) \quad (\text{ب})$$

$$\mathbf{v} = (2 - i, 5i) \text{ و } \mathbf{u} = (1 - 3i, 1 + i) \quad (\text{ج})$$



$$\mathbf{v} = (2 + i, -2 + \frac{1}{2}i) \text{ و } \mathbf{u} = (3 + i, 2 + 2i) \quad (\text{د})$$

(۲۳) فرض کنید  $\mathbf{u} = (x_1, \dots, x_n)$  و  $\mathbf{v} = (y_1, \dots, y_n)$  عضوهای  $C^n$  باشند. ثابت کنید:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n$$

در اصول موضوعه ضرب داخلی فضای برداری مختلط صدق می‌کند.

(۲۴) ثابت کنید اگر  $\mathbf{u}$  و  $\mathbf{v}$  بردارهای در فضای ضرب داخلی مختلط  $C^n$  و  $k$  یک اسکالر باشد، آنگاه

$$\langle \mathbf{u}, k\mathbf{v} \rangle = \bar{k} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

(۲۵) هرگاه  $\mathbf{u}$  و  $\mathbf{v}$  بردارهای در فضای داخلی حقیقی و  $c$  یک اسکالر باشد،

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{0} \rangle = 0 \quad (\text{الف})$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \quad (\text{ب})$$

$$\langle \mathbf{u}, c\mathbf{v} \rangle = c \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \quad (\text{ج})$$

(۲۶) فرض کنید  $\mathbf{u}$  و  $\mathbf{v}$  بردارهایی در  $R^n$  باشند. اگر  $A$  ماتریس متقارن  $n \times n$  باشد که به‌ازای هر بردار  $\mathbf{w}$  در  $R^n$ ،  $\mathbf{w}A\mathbf{w}^t > 0$ . این ماتریس را مثبت معین می‌نامند.

الف) نشان دهید  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}A\mathbf{v}^t$  در تمام اصول موضوعه ضرب داخلی صدق می‌کند، بنابراین یک ضرب داخلی در  $R^n$  است. در نتیجه هر ماتریس مثبت معین یک ضرب داخلی در  $R^n$  است.

ب) نشان دهید ماتریس همانی  $I_n$  یک ضرب نقطه‌ای در  $R^n$  تعریف می‌کند.

ج) فرض کنید  $\mathbf{u} = (1, 0)$  و  $\mathbf{v} = (0, 1)$ . مقدار  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ ،  $\|\mathbf{u}\|$ ،  $\|\mathbf{v}\|$  و  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  را برای هر یک از ضرب‌های داخلی تعریف شده به‌وسیله ماتریس‌های معین مثبت زیر بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

د) ضرب داخلی مثال ۱، این بخش می‌تواند با یک ماتریس مثبت معین  $A$  تعریف شود.  $A$  را به‌دست آورید.

(۲۷)  $\mathbf{v}$  را یک بردار ناصفر در فضای ضرب داخلی  $V$  در نظر بگیرید. فرض کنید  $W$  مجموعه بردارهایی در  $V$  باشد که بر  $\mathbf{v}$  متعامدند. ثابت کنید  $W$  یک زیرفضای  $V$  است.

۶-۸ اتحاد قطبی  $B$ 

در یک ضرب داخلی همواره خاصیت زیر برقرار است.

$$\|v \pm u\|^2 = \|v\|^2 \pm 2\operatorname{Re} \langle u, v \rangle + \|u\|^2$$

که در آن  $u$  و  $v$  برداری دلخواه و  $\operatorname{Re} \langle u, v \rangle$  قسمت حقیقی ضرب داخلی  $u$  و  $v$  است. در حالت خاص در فضای برداری حقیقی داریم:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} \|u + v\|^2 - \frac{1}{4} \|u - v\|^2 \quad (۱)$$

حال با توجه به اینکه

$$\langle u, v \rangle = \operatorname{Re} \langle u, v \rangle + i \operatorname{Im} \langle u, v \rangle \quad (۲)$$

$$\langle u, v \rangle = \operatorname{Re} \langle u, v \rangle + i \operatorname{Re} \langle u, iv \rangle \quad (۲')$$

$\operatorname{Im} \langle u, v \rangle = \operatorname{Re} \langle u, iv \rangle$  (قسمت موهومی ضرب داخلی  $u$  و  $v$  است و توجه داشته باشید که  $\operatorname{Im}(v) = \operatorname{Re}(-iv)$ ) در حالت کلی در یک فضای برداری مختلط داریم:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} \|u + v\|^2 - \frac{1}{4} \|u - v\|^2 + \frac{i}{4} \|u + iv\|^2 - \frac{i}{4} \|u - iv\|^2 \quad (۳)$$

روابط (۱) و (۳) را اتحادهای قطبی می‌نامند.

قانون دیگری موسوم به قانون متوازی‌الاضلاع در مورد نرم بردارها به شکل زیر برقرار است

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

## ۷-۸ هندسه ناقلیدسی و نسبیت خاص

ضرب داخلی ابزاری توانا برای کنترل هندسه  $R^n$  است. این ضرب، نرم بردارها، زاویه بین بردارها و فاصله بین نقاط را کنترل می‌کند. در واقع این امر به کمک روابط زیر انجام می‌گیرد.

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}, \quad \cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}, \quad d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle}$$

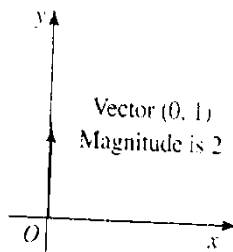
ضرب‌های داخلی متفاوت در  $R^n$ ، فاصله‌های متفاوت، زوایای متفاوت و نرم‌های متفاوت را برای هندسه متفاوت به دست می‌دهند. ضری نقطه‌ای، ضرب داخلی ویژه‌ای است که به هندسه اقلیدسی منجر می‌شود. اینک می‌خواهیم ولو به اختصار برخی هندسه‌های دیگر را مرور کنیم که با قرار دادن ضرب‌های داخلی دیگری در  $R^n$  به وجود می‌آیند. چنین هندسه‌های نااقلیدسی که به وسیله ریاضیدانان مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، به وسیله دانشمندان به کار رفته‌اند. در اینجا می‌خواهیم نشان دهیم که چگونه یکی از این هندسه‌ها برای توصیف فضا-زمان در تئوری نسبیت خاص به کار رفته است. ابتدا به هندسه نااقلیدسی در  $R^2$  نظری می‌اندازیم. در  $R^2$  ضرب داخلی خاصی را که در مثال ۱ توصیف کردیم، در نظر می‌گیریم. فرض کنیم  $(x_1, x_2)$  و  $(y_1, y_2)$  بردارهای دلخواهی در  $R^2$  باشند و ضرب داخلی با ضابطه زیر تعریف شده باشد.

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + 4 x_2 y_2$$

این ضرب داخلی با ضرب نقطه‌ای که در (الف ۴) ظاهر شد متفاوت است. در این فضا بردار  $(0, 1)$  را در نظر بگیرید نرم این بردار عبارت است از:

$$\begin{aligned} \|(0, 1)\| &= \sqrt{\langle (0, 1), (0, 1) \rangle} \\ &= \sqrt{(0 \times 0) + 4(1 \times 1)} \\ &= 2 \end{aligned}$$

این بردار را در شکل ۸-۱ نشان داده‌ایم. نرم این بردار در هندسه اقلیدسی برابر ۱ است. در حالی که در هندسه جدید این نرم برابر ۲ است. (دانشجویانی که درس توپولوژی را گذارنده‌اند دیده‌اند که در آن مبحث نیز با تغییر توپولوژی فاصله‌ها و نرم‌ها تغییر پیدا می‌کند).

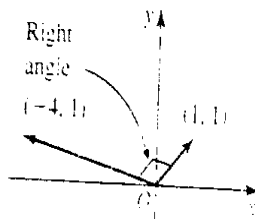


شکل ۸-۱

بردارهاى  $(1, 1)$  و  $(-4, 1)$  را در نظر بگیرید. ضرب داخلى اين بردارها عبارت است از:

$$\langle (1, 1), (-4, 1) \rangle = 0$$

بنابراين اين دو بردار برهم عمودند. در شکل ۲-۸ اين بردارها را تصوير کرده‌ايم. اين بردارها در شکل متعامد به نظر نمى‌رسند و در هندسه اقليدسى برهم عمود نيستند. با اين حال زاويه بين اين بردارها در هندسه جديد ما قائمه است.

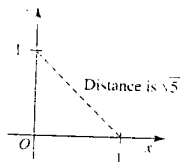


شکل ۲-۸

سرانجام با اين ضرب داخلى، به کمک تعريف فاصله، فاصله نقاط  $(1, 0)$  و  $(0, 1)$  را محاسبه مى‌کنيم

$$\begin{aligned} d((1, 0), (0, 1)) &= \|(1, 0) - (0, 1)\| \\ &= \|(1, -1)\| \\ &= \sqrt{\langle (1, -1), (1, -1) \rangle} \\ &= \sqrt{(1 \times 1) + 4(-1 \times (-1))} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

اين مطلب در شکل ۳-۸ به تصوير کشيده شده است. توجه داشته باشيد که فاصله اين دو نقطه در فضاي اقليدسى (يعنى در هندسه اقليدسى) با به‌کارگيرى قضيه فيثاغورس برابر  $\sqrt{2}$  است.



شکل ۳-۸

شما باید بپذیرید که هندسه‌ای که اینک توصیف کردیم در اصول موضوعه ذکر شده کاملاً صدق می‌کند، گرچه جهانی را که در آن زندگی می‌کنیم توصیف نمی‌کند! ریاضیات به‌عنوان یک دنیای زیبا صرفاً برای خودش وجود دارد بی‌آنکه کاربردی داشته باشد یا با سایر مفاهیم جهانی ارتباط داشته باشد.

گرچه هدف ما در این درس نشان دادن توسعه کاربردی ریاضیات است، اما باید خواننده این نکته را دریابد که برخی از شاخه‌های زیبای ریاضی لزوماً در مسیر کاربرد قرار ندارند. البته کسی نمی‌داند چه موقع این ریاضیات محض به‌کار خواهد رفت. این مورد برای مثال در مورد هندسه ناقلیدسی اتفاق افتاد. قسمت عمده هندسه ناقلیدسی توسط ریاضیدانان آلمانی برنهاردریمان در اواسط قرن نوزدهم توسعه داده شد. در اوایل قرن بیستم آلبرت انیشتین دریافت که هندسه‌ای که برای توصیف فضا-زمان نیاز دارد دقیقاً هندسه‌ای است که ریمان توصیف کرده است.

در هندسه فضا-زمان،  $R^4$  برای توصیف سه بعد مکان و یک بعد زمان به‌کار می‌رود. هندسه اقلیدسی برای تلفیق فضا و زمان، هندسه مناسبی نیست.

همچنین یادآوری می‌کنیم که ماتریس فضاهای ضرب داخلی و تابع فضاهای ضرب داخلی بیکره‌ای می‌سازند که نظریه کوانتم مکانیک را بنا می‌نهند. کوانتم مکانیک یک مدل ریاضی است که در اواخر قرن بیستم توسط نیل بوهر، ماکس پلانک و ورنر هایزنبرگ برای توصیف رفتار اتم‌ها و الکترون‌ها توسعه داده شده است.

باید اذعان کنیم تئوری فضاهای ضرب داخلی، ستون‌های اصلی دو نظریه ارزنده فیزیک در قرن بیستم است. این نظریه‌ها تأثیری شگرف در زندگی ما دارند، مثلاً منجر به توسعه انرژی اتمی و سلاح اتمی شده‌اند.

## ۸-۸ نسبیت خاص

نسبیت خاص برای توصیف جهان فیزیکی اطراف ما توسط آلبرت انیشتین<sup>۱</sup> مطرح شد. در آن زمان مکانیک نیوتن برای حرکت اجسام به‌کار می‌رفت. با این حال آزمایش‌های مکرر نشان داد که در ابعاد بسیار بزرگ (۱) آلبرت انیشتین (۱۸۷۹-۱۹۵۵) یکی از بزرگترین دانشمندان تمام اعصار است. در زوریخ تحصیل کرد و در زوریخ، پراگ، برلین و پرنستون درس داد. به‌خاطر تئوری‌های نسبیت معروف است که مفاهیم جدید علمی از زمان، فضا، ماده، حرکت و جاذبه را بیان می‌کند. جایزه نوبل را به خاطر اثر پدیده فتوالکترونیک دریافت کرد. در زمان به‌کار آمدن هیتار به آمریکا مهاجرت کرد، کشوری که اعتقاد داشت رژیم هیتار باید با زور سرنگون شود. وی با مشارکت تار و ویگنر نامه‌ای به روزولت نوشت که پروسه ساختن بمب اتمی را یاری می‌کرد. انیشتین موسیقی کلاسیک را به خوبی دریافت و با ویولنی می‌نواخت. وی گرچه مذهب رسمی نداشت، اما دارای طبیعتی مذهبی بود. وی هرگز باور نکرد که جهان یک پدیده تصادفی است.

نظیر حرکت سیارات، حرکت اشیاء توسط مکانیک نیوتنی از دقت کافی برخوردار نیست. یکی از هدایای نظریات انیشتین بر جهان علم، توسعه مدل‌های بسیار دقیق ریاضی بود.

وی ابتدا نظریه نسبیت خاص را مطرح کرد که جاذبه را در برنداشت، سپس جاذبه را در نظریه نسبیت عام به‌کار برد. در اینجا ما مدل‌های ریاضی نسبیت خاص را با توصیف نظریه و اینکه چگونه از ریاضیات الهام گرفته‌اند توضیح می‌دهیم.

نزدیکترین ستاره به کره زمین به جز خورشید، آلفا (قنطروس آلفا) است که ۴ سال نوری با ما فاصله دارد. (یک سال نوری فاصله‌ای است که نور در مدت یکسال می‌پیماید،  $10^{12} \times 5,88$  مایل)، یک جفت دوقلو را در نظر بگیرید که در یک زمان متولد می‌شوند یکی از دوقلوها در زمین باقی می‌ماند و دیگری بلافاصله پس از تولد توسط موشکی به طرف آلفا با  $0,8c$  سرعت نور پرتاب می‌شود و بلافاصله پس از رسیدن به آلفا با همان سرعت به طرف زمین برمی‌گردد. نظریه نسبیت خاص ادعا می‌کند دوقلویی که در کره زمین مانده است در این لحظه ۱۰ ساله شده است در حالی که دوقلویی که به آلفا رفته و بازگشته است بچه‌ای ۶ ساله می‌باشد. این پدیده را پدیده دوقلوها می‌نامند. به‌وضوح پدیده رشد را در دوقلوها بیان می‌کند، این که یکی ۱۰ ساله و دیگری ۶ ساله می‌ماند. پدیده مشابهی می‌تواند برای هر دو نفر رخ دهد که یکی در زمین می‌ماند و دیگری به ستاره‌های دور سفر می‌کند و برمی‌گردد. این اعداد برحسب آنکه کجا و با چه سرعتی سفر می‌کند متفاوت است.

به‌عنوان مثال این پدیده برای فضانوردی که به کره ماه سفر می‌کند و برمی‌گردد به‌صورت کسری از زمان جوان‌تر از فردی که در زمین می‌ماند قابل محاسبه است. در ارتباط با نظریه نسبیت عددی برای تایید این پدیده که زمان ثبت شده در زمین با زمان ثبت شده با اشیاء متحرک نسبت به زمین، متفاوت است انجام یافته است. به یکی از این آزمایش‌ها که توسط پروفیسور **J.C. Hafele** در دپارتمان فیزیک واشنگتن در ایالت سن‌لویس و دکتر **Richard E. Keatin** در **U.S. Naval observatory** واشنگتن انجام یافته و در مجله **Journal Science, Vol177, 1972** چاپ گردیده است اشاره می‌کنیم. در اکتبر ۱۹۷۱ چهار ساعت اتمی دوبار در یک فضاپیما جت آویخته شدند. تفاوت اندکی بین زمان‌های ثبت شده این ساعت‌ها و ساعت‌هایی که در زمین قرار داشتند ملاحظه شد. این اختلاف با نظریه نسبیت کاملاً تطابق داشت. البته در آتیه‌ای نزدیک امکان ثبت این تفاوت برای مسافرت به آلفا امکان‌پذیر نیست، زیرا انژی لازم برای سفری با چنین سرعت برای موجودی زمینی امکان‌پذیر نیست. امکان تحقق این امر فقط از دیدگاه جامعه‌شناسی محتمل است. به عبارت نظری، فردی می‌تواند به سفری برود و در چنان سنی برگردد که بتواند با نوه خود همکلاس شود، هنگامی که از سفر برمی‌گردد!

اینک مدل ریاضی نظریه نسبیت را توضیح می‌دهیم.

نسبیت خاص دارای مدلی برای فضا-زمان و بنابراین شامل چهار مختصات: سه مختصات فضا  $(x_1, x_2, x_3)$  و یک مختص زمان  $(x_4)$  است. از فضای برداری  $R^4$  برای نمایش فضا-زمان استفاده می‌کنیم. ضرب‌های داخلی زیادی وجود دارند، که می‌توانیم در  $R^4$  قرار دهیم و هر کدام به یک هندسه منجر می‌شوند. هیچ‌کدام از این ضرب‌های داخلی با نتایج آزمایش مورد نظر مطابقت ندارد. هرگاه چهارمین اصل موضوع ضرب داخلی را کنار بگذاریم، یک شبه ضرب داخلی به دست می‌آوریم و این ضرب داخلی با نتایج هندسه مورد نظر ما تطابق خواهد داشت. این هندسه مختص نسبیت خاص، هندسه مینکوفسکی نامیده می‌شود که توسط هرمان مینکوفسکی<sup>۱</sup> برای اولین بار مطرح گردید و هندسه مینکوفسکی تبیین نسبیت خاص گردید.

فرض کنیم  $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  و  $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$  دو عضو دلخواه  $R^4$  باشند. تابع  $\langle X, Y \rangle$  ضرب داخلی این هندسه را تشکیل می‌دهد:

$$\langle X, Y \rangle = -x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 + x_4 y_4$$

البته  $\langle X, Y \rangle$  به واقع یک ضرب داخلی نیست و علامات منفی اصل چهارم ضرب داخلی را نقض می‌کند. (به تمرین‌های بعدی توجه کنید)

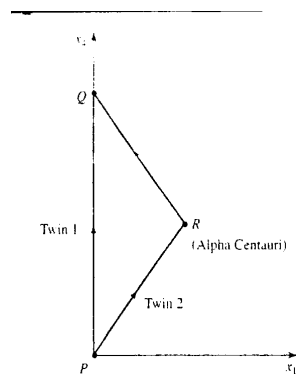
این شبه ضرب داخلی برای تعریف نرم بردارها و فاصله نقاط به شکل زیر به کار می‌رود. به کار برد قدرمطلق در این تعریف توجه کنید. مجاز بودن این تعاریف کاملاً محض و بسیار ساده است. این تعاریف دقیقاً همان جبرهایی هستند که برای توصیف فضا-زمان نیازمند هستیم!

$$|X| = \sqrt{|\langle X, X \rangle|}$$

$$\begin{aligned} d(X, Y) &= \|X - Y\| = \|(x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, x_4 - y_4)\| \\ &= \sqrt{|-(x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2 - (x_3 - y_3)^2 + (x_4 - y_4)^2|} \end{aligned}$$

اینک ملاحظه می‌کنیم که چگونه این هندسه برای توصیف رفتار زمان برای سفر فضایی به ستاره آلفا به کار می‌رود. دیاگرام فضا-زمان را رسم می‌کنیم. برای سهولت، فرض می‌کنیم ستاره، آلفا در راستای محور  $x_1$  (۱) هرمان مینکوفسکی (۱۸۶۴-۱۹۰۹) در کونیگزبورگ درس خواند و در بن، کونیگزبورگ، زوریخ و گوتینگن تدریس کرد. او به هندسه، نظریه اعداد و جبر علاقه مند بود. در اواخر عمر به نظریه نسبیت علاقه مند شد. نخستین کسی بود که تعبیر خاصی از اصول نسبیت به دست آورد که مفاهیم فضا-زمان را به طور مجزا به وسیله یک دستگاه چهار بعدی تبیین کرد. این تبیین کالبد، تحقیقات بعدی گردید و انیشتین نظریه نسبیت عام را در این قالب توسعه داد.

زمین قرار دارد. دوقلوی زمینی در مسیر زمان، محور  $x_4$  حرکت می‌کند در حالی که دوقلوی فضایی هم در محور زمان و هم در راستای صعودی محور  $x$  حرکت می‌کند در مسیر حرکت از مبدأ و در راستای کاهش محور  $x$  حرکت می‌کند در مسیر حرکت به سوی مبدأ دیاگرام فضا-زمان در شکل ۴-۸ نشان داده شده است. مسیر دوقلوی ۱، مسیر  $PQ$  است و مسیر دوقلوی ۲ به سمت ستاره آلفا  $PR$  است و مسیر برگشت آن به زمین  $RQ$  است. هیچ حرکتی در محور  $x_2$  یا  $x_3$  وجود ندارد بنابراین این محورها را در دیاگرام حذف کرده‌ایم.



شکل ۴-۸

اینک به موقعیت‌ها از دیدگاه دوقلوها نگاه می‌کنیم.

دوقلوی ۱: فاصله ستاره آلفا و برگشت از آن ستاره = ۸ سال نوری با سرعت فضاییما =  $0.8c$  سرعت

نور

بنابراین

$$\text{سال } 10 = \frac{\text{فاصله}}{\text{سرعت}} = \frac{8}{0.8}$$

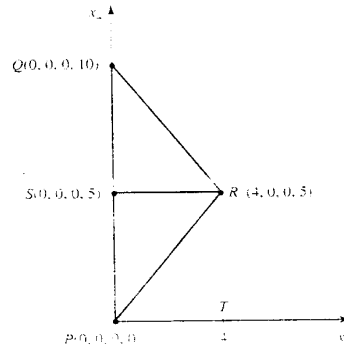
از دیدگاه هندسی این طول برابر با  $PQ$  که  $10$  می‌باشد.

دوقلوی ۲: در دیاگرام فوق مختصات را دقیقاً بررسی می‌کنیم.

به شکل ۵-۸ نگاه کنید. فرض کنید  $P$  مبدأ  $(0, 0, 0, 0)$  در  $R^4$  باشد. چون  $PQ = 10$ ، نقطه  $Q$

$(0, 0, 0, 10)$  می‌باشد و  $S$  نقطه  $(0, 0, 0, 5)$  می‌باشد.





شکل ۵-۸

$PT$  فاصله فضایی ستاره آلفا از زمین است یعنی ۴ سال نوری. بنابراین  $R$  نقطه  $(4, 0, 0, 5)$  است. اینک به کمک هندسه مینکوفسکی فاصله  $P$  و  $R$  را حساب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} d(P, R) &= \| (4, 0, 0, 5) - (0, 0, 0, 0) \| \\ &= \sqrt{|-(4-0)^2 - (0-0)^2 - (0-0)^2 + (5-0)^2|} \\ &= \sqrt{|-16 + 25|} = \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

به روش مشابه در این هندسه

$$d(R, Q) = 3$$

محاسبات ریاضی در اینجا خاتمه یافته است. حال به جالب‌ترین قسمت یعنی ارتباط نتایج هندسی و موقعیت فیزیکی می‌پردازیم. عبارت زیر نتیجه منطقی نسبیت خاص است که مفاهیم هندسی فیزیکی زیر را در بردارد. فاصله بین دو نقطه از دیدگاه ناظری مانند دوقلوی ۲، در هندسه مینکوفسکی، متناظر است با زمان ثبت شده به وسیله ناظری که بین این دو نقطه سفر می‌کند.

بنابراین  $d(R, P) = 3$  ایجاب می‌کند دوقلوی ۲ در سفری از  $P$  به  $R$ ، ۳ ساله باشد. به روش مشابه،  $d(R, Q) = 3$  ایجاب می‌کند دوقلوی ۲ در سفری از  $R$  به  $Q$ ، ۳ ساله باشد، در سفر فضایی مجموع زمان برای دوقلوی ۲، ۶ سال است.

در نتیجه وقتی دوقلوها همدیگر را در نقطه  $Q$  ملاقات می‌کنند، دوقلوی ۱، ۱۰ ساله و دوقلوی ۲، ۶ ساله است.

توجه داشته باشید که این مدل هندسه جدیدی را معرفی می‌کند که در آن خط مستقیم کوتاهترین فاصله بین دو نقطه نمی‌باشد. در شکل ۵-۸ فاصله خط مستقیم  $PQ$  از  $P$  به  $Q$  ۱۰ می‌باشد.

در حالی که فاصله  $PR + RQ$  از  $P$  به  $Q$ ، فاصله کوتاه‌تر ۶ است. بنابراین تعبیر فیزیکی مدل‌ها نه تنها مسحورکننده است، بلکه مرزهای جدیدی از تفکر هندسی را برمامی‌گشاید. این مثال انعطاف‌پذیری ریاضیات را در مسائل کاربردی نشان می‌دهد. هرگاه بدنه استاندارد ریاضیات (اصول موضوع ضرب داخلی در این مورد) با موقعیت خاصی سازگار نباشد، دوباره‌سازی اندکی ممکن است کارساز باشد. ریاضیدانان برای موقعیت‌های مورد نیاز ریاضیات را مدل‌سازی و توسعه می‌دهند.

ریاضیات یک علم خشک و مطلق همچنانکه غالباً فرض می‌شود، نمی‌باشد؛ بلکه حیطة‌ای است که منحصرأ توسعه می‌یابد و در پیکره‌ای که در اینجا ارائه کردیم اعمال می‌گردد.

### ۱-۸-۸ تمرین

(۱)  $R^2$  را با ضرب داخلی مثال ۱، در بخش قبل در نظر بگیرید.

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + 4x_2 y_2$$

معادله دایره‌ای به مرکز مبدأ و به شعاع ۱ را بیابید. این دایره را رسم کنید.

(۲)  $R^2$  را با ضرب داخلی

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 4x_1 y_1 + 9x_2 y_2$$

الف) نرم بردارهای زیر را به دست آورید؟

$$(1, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 3)$$

ب) ثابت کنید بردارهای  $(2, 1)$  و  $(-9, 8)$  متعامد هستند این بردارها را رسم کنید. نشان دهید

این بردارها در فضای اقلیدسی متعامد نیستند.

ج) فاصله نقاط  $(1, 0)$  و  $(0, 1)$  را در این فضا بیابید.

د) معادله دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۱ را در این فضا بیابید. این دایره را رسم کنید.

(۳)  $R^2$  را با ضرب داخلی

$$\langle x_1, x_2 \rangle, (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + 16x_2 y_2$$

در نظر می‌گیریم.

- الف) نرم بردارهای  $(1, 0)$ ،  $(0, 1)$  و  $(1, 1)$  را در این فضا بیابید.
- ب) نشان دهید بردارهای  $(1, 1)$  و  $(-16, 1)$  متعامدند.
- ج) فاصله نقاط  $(5, 0)$  و  $(0, 4)$  را هم در این فضا و هم در فضای اقلیدسی بیابید.
- د) فاصله نقاط  $(5, 0)$  و  $(0, 4)$  را هم در این فضا و هم در فضای اقلیدسی بیابید.
- ه) معادله دایره‌ای به مرکز مبدا و شعاع ۱ را در این فضا بیابید. این دایره را رسم کنید.
- ۴) ضرب داخلی‌ای را بیابید که باید در  $R^2$  جایگزین شود تا معادله‌ای به مرکز مبدا و شعاع ۱،  

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$$
گردد.
- ۵) ثابت کنید شبه ضرب داخلی هندسه مینکوفسکی اصل چهارم ضرب داخلی را نقض می‌کند  
(راهنمایی: عضو ناصفر  $X$  از  $R^4$  را چنان بیابید که  $\langle X, Y \rangle = 0$ ).
- ۶) با استفاده از تعریف فاصله دو نقطه در فضای مینکوفسکی فاصله نقاط  $Q$  و  $R$  را در شکل ۸-۵ در ۳ بیابید.
- ۷) در هندسه مینکوفسکی فاصله نقاط  $P(0, 0, 0, 0)$  و  $M(1, 0, 0, 0)$  را بیابید. این مثال واقعیت جالب دیگری را در این هندسه آشکار می‌کند، اینکه نقاط غیرمنطبق می‌توانند فاصله صفر داشته باشند. نظریه نسبیت خاص تعبیری فیزیکی دارد که در آن خط  $PM$  دارای نقاطی است که همگی با هم فاصله صفر دارند؛ این خط مسیر یک فوتون یا یک ذره نوری است.
- ۸) ثابت کنید بردارهای  $(2, 0, 0, 1)$  و  $(1, 0, 0, 2)$  در هندسه مینکوفسکی متعامدند. این بردارها را رسم کرده و ملاحظه کنید که نسبت به بردار  $45^\circ$   $(1, 0, 0, 1)$  متقارنند. هر زوجی از بردارها که نسبت به بردار  $(1, 0, 0, 1)$  این چنین متقارن باشند، در هندسه مینکوفسکی متعامدند. این نتیجه را با نشان دادن تعامد بردارهای  $(a, 0, 0, b)$  و  $(b, 0, 0, a)$  اثبات کنید.
- ۹) معادله دایره‌ای به مرکز مبدا و شعاع‌های ۱، ۲ و ۳ در صفحه  $x_1x_2$  را در فضای مینکوفسکی به دست آورید. این دایره را رسم کنید.
- ۱۰) ستاره سیروس ۸ سال نوری از زمین فاصله دارد. بعد از خورشید ستاره سیروس نزدیکترین ستاره به زمین است که از قسمت‌های شمالی آمریکا با چشم غیرمسلح قابل رویت است این ستاره پرنورترین ستاره قابل رویت است، نور خورشید در مدت ۸ دقیقه به زمین می‌رسد، در حالی که از ستاره سیروس در مدت ۸ سال نور به ما می‌رسد. فرض کنید یک فضاپیما که ستاره سیروس را ترک کرده

است، پس از ۲ سال به زمین برسد. زمان سفر برای فردی که در فضاپیما قرار دارد چقدر طول می‌کشد؟ سرعت فضاپیما چقدر خواهد بود.

(۱۱) یک فضاپیما سفری رفت و برگشتی به ستاره درخشان کاپلا انجام می‌دهد که ۴۵ سال نوری از زمین فاصله دارد. اگر مدت سفر نسبت به زمین  $12^\circ$  سال باشد، مدت زمان سفر از دیدگاه فضاپنورد داخل فضاپیما چقدر خواهد بود.

(۱۲) ستاره خوشه پروین در صورت فلکی گاوگردن،  $14^\circ$  سال نوری از زمین فاصله دارد. فضاپنوردی که در مسافت دو طرفه به ستاره خوشه پروین پس از برگشت  $4^\circ$  ساله خواهد بود، از دیدگاهی زمینی این سفر چند قرن طول خواهد کشید؟

(۱۳) ستاره خوشه Praesepe در صورت فلکی سرطان  $515^\circ$  سال نوری از زمین فاصله دارد. فضاپنوردی مسافرتی رفت و برگشتی از زمین به ستاره خوشه Praesepe با سرعت معادل  $99999^\circ$  سرعت نور انجام می‌دهد. مدت سفر از دیدگاه فضاپنورد و از دیدگاه ناظر زمینی چقدر است؟

## ۹-۸ تقریب توابع و تئوری کدنگاری

مسائل متعددی در علوم فیزیک و مهندسی با تقریب توابع به وسیله چندجمله‌ها یا توابع مثلثاتی درگیر است. به عنوان مثال شاید ضروری باشد  $f(x) = e^x$  را به وسیله تابع خطی به شکل  $g(x) = a + bx$  روی بازه  $[0, 1]$  یا تابع مثلثاتی به شکل  $h(x) = a + b \sin(x) + c \cos(x)$  روی بازه  $[-\pi, \pi]$  تقریب کنیم. به علاوه مسأله تقریب توابع به وسیله چندجمله‌ای‌ها یک مسأله کلیدی برای توسعه نرم‌افزاری در علوم کامپیوتر است، زیرا کامپیوترها ذاتاً برای کار با چندجمله‌ای‌ها طراحی شده‌اند و نه بیشتر. اینک روش‌های تقریب توابع را معرفی می‌کنیم.

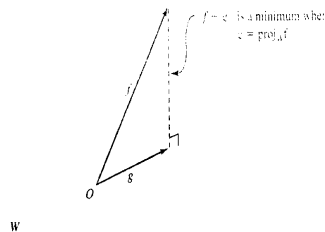
فرض کنیم  $c[a, b]$  فضای ضرب داخلی توابع پیوسته روی بازه  $[a, b]$  با ضرب داخلی  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$  و هندسه تعریف شده به کمک این ضرب داخلی باشد، فرض کنید  $W$  زیرفضای  $c[a, b]$  باشد. همچنین  $f$  در  $c[a, b]$  و خارج  $W$  باشد. می‌خواهیم بهترین تقریب  $f$  را در  $W$  به دست آوریم. بهترین تقریب، تابع  $g$  در  $W$  است به طوری که فاصله  $\|f - g\|$  بین  $f$  و  $g$  مینیمم باشد.

تعریف. فرض کنید  $c[a, b]$  فضای برداری توابع پیوسته روی بازه  $[a, b]$  باشد.  $f$  را عضو  $c[a, b]$  و  $W$  را زیرفضای  $c[a, b]$  در نظر بگیرید. تابع  $g$  در  $W$  به طوری که  $\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx$  مینیمم گردد، تقریب کمترین مربعات  $f$  نامیده می‌شود.

این تقریب، تقریب کمترین مربعات نامیده می‌شود. زیرا فرمول فاصله براساس مربع فواصل تعریف شده است.

اینک روش پیدا کردن تقریب کمترین مربعات یعنی  $g(x)$  را به دست می‌آوریم. اینک می‌توانیم به عقب برگردیم و از فرایند توسعه ساختارهای هندسی و نتایج بیشتر بهره ببریم! قبلاً چنین موقعیتی را در  $R^n$  داشتیم. بنا به تجارب بخش ۵-۷، هرگاه  $W$  زیرفضای از  $R^n$  باشد و  $x$  نقطه‌ای در  $R^n$  باشد، نزدیک‌ترین عضو  $w$  به  $x$   $\text{proj}_W x$  است. این نتیجه گرچه در یک فضای هندسی اخذ شده است، با این حال در فضای توابع نیز به کمک ضرب داخلی قابل توسعه است.

بسیار مفید است هرگاه توابع را به عنوان بردارهای هندسی تصویر کنیم. به شکل ۸-۶ نگاه کنید.



شکل ۸-۶: تقریب کمترین مربعات  $f$  در زیرفضای  $W$  عبارت است از  $g = \text{proj}_W f$

اینک مجدداً می‌توانیم نتایج هندسی را برای محاسبه  $\text{proj}_W f$  به کار ببریم. فرض کنید  $(g_1, \dots, g_n)$  یک پایه متعامد یکانی برای  $W$  باشد. بنا به نتایج بخش ۷-۵

$$\text{proj}_W f = \langle f, g_1 \rangle g_1 + \dots + \langle f, g_n \rangle g_n$$

مثال ۱: تقریب کمترین مربعات خطی تابع  $f(x) = e^x$  را در بازه  $[-1, 1]$  به دست آورید.

حل: فرض کنیم  $g(x) = a + bx$  تقریب خطی باشد، همچنین  $f$  عضوی از  $c[-1, 1]$  و  $g$  عضوی از زیرفضای  $P_1[-1, 1]$  باشد، یعنی چندجمله‌ای‌های از درجه کمتر یا مساوی یک روی  $[-1, 1]$ . مجموعه

$[1, x]$  پایه‌ای برای  $P_1[-1, 1]$  است. داریم:

$$\langle 1, x \rangle = \int_{-1}^1 (1 \cdot x) dx = 0$$

بنابراین توابع متعامدند. طول این بردارها

$$\|1\|^2 = \int_{-1}^1 (1 \cdot 1) dx = 2, \quad \|x\|^2 = \int_{-1}^1 (x \cdot x) dx = \frac{2}{3}$$

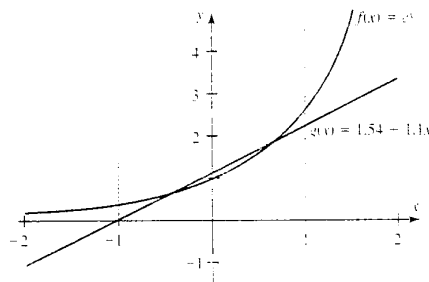
بنابراین مجموعه  $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x\}$  یک پایه متعامد یکانی برای  $P_1[-1, 1]$  است. حال داریم

$$\begin{aligned} \text{proj}_w f &= \langle f, g \rangle g_1 + \langle f, g_2 \rangle g_2 \\ &= \int_{-1}^1 (e^x \sqrt{\frac{1}{2}}) dx \frac{1}{\sqrt{2}} + \int_{-1}^1 (e^x \sqrt{\frac{3}{2}} x) dx \sqrt{\frac{3}{2}} x \\ &= \frac{1}{2}(e - e^{-1}) + 3e^{-1}x \end{aligned}$$

یعنی تقریب کمترین مربعات تابع  $f(x) = e^x$  در بازه  $[-1, 1]$  عبارت است از:

$$g(x) = \frac{1}{2}(e + e^{-1}) + 3e^{-1}x + 3e^{-1}x$$

و این مقدار  $g(x) = 1.54 + 1.1x$  را تا دو رقم اعشاری به دست می‌دهد. به شکل ۷-۸ نگاه کنید



شکل ۷-۸

در مثال اخیر تقریب خطی  $f$  را در  $P_1[-1, 1]$  به دست آوردیم. تقریب‌های از درجات بالاتر چندجمله‌ای‌ها را می‌توان در فضای  $P_n[-1, 1]$  با چندجمله‌ای‌هایی از درجه کوچکتر یا مساوی  $n$  به دست آورد. برای به دست آوردن چنین تقریبی می‌بایست یک پایه متعامد در  $P_n[-1, 1]$  به کمک متعامدسازی گرام-شمیت ساخته شود. توابع متعامدی که به این ترتیب به دست می‌آیند چندجمله‌ای‌های لژاندر نامیده می‌شوند.

نخستیم شش چندجمله‌ای لژاندر عبارتند از:

$$1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{3}{5}x, x^4 + \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}, x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x$$

اینک به تقریب توابع به کمک توابع مثلثاتی می‌پردازیم. چنین تقریبی به‌طور گسترده در هدایت حرارتی، الکترومغناطیس، جریان‌های الکتریکی و ارتعاش‌های مکانیکی به‌کار می‌رود. اولین قدم در این زمینه توسط ریاضیدانان فرانسوی<sup>۱</sup> Jean Baptiste Fourier برداشته شد که روش‌هایی را برای آنالیز هدایت در یک بار ایزوله شده توسعه داد. تقریب‌ها غالباً برای حل معادلات با مشتقات جزئی به‌کار می‌رود که موقعیت‌های فیزیکی این پدیده‌ها را توصیف می‌کنند.

## ۱۰-۸ تقریب‌های فوریه

فرض کنید  $f$  یک تابع در  $c[-\pi, \pi]$  با ضرب داخلی  $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$  و هندسه متناظر این ضرب داخلی باشد. اجازه دهید تقریب کمترین مربعات  $f$  را در فضای  $T[-\pi, \pi]$  متشکل از چندجمله‌ای‌های مثلثاتی تولید شده به‌وسیله مجموعه

$$\{1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx\}$$

که در آن  $n$  یک عد صحیح مثبت است، به‌دست آوریم. می‌توان نشان داد بردارهای  $1, \cos x, \sin x, \dots$  دو به دو در این فضا متعامدند. (به تمرین‌های بعدی نگاه کنید) طول این بردارها

$$\begin{aligned} \|1\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} (1 \cdot 1)dx = 2\pi \\ \|\cos nx\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx \cdot \cos nx)dx = \pi \\ \|\sin nx\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} (\sin nx \cdot \sin nx)dx = \pi \end{aligned}$$

بنابراین مجموعه‌های زیر یک پایه متعامد یکانی برای  $T[-\pi, \pi]$  تشکیل می‌دهند.

$$\{g_0, \dots, g_{2n}\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \right\}$$

(۱) Jean Baptiste Fourier (۱۷۶۸-۱۸۳۰) در کودکی والدین خود را از دست داد. در یک مدرسه نظامی ثبت نام کرد. که اشتیاق وی را برای ریاضیات برانگیخت. در انقلاب فرانسه به‌خاطر دفاع از قربانیان ترور به زندان افتاد. سپس یک پست دیپلماتیک در زمان ناپولن در مصر و فرانسه گرفت که او را یک بارون و یک کنت کرد. فوریه به‌خاطر توسعه روش‌های ریاضی که در توصیف انتشار حرارت به‌کار برده است مشهور گردید.

از اين پایه متعامد يکانى در فرمول زير برای پيدا کردن تقريب کمترین مربعات  $g$  برای  $f$  استفاده می‌کنيم

$$g(x) = \text{proj}_T f = \langle f, g_0 \rangle g_0 + \cdots + \langle f, g_{2n} \rangle g_{2n}$$

داريم

$$g(x) = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x \right\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x + \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x \right\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x \\ + \cdots + \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \right\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx + \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \right\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx$$

نمادهای زير را برای ساده نگاری تعريف می‌کنيم

$$a_0 = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \int_{-\pi}^{\pi} \left( f(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_k = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos ks \right\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \int_{-\pi}^{\pi} \left( f(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx \right) dx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx$$

$$b_k = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx \right\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \int_{-\pi}^{\pi} \left( f(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx \right) dx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

تعريف. تقريب مثلثاتی تابع  $f(x)$  به صورت

$$g(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

نوشته می‌شود، که  $g(x)$  را تقريب فوریه مرتبه  $n$  ام  $f(x)$  می‌نامند. ضرایب  $a_0, a_1, \dots, a_n$  و  $b_1, \dots, b_n$

ضرایب فوریه نامیده می‌شوند. با افزایش  $n$ ، به طور صعودی تقريب بهتر می‌شود و به اين ترتيب  $\|f - g\|$

کوچکتر می‌شود. مجموع نامتناهی

$$g(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

سری فوریه  $f$  درباره  $(-\pi, \pi)$  نامیده می‌شود.



مثال ۲: تقریب فوریه مرتبه چهارم تابع  $f(x) = e^x$  را در بازه  $[-\pi, \pi]$  به دست آورید.

حل: با به کارگیری ضرایب فوریه برای تابع  $f(x) = x$  و انتگرال گیری جزء به جزء داریم:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) \cos kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x \cdot \cos kx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{x}{k} \sin kx + \frac{1}{k^2} \cos kx \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) \sin kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x \cdot \sin kx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{x}{k} \cos kx + \frac{1}{k^2} \sin kx \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \end{aligned}$$

تقریب فوریه  $f$  عبارت است از:

$$g(x) = \sum_{k=1}^n \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin kx$$

و با قرار دادن  $k = 1, \dots, 4$  تقریب مرتبه چهارم را به دست می آوریم.

$$g(x) = 2(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x)$$

تا به حال در این کتاب به فضاهای برداری حقیقی پرداخته ایم که در آن اسکالرهای اعداد حقیقی بودند. گاهی نیز به فضاهای برداری مختلط اشاره کردیم که اسکالرهای اعداد مختلط بودند. پرواضح است که این بحث خالی از لطف خواهد بود اگر به فضاهای برداری اشاره نکنیم که در آن اسکالرهای اعداد حقیقی و نه اعداد مختلط هستند. به علاوه این مثال از این نظر جالب خواهد بود که تنها تعداد متناهی بردار در این فضا وجود دارد.

## ۱۱-۸ نظریه کدنگاری

پیامها به صورت الکترونیکی به شکل دنباله ای از صفرها و یکها فرستاده می شود. اشتباهات در ارسال پیام در صورت تداخل و اعوجاج می تواند رخ دهد. مثلاً پیام  $(1, 1, 0, 1, 1, 0, 1)$  می تواند به صورت

$(1, 1, 0, 1, 0, 0, 0)$  دریافت شود که یک اشتباه در درایه پنجم رخ داده است. می‌خواهیم روش‌هایی را بررسی کنیم که چنین اشتباهاتی را اصلاح کند.

اسکالرهای یک میدان برداری می‌تواند مجموعه‌ای به جزء اعداد صحیح و مختلط باشد. کافی است این اسکالرهای یک میدان جبری بسازد. یک میدان مجموعه‌ای از اشیاء است که دارای دو عمل می‌باشد که در اصولی خاص صدق کند. دانشجویانی که در جبر مدرن درسی گذارنده باشند با مفهوم میدان آشنا هستند. در این مثال میدان  $\{0, 1\}$  را متشکل از دو عضو با اعمال جمع و ضرب زیر به‌کار می‌بریم:

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= 0 & 0 + 1 &= 1 & 1 + 0 &= 1 & 1 + 1 &= 0 \\ 0 \cdot 0 &= 0 & 0 \cdot 1 &= 0 & 1 \cdot 0 &= 0 & 1 \cdot 1 &= 1 \end{aligned}$$

$V_7$  را فضای برداری ۷-تایی‌های متشکل از ۰ و ۱ روی این میدان از اسکالرهای در نظر می‌گیریم، که جمع و ضرب اسکالر به روش معمولی مؤلفه‌وار تعریف شده باشد. مثلاً

$$\begin{aligned} (1, 0, 0, 1, 1, 0, 1) + (0, 1, 1, 1, 0, 0, 1) &= (1 + 0, 0 + 1, 0 + 1, 1 + 1, 1 + 0, 0 + 0, 1 + 1) \\ &= (1, 1, 1, 0, 1, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \cdot (1, 0, 0, 1, 1, 0, 1) &= (0 \cdot 1, 0 \cdot 0, 0 \cdot 0, 0 \cdot 1, 0 \cdot 1, 0 \cdot 0, 0 \cdot 1) \\ &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot (1, 0, 0, 1, 1, 0, 1) &= (1 \cdot 1, 1 \cdot 0, 1 \cdot 0, 1 \cdot 1, 1 \cdot 1, 1 \cdot 0, 1 \cdot 1) \\ &= (1, 0, 0, 1, 1, 0, 1) \end{aligned}$$

از آنجایی که هر بردار در  $V_7$  دارای هفت مؤلفه است، و هر یک از این مؤلفه‌ها ۰ و ۱ است،  $2^7$  بردار در این فضا وجود دارد. زیرفضای برداری چهار بعدی  $V_7$  دارای پایه

$$\{(1, 0, 0, 0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)\}$$

می‌باشد که کدهامینگ نامیده می‌شود و با  $C_{7,4}$  نشان داده می‌شود. بردارهای  $C_{7,4}$  به‌عنوان یک پیام به‌کار می‌روند. هر بردار در  $C_{7,4}$  به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$v_1 = a_1(1, 0, 0, 0, 0, 1, 1) + a_2(0, 1, 0, 0, 1, 0, 1)$$

$$+ a_3(0, 0, 1, 0, 1, 1, 0) + a_4(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$$

از آنجایی که هر یک از چهار اسکالر  $a_1, a_2, a_3$  و  $a_4$  می‌تواند یکی از مقادیر  $0$  یا  $1$  باشد،  $2^4 - 1 = 15$  بردار در  $C_{7,4}$  داریم. کدهامینگ برای ارسال ۱۶ کد متفاوت  $v_1, \dots, v_{16}$  می‌تواند به‌کار رود. از شما در تمرین‌های بعدی خواسته شده است، این بردارها را بنویسید.

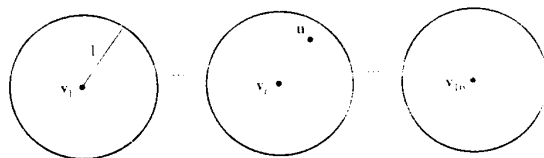
هنگامی که در یکی از مکان‌های پیام‌های ارسالی اشتباهی رخ دهد، برداری نادرست در  $V_7$  و در خارج زیرفضای  $C_{7,4}$  خواهد بود. می‌توان ثابت کرد دقیقاً یک بردار در  $C_{7,4}$  وجود دارد که با این بردار نادرست در یک مکان تفاوت دارد. بنابراین این اشتباه قابل تشخیص و اصلاح است. مثلاً فرض کنیم بردار دریافت شده  $(1, 0, 1, 1, 1, 0, 1)$  باشد. این بردار نمی‌تواند به‌صورت ترکیب خطی از بردارهای پایه فوق نوشته شود، و در  $C_{7,4}$  قرار ندارد. تنها یک بردار در  $C_{7,4}$  قرار دارد که با این بردار در یک درایه متفاوت است و این بردار  $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$  است. پیام صحیح در واقع  $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$  است.

کدهامینگ، کد اصلاح‌کننده خطا نامیده می‌شود، زیرا معین‌کننده خطا و اصلاح‌کننده خطا است. اینک هندسه پایه این کد را بررسی می‌کنیم. فاصله بین دو بردار  $u$  و  $v$  از  $V_7$  که با  $d(u, v)$  نشان داده می‌شود، تعداد مؤلفه‌های متفاوت  $u$  و  $v$  تعریف می‌شود. مثلاً

$$d((1, 0, 0, 1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0, 1, 1, 1)) = 3$$

زیرا مؤلفه‌های دوم، چهارم و پنجم این بردارها متفاوتند. کره‌ای به شعاع ۱ در حومه برداری در  $V_7$ ، شامل تمام بردارهایی است که در یک مؤلفه از این بردار قرار دارند. می‌توان نشان داد که کره‌هایی به شعاع ۱ و به مرکز بردارهای  $C_{7,4}$ ، متمایز و مجزا بوده و هر عضو  $V_7$  در یکی از این کره‌ها قرار دارد.

به شکل ۸-۸ نگاه کنید. بنابراین اگر برداری مانند  $u$  دریافت شود و از  $C_{7,4}$  نباشد، در یک کره منفرد به مرکز  $v_i$ ، که همان پیام صحیح است، قرار دارد. عملاً مدارهای الکتریکی موسوم به گیت برای کنترل اینکه پیام دریافتی در  $C_{7,4}$  قرار دارد به‌کار می‌رود و در صورتی که در  $C_{7,4}$  نباشد، برای معین کردن مرکز این کره و دریافت پیام صحیح به‌کار می‌روند.



شکل ۸-۸: کد هامینگ  $\{v_1, \dots, v_{16}\}$ ، پیام نادرست  $u$  و پیام صحیح  $v$

کدهای اصلاح‌کننده خطای دیگر نیز وجود دارند. کد گولای مثالی دیگر از زیرفضای ۱۲-بعدی  $V_{23}$  می‌باشد که با  $C_{23,12}$  نشان داده می‌شود. فضای کد دارای ۲۱۲ عضو، برای معرفی  $4^0 96$  پیام می‌باشد. این کد می‌تواند خطاهایی را آشکار و اصلاح کند که در یک، دو و یا سه مکان قرار دارند. می‌توان نشان داد که کره‌های به شعاع ۳، به مرکز بردارهای  $C_{23,12}$ ، مجزا بوده و هر عضو  $V_{23}$  در یکی از این کره‌ها قرار دارند. هرگاه پیام دریافتی  $u$ ، دارای خطایی در یک، دو یا سه مکان باشد، در کره‌ای به مرکز  $v_i$  بوده و  $v_i$  می‌تواند باز پس گرفته شود. برای مطالعه بیشتر به مرجع [۱] مراجعه کنید.

### ۸-۱۱-۱ تمرین

تقریب کمترین مربعات در تمرین‌های ۱-۴ تقریب کمترین مربعات خطی  $g(x) = \circ + bx$  را برای تابع‌های زیر در بازه داده شده بیابید.

$$(۱) \quad f(x) = x^2 \text{ روی } [-۱, ۱]$$

$$(۲) \quad f(x) = e^x \text{ روی } [۰, ۱]$$

$$(۳) \quad f(x) = \sqrt{x} \text{ روی } [۰, ۱]$$

$$(۴) \quad f(x) = \cos x \text{ روی } [۰, \pi]$$

در تمرین‌های ۵-۸ تقریب کمترین مربعات درجه ۲،  $g(x) = a + bx + cx^2$ ، برای توابع داده شده در بازه‌های داده شده را بیابید.

$$(۵) \quad f(x) = e^x \text{ روی الف) } [-۱, ۱] \text{ و ب) } [۰, ۱]$$

$$(۶) \quad f(x) = \sqrt{x} \text{ روی } [۰, ۱]$$

$$(۷) \quad f(x) = x^2 \text{ روی } [۰, ۱]$$

$$(۸) \quad f(x) = \sin x \text{ روی } [۰, \pi]$$

در تمرین‌های ۹-۱۱ تقریب فوریه مرتبه چهارم توابع داده شده روی بازه‌های داده شده را بیابید.

$$(۹) \quad f(x) = x \text{ روی } [۰, 2\pi]$$

$$(۱۰) \quad f(x) = ۱ + x \text{ روی } [-\pi, \pi]$$

$$(۱۱) f(x) = x^2 \text{ روی } [0, 2\pi]$$

(۱۲) نشان دهید بردارهای  $\sin x, \cos x, \dots, \sin nx, \cos nx$  در فضای  $c[-\pi, \pi]$  دوه‌دو متعامدند.

(۱۳) کلیه بردارهای کد هامینگ  $C_{7,4}$  را بنویسید.

(۱۴) کلیه بردارهای  $V_7$  را که در کره‌های به شعاع ۱ و مرکز زیر قرار دارند، بنویسید.

$$(الف) (0, 0, 1, 0, 1, 1, 0)$$

$$(ب) (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1)$$

$$(ج) (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

$$(د) (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

(۱۵) پیام‌های زیر با به‌کارگیری کد هامینگ دریافت شده است. پیام‌های صحیح را در هر مورد بیابید.

$$(الف) (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$$

$$(ب) (0, 1, 1, 1, 0, 0, 1)$$

$$(ج) (1, 0, 1, 0, 1, 1, 0)$$

$$(د) (1, 0, 1, 1, 0, 1, 0)$$

(۱۶) در فضای برداری  $V_{23}$  و زیرفضای کد گولیا  $C_{23,12}$ ، ثابت کنید:

(الف)  $2^{23}$  بردار در  $V_{23}$  قرار دارد.

(ب)  $4096$  بردار در  $C_{23,12}$  قرار دارد.

(ج)  $2048$  بردار در هر کره به شعاع ۳ و مرکز برداری از  $C_{23,12}$  قرار دارد (به‌ازای هر عضو  $V_{23}$

یک کره وجود دارد). چند بردار به فاصله ۱، ۲ و ۳ در هر کره به شعاع ۳ وجود دارد؟

## ۱۲-۸ منحنی کمترین مربعات

این بخش احتمالاً جذاب‌ترین قسمت این کتاب است! ریاضیات را به بهترین نحو تصویر می‌کند. اخیراً نتایج نظری به زیباترین شکل به ابزاری قوی برای محاسبات منجر گردیده‌اند. در این قسمت روش یافتن

يك چندجمله‌اى كه نقاط داده شده را به بهترين نحو برازنده كند، را ارائه مى‌دهيم، روشى كه به طور عميق در علوم طبيعى، علوم اجتماعى و مهندسى به كار مى‌رود.

قبلاً ملاحظه كرده‌ايم كه دستگاه  $n$ -معادلات  $n$  متغيره  $AX = Y$ ، كه  $A$  يك ماتريس نامنفرد است، داراى جواب منحصر به فرد  $X = A^{-1}Y$  است. با اين حال اگر  $AX = Y$  دستگاه  $n$ -معادلات  $m$  متغيره باشد كه  $n > m$ ، در حالت كلى اين دستگاه جواب ندارد و اين دستگاه را فوق معين مى‌نامند.  $A$  براى چنين دستگاهى ماتريس مربع نيست و  $A^{-1}$  موجود نيست. بزودى ماتريسى موسوم به شبه معكوس براى  $A$  كه با  $\text{pinv}(A)$  نشان داده مى‌شود را معرفى مى‌كنيم؛ اين ماتريس براى كمترين مربعات حل  $X = \text{pinv}(Y)$  دستگاه فوق معين به كار مى‌رود.

البته اين يك حل واقعى نيست، اما از ديده‌گاهى نزديك‌ترين حل براى اين دستگاه است. كار بردى از دستگاه‌هاى فوق معين را براى يافتن خم‌هاى كه بهترين برازندگى را براى داده‌ها به دست مى‌دهند نشان مى‌دهيم.

تعريف. فرض كنيد  $A$  يك ماتريس باشد. ماتريس  $A^t A^{-1}$ ، شبه معكوس  $A$  ناميده مى‌شود و با نماد  $\text{pinv}(A)$  نشان داده مى‌شود.

قبلاً ديديم كه تمامى ماتريس‌ها معكوس ندارند. مشابهاً تمام ماتريس‌ها لزوماً شبه معكوس ندارند. ماتريس  $A$  داراى شبه معكوس است هرگاه  $(A^t A)^{-1}$  موجود باشد.

مثال ۱: شبه معكوس ماتريس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  را به دست آوريد.

حل: مرحله به مرحله شبه معكوس ماتريس  $A$  را حساب مى‌كنيم

$$A^t A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 29 \end{bmatrix}$$

$$(A^t A)^{-1} = \frac{1}{|A^t A|} \text{adj}(A^t A) = \frac{1}{125} \begin{bmatrix} 29 & -7 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{pinv}(A) = (A^t A)^{-1} A^t = \frac{1}{125} \begin{bmatrix} 29 & -7 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 3 & -10 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

اینک از مفهوم شبه معکوس در دستگاه معادلات خطی استفاده می‌کنیم. فرض کنید  $AX = Y$  دستگاهی از  $n$ -معادله‌ی خطی از  $m$  متغیر با  $n > m$  باشد، که از رتبه  $m$  است. طرفین تساوی را در  $A^t$  ضرب می‌کنیم و داریم

$$A^t Ax = A^t y$$

ماتریس  $A^t A$  برای این دستگاه معکوس‌پذیر بوده و با ضرب طرفین تساوی در  $(A^t A)^{-1}$  داریم:

$$\begin{aligned} x &= [(A^t A)^{-1} A^t] y \\ &= \text{pinv}(A) y \end{aligned}$$

مقدار به‌دست آمده  $x$ ، حل کمترین مربعات دستگاه معادلات نامیده می‌شود.

$$\begin{array}{ll} Ax = y & x = \text{pinv}(A)y \\ \text{دستگاه} & \text{دستگاه کمترین مربعات} \end{array}$$

فرض کنیم  $Ax = y$  دستگاه  $n$ -معادله  $m$  متغیره با  $n > m$  باشد که  $A$  از رتبه  $m$  است. این دستگاه دارای جواب کمترین مربعات می‌باشد. اگر دستگاه دارای جواب منحصر به‌فردی باشد، جواب کمترین مربعات جواب منحصر به‌فرد است. اگر دستگاه فوق معین باشد، جواب کمترین مربعات نزدیکترین جواب به حل حقیقی است. دستگاه نمی‌تواند جواب‌های متفاوتی داشته باشد.

مثال ۲: حل کمترین مربعات دستگاه فوق معین زیر را به‌دست آورید. جواب را کنترل کنید.

$$\begin{aligned} x + y &= 6 \\ -x + y &= 3 \\ 2x + 3y &= 9 \end{aligned}$$

حل: ماتریس ضرایب عبارت است از:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

بردارهاى ستونی  $A$  مستقل خطی اند. بنابراین رتبه این ماتریس ۲ است. این دستگاه دارای جواب کمترین مربعات است.  $\text{pinv}(A)$  را محاسبه می‌کنیم.

$$A^t A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$$

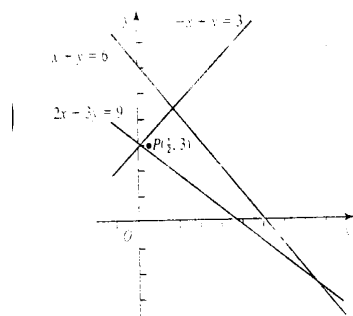
$$(A^t A)^{-1} = \frac{1}{|A^t A|} \text{adj}(A^t A) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\text{pinv}(A) = (A^t A)^{-1} A^t = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 11 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & -17 & 4 \\ 0 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

جواب کمترین مربعات عبارت است از:

$$\text{pinv}(A)y = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & -17 & 4 \\ 0 & 12 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 3 \end{bmatrix}$$

حل کمترین مربعات، نقطه  $p(\frac{1}{3}, 3)$  است که در شکل ۸-۹ نشان داده شده است.



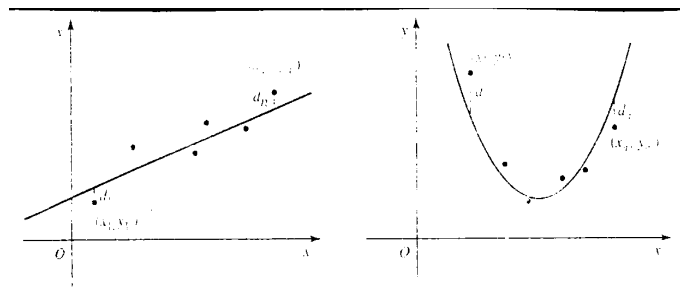
شکل ۸-۹

اکنون به بحث می‌پردازیم که جواب کمترین مربعات را چگونه می‌توان پیدا کردن منحنی‌هایی اعمال کرد که برای داده‌هایی دلخواه برازنده‌اند.



## ۱۳-۸ منحنی‌های کمترین مربعات

شاخه‌های بسیاری از علوم و تجارت از معادلاتی استفاده می‌کنند. که براساس اطلاعات نتایج عملی حاصل شده است. در بخش ۱-۳ مسأله یافتن چندجمله‌ای منحصر به فرد درجه ۲ ای که از سه نقطه داده شده می‌گذرد را بررسی کردیم. در کاربردهای زیادی اطلاعات بیشتری وجود دارد که به معادله‌ای که تمام داده‌ها را برازش می‌کند به‌کار می‌رود. می‌توان معادله‌ای از خط یا منحنی به‌کار برد که از دیدگاهی بهترین برازش برای داده‌های دلخواه باشد. مثلاً فرض کنید داده‌ها نقاط  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  باشند، که در شکل ۸-۱۰ (الف) نشان داده شده است. به‌طور تقریبی این نقاط در یک خط قرار دارند. می‌خواهیم معادله‌ی خطی را که این نقاط را که به بهترین وجه برازش کند بیابیم. از طرفی این نقاط به یک سهمی نزدیک هستند، همان‌طور که در شکل ۸-۱۰ (ب) دیده می‌شود. می‌خواهیم نزدیکترین سهمی به این نقاط را بیابیم. شیوه‌های متفاوتی برای بهترین برازش در چنین مواردی وجود دارد. معمول‌ترین آنها که در علم آمار به‌کار می‌رود منحنی یا خط کمترین مربعات نامیده می‌شود که با حل دستگاه معادلات فوق معین به‌دست می‌آید. خط و منحنی کمترین مربعات چنان است که  $d_1^2 + \dots + d_n^2$  در شکل ۸-۱۰، مینیمم گردد. در بخش قبل تقریب کمترین مربعات توابع را بحث کردیم. این مبحث تحلیل گسسته چنین مسأله‌ای است. در مورد توابع، بایستی منحنی خاص را بیابیم که بهترین برازش دسته پیوسته از نقاط داده شده در بازه دلخواهی باشد (گراف یک تابع)، در اینجا می‌خواهیم بهترین برازش برای رده گسسته از نقاط داده شده روی بازه‌ای را به‌دست آوریم. گرچه شیوه‌های به‌کار رفته برای رسیدن به نتایج متفاوت است، با این حال بهتر است به مشابهنه‌های خاص بین این موقعیت توجه کنیم. در هر دو موقعیت بهترین نتیجه با مینیمم کردن مربع‌های خاص به‌دست می‌آید و در نتیجه از واژه «کمترین مربعات» استفاده می‌کنیم.



شکل ۸-۱۰: مینیمم خط یا منحنی کمترین مربعات  $d_1^2 + \dots + d_n^2$

اینک نحوه برازش چندجمله‌ای کمترین مربعات داده‌های دلخواهی را بیان می‌کنیم. این شیوه متضمن ساختن دستگاهی از معادلات خطی است. جواب کمترین مربعات این دستگاه معادلات ضرایب چندجمله‌ای را به دست می‌دهد. پس از حصول نتایج این روش را تصدیق خواهیم کرد.

مثال ۳: خط کمترین مربعات داده‌های زیر را بیابید.

$$(1, 1), (2, 4), (3, 2), (4, 4)$$

حل: فرض کنیم معادله خط به صورت  $y = a + bx$  باشد. با قرار دادن این نقاط در معادله خط، دستگاه فوق معین زیر را خواهیم داشت:

$$a + b = 1$$

$$a + 2b = 4$$

$$a + 3b = 2$$

$$a + 4b = 4$$

جواب کمترین مربعات را به دست می‌آوریم. ماتریس ضرایب  $A$  و بردار ستونی  $y$  به شکل زیر است

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

می‌توان نشان داد

$$\text{pinv}(A) = (A^t A)^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 20 & 10 & 0 & -10 \\ -6 & -2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

جواب کمترین مربعات عبارت است از:

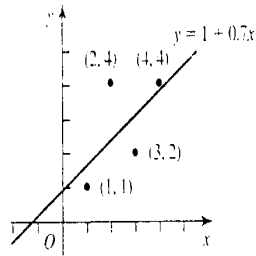
$$[(A^t A)^{-1} A^t] y = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 20 & 10 & 0 & -10 \\ -6 & -2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

بنابراین  $a = 1$  و  $b = 7$ .

معادله‌ی خط کمترین مربعات این داده‌ها عبارت است از:

$$y = 1 + 7x$$

این خطی است که بهترین برازش این نقاط است. به شکل ۱۱-۸ نگاه کنید.



شکل ۱۱-۸

مثال ۴: سهمی کمترین مربعات داده‌های زیر را بیابید.

$$(1, 7), (2, 2), (3, 1), (4, 3)$$

حل: فرض کنیم معادله سهمی  $y = a + bx + cx^2$  باشد با قرار دادن نقاط داده شده در این معادله داریم:

$$a + b + c = 7$$

$$a + 2b + 4c = 2$$

$$a + 3b + 9c = 1$$

$$a + 4b + 16c = 3$$

جواب کمترین مربعات را به دست می‌آوریم. ماتریس ضرایب  $A$  و بردار ستونی  $y$  عبارت است از:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

می‌توان نشان داد

$$\text{pinv}(A) = (A^t A)^{-1} A^t = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 45 & -15 & -25 & 15 \\ -31 & 23 & 27 & -19 \\ 5 & -5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

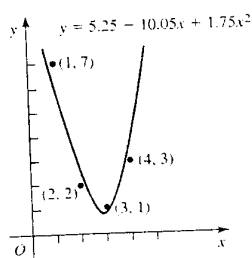
جواب كمتريـن مربعات عبارت است از:

$$[(A^t A)^{-1} A^t] y = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 45 & -15 & -25 & 15 \\ -31 & 25 & 27 & -19 \\ 5 & -5 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15,25 \\ -10,05 \\ 1,75 \end{bmatrix}$$

بنابراين  $a = 15,25$ ،  $b = -10,05$  و  $c = 1,75$  معادله سهمى كمتريـن مربعات اين نقاط داده شده عبارت است از:

$$y = 15,25 - 10,05x + 1,75x^2$$

در شكل ۸-۱۲ اين سهمى را رسم كرده‌ايم.



شكل ۸-۱۲

اينك برهان روشى را كه در مثال بالا براى يافتن چندجمله‌اى كمتريـن مربعات بهكار برديم، ارائه مى‌دهيم. اين برهان از مفهوم بردارى روى برد يك ماتريس بهره مى‌برد. در اينجا هندسه‌اى را ملاحظه خواهيم كرد كه اين نتيجه‌اى مهم را دربردارد. اين برهان چالشي مهم و با ارزش است!

**۸-۱۳-۱ قضيه.** فرض كنيم  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  مجموعه  $n$  نقطه داده شده باشند. فرض كنيم  $y = a_0 + \dots + a_m x^m$  يك چندجمله‌اى درجه  $m$  ( $n \geq m$ ) باشد كه به اين نقاط برازنده باشد. با جاگذارى نقاط در اين چندجمله‌اى دستگاه معادلات خطى  $Ax = y$  به دست مى‌آيد كه يك دستگاه از  $m$  متغير  $a_0, \dots, a_m$  بوده كه

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^m \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

جواب کمترین مربعات این دستگاه ضرایب چندجمله‌ای کمترین مربعات این نقاط داده شده را به دست می‌دهد.

اثبات. دستگاه  $Ax = y$  متشکل از  $n$  معادله‌ی خطی با  $m$  متغیر ( $n > m$ ) در حالت کلی فوق معین است. این دستگاه جواب ندارد. (مثلاً این در حالتی اتفاق می‌افتد که تمام در یک خط عمودی قرار ندارند) بنابراین  $y$  در برد  $A$  قرار ندارد.

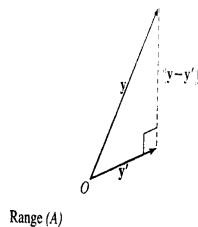
فرض کنید  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  نقاطی باشند که در منحنی کمترین مربعات قرار دارند. فرض کنید دستگاه معادلات متناظر  $Ax = y'$  باشد که

$$y' = \begin{bmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{bmatrix}$$

از آنجایی که منحنی از این نقاط می‌گذرد، دستگاه  $n$  معادله  $m$  متغیره مذکور دارای جواب منحصر به فرد  $x'$  است، که مؤلفه‌های  $x'$  ضرایب چندجمله‌ای کمترین مربعات هستند. بنابراین  $y'$  در برد  $A$  قرار دارند. شرط کمترین مربعات که  $d_1^2 + \dots + d_n^2$  مینیمم گردد، معادل با مینیمم گردیدن  $\|y' - y\|$  است. بنابراین  $y'$  تصویر  $y$  به روی برد  $A$  است. به شکل ۱۳-۸ نگاه کنید. این موضوع ایجاب می‌کند  $y = y'$  بر برد  $A$  متعامد باشد، یعنی  $y - y'$  بر بردارهای ستونی  $A$  متعامد باشد. ضرب نقطه‌ای  $y - y'$  بر هر یک از بردارهای ستونی  $A$ ، صفر است. با در نظر گرفتن بردارهای ستونی  $A$  به عنوان بردارهای سطری  $A^t$ ، شرط تعامد اخیر به صورت ضرب ماتریسی  $A^t(y - y') = 0$  در می‌آید. از آنجایی که  $Ax' = y'$  داریم:

$$\begin{aligned} A^t(y - Ax') = 0 &\implies -A^tAx' = -A^ty \\ &\implies x' = (A^tA)^{-1}A^ty \\ &\implies x' = \text{pinv}(A)y \end{aligned}$$

و به این ترتیب قضیه اثبات می‌شود.



شکل ۸-۱۳:  $y'$  تصویر  $y$  روی برد  $A$  است

**مثال ۵:** قانون هوک می‌گوید که وقتی نیرویی بر فنر اعمال می‌شود، طول فنر یک تابع خطی از نیروی وارده است. هرگاه طول فنر با اعمال نیروی  $F$ ،  $L$  باشد، این به این معناست که ثابت‌های (فنر)  $a$  و  $b$  چنان وجود دارند که

$$L = a + bF$$

ملاحظه خواهیم کرد که ضرایب ثابت فنر و بنابراین رابطه بین طول و نیروی وارده بر فنر از نتایج تجربی به‌کارگیری روش کمترین مربعات به‌دست می‌آید. فرض کنید وزنه‌های متفاوتی از فنر آویزان شوند، و طول فنر در هر حالت اندازه‌گیری شود. فرض کنید نتایج به شرح زیر باشد

نیروی فنر (برحسب اینچ)	۲	۴	۶	۸
طول فنر (برحسب اینچ)	۸٫۲	۱۱٫۶	۱۴٫۳	۱۷٫۵

اطلاعات آماری فوق را به صورت نقاط درج می‌کنیم که مؤلفه اول  $F$  و مؤلفه دوم  $L$  است. داریم:

$$(2, 8.2), (4, 11.6), (6, 14.3), (8, 17.5)$$

به‌طور نظری این نقاط همگی می‌باید در خط راست قرار گیرند. به‌ویژه، با توجه به اندازه‌گیری‌های مکرر انجام یافته، نتایج عملی کاملاً دقیق نیستند. خط کمترین مربعات این نقاط سازگارترین معادله برای این خط است.

$$a + 2b = 8.2$$

$$a + 4b = 11.6$$

$$a + 6b = 14.3$$

$$a + 8b = 17,5$$

ماتریس ضرایب  $A$  و ماتریس ستونی ثابت  $y$  به شکل زیر است

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 8,2 \\ 11,6 \\ 14,3 \\ 17,5 \end{bmatrix}$$

داریم:

$$\text{pinv}(A) = (A^t A)^{-1} A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 & -0,05 \\ -0,15 & -0,05 & 0,05 & 0,15 \end{bmatrix}$$

جواب کمترین مربعات عبارت است از:

$$[(A^t A)^{-1} A^t] y = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 & -0,05 \\ -0,15 & -0,05 & 0,05 & 0,15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8,2 \\ 11,6 \\ 14,3 \\ 17,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,25 \\ 1,53 \end{bmatrix}$$

بنابراین ضرایب فنر عبارتند از:  $a = 5,25$  و  $b = 1,53$ .

معادله‌ی فنر نیز عبارت است از:

$$L = 5,25 + 1,53F$$

در نتیجه مثلاً اگر وزنه‌ای ۲۰ اونسی از فنر آویخته شود، انتظار داریم طول فنر به‌طور تقریبی  $5,25 + (1,53 \times 20)$ ، یعنی ۳۵,۸۵ اینچ گردد.

کاربرد زیر موقعیتی را بیان می‌کند که گاهی در تحلیل شامل برازش کمترین مربعات به‌کار می‌رود. می‌خواهیم نتایج دو دسته از نقاط داده شده را که دارای ماتریس ضرایب یکسان هستند مقایسه کنیم. روش‌های استعمال چندین دستگاه، که دارای ماتریس ضرایب یکسان هستند، ... مفید می‌نماید.

مثال ۶: اطلاعات آماری زیر هزینه آموزش عمومی را برحسب دلار آمریکا نسبت به جمعیت در آمریکای شمالی و اروپا نشان می‌دهد<sup>۱</sup>.

برای این اطلاعات آماری خطوط کمترین مربعات را ساخته و برخی نتایج را اخذ کنیم.

(۱) مرجع [۶] ملاحظه شود

	۱۹۷۰	۱۹۷۵	۱۹۸۰	۱۹۸۵
Europe	۹۰	۱۹۷	۳۳۵	۳۹۴
North America	۳۱۷	۴۷۴	۸۱۶	۱۱۰۱

حل: برای سهولت اندازه سال را از ۱۹۷۰ شروع کنیم، یعنی در ۱۹۷۰-۱۹۷۵-۵ و به همین ترتیب. نتایج آماری فوق نقاط زیر را به دست می‌دهد.

$$\begin{aligned} \text{اروپا} & \quad (۰, ۹۰), (۵, ۱۹۷), (۱۰, ۳۳۵), (۱۵, ۳۹۴) \\ \text{آمریکا شمالی} & \quad (۰, ۳۱۷), (۵, ۴۷۴), (۱۰, ۸۱۶), (۱۵, ۱۱۰۱) \end{aligned}$$

دو دسته نقاط داده شده، دو دستگاه معادلات با ماتریس ضرایب  $A$  و بردارهای ثابت  $y_1$  و  $y_2$  را به شکل زیر به دست می‌دهد.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \\ 1 & 10 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}, \quad y_1 = \begin{bmatrix} 90 \\ 197 \\ 335 \\ 394 \end{bmatrix}, \quad y_2 = \begin{bmatrix} 317 \\ 474 \\ 816 \\ 1101 \end{bmatrix}$$

می‌توان نشان داد

$$\text{pinv}(A) = (A^t A)^{-1} = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 35 & 20 & 5 & -10 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

جواب کمترین مربعات عبارت است از:

$$[(A^t A)^{-1} A^t] [y_1, y_2] = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 35 & 20 & 5 & -10 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 90 & 317 \\ 197 & 474 \\ 335 & 816 \\ 394 & 1101 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96,5 & 272,9 \\ 21 & 53,88 \end{bmatrix}$$

خطوط کمترین مربعات عبارتند از:

$$y = 96,5 + 21x \quad \text{اروپا}$$

$$y = 272,9 + 53,88x \quad \text{آمریکای شمالی}$$

این خطوط برای پیش‌بینی مخارج سال‌های بعد به‌کار رفته است. مثلاً برای سال  $(x = 30)$   $2000$  جواب  $726,5$  (اروپا) و  $1889,3$  (برای آمریکای شمالی) به دست آمده است. با این حال نکته جالب این است



که شیب خط آمریکای شمالی یعنی  $53/88$  بیش از دو برابر شیب خط اروپایی یعنی  $21$  است. و این نشان می‌دهد که شکاف بین مخارج در حال افزایش است. این بخش را با چرخشی هندسی از برهان قضیه فوق به پایان می‌بریم. خواهیم دید که ماتریس شبه معکوس برای یافتن تصویر یک بردار روی یک زیرفضا چگونه به‌کار می‌رود.

**۲-۱۳-۸ قضیه.** فرض کنیم  $W$  زیرفضای  $R^n$  تولید شده به وسیله بردارهای مستقل خطی  $u_1, \dots, u_n$  باشد. فرض می‌کنیم  $A = [u_1, \dots, u_m]$ . تصویر بردار  $y$  روی  $w$  از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\text{proj}_w y = A \text{pinv}(A)y$$

که  $A \text{pinv}(A)y$  ماتریس تصویری نامیده می‌شود.

اثبات. از آنجایی که بردارها مستقل خطی هستند،  $\text{pinv}(A)$  موجود است. نتیجه مطلوب به‌طور مستقیم از اثبات قضیه قبلی حاصل می‌شود. فرض کنید  $x'$  جواب کمترین مربعات  $Ax = y$  باشد. در این صورت

$$x' = \text{pinv}(A)y$$

با ضرب طرفین تساوی در  $A$  داریم

$$Ax' = A \text{pinv}(A)y$$

اما  $Ax'$  تصویر  $y$  روی برد  $(A)$  است. بنابراین

$$\text{proj}_w y = A \text{pinv}(A)y$$

**مثال ۷:** مطلوب است ماتریس تصویری صفحه  $x - 2y - z = 0$  روی  $R^3$ . از این ماتریس برای یافتن تصویر بردار  $(1, 2, 3)$  روی این صفحه استفاده کنید.

**حل:**  $W$  را زیرفضای بردارهایی در نظر بگیرید که در این صفحه قرار دارند.  $W$  شامل بردارهایی به شکل  $(x, y, z)$  است که  $x = 2y + z$ . بنابراین  $W = \{(2y + z, y, z)\}$  می‌توانیم  $W$  را به شکل  $W = \{y(2, 1, 0) + z(1, 0, 1)\}$  نیز نمایش دهیم. فضای تولید شده به وسیله بردارهای  $(2, 1, 0)$  و  $(1, 0, 1)$  است. فرض کنید  $A$  ماتریسی شامل این بردارها به‌عنوان ستون‌های آن ماتریس باشد.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

می‌توان نشان داد

$$\text{pinv}(A) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

ماتریس تصویری عبارت است از:

$$A \text{pinv}(A) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

تصویر  $(1, 2, 3)$  روی  $W$  با ضرب این بردار به صورت ستونی در  $\text{pinv}(A)$  به دست می‌آید که داریم:

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

بنابراین تصویر  $(1, 2, 3)$  روی صفحه  $x - 2y - z = 0$ ،  $(2, 0, 2)$  است.

**۳-۱۳-۸ تمرین** شبه معکوس ماتریس‌های تمرین‌ها ۴-۱ را در صورت وجود، بیابید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad (4)$$

شبه معکوس ماتریس‌های تمرین‌های ۵-۸ را در صورت وجود، بیابید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \quad (8)$$

خط کمترین مربعات نقاط داده شده در تمرین‌های ۹-۱۴ را بیابید (راهنمایی: توجه داشته باشید که شبه ماتریس‌های یکسان برای هر یک از داده‌ها وجود دارد).

$$(1, 0), (2, 4), (3, 7) \quad (9)$$

$$(1, 1), (2, 3), (3, 7) \quad (10)$$

$$(1, 1), (2, 5), (3, 9) \quad (11)$$

$$(1, 1), (2, 6), (3, 9) \quad (12)$$

$$(1, 7), (2, 2), (3, 0) \quad (13)$$

$$(1, 12), (2, 5), (3, 1) \quad (14)$$

برای هر یک از نقاط داده شده تمرین‌های ۱۵-۱۸، خط کمترین مربعات را به دست آورید. (راهنمایی: توجه داشته باشید که شبه ماتریس‌های یکسان برای هر یک از داده‌ها وجود دارد).

$$(1, 0), (2, 3), (3, 5), (4, 6) \quad (15)$$

$$(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 9) \quad (16)$$

$$(1, 9), (2, 7), (3, 3), (4, 2) \quad (17)$$

$$(1, 21), (2, 17), (3, 12), (4, 7) \quad (18)$$

خط کمترین مربعات را برای نقاط داده شده تمرین‌ها ۱۹-۲۰ به دست آورید.

$$(1, 0), (2, 1), (3, 4), (4, 7), (5, 9) \quad (19)$$

$$(1, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 8), (5, 11) \quad (20)$$

سهی کمترین مربعات را برای نقاط داده شده تمرینات ۲۱-۲۴ به دست آورید.

$$(1, 5), (2, 2), (3, 3), (4, 8) \quad (21)$$

$$(22) \quad (1, 4), (2, 0), (3, 3), (4, 5)$$

$$(23) \quad (1, 2), (2, 5), (3, 7), (4, 1)$$

$$(24) \quad (1, 23), (2, 4), (3, 7), (4, 17)$$

(25) وزنه‌های زیر (برحسب اونس) از یک فنر آویزان شده است و طول حاصل (برحسب اینچ) به دست آمده است. ثابت فنر را به دست آورده و معادله‌ی فنر را بنویسید. طول فنر را هنگامی که وزنه ۱۵ اونسی آویزان می‌شود، پیش‌بینی کنید.

نیروی $F$	۲	۴	۶	۸	(الف)
طول $L$	۵٫۹	۸	۱۰٫۳	۱۲٫۲	

نیروی $F$	۲	۴	۶	۸	(ب)
طول $L$	۷٫۴	۱۰٫۳	۱۳٫۷	۱۶٫۷	

(26) مصرف بنزین یک اتومبیل به سرعت آن بستگی دارد. برای تعیین اثر سرعت بر مصرف سوخت مدیریت اتوبان، اتومبیل‌های مختلفی را با وزن‌های متفاوت در سرعت‌های متفاوت آزمایش می‌کند. اتومبیلی به وزن ۳۹۸ پوند دارای نتایج زیر است. خط کمترین مربعات متناظر این اطلاعات را به دست آورید. از این معادله برای تخمین مسافت طی شده به وسیله یک گالن دارای این اتومبیل در سرعت ۵۵ mph به دست آورید. (سرعت برحسب مایل در ساعت و بنزین مصرفی برحسب مایل بر گالن است).

سرعت	۷۰	۶۰	۵۰	۴۰	۳۰	
بنزین مصرفی	۱۳٫۶۱	۱۵٫۷۷	۱۶٫۳۲	۲۰٫۰۰	۱۸٫۲۵	

(۲۷) یک شرکت بیمه درصد افرادی را که در سنین متفاوت فوت می‌کنند محاسبه کرده است (بین سنین ۲۵ تا ۵۰) درصد مرگ را در ۲۳ سالگی تخمین بزنید.

سن برحسب سال	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰	۴۵	۵۰
درصد مرگ	۱۸	۱۹	۲۱	۲۵	۳۵	۵۴	۸۳

(۲۸) زیرفضای  $W$  تولید شده به وسیله بردارهای  $(1, 1, 1)$  و  $(2, 1, 0)$  را در نظر بگیرید. ماتریس تصویری را برای  $W$  به دست آورید. از این ماتریس برای یافتن تصویر بردار  $(3, 0, 1)$  روی  $W$  استفاده کنید. نشان دهید تصویر  $(6, 3, 0)$  روی  $W$  بردار  $(6, 3, 0)$  است. این به چه معناست.

(۲۹) فرض کنید  $A$  یک ماتریس معکوس پذیر باشد. ثابت کنید  $\text{pinv}(A) = A^{-1}$ .

(۳۰) فرض کنید  $A$  و  $B$  دو ماتریس باشند که حاصل ضرب  $AB$  موجود باشد.

الف) آیا  $\text{pinv}(AB) = \text{pinv}(A)\text{pinv}(B)$  ؟

ب) آیا  $\text{pinv}(AB) = \text{pinv}(B)\text{pinv}(A)$  ؟

(۳۱) اتحادهای زیر را ثابت کنید.

الف)  $\text{pinv}(cA) = (\frac{1}{c})\text{pinv}(A)$  و  $c \neq 0$ .

ب)  $\text{pinv}(\text{pinv}(A)) = A$  اگر  $A$  یک ماتریس مربع باشد.

ج)  $(\text{pinv}(A^t)) = (\text{pinv}(A))^t$  اگر  $A$  یک ماتریس مربع باشد.

(۳۲) اگر  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  باشد، ثابت کنید  $\text{pinv}(A)$  موجود است اگر و فقط اگر  $A$  از رتبه  $n$  باشد. نشان دهید یک نتیجه این مطلب آن است که  $\text{pinv}(A)$  موجود نیست اگر  $m < n$ . (راهنمایی: از قضیه رتبه/بوج استفاده کنید).

(۳۳) فرض کنی  $P$  یک ماتریس تصویری باشد ثابت کنید:

الف)  $P$  متقارن است.

ب)  $P^2 = P$ . ( $P$  خودتوان است)

## تمرین‌های دوره‌ای فصل ۸

(۱) فرض کنید  $u = (x_1, x_2)$  و  $v = (y_1, y_2)$  عضوهای  $R^2$  باشند. ثابت کنید تابع زیر یک ضرب داخلى روی  $R^2$  تعريف می‌کنند.

$$\langle u, v \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$$

(۲) ضرب داخلى، نرم و فاصله بين توابع  $f(x) = 3x - 1$  و  $g(x) = 5x + 3$  را در فضاى ضرب داخلى  $P_2$  با ضرب داخلى

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

به‌دست آورید.

(۳)  $R^2$  را با ضرب داخلى

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$$

در نظر بگیرید. نرم و فاصله  $(1, -2)$  و  $(3, 2)$  را در این فضا به‌دست آورید.

(۴)  $R^2$  را با ضرب داخلى

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$$

در نظر بگیرید. معادله دایره‌ای به مرکز مبدا و شعاع ۱ را در این فضا به‌دست آورید. این دایره را رسم کنید.

(۵) تقریب کمترین مربعات  $f(x) = x^2 + 2x - 1$  را روی بازه  $[-1, 1]$  به‌دست آورید.

(۶) تقریب فوریه مرتبه چهارم را برای  $f(x) = 2x - 1$  روی  $[0, 2\pi]$  به‌دست آورید.

(۷) تمام بردارهای  $V_7$  را که در کره‌ای به شعاع ۱ و مرکز  $(1, 1, 0, 0, 1, 1, 0)$  هستند به‌دست آورید.

(۸) ماتریس شبه معکوس  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  را به‌دست آورید.

(۹) سهمی کمترین مربعات  $(4, 9), (3, 5), (3, 2), (1, 6)$  را به‌دست آورید.

۱°  $A$  را ماتریسی با شبه معکوس  $B$  بینگارید. نشان دهید.

الف)  $ABA = A$ .

ب)  $BAB = B$ .

ج)  $AB$  متقارن است.

د)  $BA$  متقارن است.





## مراجع

- [1] Arazi, Benjamin; A Common Space Approach to the Theory of Error Correcting Codes, Mitpress, 1988.
  - [2] Williams, Gareth; *Linear Algebra*, Jones and Bartlett Publishers, London 2001.
  - [3] Barnsley, Michael F; *Fractal Everywhere*, Academic Press Inc., 1988.
  - [4] Barnsley, Michael F; *The Desktop Fractal Design Handbook and Systems* (Software Package), Academic Press Inc., 1989.
  - [5] Sheldon, Axler; *Linear Algebra Done Right*, 2nd edition, Springer, New York, 1997.
  - [6] UNESCO Statistical Yearbook, 1987.
- [۷] کمپل و تورپ، جبر خطی با کاربرد در معادلات دیفرانسیل، ترجمه بیژن زاده، محمدحسن؛ عالم زاده، علی اکبر؛ انتشارات نشر علوم نوین، تهران ۱۳۸۹.

## نمایه

آلبرت انیشتین، ۴۷۴	بسته، ۱۹۹
ابتدا، ۱۹۷	بعد، ۲۹۷
اتم‌ها، ۴۷۴	بعد منتهای، ۲۹۷
اعمال سطری مقدماتی، ۶	بعد نامتناهی، ۲۹۸
الکترون‌ها، ۴۷۴	پارامتر، ۲۳
انتقال، ۲۳۷	پاشنه، ۲۱
انعکاس، ۲۳۴	پایه متعامد، ۳۱۱
اویلر، ۳۳۸	پایه استاندارد، ۳۰۱
برد، ۲۲۱	پایه یک‌گه متعامد، ۳۱۱
بردار، ۱۹۹	پایه‌های استاندارد، ۳۱۱
بردار صفر، ۲۰۱	پیشرو، ۱۹
بردار مکان، ۱۹۷	تانژانت، ۳۶۵
بردار یک‌گه، ۲۰۹	تبدیلات مقدماتی، ۶
بردارهای ستونی، ۲۰۵	تصویر، ۳۱۳، ۳۱۹
بردارهای سطری، ۲۰۵	تصویری، ۲۲۷، ۲۴۶

سرشت‌نمای $A$ ، ۳۴۱	تقارن، ۲۱۷
سری فوریه، ۴۸۵	تقریب فوریه مرتبه $m$ ، ۴۸۵
سطر، ۴	تولید شده، ۴۶۲
سه‌تایی‌های مرتب، ۱۹۷	جایگشت، ۱۶۴
سیستم تابع تکراری، ۲۴۴	جایگشت زوج، ۱۶۴
ضرب داخلی، ۴۵۸، ۴۵۹	جایگشت فرد، ۱۶۴
عملگر خطی، ۲۲۳	جواب، ۱
عمود، ۲۱۳	جواب بدیهی، ۲۸
فاصله فضایی، ۴۷۸	جواب عمومی، ۲۳
فرم پلکانی تحویل یافته، ۱۱	چندجمله‌ای‌های لژاندر، ۴۸۴
فرم درجه دوم، ۳۹۲	حالت یویا، ۳۷۹
فروبنیوس، ۳۷۲	خطی، ۳۸۱، ۳۹۹
فضا-زمان، ۴۷۲، ۴۷۴	دامنه، ۲۲۱
فضای برداری، ۱۹۹	دراز، ۱۹۷
فوتون، ۴۸۰	دستگاه‌های هم‌ارز، ۷
فوق معین، ۴۹۱	دوبه‌دو متعامدند، ۳۱۰
فیوناچی، ۳۸۳	دوقلوها، ۴۷۵
قانون هوک، ۴۹۹	دوقلوی فضایی، ۴۷۷
قرینه، ۲۰۱	دیاگرام فضا-زمان، ۴۷۷
قطری شدنی، ۳۸۷	رتبه $A$ ، ۳۰۴
کد اصلاح‌کننده خطا، ۴۸۸	روش حذفی گاوس - جردن، ۴
کد گولای، ۴۸۹	ریمان، ۴۷۴
کد گولیا $C_{23,12}$ ، ۴۹۰	زنجیر مارکوف، ۳۷۸
کدهامینگ، ۴۸۷، ۴۸۸	زنجیر مارکوفی، ۳۷۸
کمترین مربعات حل، ۴۹۱	زوج‌های مرتب، ۱۹۷
کوشی، ۳۳۸	زیرفضای $W$ عمود، ۳۱۹
کهاد اصلی، ۳۴۷	ستون، ۴

میداً، ۱۹۷	کیلی، ۳۳۸
مبنای استاندارد، ۲۳۲	کیلی-هامیلتون، ۳۳۷، ۳۷۵
متغیر پیشرو، ۲۳	گاوس - جردن، ۱۹
متناهی، ۲۹۷	گاوسی، ۲۹
متوازی الاضلاع نیروها، ۲۰۳	گرام-اشمیت، ۳۱۷، ۳۲۸-۳۲۶، ۳۹۰
مجموعه متعامد، ۳۱۰	گرشگورین، ۳۳۶، ۳۵۹، ۳۶۲
مختصات همگن، ۲۴۰	گوس-جردن، ۴۱۸
مساوی، ۱۹۸	لاگرانژ، ۳۳۸
معادله خطی، ۱	ماتریس، ۴
معادله‌ی خطی، ۲	ماتریس افزوده، ۶
معادله‌ی مشخصه، ۳۳۸	ماتریس شبه معکوس، ۵۰۸
مفسر، ۳۴۱	ماتریس استاندارد، ۲۳۲
مقادیر مشخصه، ۳۳۸	ماتریس الحاقی، ۱۸۴
منتظم، ۳۷۸	ماتریس بالا مثلثی، ۱۷۹
منحنی یا خط کمترین مربعات، ۴۹۴	ماتریس تصویری، ۵۰۲
منفرد، ۱۷۱	ماتریس ستونی، ۵
موریس کلاین، ۳۳۸	ماتریس سطری، ۵
مؤلفه‌های متناظر، ۱۹۸	ماتریس شبه معکوس، ۵۰۱، ۵۰۷
میدان جبری، ۴۸۷	ماتریس ضرایب، ۶
نامساوی کوشی - شوارتز، ۲۱۰	ماتریس متعامد، ۳۲۴
نامنفرد، ۱۷۱	ماتریس مربعی، ۵
نرمال سازی، ۲۰۹	ماتریس مربعی، پایین مثلثی، ۱۷۹
نقاط پایه، ۳۹	ماتریس همانی، ۳۲۵
نگاشت آفینی، ۲۳۹	ماتریس همساز، ۱۸۴
نگاشت ماتریسی، ۲۲۴	ماتریس یکانی، ۳۲۹
نیروی برآیند، ۲۰۳	مارکوف، ۳۷۷، ۳۷۸
نیل بوهر، ۴۷۴	ماکس پلانک، ۴۷۴

وارون، ۲۳۷  
ورنر هایزنبرگ، ۴۷۴  
هرمان مینکوفسکی، ۴۷۶  
هم خط، ۳۳۲  
هم دامنه، ۲۲۱  
همگن، ۲۷  
هندسه مینکوفسکی، ۴۷۶  
هندسه های ناقلیدسی، ۴۷۲  
هندسی اقلیدسی، ۲۱۸  
یک ذره نوری، ۴۸۰  
یک ریختی، ۴۳۳  
یکه متعامد، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۱۳، ۳۱۷-۳۱۵،  
۳۲۱